



**Universitat de les
Illes Balears**

Facultat de Ciències

Memòria del Treball de Fi de Grau

**Disseny d'un model numèric de simulació
atmosfèrica no hidrostàtic i compressible.
Programació i avaluació del nucli dinàmic**

Iván Domínguez Fuentes

Grau de Física

Any acadèmic 2017-18

Treball tutelat per Romualdo Romero March
Departament de Física

S'autoritza la Universitat a incloure aquest treball en el Repositori Institucional per a la seva consulta en accés obert i difusió en línia, amb finalitats exclusivament acadèmiques i d'investigació	Autor		Tutor	
	Sí	No	Sí	No
	X		X	

Paraules clau del treball:
simulació, atmosfera, fluid

Índex

1	Introducció	2
2	Objectius	2
3	Disseny del model meteorològic	3
3.1	Equacions de Navier-Stokes	3
3.2	Discretització de les equacions. Algorismes de càlcul numèric	6
3.2.1	Discretització temporal. Algorisme d'Euler-Forward	6
3.2.2	Discretització espacial. Termes no advection	6
3.2.3	Termes advection. L'algorisme REA	7
3.2.4	Plantejament final del model meteorològic: convergència i estabilitat . . .	12
4	Test del model meteorològic. Experiments de sensibilitat	14
4.1	Bombolla d'aire calent amb perfil Gaussià	14
4.1.1	Sensibilitat del model a la resolució	16
4.1.2	Sensibilitat del model a la intensitat de la perturbació	16
4.1.3	Sensibilitat del model a l'esquema d'integració	17
4.2	Bombolla calenta amb perfil sinusoidal	18
4.3	Bombolla calenta i freda (Warm-Cold bubble)	19
4.4	Ones gravitatòries inercials (Inertia Gravity Waves)	21
4.4.1	Sensibilitat a l'esquema d'integració	23
4.5	Corrent de densitat (Density Current)	23
4.5.1	Sensibilitat a l'esquema d'integració	24
4.5.2	Sensibilitat al coeficient de difusió	26
4.5.3	Sensibilitat als contorns del domini	26
4.5.4	Sensibilitat a la intensitat de la perturbació	28
5	Comentaris i observacions	28

1 Introducció

La simulació atmosfèrica està a l'ordre del dia actualment. La societat necessita de cada vegada més eines que puguin predir amb major precisió els fenòmens atmosfèrics, sobretot els que tenen un gran impacte, és a dir, els més violents, tals com tempestes severes amb ratxes molt fortes de vent (*downbursts* en anglès), calabruix gros, tornados i trombes marines, sistemes de tempestes de gran escala ... Tots aquests fenòmens poden arribar a causar danys seriosos, tant materials com personals. És per aquest motiu que simular l'atmosfera amb una major precisió i exactitud permetrà en el futur prendre les mesures que siguin necessàries per poder garantir la seguretat de les persones, tals com millorar el sistema d'alertes meteorològiques.

El sistema atmosfèric és no lineal. Per aquest motiu, tots els problemes que es vulguin resoldre hauran de desenvolupar-se de forma computacional, si es vol fer una anàlisi realista. Les equacions que descriuen les circulacions atmosfèriques (equacions de Navier-Stokes) són massa complicades com per resoldre-les analíticament i encara que es facin simplificacions, es tardaria massa en donar una solució al problema. És per això que s'han de plantejar noves eines matemàtiques que permetin resoldre el sistema de forma més ràpida i eficient. Resoldre el sistema és donar una evolució temporal i espacial. Això s'aconsegueix mitjançant tècniques de discretització i algorismes de càlcul numèric. En el present treball s'analitzaran algunes d'aquestes tècniques i es plantejarà un mètode que ajudi a entendre algunes circulacions atmosfèriques. Discretitzar les equacions i donar un mètode iteratiu que les resolgui i inclogui processos atmosfèrics és sinònim de plantejar un model meteorològic.

En els últims anys s'han incrementat exponencialment les capacitats de càlcul dels ordinadors, un fet que ha permès que els models meteorològics millorin, donant així una visió més ample dels processos que ocorren a l'atmosfera. Una millor capacitat de càlcul dels processadors permet que es puguin prescindir de més aproximacions, fent així que la visió del problema a resoldre sigui més realista [1].

2 Objectius

L'objectiu d'aquest TFG és reproduir, a través de la resolució de les equacions de Navier-Stokes que regeixen el moviment atmosfèric, una sèrie de circulacions que són típiques en meteorologia de mesoescala (escales que van des de centenars de metres fins a uns quants kilòmetres). Per aquest motiu, no es consideraran els efectes de la rotació terrestre, és a dir, que considerarem nul·la la força de Coriolis en les formulacions que vindran. En aquestes equacions es poden incloure, a més de la pròpia dinàmica atmosfèrica, és a dir, el moviment atmosfèric, processos tals com els associats a l'humitat (formació de núvols, pluja, calabruix), radiació (en calentament solar), capa límit (processos que succeeixen en els primers centenars de metres en contacte amb el terra) ... Per senzillesa aquí només considerarem el nucli dinàmic de les equacions, és a dir, només el propi moviment atmosfèric i la seva connexió amb la termodinàmica, a més de simplificar el problema a dues dimensions (x, z). Tractarem l'atmosfera com una font de processos reversibles (sense canvis de fase), sense humitat i amb estratificació bàsica estable. Aquestes condicions es coneixen com a simulació Benchmark [2]. Les equacions de referència es plantejaran en l'apartat 3.1 del present treball.

Pot parèixer que simplificar el problema d'aquesta manera fa que es perdi generalitat a l'hora

d'analitzar les solucions, però programar i analitzar el nucli dinàmic proporciona una gran quantitat d'informació com veurem més endavant. Això es basa en el fet que la simulació seca que nosaltres considerarem té moltes similituds amb la simulació humida, que conté processos parametritzats i que nosaltres no considerarem per senzillesa. La informació obtinguda pot ser avaluada per comprovar si el model és fidel a la solució, és a dir, si és eficient i eficaç [1]. Per això és molt important seguir una estratègia a l'hora de fer les integracions pertinents. És necessari, com veurem més endavant seguir una sèrie de tècniques per garantir l'estabilitat i convergència de la solució. Aquest problema s'avalua en l'apartat 3.2 del treball.

Comentarem quins tipus d'algorismes de càlcul s'han utilitzat per al model meteorològic i es donarà una justificació a l'ús de les tècniques d'una forma general. Una vegada analitzats els algorismes de càlcul numèric, en l'apartat 4 es presentaran i es comentaran els resultats de les simulacions aplicades a exemples de circulacions típiques (bombolla d'aire calent amb perfil Gaussià, apartat 4.1, bombolla calenta amb perfil sinusoidal, apartat 4.2, bombolla calenta i freda, apartat 4.3, ones gravitatòries inercials, apartat 4.4 i corrent de densitat, apartat 4.5). Finalment, en l'apartat 5, es comentaran algunes de les limitacions, avantatges, inconvenients i possibles millores al model considerat.

3 Disseny del model meteorològic

És important notar que cada model meteorològic parteix sempre de les equacions de Navier-Stokes, però segons l'escala a la que s'hagi de tractar el problema o circulació aquestes equacions s'adapten per poder resoldre el sistema amb una major facilitat. Introduir canvis d'escala pot simplificar les equacions, però limita el seu ús. Per altra part, el model es pot modificar de manera que sigui tancat, és a dir, que les equacions fonamentals que regeixen l'atmosfera estiguin implícites i que hi ha tantes equacions com camps incògnita té el problema. Per a aquest propòsit l'anàlisi que farem a continuació no considerarà termes de Coriolis i es tractarà el sistema en dues dimensions amb equacions autoconsistents (sistema tancat) i una atmosfera seca (sense intercanvis de calor latent associats a la presència d'humitat i canvis d'estat).

3.1 Equacions de Navier-Stokes

El set d'equacions (1), presentat a continuació, ha sigut extensament utilitzat en modelització de mesoescala [1]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \pi + \frac{R}{c_v} \pi \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + c_p \theta \nabla \pi = -g \mathbf{k} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \mu \nabla^2 \theta \end{cases} \quad (1)$$

Conegudes com les equacions de Navier-Stokes. La solució a (1) es pot expressar com un vector en el que es té $(\pi, \mathbf{u}, \theta)$, $\pi = (P/P_0)^{R/c_p}$ és la denominada pressió d'Exner, $\mathbf{u} = (u, w)$ és el camp

de velocitats horitzontal i vertical respectivament, $\theta = T/\pi = T(P_0/P)^{R/c_p}$ és la temperatura potencial. En aquestes equacions, P és la pressió atmosfèrica, P_0 és la pressió a la superfície y val $P_0 = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$ i T és la temperatura. Altres variables y símbols que requereixen definició son $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial z)$ el vector gradient, $R = c_p - c_v = 287 \text{ J}(Kkg)^{-1}$ és la constant de l'aire sec, amb $c_p = 1004 \text{ J}(Kkg)^{-1}$ y $c_v = 787 \text{ J}(Kkg)^{-1}$ les capacitats calorífiques de l'aire a pressió constant i volum constant respectivament, $\mathbf{k} = (0, 1)$ és el vector unitari en la direcció z i $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ l'acceleració de la gravetat a la superfície de la Terra. La viscositat dinàmica μ es considerarà nul·la en tots els casos excepte per al cas de corrent de densitat.

En les equacions anteriors, es defineix la pressió d'Exner ja que és un paràmetre adimensional molt important a l'hora de modelitzar l'atmosfera. La temperatura potencial θ és la temperatura que tindria una partícula d'aire si aquesta fos sotmesa a una pressió $P < P_0$ i es dugués cap a la superfície de forma adiabàtica, és a dir, sense intercanvi de calor amb el medi.

Abans de fer un anàlisi més profund per afrontar el problema és convenient fer una justificació del per què s'han definit les variables anteriors. La pressió d'Exner és un paràmetre adimensional que conté propietats termodinàmiques de l'aire sec, amb la qual cosa és molt recomanable utilitzar-la per als nostres propòsits. La temperatura potencial és una quantitat que es conserva en processos termodinàmics tals com intercanvis adiabàtics, és a dir, sense intercanvi de calor amb el medi, amb la qual cosa també és molt recomanable la seva utilització. A més, aquestes quantitats fan que el set (1) sigui autoconsistent, és a dir, forma un sistema d'equacions tancat: hi ha tantes equacions com camps incògnita. És ben coneguda l'equació del gas ideal $P = \rho RT$ allà on ρ és la densitat de l'aire (sec en aquest cas). Tant les quantitats π com θ contenen aquesta equació fonamental, de manera que donar π , θ és directament donar l'estat del sistema (P, T, ρ) , a més del vector de velocitats. De fet, amb les definicions anteriors es pot arribar a una expressió més adequada de l'equació d'estat, que és

$$\rho = \frac{P_0}{R} \left(\frac{\pi^{(\frac{c_p}{R}-1)}}{\theta} \right).$$

L'equació (1) és, desenvolupant tots els termes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \pi}{\partial t} = -u \frac{\partial \pi}{\partial x} - w \frac{\partial \pi}{\partial z} - \frac{R}{c_v} \pi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - w \frac{\partial u}{\partial z} - c_p \theta \frac{\partial \pi}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} = -u \frac{\partial w}{\partial x} - w \frac{\partial w}{\partial z} - c_p \theta \frac{\partial \pi}{\partial z} - g + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = -u \frac{\partial \theta}{\partial x} - w \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \end{array} \right. \quad (2)$$

