



**Universitat de les
Illes Balears**

Facultat de Ciències

Memòria del Treball de Fi de Grau

Ones magnetohidrodinàmiques (MHD) en plasmes freds no isoterms.

M^a Teresa Mateu Lucena

Grau de Física

Any acadèmic 2017-18

Treball tutelat per José Luis Ballester Mortes.
Departament de Física.

S'autoritza la Universitat a incloure aquest treball en el Repositori Institucional per a la seva consulta en accés obert i difusió en línia, amb finalitats exclusivament acadèmiques i d'investigació	Autor		Tutor	
	Sí	No	Sí	No
	X		X	

Paraules clau del treball:

Plasma, magnetohidrodinàmica (MHD), ionització, escalfament, refredament, ones d'Alfvén, esmorteïment.

Índex

1	Introducció	4
1.1	Plasma	4
1.2	El Sol	4
1.3	Equacions de fluid únic	6
1.3.1	Equació de continuïtat	6
1.3.2	Equació d'estat d'un gas ideal	6
1.3.3	Equació d'energia	7
1.3.4	Equació d'inducció	8
1.3.5	Equació de moment	9
1.4	Objectiu del treball	9
1.5	Configuració inicial	10
1.6	Equació de Saha	11
1.7	Ones magnetohidrodinàmiques	12
1.8	Descripció del problema	12
2	Estudi del problema	14
2.1	Equacions per ones d'Alfvén lineals	14
2.2	Relació de dispersió	15
2.3	Solució WKB	16
2.4	Solucions numèriques	17
2.5	Comparacions	23
3	Conclusions	27
4	Referències	28
A	Annex I: Pertorbació de l'equació d'inducció	29
B	Annex II: Pertorbació de l'equació de moment	31

1 Introducció

1.1 Plasma

El 99% de la matèria de l'univers es troba en forma de plasma que és considerat un estat de la matèria al igual que el gas, líquid i sòlid.

El plasma és un fluid format per alguns àtoms i molècules neutres, tot i que predominen els electrons i ions que interaccionen freqüentment. Aquest fluid és elèctricament neutre i al tenir partícules carregades pot suportar corrents elèctriques i reaccionar amb camps elèctric i magnètics.

Per una banda, en un gas ionitzat hi intervenen forces coulombianes, febles i de llarg abast. Pel contrari, en un gas neutre les forces són fortes però de curt abast. D'aquesta manera en un plasma, la interacció coulombiana predomina sobre de les col·lisions binàries de curt abast.

Finalment, les fluctuacions tèrmiques poden desequilibrar la neutralitat de càrrega i crear camps elèctrics. Aquests camps provoquen una acceleració a les partícules i les càrregues tornen al seu equilibri. Aquesta situació s'aconsegueix a una escala de longitud donada per la longitud de Debye, λ_D .

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{e^2 n}}$$

Sent ϵ_0 la permeabilitat elèctrica, k_B la constant de Boltzmann, e la càrrega de l'electró i finalment n la densitat numèrica de les partícules.

1.2 El Sol

El Sol està format per plasma. Al llarg de la història el Sol ha estat l'estel més estudiat, de fet amb aquest estudi s'ha intentat entendre el comportament de la resta d'estrelles. Aproximadament al 350 a.C. els deixebles d'Aristòtil van observar per primera vegada taques solars a la seva superfície, però foren oblidades fins al segle XVI quan Galileu, entre d'altres, mitjançant telescopis també les va observar. A partir d'aquest moment es va deixar de pensar amb el Sol com un cos homogeni i sense defectes. Durant el segle XX la resolució dels telescopis va anar millorant i les observacions van tornar més precises. Avui dia ja sabem que el camp magnètic del Sol té un paper molt important essent responsable de molts dels fenòmens que observam, de fet el camp magnètic és primordial a qualsevol àmbit estel·lar.

El Sol és un estel de seqüència principal i el seu tipus espectral és G2 V. La composició original del Sol ve donada per la fracció en massa de l'hidrogen que és $X = 0.74$, la de l'heli que és $Y = 0.24$ i finalment la dels metalls que és $Z = 0.02$. D'aquesta manera es pot concloure que és una estrella de Població I pel fet de tenir un percentatge elevat d'elements pesats, és a dir, es va formar gràcies a les restes d'altres estrelles.

Les seves propietats físiques venen donades per la *Taula 1*.

Estructura interna del Sol

L'interior del Sol es pot dividir en tres regions anomenades *nucli*, *zona radiativa* i *zona convectiva*. Però, només som capaços d'observar amb detall la seva superfície.

El *nucli* té una temperatura d'uns 15×10^6 K i una densitat de 1.6×10^5 kg m⁻³, aquestes quantitats són prou elevades perquè es duguin a terme les reaccions termonuclears. En aquesta zona es produeix energia mitjançant fusió nuclear, els nuclis d'hidrogen col·lisionen i quatre nuclis d'aquests es fusionen per formar heli. Aquesta zona abasta des del centre de l'estrella fins a un radi de $0.25R_\odot$.

Estat	$4.5 \times 10^9 \text{ anys}$
Massa, M_{\odot}	$1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Radi, R_{\odot}	$6.96 \times 10^8 \text{ m}$
Densitat mitja	$1.4 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
Distància a la Terra	$1UA = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$
Gravetat superficial, g_{\odot}	274 m s^{-2}
Velocitat d'escapament	618 km s^{-1}
Lluminositat, L_{\odot}	$3.86 \times 10^{26} \text{ W}$
Període de rotació equatorial	26 dies
Temperatura efectiva	5785 K

Taula 1: Propietats físiques globals del Sol.[1]

L'energia creada al *nucli* és transferida a l'exterior mitjançant la *zona radiativa*. Els fotons són absorbits i re-emesos moltes vegades i tarden de l'ordre de 10^5 anys per arribar a la superfície ja que l'interior de Sol és molt opac. La temperatura en aquesta zona està entre 2 i 7 milions de graus, la densitat sol estar d'entre 200 i 20000 kg m^{-3} i es troba compresa entre un radi de $0.25R_{\odot}$ i $0.7R_{\odot}$.

A la *zona convectiva* es duen a terme moviments convectius a causa del gran gradient de temperatura que sofreix el material. És impossible mantenir un equilibri estàtic i això provoca inestabilitats convectives creant granulació. En aquesta zona també té lloc la generació del camp magnètic per la convecció i rotació, procés que es coneix com la *dinamo solar*. La temperatura a la superfície s'aproxima als 5800 K i la densitat $2 \times 10^{-4} \text{ kg m}^{-3}$.

Estructura de l'atmosfera solar

A l'atmosfera solar visible també es poden diferenciar tres zones, la *fotosfera solar*, la *cromosfera* i la *corona*.

La *fotosfera* és la capa més baixa i té uns 300 km d'espessor. La seva temperatura ronda els 6000 i 4300 K , mentre que la densitat és aproximadament $10^{-4} \text{ kg m}^{-3}$. L'energia és transportada per radiació i convecció. És una zona on abunden els grànuls solars, els quals tenen un diàmetre d'entre 700 i 1500 km . Aquests es separen amb una distància d'uns 1800 km i tenen una vida mitja aproximada de 8 minuts. El camp magnètic a la fotosfera està format per diferents elements magnètics. Entre ells hi ha les taques solars creades per una gran concentració de flux magnètic d'uns 3000 G . Llavors també hi ha les "plages" que es troben al voltant de les cèl·lules supergranulars i es formen gràcies a fluxos petits de camp magnètic de l'ordre de 1000 o 2000 G . Finalment també contribueixen al camp magnètic d'aquesta zona les àrees unipolars situades a la base dels forats coronals.

Sobre la *fotosfera* es troba la *cromosfera*, la qual té una espessor de 2500 km i és més transparent perquè la densitat en aquest cas és menor i s'aproxima als $10^{-6} \text{ kg m}^{-3}$. Quasi tota l'energia és transportada per radiació i ones. També hi ha cèl·lules supergranulars però amb major diàmetre i una vida mitja més llarga. A les capes més altes de la cromosfera, l'hidrogen està pràcticament ionitzat, per altra banda la concentració de neutres és important a les capes més baixes.

Finalment, la *corona* és la part més fina la qual es troba completament ionitzada. Està a una temperatura d'entre uns 10^6 i $2 \times 10^6 \text{ K}$, per altra banda la seva densitat és aproximadament d'uns 10^{18} m^{-3} a radi solar. En aquesta zona es poden trobar estructures radials anomenades 'Coronal streamers', zones amb camp magnètic obert conegudes com forats coronals responsables del vent solar i també altres amb camp magnètic tancat com bucles coronals.

1.3 Equacions de fluid únic

El comportament macroscòpic d'un plasma en presència d'un camp magnètic pot ser descrit mitjançant les equacions de la magnetohidrodinàmica (MHD). L'aproximació de fluid únic es pot dur a terme quan el temps de col·lisió entre diferents espècies del plasma és més curt que l'escala de temps del fenomen estudiat. Les equacions de fluid únic venen donades per l'equació de continuïtat de massa, l'equació d'estat d'un gas ideal, la d'energia, la d'inducció i finalment l'equació del moment [2].

1.3.1 Equació de continuïtat

L'equació de continuïtat de massa ve donada per:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.1)$$

D'aquesta equació es pot concloure que la densitat augmenta si la massa flueix a una regió del seu voltant ($\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) < 0$). En cas contrari, la densitat disminueix si hi ha una divergència de la massa del flux.

1.3.2 Equació d'estat d'un gas ideal

La pressió del fluid ve descrita per l'equació d'estat. Suposant que el plasma es comporta com un gas ideal ve donada per:

$$P = \frac{R}{\tilde{\mu}} \rho T \quad (1.2)$$

La densitat del plasma (ρ) és la suma de les densitats dels electrons, ions i àtoms neutres.

$$\rho = \rho_e + \rho_i + \rho_N = m_e n_e + m_i n_i + m_N n_N \quad (1.3)$$

on n_j i m_j són les corresponents densitats numèriques i masses de les partícules.

Per altra banda, R és la constant dels gasos i $\tilde{\mu}$ la massa mitja per partícula lliure en unitats de massa de l'hidrogen, també coneguda com a pes molecular mig. El valor de $\tilde{\mu}$ depèn de la composició química del fluid:

$$\frac{1}{\tilde{\mu} H} = \frac{\sum_j N_j}{\sum_j N_j m_j} = \frac{\sum_j X_j}{\sum_j A_j H}$$

on X_j són les fraccions en massa d'hidrogen (X), heli (Y) i dels metalls (Z) i $A_j = m_j/H$ sent $H = 1$ u.a.m.

El pes molecular mig també es pot escriure en funció de la densitat relativa d'ions ($\xi_i = \rho_i/\rho$):

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{1 + \xi_i} \quad (1.4)$$

En el cas d'un plasma totalment ionitzat, $\xi_i = 1$ i $\tilde{\mu} = 0.5$, en canvi per un gas neutre $\xi_i = 0$ i $\tilde{\mu} = 1$.