L'autoconsistència de la qual havíem parlat abans es veu reflexada en el fet que si definim un estat inicial que sigui $\theta_0, \pi_0, u_0, w_0$ denotant el subíndex 0 com les variables a $t = 0$ s, el sistema d'equacions és resoluble. El set d'equacions (2) està escrit en forma de llei de conservació. Per

altra banda, les discretitzacions de les equacions que apareixen a (2) tenen un inconvenient, i és que no conserven ni massa ni energia, fet que es pot demostrar matemàticament i que no farem degut a què es surt dels objectius del present treball. Cal notar que el set (2) conté equacions que son del tipus advecció i més important encara, no s'ha fet cap aproximació. Com que les equacions son del tipus advecció, les ones derivades de resoldre el sistema son de tipus acústic, ja que el problema està plantejat en el medi atmosfèric. A més de les ones acústiques, que son les que viatjen més ràpid a l'atmosfera amb velocitat $c = 340$ m/s, també s'hi sumen les que provenen de la solució al nostre problema. Per tant, a l'hora de discretitzar s'han de tenir en compte aquests dos tipus de solucions. Per garantir una bona solució física al problema es planteja que tant la pressió d'Exner com la temperatura potencial es descomponen en un valor mitjà que està en equilibri hidrostàtic i una petita perturbació:

$$\pi(x, z, t) = \bar{\pi}(x, z) + \pi'(x, z, t) \quad (3)$$

$$\theta(x, z, t) = \bar{\theta}(x, z) + \theta'(x, z, t) \quad (4)$$

Allà on $\bar{\pi}(x, z)$, $\bar{\theta}(x, z)$ son el valors bàsics o mitjans de la pressió i la temperatura, i $\pi'(x, z, t)$, $\theta'(x, z, t)$ les perturbacions al valor mig, respectivament. Considerarem que l'amplitud de la perturbació θ'_0 és molt menor que l'amplitud de la variable en equilibri hidrostàtic $\bar{\theta}_0$ ($\theta'_0 \ll \bar{\theta}_0$). Tant $\bar{\pi}(x, z)$ com $\bar{\theta}(x, z)$ compleixen l'equació de balanç hidrostàtic, en el qual s'estableix que la pressió mitjana a una altura z d'una partícula només es deu al pes de la columna d'aire que està per damunt ella:

$$c_p \bar{\theta} \frac{d\bar{\pi}}{dz} = -g \quad (5)$$

L'expressió (5) es pot deduir fàcilment a partir de la coneguda condició d'equilibri hidrostàtic $dp/dz = -\rho g$. Notar que la derivada $d\bar{\pi}/dz$ ha de ser negativa. La pressió disminueix amb l'altura. Com més amunt es puja en la columna d'aire, menys pressió queda per damunt ella. Una vegada introduïdes les formes (3) i (4) per a la pressió i la temperatura, estam en condicions de reescriure el set d'equacions (2) d'una manera més adequada per analitzar la solució física del problema. Substituint (3) i (4) en el set (2) podem trobar una expressió per a l'evolució de les perturbacions, tenint en compte en les derivades pertinents la condició (5):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \pi'}{\partial t} = -u \frac{\partial \pi'}{\partial x} - w \frac{\partial \pi'}{\partial z} - w \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial z} - \frac{R}{c_v} (\pi + \pi') \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - w \frac{\partial u}{\partial z} - c_p (\bar{\theta} + \theta') \frac{\partial \pi'}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} = -u \frac{\partial w}{\partial x} - w \frac{\partial w}{\partial z} - c_p (\bar{\theta} + \theta') \frac{\partial \pi'}{\partial z} + \theta' \frac{g}{c_p \bar{\theta}} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial \theta'}{\partial t} = -u \frac{\partial \theta'}{\partial x} - w \frac{\partial \theta'}{\partial z} - w \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 (\bar{\theta} + \theta')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\bar{\theta} + \theta')}{\partial z^2} \right) \end{array} \right. \quad (6)$$

Amb aquesta última expressió, hem redefinit el problema de manera que ara el principal objectiu és donar l'evolució de la perturbació de la parcel·la d'aire considerada. Donada una perturbació

inicial $\pi'_0(x, z) = \pi'(x, z, t = 0)$, $\theta'_0(x, z) = \theta_0(x, z, t = 0)$ dins un estat bàsic $\bar{\pi}(x, z), \bar{\theta}(x, z)$ en equilibri hidrostàtic, per exemple, amb fluxe nul ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$) la seva evolució espacial i temporal ve donada pel set d'equacions (6).

3.2 Discretització de les equacions. Algorismes de càlcul numèric

Donada la complexitat del sistema d'equacions (6), es fa impossible trobar una solució analítica, fet que ens duu a plantejar el problema de forma que sigui tractable de forma computacional. Això es pot aconseguir fent una discretització adequada de les variables en qüestió. Discretitzar vol dir convertir les variables contínues en variables discretes, és a dir, que la seva evolució temporal ve donada passa per passa. La discretització espacial està inevitablement lligada a la temporal. Discretitzar espacialment vol dir agafar una porció de l'espai físic i dividir-lo en petits trossos. Hi ha moltes formes de fer aquest procés. Aquí només considerarem la forma més simple i la més intuïtiva. En aquest apartat classificarem els termes que surten al set (6) i donarem un mètode iteratiu adequat per cada un d'ells.

3.2.1 Discretització temporal. Algorisme d'Euler-Forward

L'evolució temporal del sistema ve donada pel següent conjunt de derivades parcials:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \quad (7)$$

Allà on $Q \equiv \{\pi', \theta', u, w\}$. Utilitzant la sèrie de Taylor per al conjunt de funcions a l'instant $n + 1$:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{Q^{n+1} - Q^n}{\Delta t} \quad (8)$$

Allà on $Q^{n+1} = Q(t_{n+1}) = Q(t_n + \Delta t)$ és el conjunt de funcions que descriuen el sistema avaluat a l'instant de temps $n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$ i Δt és el pas de temps entre els instants n i $n + 1$. Substituint (8) al set (6) i aïllant la variable Q^{n+1} tenim una petita evolució temporal del sistema. Si es calcula Q^{n+1} es pot tornar a resoldre (6) per obtenir les noves variables a l'instant $n + 2$ i així successivament fins arribar a l'instant final N . El nombre total d'iteracions que s'han de fer ve donat pel temps total que ha de durar la simulació T de manera que $N\Delta t = T$. La suma de totes les petites evolucions dona com a resultat l'evolució final del sistema. L'anàleg a fer això és juntar tots els fotogrames d'una pel·lícula.

3.2.2 Discretització espacial. Termes no advectionis

En el set (6) apareixen diversos tipus de derivades. Algunes d'elles són més senzilles de tractar que d'altres. Tractarem primer els tipus de derivades més fàcils de tractar. Estam parlant dels termes que inclouen forçaments no advectionis, és a dir, totes aquelles derivades que no inclouen termes el tipus $\mathbf{u} \cdot \nabla Q$. Alguns d'aquests termes no són lineals, però la seva no linealitat és tractable amb algorismes senzills. Alguns altres termes sí són lineals i igualment els tractarem com es farà seguidament. Els termes lineals són:

$$\left\{ w \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial z}, \theta' \frac{g}{c_p \bar{\theta}}, w \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}, \mu \nabla^2 u, \mu \nabla^2 w, \mu \nabla^2 (\bar{\theta} + \theta'), c_p \bar{\theta} \frac{\partial \pi'}{\partial x}, c_p \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right\}$$

Ja que $\bar{\pi}$, $\bar{\theta}$ son camps coneguts i encara que en general no siguin constants, no formen part de la solució numèrica. Els termes no lineals no advectionius son:

$$\left\{ \frac{R}{c_v} (\pi + \pi') \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), c_p \theta' \frac{\partial \pi'}{\partial x}, c_p \theta' \frac{\partial \pi'}{\partial z} \right\}$$

Com que l'estat bàsic és conegut, també ho seran les respectives derivades, i no serà necessari fer la seva discretització. Per senzillesa, per a la discretització dels camps incògnita Q agafarem el pla $x - z$ d'integració i el dividirem en cel·les quadrades de tamany $(\Delta x, \Delta z)$ respectivament, de manera que per a les derivades pertinents es tindrà:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{Q_{i+1,j} - Q_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{Q_{i+1,j} + Q_{i-1,j} - 2Q_{i,j}}{(\Delta x)^2} \quad (10)$$

Allà on $Q_{i,j}$ és el conjunt de funcions avaluades a les cel·les i, j . L'índex i correspon a la discretització a l'eix horitzontal mentre que j correspon a la discretització vertical, de manera que per als camps incògnita el pas del continu al discret és $Q \rightarrow Q_{i,j}$. De igual manera que amb la discretització temporal, es té que $I\Delta x = x$ i $J\Delta z = z$ essent I, J el nombre total de cel·les que hi ha i (x, z) l'extensió del domini. Δx és la distància entre dues cel·les horitzontals i Δz és la que hi ha entre dues cel·les verticals. Per a les derivades verticals les expressions (9) i (10) son completament anàlegues però fent $x \rightarrow z$ i $\{i+1, j\} \rightarrow \{i, j+1\}$, $\{i-1, j\} \rightarrow \{i, j-1\}$. L'expressió (9) es pot deduir a partir de les sèries de Taylor a primer ordre per a $Q_{i+1,j}$, $Q_{i-1,j}$ mentre que l'expressió (10) agafa termes de segon ordre, allà on es defineixen $Q_{i+1,j} = Q(x_{i+1}, z_i) = Q(x + \Delta x, z)$, $Q_{i,j+1} = Q(x_i, z_{i+1}) = Q(x, z + \Delta z)$.

3.2.3 Termes advectionius. L'algorisme REA

Fins ara no ha sigut difícil trobar una discretització adequada pels termes no lineals no advectionius. El gran repte ara és tractar les derivades del tipus advectioniu del set (6). Ens referim als termes que son del tipus $\mathbf{u} \cdot \nabla Q$. Aquests termes son els coneguts com a termes d'advecció (empenta o de transport degut al moviment, 'empenyen' o 'transporten' la solució), i a diferència dels altres termes s'han de tractar d'una forma més sofisticada. La solució als termes d'advecció son ones que es desplaçen, en aquest cas, a velocitat \mathbf{u} , de manera que, si hi ha ones a la solució física, també existiran els fenòmens associats a elles, i destacarem sobretot les inestabilitats. L'algorisme REA (Reconstruct-Evolve-Average, traduït: Reconstruir-Evolucionar-Promitjar) és un mètode d'alta resolució que consisteix en reconstruir per peçes el valor de $Q_{i,j}$ a cada punt de malla, a partir dels promitjos d'aquestes, i deixar evolucionar el sistema per després promitjar els nous valors de les variables. Aquest serà el mètode que utilitzarem per tractar l'advecció.

La reconstrucció per peçes de cada variable a cada pas de temps la prendrem com a de perfil lineal, de manera que el mètode aplicat tindrà precisió de segon ordre, com veurem més

endavant. Per plantejar el problema i trobar un mètode d'aplicació del REA, primer hem de tenir en compte que al set (6) tenim dos tipus d'advecció: els termes d'advecció horitzontal, donats per $u\nabla Q$, i els termes d'advecció vertical $w\nabla Q$. Cada tipus d'advecció s'ha de tractar i implementar de forma independent. Com a exemple d'aplicació de la filosofia del REA, collirem els termes d'advecció horitzontal. El primer pas és *reconstruir* la nostra variable a un temps n , Q_i^n en una nova que sigui de perfil lineal, fent que el seu promig sigui Q_i . És a dir, que en un cert instant de temps n :

$$Q_i^n = Q_i^n + \sigma_i^n(x - x_i) \quad (11)$$

Per a $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$ [3]. Notar que el pendent σ_i^n també ha d'evolucionar en el temps. Què val el pendent de reconstrucció σ_i^n ? Es pot veure gràficament que elegir un determinat pendent dona lloc a una sobreestimació de la solució quan aquesta es fa evolucionar. La figura 1 mostra aquest fet quan s'elegeix el determinat pendent mirant corrent avall, *downstream*. Això mostra que s'ha d'anar amb cautela a l'hora d'elegir el pendent de reconstrucció, i que d'alguna manera s'ha de limitar per no generar sobreestimacions, ja que una sobreestimació de la solució donaria lloc a oscil·lacions espúries (artificials, que no formen part de la solució física), en forma de renou a la solució, fet que llevaria precisió als resultats.

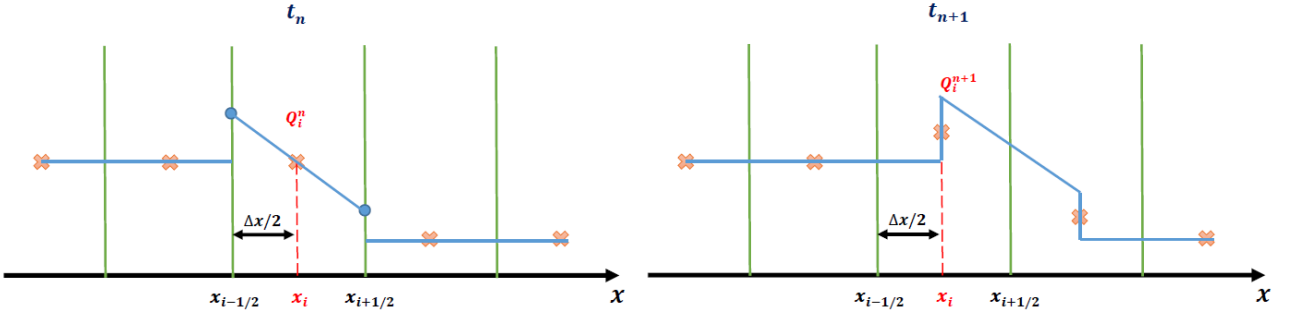


Figura 1: Esquema de l'algorisme REA quan es resol l'equació d'advecció en la direcció x . Notar que per a aquest exemple la distància que s'avança quan el sistema evoluciona de t_n a t_{n+1} és $u_i\Delta t = \Delta x/2$. Noteu la ondulació que es produeix a l'instant final.