1.3.3 Equació d'energia

L'equació d'energia ve descrita per:

$$\rho \frac{De}{Dt} - \frac{P}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\mathcal{L} \quad (1.5)$$

La funció de pèrdua d'energia \mathcal{L} ve donada per l'efecte de totes les font i embornals d'energia. Per altra banda l'energia interna per unitat de massa, e , està definida com [3]:

$$e = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{\chi_i}{H} \xi_i(t) \quad (1.6)$$

on γ és el coeficient adiabàtic i χ_i el potencial d'ionització.

La funció de pèrdua d'energia es pot escriure com la quantitat l'energia perduda menys l'energia guanyada.

$$\mathcal{L} = \vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \rho L - \vec{j} \cdot \vec{E}^* - Q_v \quad (1.7)$$

\vec{q} és el flux de calor produït per la conducció de les partícules. L descriu el balanç entre les pèrdues radiatives $C(T, \rho)$ i l'escalfament $\mathcal{H}(T, \rho)$. Per altra banda, $\vec{j} \cdot \vec{E}^*$ és el terme corresponent a l'efecte Joule i finalment Q_v a l'escalfament per viscositat.

El flux de calor produït per la conducció de les partícules ve descrit pel tensor de conducció tèrmica, \vec{k} tal que:

$$\vec{q} = -\vec{k} \vec{\nabla} T \quad (1.8)$$

Com ja s'ha comentat, la funció radiació-escalfament (L), ve donada per:

$$L(T, \rho) = C(T, \rho) - \mathcal{H}(T, \rho) \quad (1.9)$$

Assumint que el plasma és òpticament prim, l'expressió de pèrdua radiativa per un plasma parcialment ionitzat es pot aproximar mitjançant una funció parametrizada depenent de la temperatura i la densitat [4]:

$$C(T, \rho) = \rho \chi^* T^\alpha$$

Per altra banda, l'expressió de l'escalfament també s'aproxima mitjançant una parametrizació donada per [5]:

$$\mathcal{H}(T, \rho) = \tilde{h} \rho^\alpha T^b$$

on \tilde{h} és una constant donada per la situació d'equilibri.

Així doncs, la funció radiació-escalfament (1.9) pren la forma:

$$L = \rho \chi^* T^\alpha - \tilde{h} \rho^\alpha T^b \quad (1.10)$$

En quant a l'expressió de l'efecte Joule, per un plasma parcialment ionitzat es pot aproximar per:

$$\vec{j} \cdot \vec{E}^* \approx \frac{1}{\sigma} |\vec{j}_\parallel|^2 + \frac{1}{\sigma_c} |\vec{j}_\perp|^2 \quad (1.11)$$

on σ i σ_c són les conductivitats de Ohm i Cowling, respectivament.

Per acabar, l'escalfament viscos ve donat en funció del tensor de viscositat (Π_{mn}):

$$Q_v = \sum_{m,n} \Pi_{mn} \frac{\partial v_m}{\partial x_n} \quad (1.12)$$

1.3.4 Equació d'inducció

La forma general de l'equació d'inducció per un plasma parcialment ionitzat ve donada per:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = & \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) - \vec{\nabla} \times (\eta \vec{\nabla} \times \vec{B}) - \vec{\nabla} \times [\eta_H (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}] \\ & + \vec{\nabla} \times [\eta_A [(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}] \times \vec{B}] - \vec{\nabla} \times [\tilde{\Xi} \vec{G} \times \vec{B}] \end{aligned} \quad (1.13)$$

sent η la resistivitat de Ohm:

$$\eta = 5.2 \times 10^7 T^{-3/2} (30.5 - 1.15 \log(n_e) + 3.45 \log(T)) \quad (1.14)$$

η_H la difusivitat magnètica de Hall:

$$\eta_H = \frac{1}{\mu_o e n_e} \left(1 - 2 \xi_N \frac{\alpha_{en}}{\alpha_n} \right) \quad (1.15)$$

$\tilde{\Xi}$ el coeficient de corrent diamagnètic:

$$\tilde{\Xi} = \frac{\xi_N}{\alpha_n} \quad (1.16)$$

i η_A la difusió magnètica ambipolar que es pot expressar en termes de la resistivitat de Cowling (η_c) i la de Ohm (η):

$$\eta_A = \frac{\xi_N^2}{\tilde{\mu} \alpha_n} = \frac{\eta_c - \eta}{|\vec{B}|^2} \quad (1.17)$$

on la resistivitat de Cowling està definida com:

$$\eta_c = \eta + \frac{\xi_N^2 B_o^2}{\mu_o \alpha_n} \quad (1.18)$$

sent α_n és el coeficient de fricció total dels neutres, que per un plasma d'hidrogen és:

$$\alpha_n = 0.5 (\xi_N \xi_i) \frac{\rho^2}{m_n} \sqrt{\frac{16 k_B T}{\pi m_i}} \Sigma_{iN}$$

on k_B és la constant de Boltzman i Σ_{iN} la secció eficaç de la col·lisió ions-neutres. Per altra banda, ξ_N és la densitat relativa de neutres donada per $\xi_N = 1 - \xi_i$.

Finalment, \vec{G} és la funció de pressió:

$$\vec{G} = \xi_N \vec{\nabla} (p_e + p_i) - \xi_i \vec{\nabla} p_n \quad (1.19)$$

1.3.5 Equació de moment

L'equació de moment d'una partícula j ve representada per la següent expressió:

$$\rho_j \frac{D\vec{v}_j}{Dt} = -\vec{\nabla} P_j + \vec{F}_{Lorentz} + \vec{F}_{gravitatoria} + \vec{F}_{viscosa} - \sum_{j' \neq j} \mathcal{R}_{jj'} \quad (1.20)$$

La força de Lorentz ve donada per:

$$\vec{F}_{Lorentz} = Z_j n_j e (\vec{E} + \vec{v}_j \times \vec{B}) \quad (1.21)$$

on Z_j val 1 pel cas dels ions, -1 pels electrons i zero pels neutres.

Per altra banda, la força gravitatòria es pot expressar com:

$$\vec{F}_{gravitatoria} = \rho_j \vec{g} \quad (1.22)$$

La viscosa ve donada en termes del tensor viscos (Π_j) per:

$$\vec{F}_{viscosa} = -\vec{\nabla} \cdot \Pi_j \quad (1.23)$$

I finalment $\mathcal{R}_{jj'}$ és el terme que expressa les col·lisions entre les partícules j i j' :

$$\mathcal{R}_{jj'} = \alpha_{jj'} (\vec{v}_j - \vec{v}_{j'}) \quad (1.24)$$

Sent $\alpha_{jj'}$ és el coeficient de fricció entre les partícules j i j' , descrit per $\alpha_{jj'} = n_j m_{jj'} v_{jj'}$ on $v_{jj'}$ és la freqüència de col·lisions i $m_{jj'}$ la massa reduïda.

D'aquesta manera, sumant les equacions per ions, electrons i neutres, l'equació de moment total d'un plasma parcialment ionitzat es redueix a:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} P + \vec{F}_{Lorentz} + \vec{F}_{gravitatoria} + \vec{F}_{viscosa} \quad (1.25)$$

ja que el terme de les col·lisions es cancel·la suposant col·lisions elàstiques.

La força de Lorentz també pot venir escrita en funció de la densitat de corrent:

$$\vec{F}_{Lorentz} = \vec{j} \times \vec{B} = \frac{1}{\tilde{\mu}} \left[(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - \frac{1}{2} \vec{\nabla} (|\vec{B}|^2) \right] \equiv \frac{1}{\tilde{\mu}} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - \vec{\nabla} p_m \quad (1.26)$$

sent p_m la pressió magnètica.

1.4 Objectiu del treball

L'objectiu del treball és estudiar el comportament temporal, en particular l'atenuació de les ones d'Alfvén causada per la difusió ambipolar, dins un plasma d'hidrogen en el que la temperatura varia amb el temps. El grau d'ionització del plasma, com mostra l'expressió (1.4), depèn de la densitat relativa d'ions que varia amb la temperatura a causa dels processos de ionització i recombinació. Així doncs, si la temperatura va variant amb el temps, $T(t)$, també ho farà el grau d'ionització, $\xi_i(t)$, i amb ell el pes molecular mig, $\tilde{\mu}(t)$, i la densitat numèrica d'electrons, $n_e(t)$. Aquesta dependència amb el temps produeix la variació en η_c . Finalment la pressió també serà una funció del temps, $P(t)$, ja que té una dependència amb $\tilde{\mu}$ i T donada per l'equació d'estat del gas ideal (1.2).

L'estudi es realitza sobre aquest tipus de plasmes perquè a l'atmosfera del Sol existeixen plasmes parcialment ionitzats tals com la cromosfera i les protuberàncies solars que estan sotmesos a processos d'escalfament i refredament. Per altra banda, considerant diferents funcions de radiació s'estudia el seu efecte sobre el perfil de temperatura durant els processos d'escalfament i refredament, que finalment es reflexa en l'esmoreïment de les ones.

1.5 Configuració inicial

Per l'estudi que es durà a terme s'assumeix un plasma d'hidrogen uniforme i infinit inicialment en repòs $\vec{v}_o = \vec{0}$, amb densitat constant, $\rho_o = cte$, dintre d'un camp magnètic també constant, $\vec{B}_o = B_o \hat{i}$ i amb temperatura i pressió dependents del temps, $T_o = T_o(t)$, $p_o = p_o(t)$.

Al tractar-se d'un plasma d'hidrogen la densitat numèrica d'electrons és idèntica a la dels ions, és a dir, $n_e = n_i$. Per altra banda la massa de les partícules neutres i dels ions és semblant i molt major a la dels electrons, $m_i \simeq m_N \gg m_e$. Finalment s'assumeix un fort acoblament tèrmic tal que $T_e = T_i = T_n = T$.

Amb aquestes condicions, a partir de l'**equació de moment** (1.25) amb $\vec{v}_o = \vec{0}$ s'obté:

$$\boxed{\vec{\nabla} p_o = 0} \quad (1.27)$$

Per altra banda, l'**equació d'estat** (1.2) serà dependent del temps a causa de la variació amb aquest de la temperatura $T_o(t)$ i del pes molecular mig $\tilde{\mu}(t)$.

$$\boxed{p_o(t) = \frac{\rho_o R T_o(t)}{\tilde{\mu}(t)}} \quad (1.28)$$

Finalment, al tenir densitat constant el segon terme de l'**equació d'energia** (1.5) es fa zero. La derivada substancial de l'energia interna, al no dependre de la posició queda com:

$$\frac{De}{Dt} = \frac{\partial e}{\partial t} + e \vec{\nabla} \vec{e} = 0$$

Realitzant la derivada d'aquesta respecte del temps utilitzant l'equació (1.6):

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{1}{(\gamma - 1)\rho} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\chi_i}{H} \frac{\partial \xi_i}{\partial t}$$

Fent el mateix per la pressió a partir de l'equació d'estat (1.2):

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \rho R \left[\frac{1}{\tilde{\mu}} \frac{\partial T_o}{\partial t} + T_o \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\tilde{\mu}} \right) \right]$$

D'aquesta manera, l'equació d'energia (1.5) pren la forma:

$$\rho_o \left[R \left(\frac{1}{\tilde{\mu}} \frac{\partial T_o}{\partial t} + T_o \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\tilde{\mu}} \right) \right) + \frac{2}{3} \frac{\chi_i}{H} \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \right] = -\frac{2}{3} \mathcal{L} \quad (1.29)$$

A la **funció de pèrdua d'energia** (1.7) no hi ha efecte Joule perquè $\vec{j} = \vec{0}$ i no consideram viscositat. La conducció tèrmica, al dependre del gradient espacial de la temperatura, es fa zero. Per tant:

$$\mathcal{L} = \rho^2 \chi^* T^\alpha - \tilde{h} \rho^{\alpha+1} T^b \quad (1.30)$$

on la constant \tilde{h} que ve determinada per la condició d'equilibri $\mathcal{L} = 0$:

$$\tilde{h} = \frac{\chi^* T^{\alpha-b}}{\rho^{\alpha-1}} \quad (1.31)$$

Els paràmetres a i b són igual a zero ja que l'escalfament es realitzarà a volum constant.

D'aquesta manera l'equació d'energia (1.5) es pot escriure:

$$\rho_o R \left[\frac{1}{\tilde{\mu}(t)} \frac{\partial T_o}{\partial t} + T_o(t) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\tilde{\mu}} \right) \right] + \frac{2}{3} \left[\frac{\chi}{H} \frac{\partial \xi_i(t)}{\partial t} + \rho^2 \chi^* T_o(t)^\alpha - \tilde{h} \rho_o \right] = 0 \quad (1.32)$$

Finalment, a l'**equació d'inducció** (1.13) únicament s'han considerat els termes d'advecció, resistivitat d'Ohm i ambipolar.

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) - \vec{\nabla} \times (\eta \vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{\nabla} \times \left[\eta_A [(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}] \times \vec{B} \right] \quad (1.33)$$

1.6 Equació de Saha

La relació entre la temperatura i la ionització d'un plasma ve descrita per l'equació de Saha [6]:

$$\frac{n_i^2}{n_N} = \left(\frac{2\pi m_e k_B}{h^2} \right)^{3/2} T^{3/2} e^{-\frac{\chi_i}{k_B T}} \quad (1.34)$$

sent h la constant de Planck, k_B la constant de Boltzmann i χ_i el potencial d'ionització.

La densitat relativa d'ions ve relacionada amb la densitat numèrica d'ions per:

$$n_i = \frac{\rho \xi_i}{m_i}$$

De forma anàloga amb la densitat relativa de neutres ξ_N s'obté:

$$\xi_N = \frac{\rho_N}{\rho} = \frac{n_N m_N}{\rho} \rightarrow n_N = \frac{\rho \xi_N}{m_N}$$

Reescriuint l'equació (1.34) amb les relacions obtingudes s'arriba a:

$$\frac{n_i^2}{n_N} = \frac{\xi_i^2}{\xi_N} \frac{\rho}{m_i} \rightarrow \frac{\xi_i^2}{\xi_N} = \frac{m_i}{\rho} \left(\frac{2\pi m_e k_B}{h^2} \right)^{3/2} T^{3/2} e^{-\frac{\chi_i}{k_B T}}$$

Utilitzant la definició de la densitat relativa de neutres ($\xi_N = 1 - \xi_i$) s'obté una expressió per ξ_i .

$$\xi_i = \frac{1}{2} M(T) \left(\sqrt{1 + \frac{4}{M(T)}} - 1 \right)$$

definint $M(T)$ com:

$$M(T) \equiv \frac{m_i}{\rho} \left(\frac{2\pi m_e k_B}{h^2} \right)^{3/2} T^{3/2} e^{-\frac{\chi_i}{k_B T}}$$

Així doncs, ξ_N i també $\tilde{\mu}$ calculada mitjançant la relació (1.4) venen descrites per:

$$\xi_N = 1 - \frac{1}{2} M(T) \left(\sqrt{1 + \frac{4}{M(T)}} - 1 \right)$$

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} M(T) \left(\sqrt{1 + \frac{4}{M(T)}} - 1 \right)}$$

1.7 Ones magnetohidrodinàmiques

En un plasma magnetitzat com el de l'atmosfera solar, i tenint en compte únicament la tensió, la pressió magnètica i la pressió del gas, es consideren tres tipus d'ones: les magnetoacústiques (ràpides i lentes) i Alfvén. Les relacions de dispersió per aquestes ones en un plasma infinit i uniforme es poden trobar a partir de la linealització de les equacions MHD i assumint un anàlisi de Fourier en ones planes.

Ones d'Alfvén

Aquestes ones no estan relacionades amb el canvi de la densitat, la temperatura o en la pressió. La tensió magnètica permet que aquestes es propaguin de manera no dispersiva a través de les línies de camp amb una velocitat de fase coneguda com la velocitat d'Alfvén, V_A . La seva relació de dispersió ve donada per:

$$w = k_x V_A \cos \theta \quad (1.35)$$

Sent k_x el nombre d'ona, θ l'angle entre \vec{k} i \vec{B} i finalment $V_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}}$.

Ones magnetoacústiques

La combinació del gradient de pressió i la força de Lorentz permet que les ones magnetoacústiques es propaguin. La seva relació de dispersió ve descrita per:

$$w^4 - (V_A^2 + c_s^2)^2 k^2 w^2 + V_A^2 c_s^2 k^4 \cos^2 \theta = 0 \quad (1.36)$$

on $k^2 = k_x^2 + k_z^2$, $\theta = \arctan(k_z/k_x)$ i c_s és la velocitat de so adiabàtica, $c_s = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}$.

Resolent l'equació s'obté que la freqüència ve donada per:

$$w^2 = \frac{k^2}{2} \left[(V_A^2 + c_s^2) \pm \sqrt{(V_A^2 + c_s^2)^2 - 4V_A^2 c_s^2 \cos^2 \theta} \right] \quad (1.37)$$

En aquest cas w_-^2 correspon a les ones magnetoacústiques lentes, i w_+^2 a les ràpides.

Al ser menor la velocitat del so que la d'Alfvén ($c_s < V_A$) l'ona lenta és una ona acústica modificada pel camp magnètic i la ràpida és una ona magnètica propagada per la pressió magnètica. Per altra banda, si $c_s > V_A$ ocorre el contrari.

1.8 Descripció del problema

L'esquema següent per desenvolupar el treball és el següent:

1. *Obtenció del perfil de temperatura.* Es considera un plasma parcialment ionitzat que és escalfat de 4000 a 9000 K o refredat de 9000 a 4000 K. Per obtenir el perfil de pujada o baixada de la temperatura, $T(t)$, es resolen conjuntament les equacions d'energia (1.32) i de Saha (1.34). En cada cas, la constant d'escalfament (\tilde{h}) s'obté a partir de l'equació (1.30) suposant que l'equilibri, $\mathcal{L} = 0$, s'assoleix a la temperatura final. El procediment es repetirà per a cada funció de radiació considerada a la *Taula 2* [7].
2. *Dependència de la resistivitat de Cowling amb el temps.* A partir dels perfils de temperatura es calculen les quantitats necessàries per obtenir la resistivitat de Cowling, és a dir, $n_e(t)$, $\alpha_N(t)$ i $\xi_N(t)$.

<i>Parametrització</i>	χ^*	α
Hildner	1.76×10^{-13}	7.40
Chianti	2.02×10^{-15}	8.06
Klimchuk-Raymond (K-R)	3.91×10^9	2.00

Taula 2: Paràmetres del terme radiatiu en unitats MKS. [8]

3. *Linealització de les equacions MHD per obtenir l'equació diferencial per les ones d'Alfvén.* Consideram propagació paral·lela al camp magnètic.
4. *Resolució de l'equació diferencial per les ones d'Alfvén.* Es durà a terme una resolució analítica utilitzant l'aproximació WKB i una numèrica.

2 Estudi del problema

2.1 Equacions per ones d'Alfvén lineals

Per estudiar el moviment de les ones es considera una situació d'equilibri, es pertorba i finalment s'observa la seva propagació.

La pertorbació consisteix en realitzar un petit desplaçament de les variables físiques que es troben en equilibri. Aquest desplaçament tant es durà a terme en el camp magnètic ($\vec{B}_1 \ll \vec{B}_o$) com a la velocitat ($\vec{v}_1 \ll \vec{v}_o$). D'aquesta manera les pertorbacions venen donades per:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{B}_o + \vec{B}_1 \\ \vec{v} &= \vec{v}_o + \vec{v}_1\end{aligned}$$

Realitzant l'anàlisi de Fourier en espai i assumint propagació al llarg del camp magnètic, les pertorbacions es comporten com:

$$\begin{aligned}\vec{B}_1(x, t) &= \vec{B}_1(t)e^{ik_x x} \\ \vec{v}_1(x, t) &= \vec{v}_1(t)e^{ik_x x}\end{aligned}$$

Com ja s'ha esmentat, al dependre del temps la temperatura, la pressió i el pes molecular mig, l'amplitud de la pertorbació depèn del temps.

Cal dir que al tractar ones d'Alfvén les quals són transversals, tant \vec{B}_1 com \vec{v}_1 seran normals a la direcció de propagació la qual es considera paral·lela al camp magnètic \vec{B} , és a dir, $\vec{k} = (k_x, 0, 0)$.

Introduint aquestes quantitats pertorbades dins les equacions d'inducció (1.33) i de moment (1.25) suposant que no hi ha força gravitatoria ni viscosa, s'obtenen dues equacions diferencials acoblades. El desenvolupament es duu a terme als Annex I i II.

- L'equació d'inducció linealitzada:

$$\frac{\partial B_{1y}}{\partial t} = ik_x B_o v_{1y}(t) - \eta_c(t) k_x^2 B_{1y}(t) \quad (2.1)$$

- L'equació de moment linealitzada:

$$\frac{\partial v_{1y}}{\partial t} = \frac{ik_x B_o}{\rho\mu} \cdot B_{1y} \quad (2.2)$$

A partir de l'equació (2.2) s'obté una expressió per $B_{1y}(t)$ la qual es pot derivar:

$$\begin{aligned}B_{1y}(t) &= \frac{\rho\tilde{\mu}(t)}{ik_x B_o} \frac{\partial v_{1y}}{\partial t} \\ \frac{\partial B_{1y}}{\partial t} &= \frac{\rho\tilde{\mu}(t)}{ik_x B_o} \frac{\partial^2 v_{1y}}{\partial t^2}\end{aligned} \quad (2.3)$$

Introduint ambdues expressions a l'equació d'inducció linealitzada (2.1) s'arriba a una equació diferencial per la velocitat:

$$\boxed{\frac{\partial^2 v_{1y}}{\partial t^2} + k_x^2 \eta_c(t) \frac{\partial v_{1y}}{\partial t} + \frac{k_x^2 B_o^2}{\rho\mu_o} v_{1y}(t) = 0} \quad (2.4)$$

Resolent aquesta equació es podrà deduir com és l'esmoreïment, causat per l'efecte de la resistivitat de Cowling, de les ones d'Alfvén que es propaguen en aquest medi.