Limitadors del pendent Com s'ha de limitar el pendent σ_i^n ? Existeixen diversos mètodes limitadors de pendent que fan suavitzar el comportament oscil·latori de la solució. Els limitadors mesclen diversos tipus de pendents, tenen diverses propietats i, segons el criteri elegit, s'elegeix un valor del pendent, o un altre. El limitador que usarem per elegir el pendent és el conegut com *minmod* i té la següent expressió [4]:

$$\sigma_i^n = \text{minmod} \left(\frac{Q_i^n - Q_{i-1}^n}{\Delta x}, \frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\Delta x} \right) \quad (12)$$

Allà on l'operador *minmod* es defineix com:

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } |a| < |b| \text{ y } ab > 0 \\ b & \text{si } |b| < |a| \text{ y } ab > 0 \\ 0 & \text{si } ab \leq 0 \end{cases} \quad (13)$$

Notar que l'expressió (13) mescla dos tipus de pendents: *upwind* (corrent cap a dalt) i *downwind* (corrent cap avall) respectivament. L'operador *minmod* elegeix el menor pendent dels que hi ha a l'argument. Una vegada definit el pendent estam en condicions d'aplicar el REA al nostre model meteorològic. L'anàlisi es pot fer de manera completament similar pel pendent en direcció z , σ_j^n . S'ha de tenir en compte que per poder aplicar l'algorisme REA s'han de calcular primer Q_i^n . Això ens força a calcular primer de tot els camps incògnita sense advection, és a dir, eliminant tots els termes amb derivades del tipus advection del set (6) (veure apartat 3.2.4). Una vegada fet això, com que la discretització de cada un dels camps incògnita és estàndar, és a dir, que l'espai es divideix en cel·les quadrades de igual tamany, s'ha de fer la *reconstrucció* de Q_i^n , aplicant el perfil lineal donat per l'expressió (11). Per definició, la recta de reconstrucció té dos extrems, que podem definir com a D_i l'extrem de la dreta i I_i per a l'extrem esquerra per a la cel·la i essent Q_i^n el valor promig de la recta (veure figura 2). Aquests dos extrems estaran a una distància $\Delta x/2$ de Q_i^n , limiten cadascuna de les cel·les i es poden calcular de manera gràfica molt fàcil. En general es té:

$$I_i = Q_i^n - \sigma_i^n \frac{\Delta x}{2} \quad (14)$$

$$D_i = Q_i^n + \sigma_i^n \frac{\Delta x}{2} \quad (15)$$

De manera que l'extrem I_i es troba al punt $x_{i-1/2}$ i l'extrem D_i es troba al punt $x_{i+1/2}$. Una vegada arribats a aquest punt, hem d'*evolucionar* tots els camps incògnita Q_i^n . Si fem evolucionar els camps incògnita, també farem evolucionar els extrems de la recta i conseqüentment, el pendent de la recta de reconstrucció. Com que el camp de vent és el que *empeny* la solució, és el responsable de l'evolució del sistema. Per tant, necessitam conèixer el valor del camp de vents als extrems de la recta de reconstrucció, que no és més que el valor promig de les cel·les contigües. Ara bé, si estam calculant l'advecció horitzontal, necessitam saber el valor del vent u a cadascuna de les cel·les i fer el seu valor promig \bar{u} . En la vertical, necessitam saber el camp de vent w . S'ha de tenir molt en compte que la solució física conté valors del camp de vent que poden ser negatius, per tant, el signe de la velocitat del vent als extrems de la recta és primordial per a calcular les variables Q_i^n evolucionades: Q_i^{n+1} . Per a fer l'evolució hem de calcular quina distància (computacional) es recorr en una passa de temps Δt . Segons el signe de la velocitat del vent als extrems de cada cel·la computacional ($\bar{u}_{i-1/2}$ per a l'extrem esquerre i $\bar{u}_{i+1/2}$ per a l'extrem dret) es pot veure gràficament (la figura 2 mostra un exemple) que la recta de reconstrucció evoluciona de manera que el pendent pot augmentar o disminuir, de manera que el nou perfil lineal (evolucionat) pot estar inscrit en la mateixa cel·la i quan $\{\bar{u}_{i+1/2} < 0, \bar{u}_{i-1/2} > 0\}$, afectar a les cel·les i i $i+1$ quan es té $\{\bar{u}_{i+1/2} > 0, \bar{u}_{i-1/2} > 0\}$, afectar a les cel·les $i-1$, i i $i+1$ quan es té $\{\bar{u}_{i+1/2} > 0, \bar{u}_{i-1/2} < 0\}$ o bé afectar a les cel·les $i-1$ i i quan es té $\{\bar{u}_{i+1/2} < 0, \bar{u}_{i-1/2} < 0\}$. Una vegada es té l'extensió del nou perfil lineal, és a dir, evolucionat, el pas final per a calcular l'advecció és trobar l'àrea que queda per davall la recta evolucionada. Al cap i a la fi, estam integrant un sistema d'equacions i si estam tractant amb variables discretes, la integral torna una suma sobre tot el domini físic. Trobar l'àrea és una tasca senzilla, ja que en qualsevol cas dels abans descrits, no és més que la superfície d'un trapezi.

Calcular l'advecció és, doncs, calcular una integral, i per això, s'han de sumar totes les àrees que queden per davall la recta de reconstrucció evolucionada, en funció de totes les combinacions

que pugui haver pels signes de la velocitat u en els punts $x_{i-1/2}$, $x_{i+1/2}$. En la horitzontal hem esmentat quatre combinacions possibles. Cada combinació dona lloc a una integral que s'ha de calcular de manera diferent segons cada cas. Agafarem com a exemple el cas en què $\{u_{i+1/2} > 0, u_{i-1/2} > 0\}$, representat en la figura 2.

Cas $\{u_{i+1/2} > 0, u_{i-1/2} > 0\}$ Si ara volem calcular els termes d'advecció horitzontal, ens haurem de fixar primer de tot en el signe de la velocitat del vent mig \bar{u} en els punts de malla $x_{i-1/2}$, $x_{i+1/2}$. Notar que a l'instant n el promig de la cel·la i és Q_i^n , de manera que el vent en aquests punts també ha de ser un valor mig, que és $\bar{u}_{i-1/2}^n = (u_i^n + u_{i-1}^n)/2$, representat amb una fletxa groga a la figura 2. En aquesta mateixa figura també es defineixen els valors de les funcions en les cel·les $i-1$, i , $i+1$ a l'instant n : Q_{i-1}^n , Q_i^n , Q_{i+1}^n . Per calcular l'evolució de cada variable a cada cel·la, necessitam conèixer els extrems de la recta de *reconstrucció*, anomenats I_i i D_i donats per l'expressió (14) i (15).

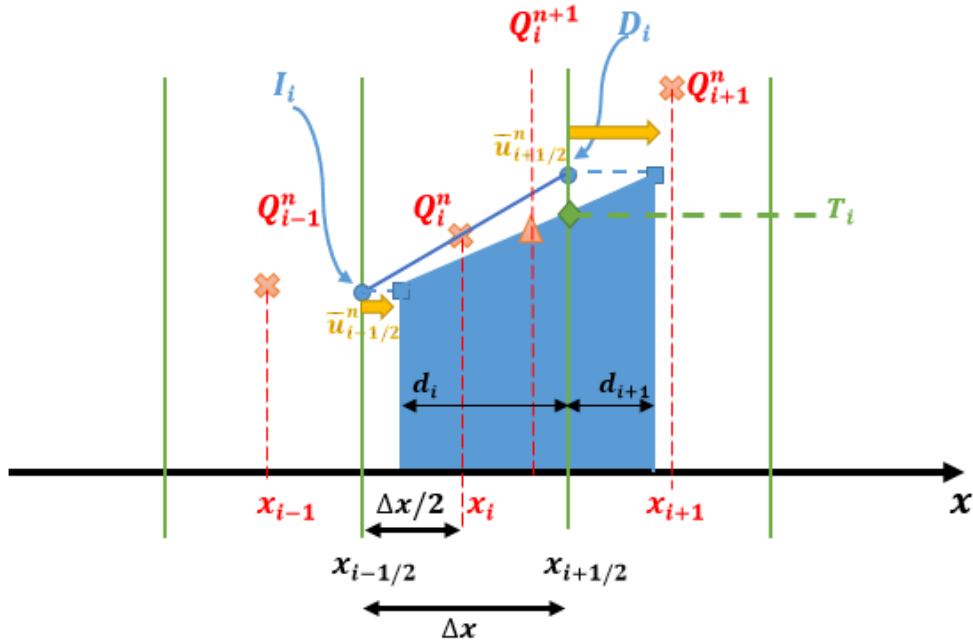


Figura 2: Esquema d'aplicació de l'algorisme REA pels termes d'advecció horitzontal. L'objectiu és calcular l'àrea ombrejada en blau pels signes de la velocitat horitzontal per al cas $\{u_{i+1/2} > 0, u_{i-1/2} > 0\}$.

Una vegada definits els extrems I_i , D_i , estam en condicions de fer *evolucionar* les variables Q_i^n . Coneguts els vents $\bar{u}_{i-1/2}^n = (u_i^n + u_{i-1}^n)/2$, $\bar{u}_{i+1/2}^n = (u_{i+1}^n + u_i^n)/2$, destacats en groc a la figura 2, necessitam calcular la distància que avança cada extrem de la recta, que en aquest cas és $\bar{u}_{i-1/2}^n \Delta t$ per a I_i , i $\bar{u}_{i+1/2}^n \Delta t$ per a D_i . Una vegada tenim aquestes quantitats, el valor mig d'aquesta recta evolucionada no és més que Q_i^{n+1} , marcat amb un triangle vermell a la figura 2. Aquestes quantitats defineixen la nova recta de reconstrucció *evolucionada*. Notar que el fet d'evolucionar la recta de reconstrucció fa que, pel cas que hem considerat, haguem de calcular un altre punt primordial pel càlcul final de l'àrea, i és el punt de tall amb la cel·la i i $i+1$, T_i . Aquest punt delimita dues àrees a considerar: l'àrea que ocupa la cel·la i , que anomenarem

S_i^{n+1} i l'àrea que ocupa la cel·la $i + 1$, S_{i+1}^{n+1} , ambdues ombrejades en blau a la figura 2 i el seu valor no és més que l'àrea del trapezi considerat, de manera que tindrem, respectivament:

$$T_i = I_i + d_i \sigma_i^{n+1} \quad (16)$$

$$S_i^{n+1} = \frac{d_i}{2}(T_i + I_i) \quad (17)$$

$$S_{i+1}^{n+1} = \frac{d_{i+1}}{2}(T_i + D_i) \quad (18)$$

Allà on σ_i^{n+1} és el pendent de reconstrucció *evolucionat* i val, junt amb les distàncies d_i i d_{i+1} :

$$d_i = \Delta x - \bar{u}_{i-1/2}^n \Delta t \quad (19)$$

$$d_{i+1} = \bar{u}_{i+1/2}^n \Delta t \quad (20)$$

$$\sigma_i^{n+1} = \frac{D_i - I_i}{d_i + d_{i+1}} \quad (21)$$

Aquestes expressions són les que proporcionen l'evolució del sistema. A partir de (17) i (18) es pot treure una expressió per a les variables evolucionades Q_i^{n+1} , Q_{i+1}^{n+1} . Si per a l'instant n es calcula l'àrea de la cel·la i es pot arribar a veure molt fàcilment que $S_i^n = Q_i^n \Delta x$. Llavors, per a l'instant $n + 1$ es tindrà:

$$Q_i^{n+1} = \frac{S_i^{n+1}}{\Delta x} \quad (22)$$

$$Q_{i+1}^{n+1} = \frac{S_{i+1}^{n+1}}{\Delta x} \quad (23)$$

De manera que els camps incògnita evolucionats compleixen $Q^{n+1} = \sum_i \frac{S_i^{n+1}}{\Delta x}$. La precisió de segon ordre de la que parlàvem abans es veu reflexada de forma implícita en les expressions (17) i (18). Si es substitueixen les definicions de cadascuna de les quantitats que apareixen en aquestes expressions, es pot veure que l'algorisme aplicat és d'ordre $O(\Delta x)^2$. El mètode és exactament anàleg si es vol calcular l'advecció vertical. Només s'ha de substituir l'índex i per j i Δx per Δz . Les taules 1, 2 i 3 recullen els resultats rellevants per a l'implementació de l'algorisme pels altres signes de la velocitat del vent en els extrems de la recta de reconstrucció.

$\bar{u}_{i-1/2} > 0, \bar{u}_{i+1/2} < 0$
$T_i = 0$
$S_i^{n+1} = (d_i + d_{i+1})(I_i + D_i)/2$
$Q_i^{n+1} = S_i^{n+1}/\Delta x$

Taula 1: resultats quan $\bar{u}_{i-1/2} > 0, \bar{u}_{i+1/2} < 0$. Es pot veure gràficament que, per a aquest cas, no hi ha punt de tall i l'àrea que s'ha de calcular només afecta a la cel·la i

$\bar{u}_{i-1/2} < 0, \bar{u}_{i+1/2} > 0$
$T_i^1 = I_i + \sigma_i^{n+1} \bar{u}_{i-1/2} \Delta t$ $T_i^2 = T_i^1 + \sigma_i^{n+1} \Delta x$
$S_{i-1}^{n+1} = \bar{u}_{i-1/2} \Delta t (I_i + T_i^1) / 2$ $S_i^{n+1} = (\Delta x / 2) (T_i^1 + T_i^2)$
$S_{i+1}^{n+1} = \bar{u}_{i+1/2} \Delta t (T_i^2 + D_i) / 2$
$Q_{i-1}^{n+1} = S_{i-1}^{n+1} / \Delta x$ $Q_i^{n+1} = S_i^{n+1} / \Delta x$ $Q_{i+1}^{n+1} = S_{i+1}^{n+1} / \Delta x$

Taula 2: resultats quan $\bar{u}_{i-1/2} < 0, \bar{u}_{i+1/2} > 0$. Per a aquest cas, s'han de distingir dos tipus de punts de tall: T_i^1 el punt de tall entre les cel·les $i - 1$ i i mentre que T_i^2 és el punt que talla les cel·les i i $i + 1$. En aquest cas l'àrea ocupa tres regions: les de les cel·les $i - 1$, i i $i + 1$. Notar la susceptibilitat al signe de la velocitat del vent en algunes de les quantitats.

$\bar{u}_{i-1/2} < 0, \bar{u}_{i+1/2} < 0$
$T_i = I_i + \sigma_i^{n+1} \bar{u}_{i-1/2} \Delta t$
$S_{i-1}^{n+1} = \bar{u}_{i-1/2} \Delta t (I_i + T_i) / 2$ $S_i^{n+1} = (\Delta x + \bar{u}_{i+1/2} \Delta t) (D_i + T_i) / 2$
$Q_{i-1}^{n+1} = S_{i-1}^{n+1} / \Delta x$ $Q_i^{n+1} = S_i^{n+1} / \Delta x$

Taula 3: resultats quan $\bar{u}_{i-1/2} < 0, \bar{u}_{i+1/2} < 0$. Aquest cas és similar al que hem deduït abans gràficament, però amb la diferència de que ara l'àrea a calcular afecta a les cel·les $i - 1$ i i .

Un cas particular Un cas particular de l'algorisme REA és quan es fa $\sigma_i^n = 0$. En aquest cas, les expressions abans vistes per al REA es tornen molt més senzilles. Si es fa el pendent nul, es perd la precisió de segon ordre, i es pot comprovar que el mètode és d'ordre $O(\Delta x)$. Aquest cas particular rep el nom de mètode de Godunov, o més conegut com a algorisme d'*upwind*, menys precís que el REA, però conserva la monotonia de la solució com veurem més endavant.

3.2.4 Plantejament final del model meteorològic: convergència i estabilitat

El pas final per deixar enllestit el model meteorològic és dir quin tipus de mètode s'ha d'utilitzar i com s'ha d'utilitzar per tal d'aconseguir que la solució física convergeixi i sigui estable. Per als resultats que vindran més endavant s'ha seguit el següent esquema d'integració per a les variables Q_i^{n+1} .

Estabilitat. Nombre de Courant L'equació d'advecció del set (6) ha d'obeir el criteri d'estabilitat CFL (Courant-Friedrichs-Lewy), donat per:

$$\eta = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (24)$$

Allà on η és el conegut nombre de Courant, i $c = 340 \text{ m/s}$ la velocitat del so. Aquest criteri estableix que la distància computacional que s'avança en un pas de temps no pot ser mai més gran que la distància física del domini establert. Per tant, per garantir l'estabilitat, s'ha de donar un determinat pas de malla adequat per a les condicions del problema, i una vegada definit Δx , la condició CFL proporciona el criteri de màxim per a Δt . Encara que haguem aplicat aquest criteri per a l'estabilitat en el càlcul en l'horitzontal, aquest criteri també s'ha d'aplicar en la vertical.

Convergència. Mètode de Runge-Kutta. Algorismes d'Euler Forward-Backward i REA Una vegada establert el criteri d'estabilitat, la forma més convenient de fer la integració del sistema a *segon ordre* és utilitzar el mètode multipassa de Runge-Kutta. Per a aquest cas, la complexitat de les equacions a integrar força a què primer haguem de considerar la integració de les variables Q_i^n sense calcular l'advecció. Per a aquest propòsit, primer s'han d'eliminar els termes d'advecció del set (6). Una vegada fet això, s'han d'aplicar els mètodes de discretització abans discutits per als forçaments no lineals no advectionals. El mètode de Runge-Kutta establert per a aquesta integració indica que primer s'han de fer evolucionar les variables en qüestió mitja passa de temps, és a dir, de $n \rightarrow n + 1/2 : \Delta t \rightarrow \Delta t/2$. Un detall a tenir en compte és que ja que inicialment es dona un estat bàsic $(\bar{\pi}, \bar{\theta})$, és convenient fer primer l'evolució de $R \equiv \{\pi', \theta'\}$, allà on R no conté els termes d'advecció:

$$R_{i,j}^{n+1/2} = R_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{2} F_{i,j}^n \quad (25)$$

Allà on F son els forçaments que apareixen en les expressions de π', θ' del set (6) que no son advectionals i que poden dependre de $u, w, \bar{\pi}, \bar{\theta}, \pi', \theta'$. Una vegada tenim $R_{i,j}^{n+1/2}$ hem de fer la integració corresponent al camp de vent $M \equiv \{u, w\}$. De manera similar a (25) s'aplica:

$$M_{i,j}^{n+1/2} = M_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{2} G_{i,j}^n \quad (26)$$

Allà on G és el conjunt de forçaments no advectionals per a les expressions de u, w del set (6). Una vegada es té $R_{i,j}^{n+1/2}, M_{i,j}^{n+1/2}$ s'obté la informació de $F_{i,j}^{n+1/2}$ i $G_{i,j}^{n+1/2}$. L'algorisme estableix que per trobar $R_{i,j}^{n+1}, M_{i,j}^{n+1}$ a segon ordre s'ha de seguir la següent passa:

$$R_{i,j}^{n+1} = R_{i,j}^n + \Delta t F_{i,j}^{n+1/2} \quad (27)$$

$$M_{i,j}^{n+1} = M_{i,j}^n + \Delta t G_{i,j}^{n+1/2} \quad (28)$$

La passa donada per les expressions (27) i (28) proporcionen informació extra sobre el conjunt $R_{i,j}^{n+1}$ i $M_{i,j}^{n+1}$ de manera que així el mètode és més precís, a ordre $O(\Delta t)^2$. Aquest és el conegut algorisme d'Euler Forward-Backward. Una vegada es té $R_{i,j}^{n+1}, M_{i,j}^{n+1}$, s'han d'advectar totes aquestes variables seguint l'esquema de l'algorisme REA exposat anteriorment per obtenir finalment $Q_{i,j}^{n+1}$. L'ordre en què s'advectin les variables no és del tot indiferent, el resultat pot variar en funció de si s'advecten primer els camps horitzontals i després els verticals que no si es fa en l'ordre invers. És recomanable primer advectar els camps verticals i després els

horitzontals. És molt important notar que una vegada s'han advectat les variables en una direcció s'ha d'utilitzar el resultat d'aquest càlcul per advectar de nou les variables en l'altra direcció. Aquesta tècnica es coneix com a *dimensional splitting* (separació dimensional).

4 Test del model meteorològic. Experiments de sensibilitat

Una vegada mostrat l'esquema d'aplicació del model meteorològic, la implementació mitjançant un programa de càlcul numèric (Python v 3.6) proporciona els resultats gràfics necessaris per a treure les observacions i conclusions necessàries per avaluar-lo. La solució gràfica obtinguda per als diferents tests del model mostren alguns trets interessants que cal destacar. Analtzarem cas per cas cadascun d'ells i els més destacables, comparant els resultats amb els tests clàssics realitzats en la literatura (Giraldo et. al, Straka et. al., Robert, Skamarock, veure referències [5], [6] i [7]), on s'aplica també el set (6).

4.1 Bombolla d'aire calent amb perfil Gaussià

El primer test en què s'ha aplicat el model meteorològic involucra una bombolla d'aire calent [5] amb perfil Gaussià en un entorn isentropic, és a dir, a temperatura potencial constant com a perfil de l'estat bàsic:

$$\theta'_0 = \begin{cases} A & \text{si } r \leq a \\ A \exp(-(r-a)^2/s^2) & \text{si } r > a \end{cases} \quad (29)$$

Allà on $A = 0.5 \text{ K}$, $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$, $a = 50 \text{ m}$, $s = 100 \text{ m}$ com a paràmetres de tamany de la bombolla i $x_{c0} = 500 \text{ m}$, $y_{c0} = 260 \text{ m}$ com a centre de la bombolla definida en $(x, z) \in [0, 1000] \times [0, 1500] \text{ m}$, $t \in [0, 800] \text{ s}$ i un estat bàsic que ve donat per

$$\bar{\theta} = 300 \text{ K} \quad (30)$$

$$\bar{\pi} = 1 - \frac{g}{c_p \bar{\theta}} z \quad (31)$$

Allà on l'expressió (31) es pot obtenir resolent l'equació (5). L'expressió (29) defineix una bombolla d'aire més calent que el seu entorn. Com que l'aire calent és menys dens aquest començarà a ascendir, a la vegada que la bombolla es comença a deformar degut al canvi de direcció i intensitat del camp de velocitat del vent (cisalla), formant uns vòrtex simètrics a l'esquerra i dreta de la bombolla. La figura 3 mostra els resultats de la simulació a diferents instants de temps, aplicant l'algorisme REA amb $\Delta x = \Delta z = 20 \text{ m}$ comparats amb càlculs extrets de la bibliografia [5]. A partir d'aquest punt es poden dur a terme diversos experiments de sensibilitat al model, presentats a continuació. A tots els casos s'han usat condicions de contorn de fluxe nul a totes les parets del domini.

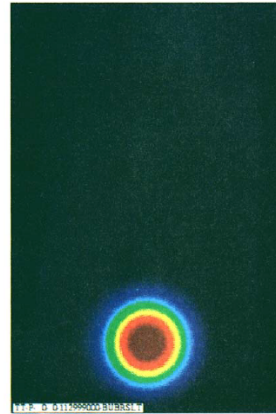
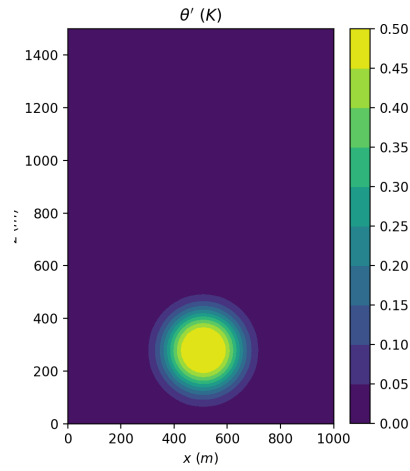


FIG. 3. Potential temperature distribution at $t = 0$ for a circular bubble with a Gaussian profile in an isentropic environment.

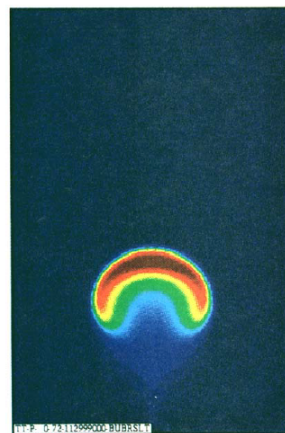
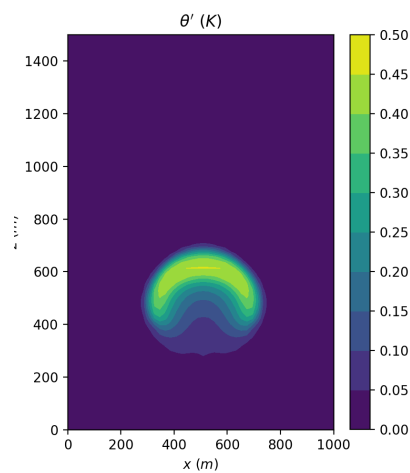


FIG. 4. Same as Fig. 3 but at $t = 6$ min.

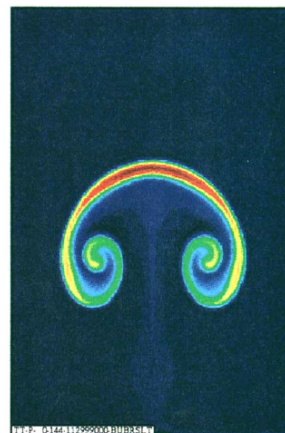
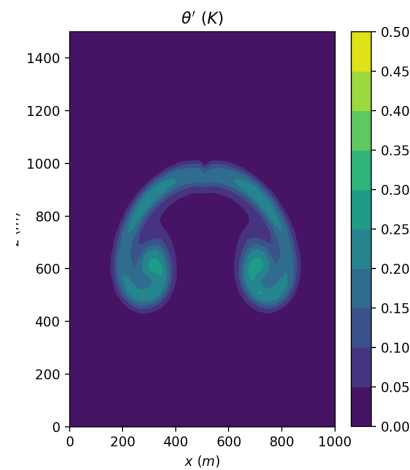


FIG. 5. Same as Fig. 3 but at $t = 12$ min.

Figura 3: (Imatges de l'esquerra) La bombolla quan $t = 0$ (figura superior), $t = 6$ (figura del mig) $t = 12$ minuts (figura inferior) usant l'algorisme REA comparada amb la bibliografia [Robert] (imatges a la dreta).

Els resultats de la figura 3 mostren poques discrepàncies entre els resultats obtinguts amb l'algorisme REA i amb els de la bibliografia en quant a estructura i evolució de la bombolla. Encara així, s'ha de fer notar les petites diferències al centre del domini en quant a estructura i intensitat degut a la discretització utilitzada i resolució aplicada.

4.1.1 Sensibilitat del model a la resolució

Amb el model meteorològic presentat abans s'han dut a terme diversos experiments de sensibilitat. Un d'ells és veure què passa quan augmentam la resolució de la malla. La figura 4 compara dos resultats: un amb menor i un amb major resolució.

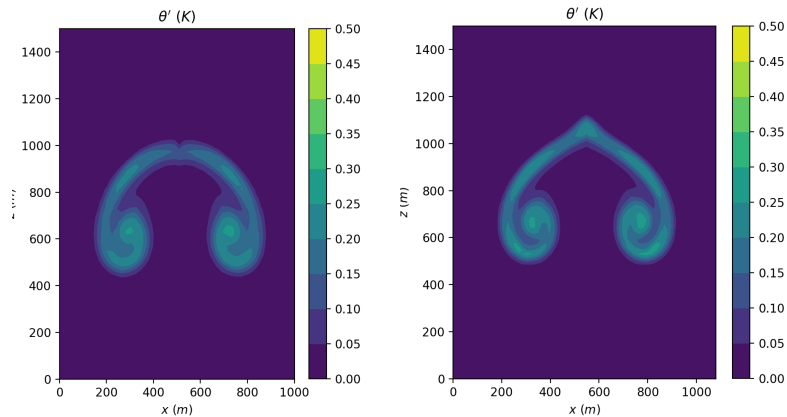


Figura 4: La bombolla quan $t = 775$ s. La figura de l'esquerra usa l'algorisme REA amb $\Delta x = 20 \text{ m} = \Delta z$ mentre que la de la dreta usa $\Delta x = 15 \text{ m} = \Delta z$. En ambdós casos s'usa $A = 0.5 \text{ }^\circ\text{K}$. Noteu les diferències al mig del domini.