2.2 Relació de dispersió

Abans de resoldre l'equació diferencial, s'analitzarà la relació de dispersió pel cas de temperatura constant. Estudiant aquesta equació es pot tenir una idea del comportament de les ones d'Alfvén abans de realitzar tots els càlculs.

Partim de l'equació diferencial per la velocitat obtinguda a l'apartat anterior i s'assumint que η_c és constant tenim:

$$v_y'' + k_x^2 \eta_c v_y' + V_A^2 k_x^2 v_y = 0 \quad (2.5)$$

Es realitza un anàlisi de Fourier en el temps tal com:

$$v_y(t) = V_{yo} e^{i\omega t}$$

Les seves respectives derivades prenen la forma:

$$v_y'(t) = i\omega V_{yo} e^{i\omega t}$$

$$v_y''(t) = -\omega^2 V_{yo} e^{i\omega t}$$

Finalment, introduint aquestes expressions dins l'equació diferencial (2.5) s'arriba a una relació de dispersió quadràtica en w :

$$w^2 - i\eta_c k_x^2 w - V_A^2 k_x^2 = 0$$

que té com a solució:

$$w = w_r + i w_i = \frac{1}{2} i\eta_c k_x^2 \pm \frac{k_x}{2} \sqrt{4V_A^2 - \eta_c^2}$$

A partir de la part real (w_r) es pot deduir quin serà el període de l'oscil·lació i amb la part imaginària (w_i) s'intueix l'esmoreïment de la ona.

D'aquesta manera el període serà de la forma:

$$P = \frac{2\pi}{w_r} = \frac{4\pi}{\sqrt{4k_x^2 V_A^2 - k_x^4 \eta_c^2}} \quad (2.6)$$

Per altra banda, el temps d'esmoreïment (τ_D) és:

$$\tau_D = \frac{1}{w_i} = \frac{2}{\eta_c k_x^2} \quad (2.7)$$

Finalment la velocitat vendrà donada per una ona esmoreïda temporalment:

$$v_y(x, t) = v_{yo} e^{i\omega t} e^{ik_x x} = v_{yo} e^{-i\omega_i t} e^{(i\omega_r t + ik_x x)}$$

2.3 Solució WKB

Per poder resoldre analíticament l'equació diferencial (2.4) s'usarà l'aproximació WKB [9]. Aquest mètode serveix per trobar solucions aproximades d'equacions diferencials lineals amb coeficients petits.

Una de les condicions necessàries per poder realitzar l'aproximació és que $P/\tau \ll 1$, on P és el període de les ones d'Alfvén i τ és el temps de escalfament o refredament. Així doncs, la solució vendrà donada per la forma $v_y(t') \sim A(t')e^{i\tau\phi(t')}$, definint t' com $t' = t/\tau$.

Realitzant el canvi de variable de t a t' , les derivades prenen la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} \frac{1}{\tau}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \frac{1}{\tau^2}$$

D'aquesta manera, l'equació diferencial (2.4) en funció de t' serà:

$$\frac{1}{\tau^2} \frac{\partial^2 v_y}{\partial t'^2} + \frac{\eta_c k_x^2}{\tau} \frac{\partial v_y}{\partial t'} + V_A^2 k_x^2 v_y = 0 \quad (2.8)$$

on les respectives derivades de la velocitat són:

$$\frac{\partial v_y}{\partial t'} = e^{i\tau\phi(t')} \left[\dot{A}(t') + i\tau A(t') \dot{\phi}(t') \right]$$

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial t'^2} = e^{i\tau\phi(t')} \left[2i\tau \dot{A}(t') \dot{\phi}(t') + A(t') \left(i\tau \dot{\phi}(t') \right)^2 + \ddot{A}(t') + i\tau A(t') \ddot{\phi}(t') \right]$$

Introduïnt les expressions dins l'equació diferencial (2.8) s'obté:

$$\frac{1}{\tau^2} \ddot{A}(t') + \frac{1}{\tau} \left[2i\dot{A}(t') \dot{\phi}(t') + iA(t') \ddot{\phi}(t') + \eta_c k_x^2 \dot{A}(t') \right] + (k_x V_A)^2 A(t') + i\eta_c k_x^2 A(t') \dot{\phi}(t') - A(t') \left(\dot{\phi}(t') \right)^2 = 0$$

sent $\dot{A}(t')$ la derivada temporal de $A(t')$.

Igualant a zero els termes de $\mathcal{O}(\tau^0)$ i $\mathcal{O}(\tau^{-1})$ s'arriba a un sistema d'equacions.

$$\begin{cases} \left(\dot{\phi}(t') \right)^2 + i\eta_c k_x^2 \dot{\phi}(t') + (k_x V_A)^2 = 0 & \mathcal{O}(\tau^0) \\ \dot{A}(t') \left[2i\dot{\phi}(t') + \eta_c k_x^2 \right] + iA(t') \ddot{\phi}(t') = 0 & \mathcal{O}(\tau^{-1}) \end{cases}$$

Així doncs, les expressions per $A(t')$ i $\phi(t')$ venen donades per:

$$\phi(t') = \frac{1}{2} \left[ik_x^2 \int \eta_c(t') dt' \pm \int \sqrt{4(k_x V_A)^2 - (\eta_c(t') k_x^2)^2} dt' \right] + C_1 \quad (2.9)$$

$$A(t') = C_2 \exp \left(- \int \frac{i\ddot{\phi}(t')}{2i\dot{\phi}(t') + k_x^2 \eta_c} dt' \right) \quad (2.10)$$

Plasma totalment ionitzat

Pel cas de plasma totalment ionitzat la resistivitat de Cowling, η_c , és zero. D'aquesta manera :

$$\left. \begin{aligned} \phi(t') &= \pm k_x V_A t' \\ A(t') &= C_2 \end{aligned} \right\}$$

L'ona d'Alfvén no és esmorteïda:

$$v_y(t) = C_2 e^{ik_x V_A t} = C_2 e^{i\omega t} \quad (2.11)$$

Així doncs, $v_y(x, t) = C_2 e^{i\omega t} e^{ik_x x}$.

Plasma parcialment ionitzat amb η_c constant

Per altra banda, si suposam que la difusió magnètica de Cowling és constant:

$$\left. \begin{aligned} \phi(t') &= \frac{1}{2} \left(ik_x^2 \eta_c \pm \sqrt{4k_x^2 V_A^2 - \eta_c^2 k_x^4} \right) \\ A(t') &= C_2 \end{aligned} \right\}$$

El que s'obté sí és una ona esmorteïda temporalment:

$$v_y(t) = C_2 \exp \left[-\frac{1}{2} k_x^2 \eta_c t \right] \exp \left[\pm \frac{i}{2} \sqrt{4(k_x V_A)^2 - (\eta_c k_x^2)^2} t \right] \quad (2.12)$$

Tal que:

$$v_y(x, t) = C_2 \exp \left[-\frac{1}{2} k_x^2 \eta_c t \right] \exp \left[\pm \frac{i}{2} \sqrt{4(k_x V_A)^2 - (\eta_c k_x^2)^2} t \right] \exp[ik_x x]$$

2.4 Solucions numèriques

L'equació diferencial (2.4) també es pot resoldre de manera numèrica. Aquesta resolució, feta amb el llenguatge simbòlic *mathematica*, es particularitzarà per un plasma d'hidrogen parcialment ionitzat amb una densitat constant de $\rho_o = 5 \times 10^{-11} \text{ kg/m}^3$ que es troba dins un camp magnètic $B_o = 10^{-3} \text{ T}$. El nombre d'ona per les ones d'Alfvén que es propaguen per aquest medi serà $k_x = 10^{-6.3} \text{ m}^{-1}$ i s'usarà que $v_y(0) = 1$ i $v_y'(0) = 0$ com a condicions inicials. L'estudi es durà a terme dins un rang de temperatures pel qual el plasma es troba en el límit de parcialment ionitzat (4000 - 9000 K). Per un plasma d'hidrogen a 4000 K, la densitat relativa d'ions és molt baixa, $\xi_i = 0.0004$ i per tant és quasi un plasma totalment neutre. En canvi, a 9000 K aquesta és $\xi_i = 0.9994$ que s'aproxima a un plasma totalment ionitzat.

Com ja s'ha comentat, s'utilitzaran diferents parametritzacions de la funció radiativa, $C(T, \rho) = \rho \chi^* T^\alpha$, donades a la *Taula 2*. A la *Figura 1* es representa el seu comportament a mesura que la temperatura canvia. A temperatures baixes les funcions radiatives per Chianti i Hildner tenen comportaments similars, en canvi per K-R és totalment diferent. A temperatures més altes les tres funcions parametritzades difereixen més.

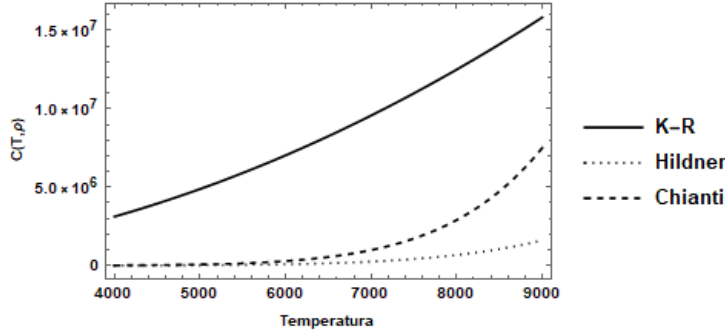


Figura 1: *Parametrizacions de les funcions radiatives en unitats MKS.*

Refredament

En primer lloc, s'estudiarà el comportament del plasma quan és refredat de 9000 a 4000 K, sent la temperatura final la que s'assoleix a l'equilibri. Quan un plasma parcialment ionitzat es refreda, els electrons i ions comencen a recombinar-se per tornar a formar àtoms, per tant, la densitat relativa dels neutres va augmentant.

Com ja s'ha mencionat, per poder resoldre l'equació diferencial (2.4) cal saber quin és el perfil de temperatura. Aquest perfil de temperatura ve donat per la resolució conjunta de l'equació d'energia (1.32) i de Saha (1.34). La seva dependència amb el temps és causada pel canvi amb el temps del pes molecular mig i del grau d'ionització. Així doncs, depenent de la parametrització de la funció radiativa, $T(t)$ ve donada per la *Figura 2*.

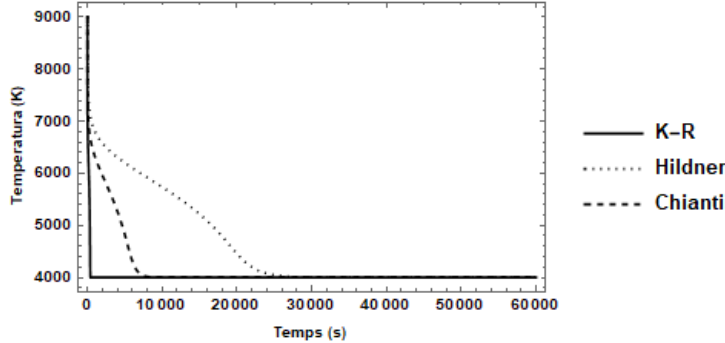


Figura 2: *Comparativa del perfil de temperatura pel refredament.*

El refredament és un procés lent ja que al recombinar-se els ions i electrons el plasma absorbeix energia i li costa més refredar-se. Inicialment les tres parametritzacions tenen el mateix perfil de temperatura, baixen ràpidament de 9000 a 7000 K. Una vegada arriben a aquesta temperatura, el perfil de K-R segueix refredant-se al mateix ritme, però tant el perfil de Chianti com el de Hildner s'alenteix. D'aquesta manera amb la parametrització de K-R s'arriba a la temperatura d'equilibri en molt pocs segons, amb la de Chianti es triga uns 9000 segons i finalment amb Hildner uns 25000.

Al refredar-se el plasma, la densitat relativa d'ions (ξ_i) disminueix i la dels neutres (ξ_N) augmenta. A partir de les equacions (1.14) i (1.18) veim que la resistivitat de Cowling, η_c , és proporcional a ξ_N . D'aquesta manera es pot concloure que el canvi en la temperatura és inversament proporcional a la resistivitat de Cowling com mostra la *Figura 3*. Al arribar a la

temperatura final, la quantitat d'ions és quasi nul·la, $\xi_i = 0.0004$, això provoca que ξ_N sigui pràcticament constant i per tant també ho sigui la resistivitat de Cowling. Com ja s'ha comentat en el perfil de temperatura, aquesta temperatura s'assoleix als pocs segons en el cas de K-R, a uns 9000 segons per Chianti i a 25000 segons a Hildner.

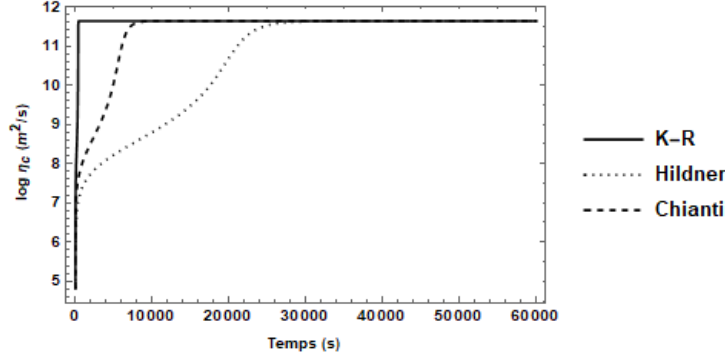


Figura 3: Comparativa del logaritme de la resistivitat de Cowling pel refredament.

Una vegada es sap la dependència de la resistivitat de Cowling amb el temps, es pot resoldre numèricament l'equació diferencial (2.4) que descriu el comportament de la pertorbació de la velocitat, $v_y(t)$. Aquesta solució vendrà donada per una ona esmorteïda amb un temps d'esmorteïment, τ_D , el qual és inversament proporcional a la resistivitat de Cowling. Així doncs al créixer la resistivitat de Cowling, τ_D decreix. Conseqüentment, la solució de l'equació diferencial ve donada a la *Figura 4*, la qual només té part real. Per la parametrització K-R la resistivitat creix molt ràpidament per tant τ_D no té temps de decreïxer i l'esmorteïment és molt ràpid com s'aprecia a la *Figura 4a*. Contràriament, per a Hildner, a la *Figura 4b*, l'ona esmorteïx més lentament ja que el refredament és molt més lent i per tant η_c creix molt a poc a poc. Pel cas de Chianti, a a *Figura 4c*, el comportament és intermig.

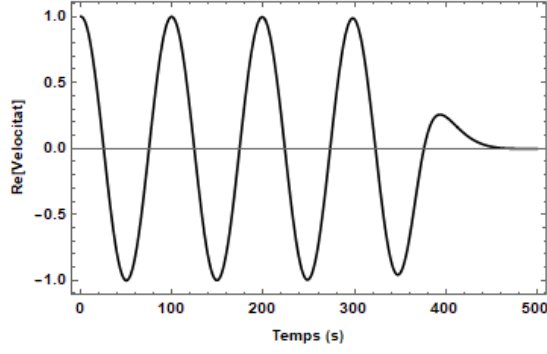
Finalment, la pertorbació en el camp magnètic ve donada per la relació (2.3). Aquesta solució està representada a la *Figura 5*. Veim que $B_y(t)$ té el mateix comportament que la velocitat $v_y(t)$. L'única diferència és que estan desfasades $\pi/2$ ja que $B_y(t)$ és imaginari.

Escalfament

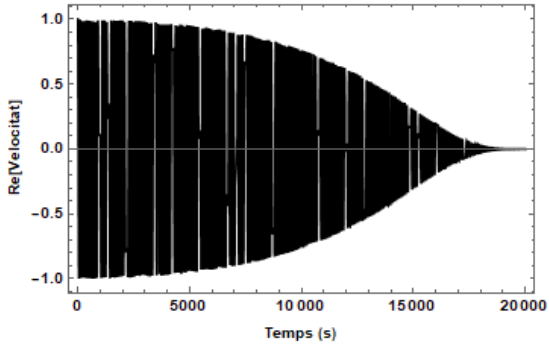
Tot seguit, l'escalfament del plasma es durà a terme de 4000 a 9000 K. Al augmentar la temperatura, les col·lisions entre les partícules creixen i comença a augmentar el grau d'ionització. En aquest cas, al arribar a la temperatura final el plasma està molt ionitzat tot i que encara hi ha uns quants àtoms neutres.

Per aquesta situació, el perfil de temperatura ve descrit per la *Figura 6*. Al contrari que en el refredament, el canvi de temperatura es duu a terme molt més ràpidament ja que per ionitzar-se es necessita energia però també en desprèn accelerant el procés. Els perfils per les parametritzacions de K-R i Chianti són molt similars, assoleixen la temperatura final en aproximadament 500 segons. Per altra banda, el de Hildner triga el doble.

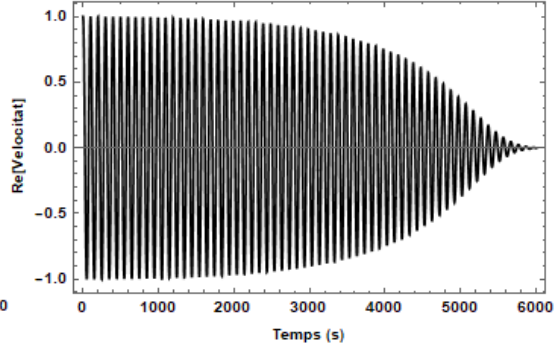
Al escalfar el plasma, la densitat relativa d'ions augmenta i amb ella disminueix la resistivitat de Cowling. A 9000 K, com ja s'ha dit, el plasma està quasi tot ionitzat sent $\xi_i = 0.9994$ i això provoca que η_c tenguí un valor proper a zero. A la *Figura 7* es veu que per la parametrització de Hildner, η_c decreix més lentament ja que l'escalfament triga més en produir-se. En canvi, pel cas de Chianti i K-R decreix més ràpidament. Al escalfar-se ràpidament, l'esmorteïment de l'ona serà molt lent ja que τ_D és inversament proporcional a η_c . Al disminuir la resistivitat de Cowling lentament provoca que el temps d'esmorteïment sigui llarg.



(a) K-R



(b) Hildner

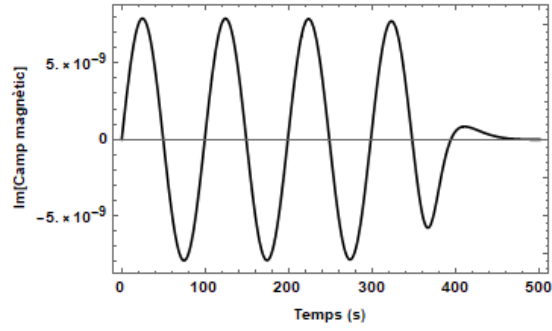


(c) Chianti

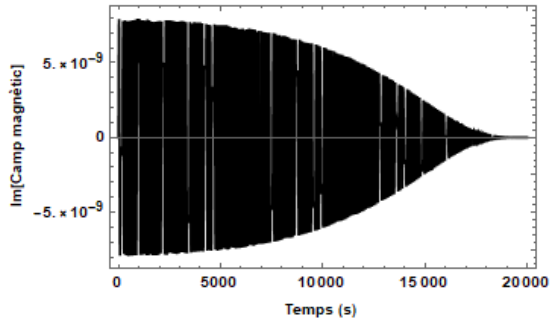
Figura 4: Comparativa del comportament de la pertorbació de la velocitat, $v_y(t)$, en funció del temps en el cas del refredament.

Finalment, la pertorbació en la velocitat ve representada per la Figura 8. Al tenir un esmor-teïment tant lent quasi no pot apreciar-se. Augmentant l'escala a la Figura 9 es veu com la solució per la parametrització de Hildner, Figura 9b, té un esmor-teïment major a les altres dues ja que η_c decreix més lentament i com a conseqüència τ_D creix.

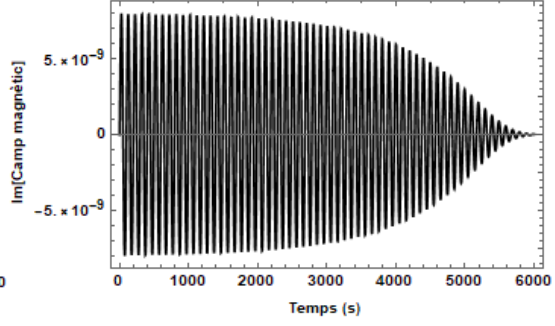
Com ja s'ha comentat pel cas del refredament, la solució pel camp magnètic, $B_y(t)$, és igual a la solució per $v_y(t)$ amb un desfase de $\pi/2$ al ser imaginari.



(a) K-R



(b) Hildner



(c) Chianti

Figura 5: Comparativa del comportament de la pertorbació del camp magnètic, $B_y(t)$, en funció del temps en el cas del refredament.

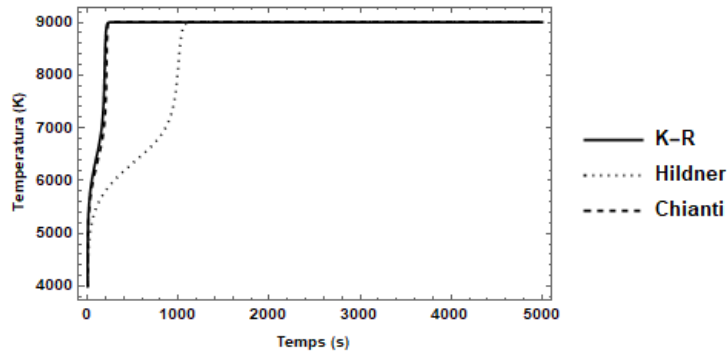


Figura 6: Comparativa del perfil de temperatura per l'escalfament.