El resultat de la figura 4 mostra certes diferències a l'hora de canviar la resolució del domini. Mentre que la figura de la dreta mostra un poc més d'estructura i un patró un poc menys difusiu que la de l'esquerra, al centre del domini s'observa que ambdues figures no mostren la mateixa estructura. La solució hauria de ser absolutament simètrica, fet que al centre del domini no es veu. Això es deu al fet d'haver usat un limitador del pendent com el minmod. Encara aquesta diferència, es pot veure que es conserva la monotonia de la solució i que aquesta evoluciona correctament.

4.1.2 Sensibilitat del model a la intensitat de la perturbació

Un altre interessant experiment que es pot dur a terme és veure què passa si es canvia la intensitat de la perturbació. La figura 5 mostra dos resultats: un amb una intensitat més forta i l'altre amb una intensitat més dèbil.

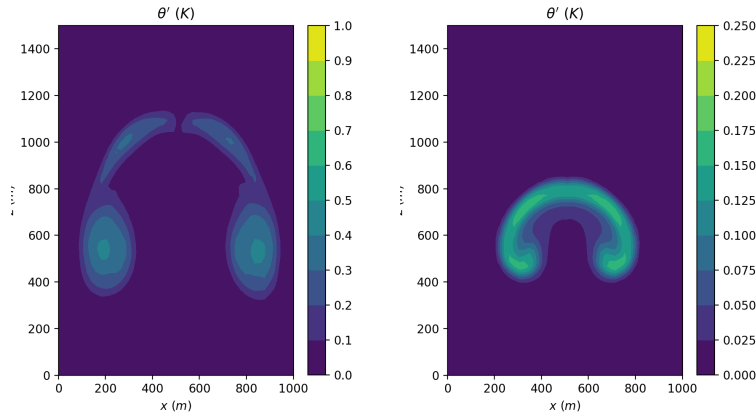


Figura 5: La bombolla quan $t = 775$ s. Ambdues figures usen l'algorisme REA amb $\Delta x = 20 \text{ m} = \Delta z$, però a l'esquerra s'ha usat $A = 1.0 \text{ K}$ i a la dreta té $A = 0.25 \text{ K}$

Segons els resultats de la figura 5, el comportament de la bombolla és diferent quan es modifica la intensitat de la perturbació. Si s'augmenta la intensitat, la bombolla és menys densa i per tant ascendeix més ràpid degut a que el corrent vertical és més intens. Com més diferència de temperatura hi ha entre la bombolla i l'ambient, més forta és la força ascendent resultant i més fort és el vent vertical que l'empeny, la qual cosa fa que hi hagi més deformació. Encara així, s'observa que a la figura de l'esquerra la bombolla és simètrica excepte al mig del domini, on es veu un patró de ruptura similar a la imatge de l'esquerra de la figura 4. En canvi, a la imatge dreta de la figura 5, l'estructura de la bombolla és completament idèntica als casos anteriors, però en aquest cas la intensitat de la perturbació disminueix, fet que provoca que el corrent ascendent sigui més dèbil i per tant, que la bombolla no ascendeixi tant degut al fet que en aquest cas no hi ha tant gradient de temperatura entre la bombolla i l'ambient.

4.1.3 Sensibilitat del model a l'esquema d'integració

Un altre fet interessant de veure és comparar els mètodes d'integració. La figura 6 compara els resultats que s'han obtingut utilitzant l'algorisme upwind (a 1er ordre) i l'algorisme REA de segon ordre.

A la figura 6 es mostren les grans diferències que hi ha entre usar un algorisme de primer ordre i un de segon ordre. A la imatge de l'esquerra es pot veure que l'evolució de la perturbació és correcta, però, com caldria esperar d'un esquema de primer ordre, mostra un patró molt difusiu: la bombolla perd molta intensitat molt més ràpid que quan s'usa l'algorisme REA, on s'aprecia més estructura i més intensitat.

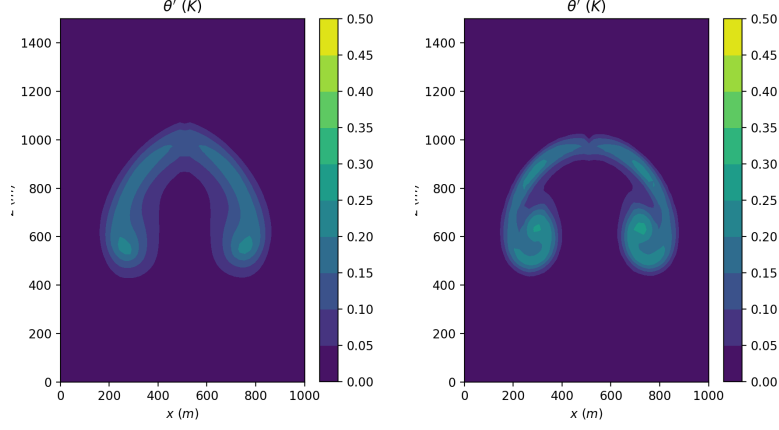


Figura 6: La bombolla quan $t = 775$ s amb $\Delta x = 20$ m = Δz . A la gràfica de l'esquerra s'ha usat el mètode *upwind* mentre que la de la dreta ha usat l'algorisme REA.

4.2 Bombolla calenta amb perfil sinusoidal

Un altre experiment que es pot realitzar és canviar el perfil de perturbació de temperatura. Per a aquest test s'ha usat una bombolla d'aire calent amb el següent perfil de temperatura:

$$\theta'_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } r > r_c \\ \frac{\theta_c}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi_c r}{r_c}\right) \right] & \text{si } r \leq r_c \end{cases} \quad (32)$$

Allà on $\theta_c = 0.5K$, π_c la constant trigonomètrica, $r_c = 250$ m i $(x_c, z_c) = (500, 350)$ m i $[x, z] \in [0, 1000] \times [0, 1000]$ m, $t \in [0, 700]$ s. Aquí ens referim de nou a una bombolla d'aire calent, de manera que la seva estructura i evolució serà similar a la discutida en l'apartat 4.1. La figura 7 compara els resultats obtinguts amb els de la bibliografia [1] i les figures 8 i 9 comparen la sensibilitat dels resultats a la resolució i al mètode d'integració respectivament.

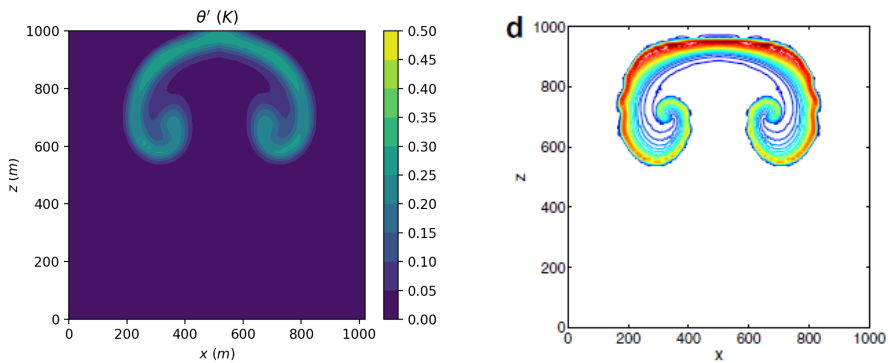


Figura 7: La bombolla quan $t = 11$ min. La imatge de l'esquerra usa l'algorisme REA amb $\Delta x = \Delta z = 15$ m. La imatge de la dreta correspon als resultats de la bibliografia [1] on s'usen contorns amb valors des de -0.05 fins a 0.525 en intervals de 0.025 K.

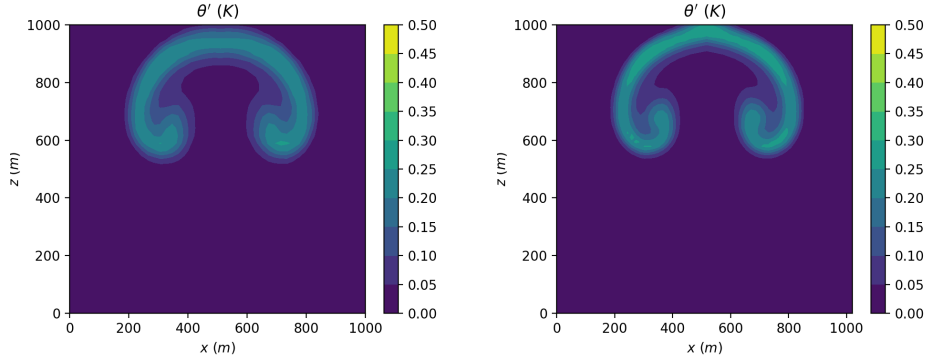


Figura 8: La bombolla quan $t= 675$ s. Ambdues figures usen l'algorisme REA però a l'esquerra s'usa $\Delta x = 20 \text{ m} = \Delta z$ mentre que a la dreta s'usa $\Delta x = 15 \text{ m} = \Delta z$.

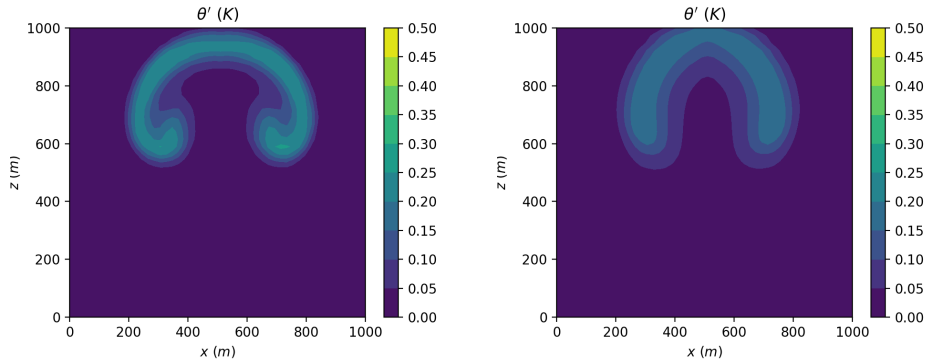


Figura 9: La bombolla quan $t= 675$ s. Ambdues figures usen $\Delta x = 20 \text{ m} = \Delta z$ però a la de l'esquerra s'usa el REA mentre que la de la dreta usa pendent nul·la (upwind)

El resultat de la figura 7 mostra que l'aplicació de l'algorisme REA és suficientment bo tant en estructura com en evolució. Aquí el mètode utilitzat en el present treball és de segon ordre i a la bibliografia s'usa un algorisme molt diferent del REA usant polinomis de fins a grau 10. Això fa que hi hagi certes discrepàncies en quant a la intensitat de la perturbació en els instants finals de la simulació. En quant als resultats de les figures 8 i 9 es pot fer una comparació similar als apartats 4.1.1 i 4.1.3 on es comparen les diferències als corresponents experiments de sensibilitat.

4.3 Bombolla calenta i freda (Warm-Cold bubble)

Un altre experiment interessant de fer és veure què passa quan combinam més d'una bombolla d'aire amb temperatura anòmala. Els experiments que s'han dut a terme involucren una bombolla calenta (grossa) i una freda (petita). La figura 10 compara diferents instants de temps amb els resultats de la bibliografia [5]. El perfil de les bombolles és idèntic a (29) i tenen $A_1 = 0.5 \text{ K}$, $a_1 = 150 \text{ m}$, $s_1 = 50 \text{ m}$, $(x_{c1}, z_{c1}) = (500, 300) \text{ m}$ com a paràmetres de tamany i centre per a la bombolla calenta (grossa) i $A_2 = -0.15 \text{ K}$, $a_2 = 0 \text{ m}$, $s_2 = 50 \text{ m}$ com a paràmetres de tamany $(x_{c2}, z_{c2}) = (560, 640) \text{ m}$ i centre per a la bombolla freda (petita). Per a aquest cas s'usa un domini espaiat i temporal que és $(x, z) \in [0, 1000] \times [0, 1500] \text{ m}$, $t \in [0, 800] \text{ s}$.