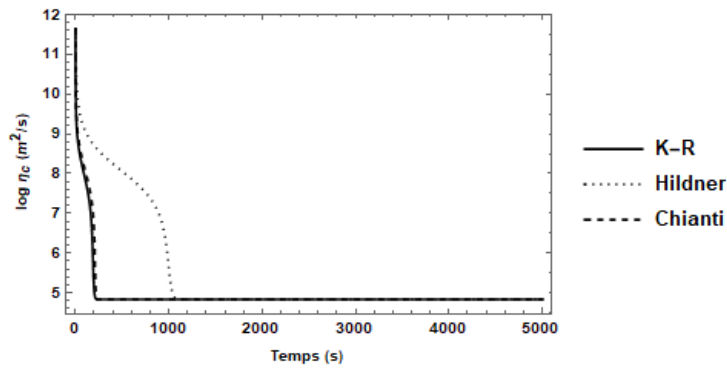
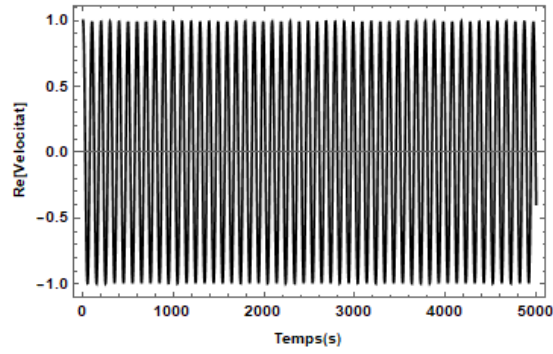
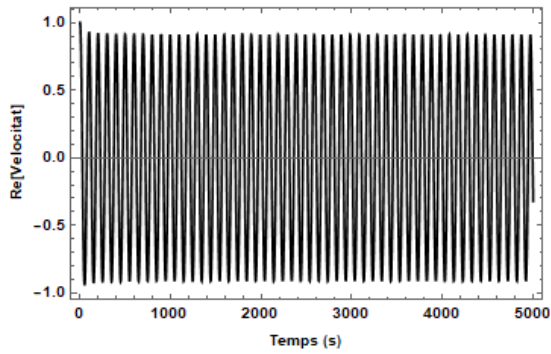


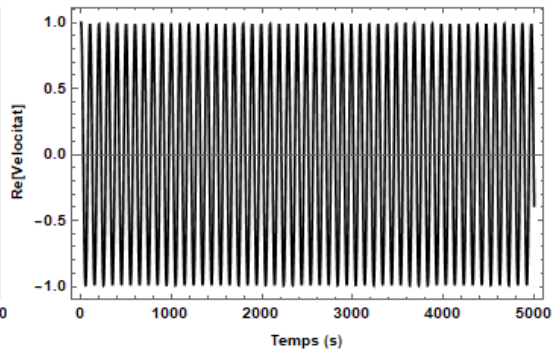
Figura 7: Comparativa del logaritme de la resistivitat de Cowling per l'escalfament.



(a) K-R

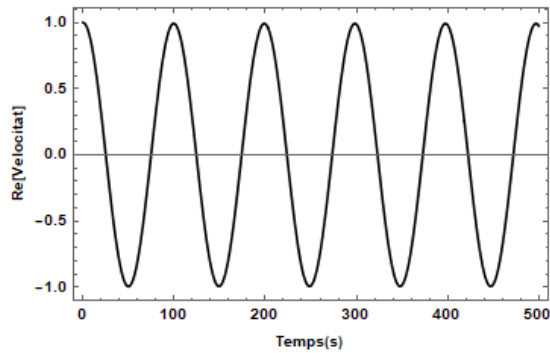


(b) Hildner

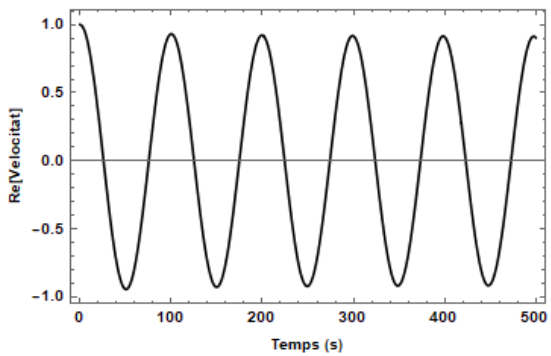


(c) Chianti

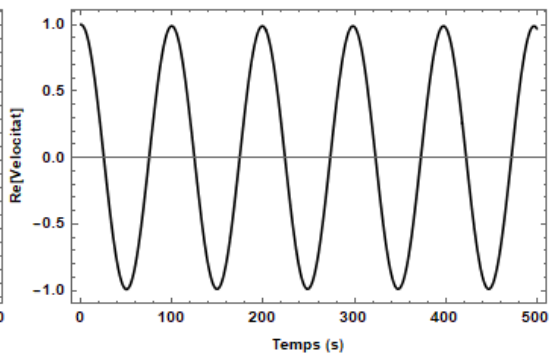
Figura 8: Comparativa del comportament de la pertorbació de la velocitat, $v_y(t)$, en funció del temps en el cas de l'escalfament.



(a) K-R



(b) Hildner



(c) Chianti

Figura 9: Augment de la comparativa del comportament de la pertorbació de la velocitat, $v_y(t)$, en funció del temps en el cas de l'escalfament.

2.5 Comparacions

Solució analítica

Com ja s'ha esmentat, l'equació diferencial (2.4) té una solució analítica derivada d'una aproximació WKB. Suposant una resistivitat de Cowling constant, l'ona ve donada per l'expressió (2.12). Pel cas en que η_c és dependent del temps es pot aproximar la solució a l'expressió (2.13).

$$v_y(t) = C_2 \exp \left[-\frac{1}{2} k_x^2 \eta_c(t) t \right] \exp \left[\pm \frac{i}{2} \sqrt{4 (k_x V_A)^2 - (\eta_c(t) k_x^2)^2} t \right] \quad (2.13)$$

Comparant aquesta aproximació amb la solució numèrica hi ha una gran similitud per a temps d'escalfament i refredament petits. A la *Figura 10* es representa aquesta superposició pel cas del refredament usant la parametrització K-R ja que l'esmoreïment s'aprecia més ràpidament.

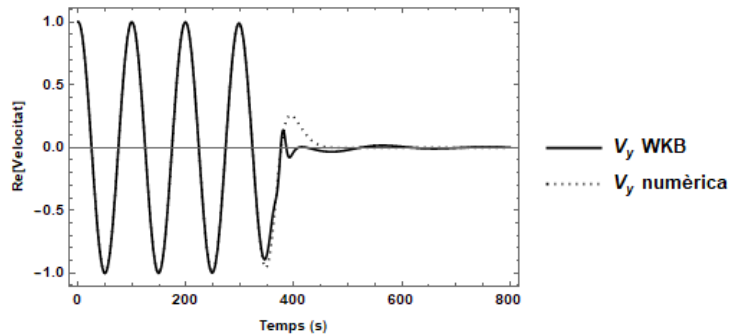


Figura 10: Solució numèrica i analítica de $v_y(t)$ en front del temps pel refredament en el cas de K-R.

Utilitzant l'expressió (2.13) es pot conèixer quin és el comportament del temps d'esmoreïment i que és bàsicament inversament proporcional a la resistivitat de Cowling. A la *Figura 11* es representa la relació obtinguda a l'equació (2.7).

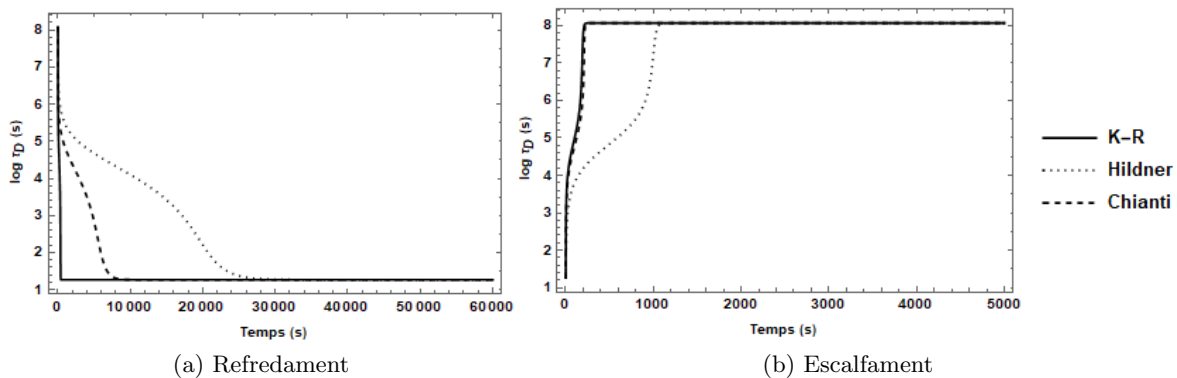


Figura 11: Comparativa del logaritme del temps d'esmoreïment.

Plasma totalment ionitzat

El problema s'ha resolt suposant un plasma d'hidrogen parcialment ionitzat. Moltes vegades els autors assumeixen que a aquestes temperatures el plasma està totalment ionitzat. En aquest cas, l'equació d'energia (1.32) pren la forma:

$$\rho_o R \left[\frac{1}{\tilde{\mu}} \frac{\partial T_o}{\partial t} \right] + \frac{2}{3} \left[\rho_o^2 \chi^* T_o(t)^\alpha - \tilde{h}\rho \right] = 0$$

D'aquesta equació diferencial, s'obté una funció esglaó pel perfil de temperatura. La temperatura no varia progressivament ni per l'escalfament ni pel refredament com es veu a la *Figura 12* per la parametrització de Chianti. L'equilibri s'assoleix ràpidament a causa de que l'energia va destinada totalment a canviar la temperatura del plasma ja que es considera ni recombinació ni ionització.

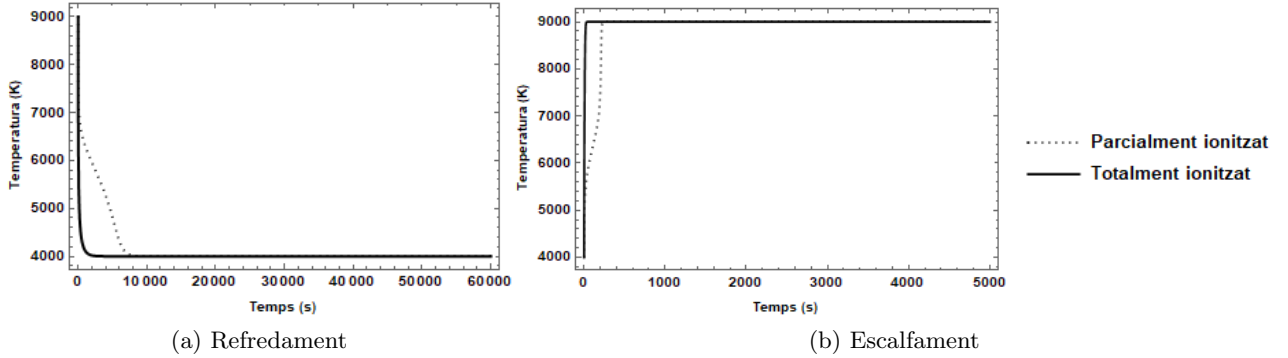


Figura 12: Comparativa del perfil de temperatura entre plasma totalment ionitzat i parcialment ionitzat per Chianti.

Per altra banda, al estar totalment ionitzar, la resistivitat de Cowling és zero. Això provoca que l'ona no sigui esmorteïda (2.11).

Diferents valors de ρ_o

La densitat del plasma apareix a l'equació d'energia (1.32) i de Saha (1.34), com a conseqüència, per diferents valors de ρ_o el perfil de temperatura, el grau d'ionització i la resistivitat de Cowling variaran.

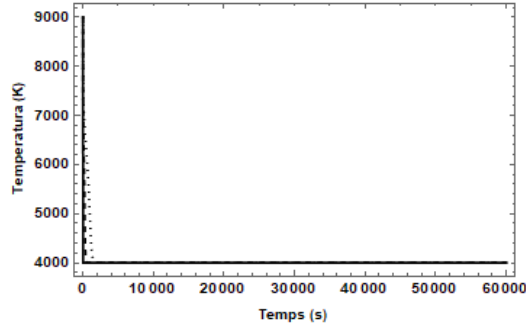
Al augmentar la densitat el que provoca és que el canvi de temperatura sigui més lent i per tant augmenta el temps d'esmoreïment. D'aquesta manera a major densitat, esmoreïment més llarg.

A la *Figura 13* s'han representat diferents perfils de temperatura del refredament per diversos valors de la densitat inicial. Com es veu, a menor densitat més lenta és la baixada de temperatura. Això provoca que el temps d'esmoreïment augmenti a menor densitat com es veu a la *Figura 14* pel cas de Hildner.

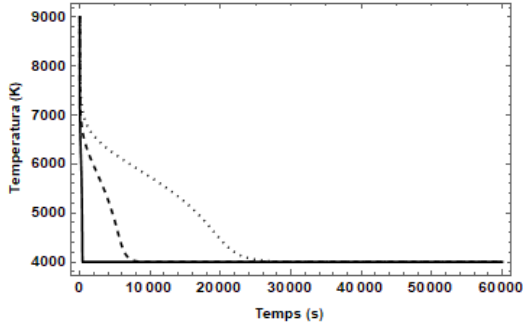
Diferents valors de k_x

Per acabar, el nombre d'ona k_x no té cap contribució al perfil de temperatura ja que l'equació d'energia (1.32) és independent d'aquesta variable. Però sí que apareix a l'equació diferencial (2.4). Així doncs, realitzant l'estudi de la seva relació de dispersió s'ha deduït que tant el període (P) com el temps d'esmoreïment (τ_D), donats per les relacions (2.6) i (2.7) respectivament, són inversament proporcionals al nombre d'ona. A major k_x menor P i τ i viceversa.

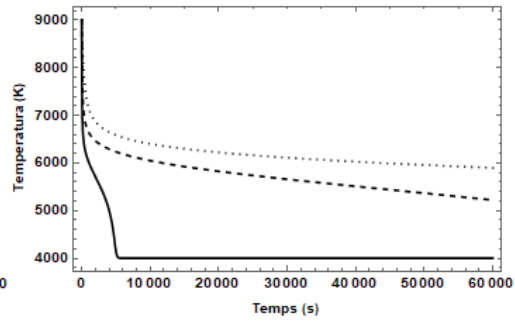
Realitzant una comparativa per dos valors diferents de k_x , pel refredament a la *Figura 15* i per l'escalfament a la *Figura 16*, s'observa el ja comentat. Pel cas de $k_x = 10^{-5.3} m^{-1}$ el període d'oscil·lació és més curt i l'esmoreïment més ràpid.



(a) $\rho_o = 5 \times 10^{-10} \text{ kg/m}^3$



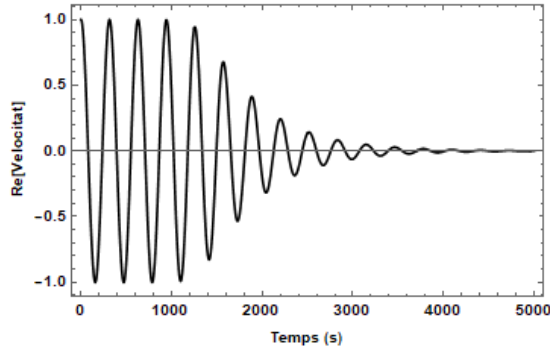
(b) $\rho_o = 5 \times 10^{-11} \text{ kg/m}^3$



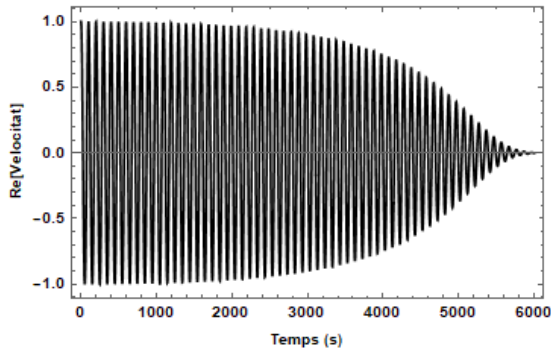
(c) $\rho_o = 5 \times 10^{-12} \text{ kg/m}^3$

— K-R
 Hildner
 - - - Chianti

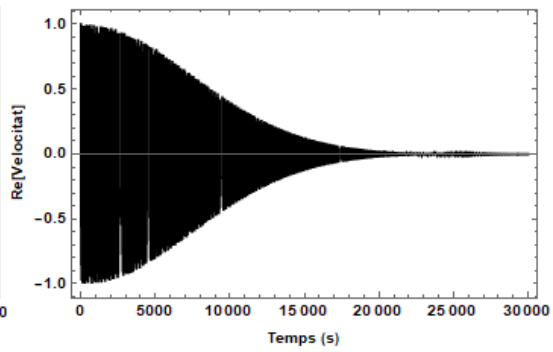
Figura 13: Perfil de temperatura per a diferents valors de ρ_o al refredament amb $k_x = 10^{-6.3} \text{ m}^{-1}$.



(a) $\rho_o = 5 \times 10^{-10} \text{ kg/m}^3$



(b) $\rho_o = 5 \times 10^{-11} \text{ kg/m}^3$



(c) $\rho_o = 5 \times 10^{-12} \text{ kg/m}^3$

Figura 14: Solucions de $v_y(t)$ per a diferents valors de ρ_o per Hildner al refredament amb $k_x = 10^{-6.3} \text{ m}^{-1}$.

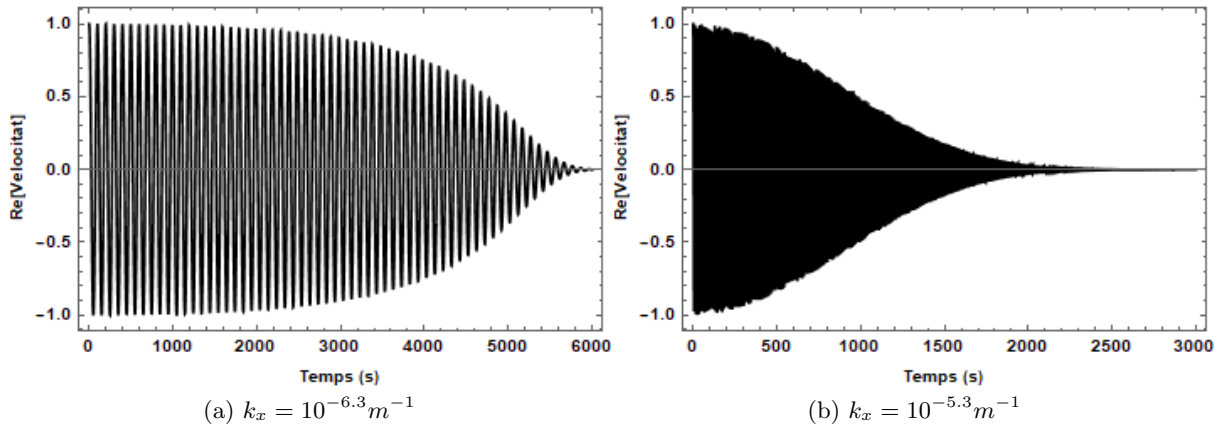


Figura 15: Solucions de $v_y(t)$ per a diferents valors de k_x per Chianti al refredament.

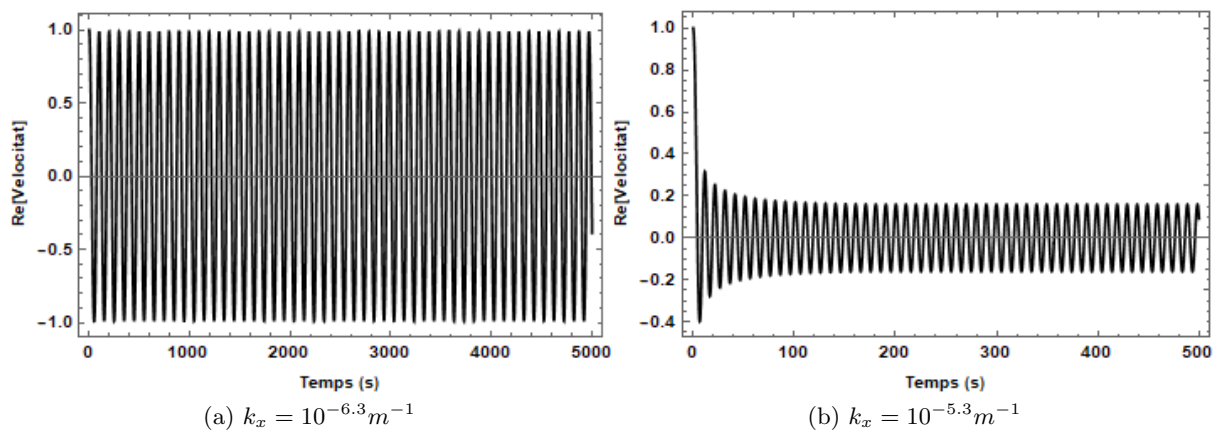


Figura 16: Solucions de $v_y(t)$ per a diferents valors de k_x per Chianti a l'escalfament.

3 Conclusions

En aquest treball s'ha estudiat el comportament temporal de l'ona d'Alfvén a un plasma d'hidrogen parcialment ionitzat quan la temperatura varia amb el temps. S'han considerat tres funcions de radiació diferents i s'han comparat els resultats obtinguts. En aquest cas, ni la densitat relativa d'ions ni la resistivitat de Cowling són valors constants sinó que aniran variant amb la temperatura. Entre 4000 i 9000 K el plasma es manté parcialment ionitzat, tot i que a $T = 4000$ K el plasma és quasi neutre ($\xi_i = 0.0004$) i per $T = 9000$ K el plasma és quasi totalment ionitzat ($\xi_i = 0.9994$). Al refredar-se, els ions i electrons es recombinen tornant a formar àtoms, provocant així que el canvi en la temperatura sigui lent ja que part de l'energia alliberada a la recombinació va al plasma dificultant el refredament. D'aquesta manera, a menor temperatura, més àtoms neutres i per tant la resistivitat de Cowling augmenta i el temps d'esmoreïment disminueix. El ritme amb el que això ocorre depèn de la rapidesa en el canvi de temperatura. A major rapidesa en el refredament, més ràpid augmenta η_c i més ràpid disminueix τ_D . Per això a la parametrització de K-R l'ona esmoreïx en pocs segons i en el cas de Hildner triga més. Contràriament, per l'escalfament els àtoms s'ionitzen augmentant la densitat relativa dels ions. El ritme del canvi en la temperatura és més ràpid en aquest cas ja que al ionitzar-se els àtoms es desprèn energia i es contribueix a l'escalfament. Gràcies a aquest procés, la resistivitat de Cowling disminueix i conseqüentment, el temps d'esmoreïment augmenta alentint la disminució de l'amplitud de l'ona. Però, a major temps d'escalfament, més temps triga en disminuir la resistivitat de Cowling i en augmentar el ritme d'esmoreïment, per això a Hildner es pot apreciar un poc més aquest fenomen.