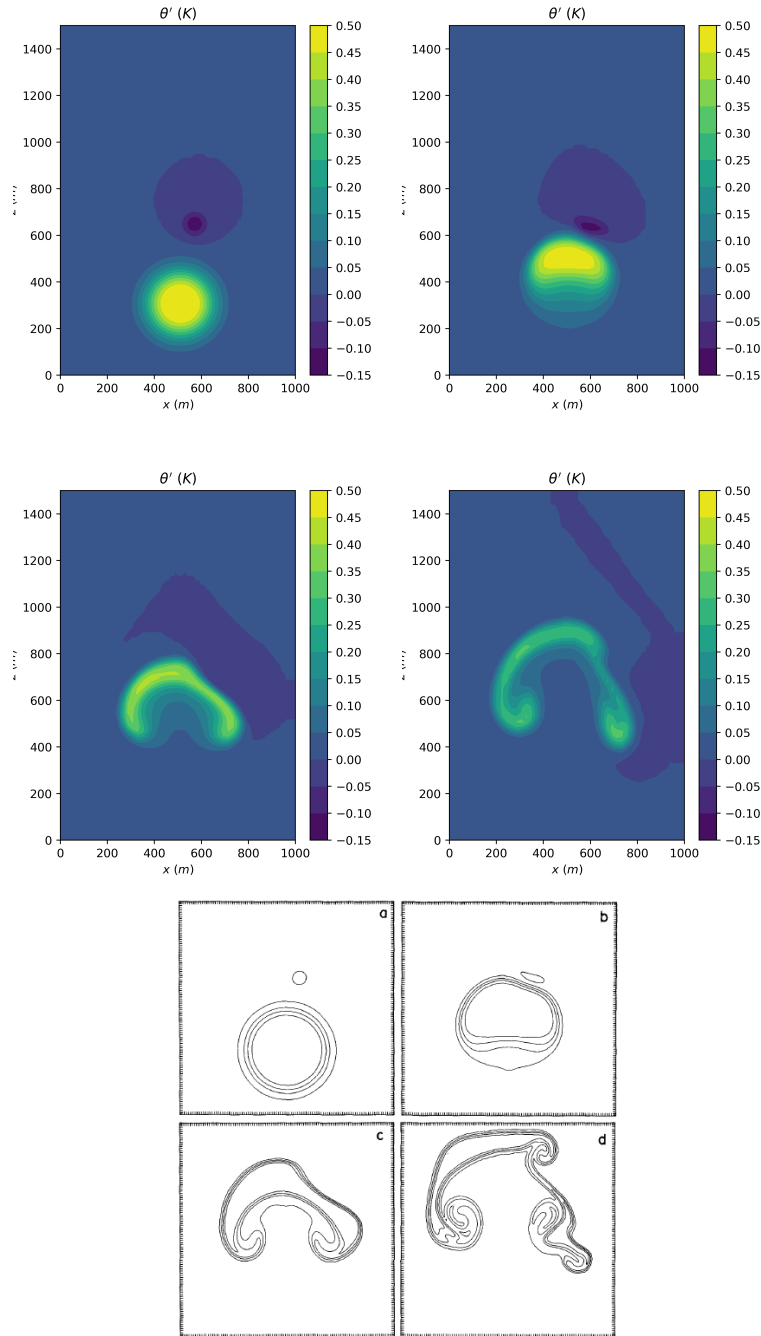


FIG. 8. Potential temperature distribution at $t = 0, 4, 7,$ and 10 min for a run with a large warm bubble and a small cold bubble as initial conditions as depicted in panel (a) for mesh length 10 m and time step 5 sec.

Figura 10: Distribució de la temperatura potencial quan $t = 0, 4, 7$ i 10 minuts. Les figures a color usen l'algorisme REA amb $\Delta x = 20 \text{ m} = \Delta z$ i es comparen amb els resultats de la bibliografia [5] amb un domini de $2 \text{ km} \times 2 \text{ km}$

En aquest cas, la bombolla calenta comença a ascendir mentre que la freda descendeix lentament, fins que ambdues bombolles xoquen, fet que provoca que la bombolla calenta i més grossa es comenci a deformar a mesura que va ascendent, creant una sèrie de vòrtex a la part dreta del domini degut a la cisalla del vent. Segons mostra la figura 10 els resultats obtinguts

amb l'algorisme REA son bons comparats amb els de la bibliografia [5] en quant a estructura i intensitat. Per a aquest cas no s'ha realitzat cap experiment de sensibilitat ja que el que es pretén veure aquí és com es comporta el model quan s'afegeixen més perturbacions dins el domini.

4.4 Ones gravitatòries inercials (Inertia Gravity Waves)

La simulació de les ones gravitatòries inercials no hidrostàtiques consisteix en l'evolució de la distribució de temperatura potencial a través d'un canal molt llarg, imposant condicions de contorn de continuïtat a les parets verticals degut a la naturalesa de l'aplicació de l'algorisme REA, mentre que els límits inferior i superior usen condicions de contorn de fluxe nul. En aquest test s'imposa un fluxe mitjà horitzontal constant de $\bar{u} = 20 \text{ m/s}$ en una atmosfera estratificada. El fet de que ara es tingui un fluxe inicial i un entorn estratificat amb aquestes condicions de contorn farà que la distribució de temperatura es vagi radiant cap a la dreta i l'esquerra. En aquest cas, quan es té una atmosfera estratificada convé definir la freqüència de Brunt-Väisälä es defineix a través de la temperatura potencial de la següent manera:

$$\mathcal{N}^2 = g \frac{d}{dz} (\ln \bar{\theta}) \quad (33)$$

L'expressió (33) prové de plantejar el balanç de forces que actuen sobre una bombolla d'aire dins l'atmosfera (o un altre medi). Dins aquest balanç hi actuen, principalment, la força d'Arquímedes com a força que desvia la bombolla de la posició d'equilibri a una certa altura z i la força de la gravetat com a força recuperadora. Si la bombolla augmenta de densitat en comparació amb l'entorn al pujar es diu que hi ha estratificació estable i la perturbació i torna a l'estat d'equilibri. Si la bombolla disminueix la seva densitat quan es mou de la posició d'equilibri es diu que hi ha estratificació inestable i en aquest cas es produeix una força resultant cap amunt coneguda com a força de flotabilitat (buoyancy) que fa que la bombolla pugui seguir avançant cap amunt de forma lliure. La definició de la freqüència de Brunt-Väisälä donada per (33) es pot extreure de la pròpia definició $\mathcal{N}^2 = -(g/\rho)d\rho/dz$ substituint per les variables termodinàmiques. Resolent:

$$\bar{\theta} = \theta_0 \exp\left(\frac{\mathcal{N}^2}{g}z\right) \quad (34)$$

Allà on $\theta_0 = 300 \text{ K}$ i $\mathcal{N} = 0.01 \text{ s}^{-1}$. La pressió d'Exner es pot obtenir resolent l'equació (5). El resultat és:

$$\bar{\pi} = 1 + \frac{g^2}{c_p \theta_0 \mathcal{N}^2} \left(\exp\left(-\frac{\mathcal{N}^2}{g}z\right) - 1 \right) \quad (35)$$

D'aquesta manera, l'estat bàsic de l'atmosfera per a aquest cas queda definit. La perturbació de temperatura potencial inicial es prepara com:

$$\bar{\theta} = \theta_c \frac{\sin\left(\frac{\pi_c z}{h_c}\right)}{1 + \left(\frac{x - x_c}{a_c}\right)^2} \quad (36)$$

Allà on $\theta_c = 0.01 \text{ }^\circ\text{C}$, $h_c = 10.000 \text{ m}$, $a_c = 5000 \text{ m}$, $x_c = 100.000 \text{ m}$ i π_c és la constant trigonomètrica. El domini en aquest cas es defineix com $(x, z) \in [0, 300.000] \times [0, 10.000] \text{ m}$ i $t \in [0, 3000] \text{ s}$. La figura 11 compara els resultats obtinguts amb l'algorisme REA de segon ordre amb resultats de la bibliografia [7]:

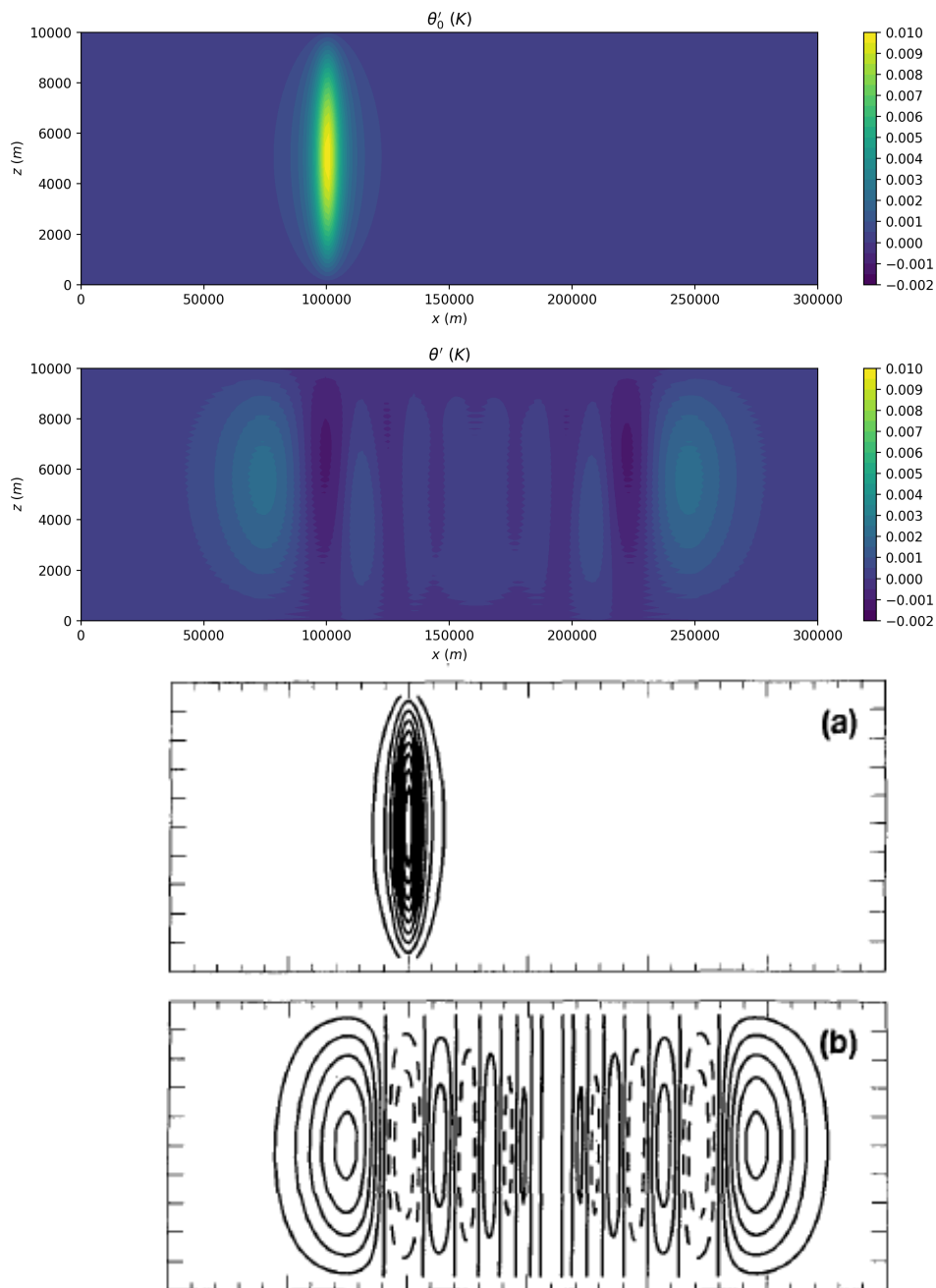


Figura 11: Figures superiors a color: distribució de la temperatura potencial quan $t=0,3000 \text{ s}$ usant l'algorisme REA de segon ordre. Figures inferiors: resultats de la bibliografia [7]. La figura a) mostra la distribució de temperatura a $t=0$ mentre que a figura b) mostra el resultat per a $t=3000 \text{ s}$ en contorns de $0.5 \times 10^{-3} \text{ K}$. Les línies discontinües marquen les zones on $\theta' < 0$.

Les imatges de la figura 11 mostren que els resultats obtinguts amb l'esquema d'integració del

REA son coherents comparats amb els que es poden trobar a la bibliografia [7]. Quan es deixa evolucionar la perturbació de temperatura, el corrent horitzontal desplaça la bombolla cap a la dreta. Com que la perturbació radia cap a la dreta i esquerra, s'observa un patró ondulatori en la temperatura. Encara així, l'algorisme REA limitat a segon ordre té un patró un poc més difusiu que el que mostra la bibliografia [7].

4.4.1 Sensibilitat a l'esquema d'integració

De manera similar als casos discutits anteriorment, s'han fet experiments de sensibilitat relacionats amb l'esquema d'integració utilitzat. La figura 12 mostra els resultats obtinguts.

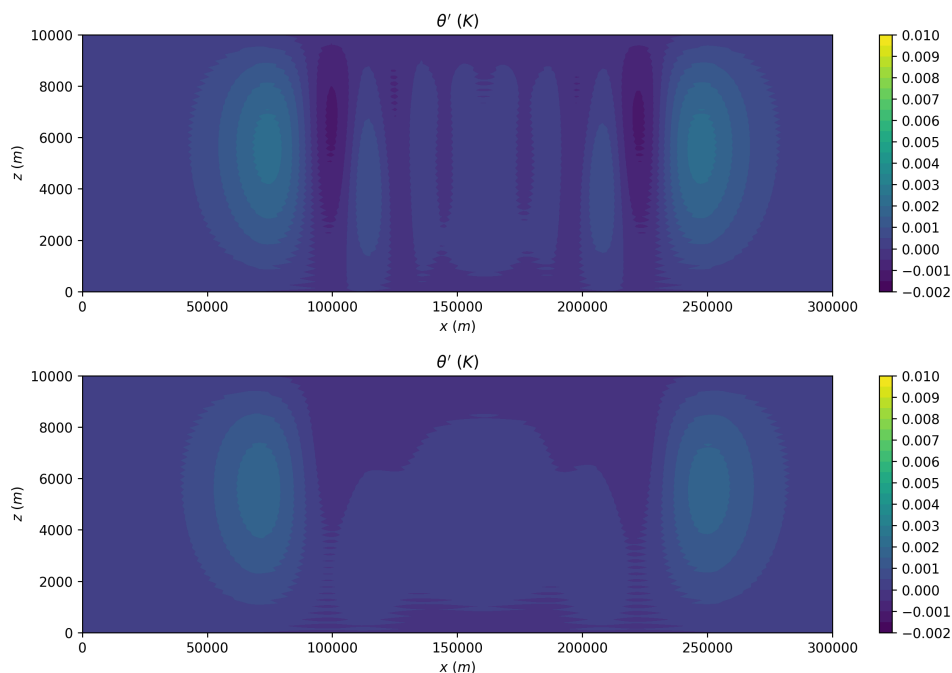


Figura 12: Distribució de la temperatura potencial a $t = 3000$ s. La figura superior usa l'esquema REA mentre que la inferior usa pendent nul (upwind).

A la figura 12, les diferències entre usar un esquema d'integració de primer ordre amb el de segon ordre son molt notables. Quan s'usa l'esquema REA, s'observa molta més estructura ondulatoria que quan es té pendent nul, en el qual ni tan sols s'observa comportament ondulatori en la distribució de temperatura. Aquest cas és molt representatiu de la importància del REA a ordre superior en la simulació de circulacions atmosfèriques.

4.5 Corrent de densitat (Density Current)

El corrent de densitat consisteix en simular la circulació que es produeix quan al medi s'incorpora una bombolla d'aire notablement fred en un entorn isentròpic. Com que l'aire de la bombolla és més fred que el del seu entorn, aquesta es començarà a enfonsar fins que xoca amb el terra i l'aire s'estén cap als dos costats del domini, creant uns vòrtex anomenats rotors de Kelvin-Helmholtz, per cisalla del vent. El perfil de temperatura que es proposa és paregut a (32) i ve donat per la següent expressió [1]:

$$\theta'_0 = \frac{\theta_c}{2} [1 + \cos(\pi_c r)] \quad (37)$$

Allà on $\theta_c = -15 \text{ }^\circ\text{C}$ és la intensitat de la perturbació, $r = \sqrt{\left(\frac{x - x_c}{x_r}\right)^2 + \left(\frac{z - z_c}{z_r}\right)^2}$

i $r_c = 1$. El domini que s'ha pres és $(x, z) \in [0, 19200] \times [0, 5000] \text{ m}$, excepte per a alguns tests de sensibilitat, i $t \in [0, 900] \text{ s}$, amb $(x_c, z_c) = (0, 3000) \text{ m}$ i $(x_r, z_r) = (4000, 2000) \text{ m}$ com a tamany de la bombolla. La figura 14 compara els resultats obtinguts amb l'algorisme REA amb $\Delta x = \Delta z = 100 \text{ m}$ amb els de la bibliografia [6] per a diferents instants de temps. Per a aquest test s'han usat condicions de contorn de fluxe nul a totes les parets del domini.

4.5.1 Sensibilitat a l'esquema d'integració

Per a aquest test de la bombolla freda s'ha pres un domini que és $(x, z) \in [-10000, 10000] \times [0, 5000] \text{ m}$, més petit que l'estàndar usat a la bibliografia [6]. D'aquesta manera es poden veure com es formen els dos rotors de Kelvin-Helmholtz, primordials en l'estructura d'aquest corrent. La figura 13 compara els resultats usant l'algorisme REA de segon ordre amb el mètode de pendent nul (Godunov o upwind, 1er ordre).

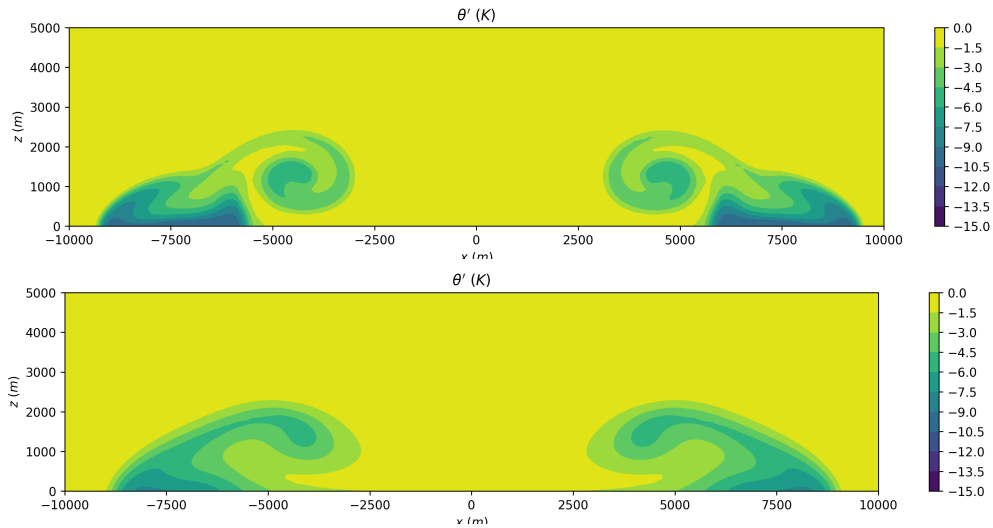


Figura 13: La bombolla quan $t = 600 \text{ s}$. Ambdues figures usen $\Delta x = 100 \text{ m} = \Delta z$ però a de dalt usa l'algorisme REA mentre que la inferior usa pendent nul.

Els resultats de la figura 13 mostren de nou la gran diferència que hi ha entre usar l'algorisme REA amb el mètode upwind. Amb l'algorisme REA els rotors de Kelvin-Helmholtz queden ben definits i amb molta més estructura que amb el mètode upwind. A més, es pot apreciar com el mètode de pendent nul és més difusiu que el REA, ja que en el primer es pot veure com la distribució de temperatura potencial assoleix valors més alts que amb el REA, fet que fa que el corrent perdi entitat i estructura.

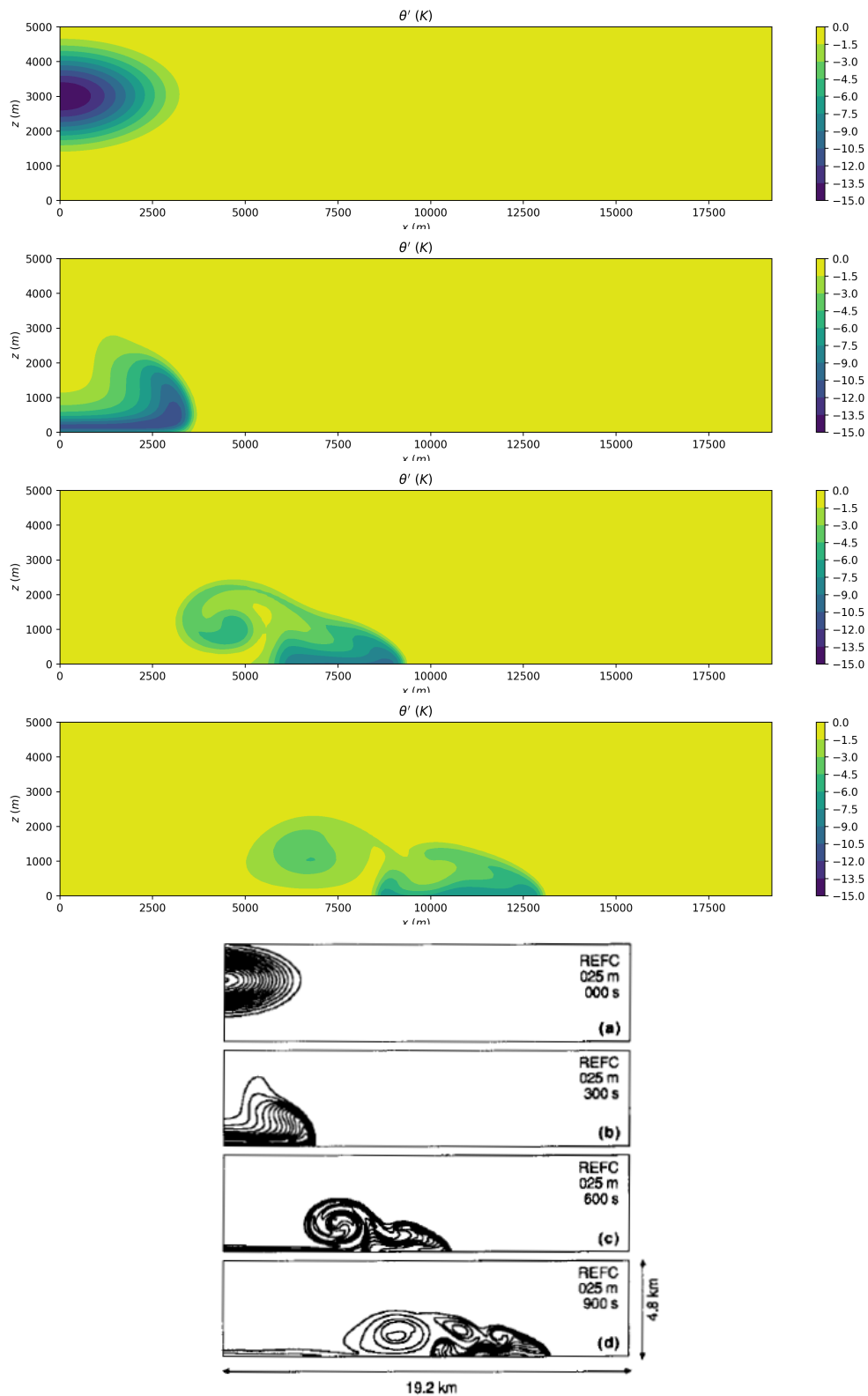


Figure 1. Plots of θ' at (a) 0, (b) 300, (c) 600 and (d) 900 s for the 250 m resolution compressible reference model solution. Contour interval (CI) is 1°C and the contours are centred around 0°C. The minimum value of θ' at 0 s is -16.624°C (note that only the lower left 0.75 of the domain is shown)

Figura 14: Comparació dels resultats obtinguts amb l'algorisme REA (figures a color) amb $\Delta x = \Delta z = 100 \text{ m}$ amb un coeficient de difusió de $\mu = 75 \text{ m}^2/\text{s}$ amb la bibliografia [6].

La comparativa de la figura 14 mostra de nou bons resultats de l'algorisme REA enfront dels resultats de la bibliografia. L'estructura i evolució del corrent de densitat quan la bombolla xoca amb el terra i es formen els rotors de Kelvin-Helmholtz és coherent amb la que es mostra en la bibliografia en els instants assenyalats. En aquest cas és molt important notar que la solució és molt sensible a les condicions de contorn inferiors del domini. L'algorisme REA també s'ha d'aplicar a les condicions de contorn, ja que si no es defineixen bé a un punt, els consecutius es veuran afectats de manera que la solució final deixaria de ser coherent.

4.5.2 Sensibilitat al coeficient de difusió

Un experiment de sensibilitat interessant de fer és provar què és el que passa quan modifiquem el coeficient de fricció dinàmic μ . La figura 15 compara els resultats amb difusió i sense ella.

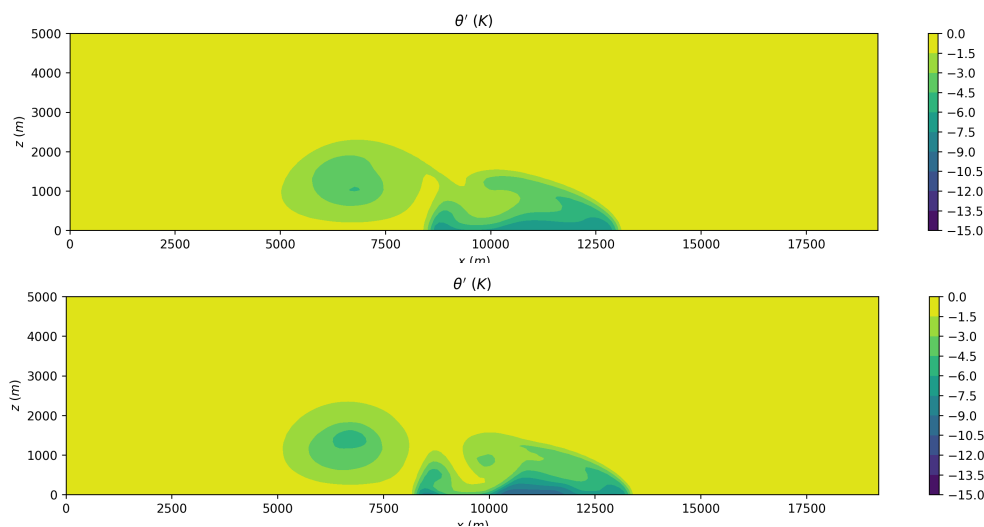


Figura 15: La bombolla quan $t = 870$ s. Ambdues figures usen l'algorisme REA amb $\Delta x = 100$ m = Δz però la superior usa $\mu = 75$ m²/s mentre que la inferior usa $\mu = 0$.