Altrament, l'esmoreïment no canvia només al augmentar o disminuir la temperatura. Al variar la densitat inicial del plasma hi ha canvis en el perfil de temperatura, en el grau d'ionització, a la resistivitat de Cowling i en el temps d'esmoreïment. Això és a causa de que l'equació d'energia (1.32) i la de Saha (1.34) depenen d'aquest paràmetre. A major densitat, el canvi en la temperatura és més lent i això provoca un allargament del canvi en el temps d'esmoreïment. Pel cas del refredament, τ_D disminuirà lentament i per l'escalfament augmentarà a poc a poc. Per altra banda, la velocitat d'Alfvén també es veu afectada pel canvi de la densitat ja que $V_A = B_o / \sqrt{\mu_o \rho_o}$. Si es varia el nombre d'ona, ni el perfil de temperatura ni la resistivitat de Cowling es veuen afectades ja que no apareix a l'equació d'energia (1.32). Però sí afecta al terme dissipatiu de l'equació diferencial. Això provoca canvis en el període i el temps d'esmoreïment. Al augmentar el valor de k_x , el període d'oscil·lació i el temps d'esmoreïment disminueixen provocant una disminució de l'amplitud de l'ona més ràpid.

Finalment, en el nostre cas es pot dir que les ones d'Alfvén dintre d'un plasma parcialment ionitzat, on la temperatura no és constant, són ones esmoreïdes temporalment les quals disminueixen l'amplitud més ràpida o lentament depenent de la densitat del plasma, del nombre d'ona i del perfil del canvi de temperatura.

Per concloure, moltes vegades s'assumeix que a aquestes temperatures el plasma està totalment ionitzat. En aquesta situació, l'energia aportada al plasma va totalment destinada a augmentar o disminuir la temperatura, ja que no es produeixen ni processos d'ionització ni recombinació. La densitat relativa d'ions és $\xi_i = 1$ i la de neutres $\xi_N = 0$. Això provoca que la resistivitat de Cowling sigui zero i per tant l'ona d'Alfvén no serà esmoreïda.

4 Referències

- [1] Eric R. Priest. *Magnetohydrodynamics of the Sun*. 1982.
- [2] Ballester, J. L. 2015, in *Solar Prominences*, eds. J.-C. Vial, & O. Engvold, *Astrophys. Space Sci. Lib.*, 415, 259.
- [3] Leake, J. E., & Arber, T.D. 2006, *A&A*, 450, 805.
- [4] Hildner, E. 1974, *Sol.Phys.*, 35, 123.
- [5] Dahlburg, R. B., & Mariska, J. T. 1988. *Phys.*, 117, 51.
- [6] Hansen, C. J., Kawaler, S. D., & Trimble, V. 2004, *Stellar interiors: physical principles, structure, and evolution* (New York: Springer-Verlag).
- [7] J. L. Ballester, M. Carbonell, R. Soler, and J. Terradas. *A&A*, 609, 2018.
- [8] R. Soler, J. L. Ballester, and S. Parenti. *A&A*, 540, 2012.
- [9] Bender, C. M., & Orszag, S. S. 1978, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*.

A Annex I: Pertorbació de l'equació d'inducció

Introduïm les quantitats pertorbades dins l'equació (1.33) suposant només els termes d'advecció, resistivitat d'Ohm i ambipolar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\vec{B}_o + \vec{B}_1)}{\partial t} &= \vec{\nabla} \times \left((\vec{v}_o + \vec{v}_1) \times (\vec{B}_o + \vec{B}_1) \right) - \eta \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times (\vec{B}_o + \vec{B}_1) \right) \\ &\quad + \vec{\nabla} \times \left[\frac{\eta_c - \eta}{|B_o|^2} \left[(\vec{\nabla} \times (\vec{B}_o + \vec{B}_1)) \times (\vec{B}_o + \vec{B}_1) \right] \times (\vec{B}_o + \vec{B}_1) \right] \end{aligned}$$

Recordant algunes propietats del producte vectorial i la divergència com:

$$\begin{aligned} \vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) &= (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C}) \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{B}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \\ \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{B}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{B} \end{aligned}$$

Es pot anar simplificant l'expressió:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}_o}{\partial t} + \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} &= \vec{\nabla} \times \left((\vec{v}_o + \vec{v}_1) \times \vec{B}_o + (\vec{v}_o + \vec{v}_1) \times \vec{B}_1 \right) - \eta \left(\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}_o) + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}_1) \right) + \\ &\quad + \vec{\nabla} \times \left[\frac{\eta_c - \eta}{|B_o|^2} \left[(\vec{\nabla} \times \vec{B}_o + \vec{\nabla} \times \vec{B}_1) \times (\vec{B}_o + \vec{B}_1) \right] \times (\vec{B}_o + \vec{B}_1) \right] \\ &= \vec{\nabla} \times \left[(\vec{v}_o \times \vec{B}_o) + (\vec{v}_1 \times \vec{B}_o) + (\vec{v}_o \times \vec{B}_1) + (\vec{v}_1 \times \vec{B}_1) \right] - \\ &\quad - \eta \left[\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}_o) + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}_1) \right] + \\ &\quad + \vec{\nabla} \times \left[\frac{\eta_c - \eta}{|B_o|^2} \left[((\vec{\nabla} \times \vec{B}_o) \times \vec{B}_o) \times \vec{B}_o + ((\vec{\nabla} \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_o) \times \vec{B}_o \right] \right] + \\ &\quad + \vec{\nabla} \times \left[\frac{\eta_c - \eta}{|B_o|^2} \left[((\vec{\nabla} \times \vec{B}_o) \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_o + ((\vec{\nabla} \times \vec{B}_o) \times \vec{B}_o) \times \vec{B}_1 \right] \right] \end{aligned}$$

Com a condicions inicials es té que a la situació d'equilibri es compleix la següent relació:

$$\frac{\partial \vec{B}_o}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v}_o \times \vec{B}_o) - \eta \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}_o) + \vec{\nabla} \times \left[\frac{\eta_c - \eta}{|B_o|^2} \left((\vec{\nabla} \times \vec{B}_o) \times \vec{B}_o \right) \times \vec{B}_o \right]$$

Tenint en compte les pertorbacions a primer ordre i també que la velocitat a l'instant inicial és zero ($\vec{v}_o = \vec{0}$) i el camp a aquest mateix instant és constant ($B_o = ct$). L'expressió es redueix a:

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_o) - \eta \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}_1) + \vec{\nabla} \times \left[\frac{\eta_c - \eta}{|B_o|^2} \left((\vec{\nabla} \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_o \right) \times \vec{B}_o \right]$$

Es realitzen els productes vectorials i rotacionals corresponents recordant que els vectors del camp magnètic i velocitat venen donats per $\vec{B}_o = (B_{ox}, 0, 0)$, $\vec{B}_1 = (B_{1x}, B_{1y}, B_{1z})$ i el de la velocitat $\vec{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z})$.

Finalment la component rellevant és la y al ser la normal a la direcció de propagació, la relació queda com:

$$\frac{\partial B_{1y}}{\partial t} = B_o \frac{\partial v_{1y}}{\partial x} + \eta_c \frac{\partial^2 B_{1y}}{\partial x^2}$$

Derivant les expressions per les pertorbacions del camp magnètic $\vec{B}_1(x, t)$ i de la velocitat $\vec{v}_1(x, t)$, l'equació diferencial final té la forma:

$$\boxed{\frac{\partial B_{1y}}{\partial t} = ik_x B_o v_{1y}(t) - \eta_c k_x^2 B_{1y}(t)}$$

B Annex II: Pertorbació de l'equació de moment

Partint de que l'equació de moment (1.25) i aplicant una pertorbació en el camp magnètic i a la velocitat com ja s'ha fet pel cas de l'equació d'inducció (1.33), es té:

$$\rho \left(\frac{\partial(\vec{v}_o + \vec{v}_1)}{\partial t} + ((\vec{v}_o + \vec{v}_1) \cdot \vec{\nabla})(\vec{v}_o + \vec{v}_1) \right) = \frac{1}{\mu} \left(\vec{\nabla} \times (\vec{B}_o + \vec{B}_1) \right) \times (\vec{B}_o + \vec{B}_1)$$

Arreglant l'expressió utilitzant les propietats del producte vectorial i rotacional anteriors, s'obté:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}_o}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} \right) + \rho \left[(\vec{v}_o \cdot \vec{\nabla})(\vec{v}_o + \vec{v}_1) + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla})(\vec{v}_o + \vec{v}_1) \right] = \frac{1}{\mu} \left(\vec{\nabla} \times (\vec{B}_o + \vec{B}_1) \right) \times (\vec{B}_o + \vec{B}_1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}_o}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \left[(\vec{v}_o \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_o + (\vec{v}_o \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_1 + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_o + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_1 \right] \right] = \frac{\mathcal{A}}{\mu}$$

Definint \mathcal{A} com:

$$\mathcal{A} \equiv (\vec{\nabla} \times \vec{B}_o) \times \vec{B}_o + (\vec{\nabla} \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_o + (\vec{\nabla} \times \vec{B}_o) \times \vec{B}_1 + (\vec{\nabla} \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_1$$

A la situació d'equilibri es compleix la relació següent:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}_o}{\partial t} + (\vec{v}_o \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_o \right) = \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \times \vec{B}_o) \times \vec{B}_o$$

Tenint en compte la situació d'equilibri i negligint els quadrats i productes de la pertorbació, l'expressió es redueix a:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \left[(\vec{v}_o \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_1 + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_o \right] \right] = \frac{1}{\mu} \left((\vec{\nabla} \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_o + (\vec{\nabla} \times \vec{B}_o) \times \vec{B}_1 \right)$$

Recordant que $\vec{v}_o = \vec{0}$ i que $B_o = ct$, es pot reescriure com:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left((\vec{\nabla} \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_o \right)$$

Realitzant-se els productes vectorials i rotacionals corresponents a part de tenir en compte només la component normal a la direcció de propagació, l'expressió es redueix a:

$$\rho \left(\frac{\partial v_{1y}}{\partial t} \right) = \frac{B_o}{\mu} \left(\frac{\partial B_{1y}}{\partial x} \right)$$

Finalment introduint les derivades de les expressions de la pertorbació del camp magnètic $\vec{B}_1(x, t)$ i de la velocitat $\vec{v}_1(x, t)$, s'obté l'equació diferencial:

$$\boxed{\frac{\partial v_{1y}}{\partial t} = \frac{ik_x B_o}{\rho \mu} \cdot B_{1y}}$$