A la figura 15 s'aprecien les diferències que hi ha en la solució quan s'usa el coeficient de difusió. El fet d'utilitzar fricció (interna, del fluid, deguda a μ) fa que el corrent de densitat avanci de forma més lenta que si es decideix no usar el coeficient de difusió. A més, es pot apreciar com la intensitat de la perturbació en l'instant de temps esmentat a la figura és menor quan es té $\mu \neq 0$ que quan es té $\mu = 0$. Això també provoca diferències en l'estructura del corrent. Quan s'usa $\mu \neq 0$ el rotor de Kelvin Helmholtz principal no es separa de l'estructura principal, mentre que quan $\mu = 0$ es creen dues estructures ben diferenciades: el corrent de densitat principal que avança cap a la dreta i el rotor principal, el qual es converteix en una bombolla d'aire fred que rota i a la vegada avança cap a la dreta, però de forma més lenta.

4.5.3 Sensibilitat als contorns del domini

Un altre fet interessant de veure al aplicar el model és reduir el domini. En aquest cas s'ha usat $[x, z] \in [-10000, 10000] \times [0, 5000]$ m. La perturbació xoca amb les parets verticals del domini i els vòrtex comencen a ascendir per les parets. D'aquesta manera es pot veure com

actuen les condicions de contorn aplicades. La figura 16 mostra l'evolució de la distribució de temperatura potencial per a aquest cas.

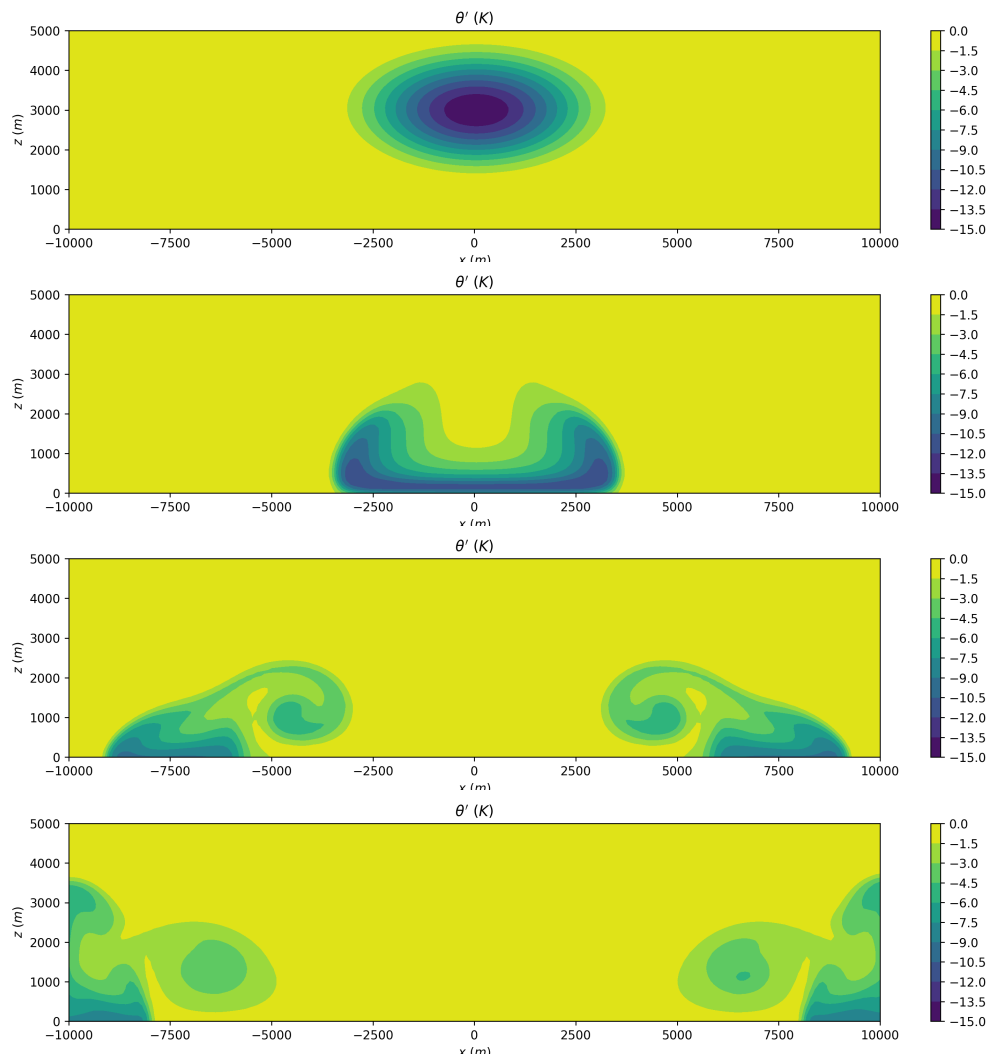


Figura 16: La bombolla a $t = 0, 300, 600, 870$ s. En totes les figures s'ha usat l'algorisme REA amb $\Delta x = 100 \text{ m} = \Delta z$ i $\mu = 75 \text{ m}^2/\text{s}$. Noteu la distribució de la temperatura als instants finals de la simulació.

A la figura 16 es pot apreciar l'estructura completa de la bombolla, fet que no s'observa en cap altra de les figures per a aquest cas. D'aquesta manera es pot veure com evoluciona el corrent cap als costats i si la integració dels termes d'advecció s'han fet de manera correcta. En aquest cas es pot veure que els corrents a les dues bandes del domini son completament simètrics i tenen la mateixa estructura. A diferència dels resultats comparatius amb la bibliografia, en aquest test s'ha volgut comprovar la validesa de les condicions de contorn a les parets laterals del domini. Quan el corrent xoca amb una paret vertical, aquest puja i poc a poc va perdent velocitat vertical per efecte de la força gravitatòria en un ambient estable, a més de la difusió.

4.5.4 Sensibilitat a la intensitat de la perturbació

Per a aquest experiment de sensibilitat s'ha modificat la intensitat de la perturbació de temperatura potencial. Els resultats es mostren a la figura 17.

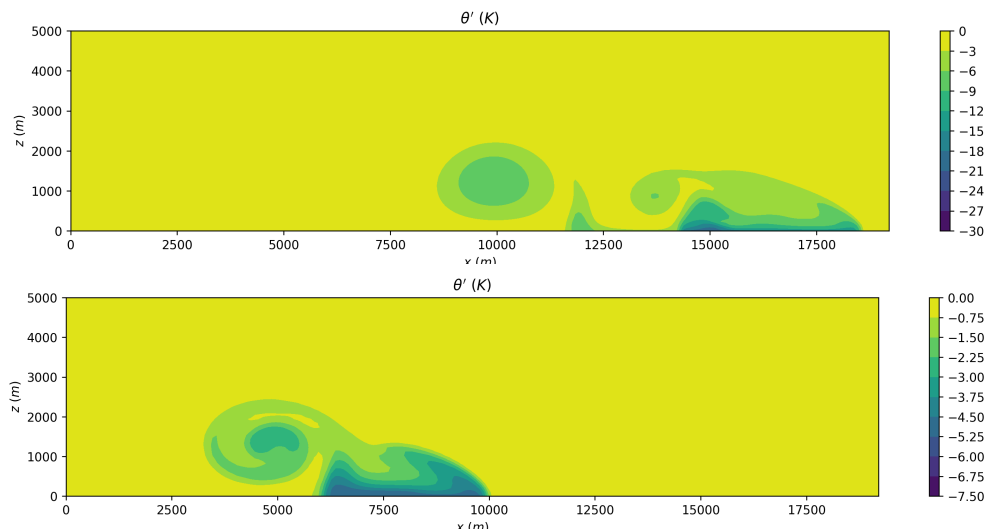


Figura 17: La bombolla quan $t = 900$ s. La figura superior usa un paràmetre d'intensitat $\theta_c = -30$ °C mentre que la figura inferior usa $\theta_c = -7.5$ °C. Noteu les diferències en l'avanç del corrent de densitat en ambdues figures.

La figura 17 mostra que quan es modifica la intensitat de la perturbació s'obté un corrent que viatja més ràpid cap a la paret vertical com més s'intensifica la perturbació. Això també té conseqüències estructurals. Quan es duplica la intensitat de la perturbació, es creen fins a dos rotors de Kelvin-Helmholtz ben diferenciats. El principal, el més gros, es separa de l'estructura principal i queda com una bombolla que va girant cap a la dreta, mentre que la resta de la perturbació avança ràpidament cap a la paret. Quan es minva la intensitat, el corrent avança de forma més lenta i només s'aprecia un rotor principal a l'estructura als instants finals de la simulació. El fet de canviar la intensitat de la perturbació té el mateix efecte que a l'esmentat abans per a les bombolles d'aire calent. En aquest cas, com més freda és la bombolla amb el seu ambient, més diferència de temperatura es produeix amb la qual cosa farà que sigui molt més densa. Per tant, la força de flotabilitat serà molt més intensa i provocarà un corrent descendent molt més fort que no pas si minvam la intensitat de la perturbació.

5 Comentaris i observacions

Encara que els resultats generals son coherents amb els que la bibliografia mostra, és cert que el model presentat queda limitat a l'ús acadèmic, pel qual es vol reflexar el comportament general d'un model meteorològic en forma d'experiments. És per aquest motiu que només s'usen esquemes d'integració de segon ordre. Per tal de millorar alguns aspectes en els resultats dels experiments, es pot augmentar la resolució espacial i temporal del model (si es té un ordinador suficientment potent ...). Això faria que es pogués apreciar més estructura a la distribució de temperatura. Hi ha casos en els que fins i tot s'observa una petita discrepància entre la posició

de la bombolla calculada amb l'algorisme REA i els resultats de la bibliografia (vegeu figures 4 i 8 per exemple). Això és degut a la possible manca de resolució del model matemàtic el qual només s'inclouen termes de fins a segon ordre. Els resultats que apareixen a la bibliografia usen models matemàtics, de discretització molt diferent al que hem utilitzat en el present treball, usen polinomis de grau 10. Encara així, s'ha demostrat en general que els resultats obtinguts de les simulacions atmosfèriques reproduïen suficientment bé el comportament de totes les circulacions de mesoescala considerades en el present treball.

Un altre experiment de sensibilitat que és molt recomanable fer és considerar la utilització d'un pendent de reconstrucció més complet en l'algorisme REA. A les figures 3 i 4 s'han vist diferències en els resultats, sobretot en la distribució de la temperatura al mig del domini espacial de la bombolla calenta. Aquestes diferències provenen del fet de que el pendent de reconstrucció es sobreestima en aquesta regió. És recomanable, enlloc d'usar el pendent minmod, usar l'anomenat pendent amb limitador MC, definit de la següent manera:

$$\sigma_i^n = \minmod \left[\left(\frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} \right), 2 \left(\frac{Q_i^n - Q_{i-1}^n}{\Delta x} \right), 2 \left(\frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\Delta x} \right) \right] \quad (38)$$

Aquesta definició del pendent de reconstrucció mescla tres tipus de pendents *Fromm*, *Beam-Warming*, *Lax-Wendroff* que s'entremesclen entre si i que corregeixen les diferències de fase i d'amplitud de les ones resultants pel problema d'advecció [3], [4].

Per a una completitud molt major del treball, es poden proposar molts més tests que aquí no es mostren per restriccions de llargària. Per exemple, com a proposta es pot veure què canviaria si per exemple la freqüència de Brunt-Väisälä, el vent bàsic mitjà o bé si per al cas de la bombolla calenta i freda s'afegeix una tercera bombolla. També es pot proposar fer una comparació dels resultats quan hi ha un corrent inicial a les perturbacions de temperatura. Si es volgués anar més enllà, es podria estudiar l'efecte de l'orografia al model plantejat amb una muntanya sola o bé amb una cadena de muntanyes [1] i, si es poseeix una major potència de càlcul, remodelitzar el model en 3D, ...

Referències

- [1] F. X. Giraldo, M. Restelli, *A study of spectral element and discontinuous Galerkin methods for the Navier-Stokes equations in nonhydrostatic mesoscale atmospheric modeling: Equation sets and test cases*. Journal of Computational Physics 227 (2008), 3849-3877.
- [2] George H. Bryan, J. Michael Fritsch, *A Benchmark Simulation for Moist Nonhydrostatic Numerical Models*. Monthly Weather Review 130 (2002), 2917-2927.
- [3] R. Romero, *Métodos de volúmenes finitos para problemas hiperbólicos*. <http://meteorologia.uib.eu/ROMU/>
- [4] Randall J. LeVeque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. <http://depts.washington.edu/clawpack/clawpack-4.3/book.html>
- [5] André Robert, *Bubble Convection Experiments with a Semi-Implicit Formulation of the Euler Equations*. Journal of the Atmospheric Sciences 50 (1993), 1865-1873.

- [6] J. M. Straka, R. B. Wilhelmson, L. J. Wicker, J. R. Anderson, K. K. Droegemeier, *Numerical solutions of a nonlinear Density Current: A Benchmark Solution and Comparisons* International Journal for Numerical Methods in Fluids 17, 1-22 (1993).
- [7] W. C. Skamarock, J. B. Klemp, *Efficiency and Accuracy of the Klemp-Wilhelmson Time-Splitting Technique*. Monthly Weather Review 122 (1994), 2623-2630.
- [8] D. J. Tritton, *Physical Fluid Dynamics*. 2nd ed. Oxford: Oxford Science Publications, 1988.
- [9] S. Alonso, 2014, *Tema 8: Dinámica de fluidos geofísicos: ondas e inestabilidades*, notes de classe, Física de Medios Continuos, 21021, Universitat de le Illes Balears, enviat maig 2014.