

Universitat de les Illes Balears



### GRADO DE MATEMÁTICAS

## Cadenas de Markov y Sistemas Multi-Robot

ANDRÉS JULIÁN ARCE ARELLANO

Óscar Valero Sierra

Tutores José Guerrero Sastre

Escuela Politécnica Superior Universidad de las Islas Baleares Palma, 7 de julio de 2017

rabajo Final de Grad

Quiero aprovechar este espacio para agradecer enormemente el apoyo de mis dos tutores Óscar Valero Sierra y José Guerrero Sastre, quienes me han guiado para llevar a cabo este Trabajo Final de Grado. Sus críticas constructivas y consejos a lo largo de todo este año, han sido fundamentales para el desarrollo de este proyecto. Además, estoy agradecido por haber compartido sus conocimientos y haberme brindado todas las herramientas necesarias para completar este trabajo de forma satisfactoria. Personalmente, fue una experiencia enriquecedora haber trabajado con mis dos tutores y reitero mi gratitud por haberme dado esta oportunidad.

# ÍNDICE GENERAL

Índice general										
Ín	Índice de figuras Acrónimos									
Ac										
Description										
K	Rost		Castellano)	IX iv						
	Abe	tract (Fr		IX V						
	1103	uact (Ei	Ignon)	л						
1	Intr	oducció	ón	1						
	1.1	Motiv	ación y objetivos	1						
	1.2	Estruc	ctura	2						
2	Cad	enas de	Markov Regulares	5						
	2.1	Matrio	ces estocásticas	6						
		2.1.1	Definiciones	6						
	2.2	Cader	nas de Markov	8						
		2.2.1	Procesos estocásticos	8						
		2.2.2	Matrices de transición	8						
		2.2.3	Procesos homogéneos	9						
		2.2.4	Cadenas de Markov	10						
		2.2.5	Matrices de transición en n pasos y ecuaciones de Chapman-							
			Kolmogorov	12						
	2.3	Matrio	ces estocásticas regulares	19						
		2.3.1	Aplicaciones iterativas	19						
		2.3.2	Convexidad	24						
		2.3.3	Cadenas de Markov regulares	26						
		2.3.4	Convergencia	27						
3	Aplicación a la Robótica									
	3.1	Intelig	gencia de enjambre	34						
		3.1.1	Conceptos preliminares	34						
		3.1.2	Modelo de comportamiento colectivo	34						
	3.2	Funci	ones basadas en umbrales de respuesta	36						
		3.2.1	Función de respuesta semi-logarítmica	37						
		3.2.2	Función de respuesta exponencial	39						

#### ÍNDICE GENERAL

Bi	Bibliografía								
	B.7	Script	cota posterior	74					
	B.6	Script	cota previa	73					
	B.5	Funció	ón cota previa	72					
	<b>B.4</b>	Funció	ón distancia	72					
	B.3	Script	gráfica distancia <i>vs</i> número de iteraciones	71					
	B.2	Script	gráfica estímulo <i>vs</i> número de iteraciones	70					
	B.1	Script	histogramas	69					
B	Implementación de Código								
	A.3	Conju	nto de vectores estocásticos $\mathcal T$	67					
	A.2	Cerrad	los, sucesiones y convergencia	66					
	A.1	Defini	ciones y ejemplos	63					
A	Espacios Métricos y Normados								
4	Conclusiones								
		3.5.5	Cota Posterior	55					
		3.5.4		52					
		3.5.3	El inverso de la distancia como un estimulo	49					
		3.5.2	Convergencia en función del estimulo fijado un umbral	48					
		3.5.1	Influencia de la probabilidad de transición $q$ en la convergencia	45					
	3.5 Evaluación de resultados			44					
		3.4.2	Condición de convergencia en la implementación	43					
		3.4.1	Algoritmo iterativo proporcionado por Banach	43					
	3.4	Descripción de la implementación							
		3.3.1	Función de respuesta como probabilidad de transición	41					
	3.3	.3 Modelo a partir de una Cadena de Markov							

iv

# ÍNDICE DE FIGURAS

3.1	Gráfica de funciones de respuesta semi-logarítmicas con diferentes umbra-	
	les ( $\theta$ = 1, 5, 10, 20, 50), y $n$ = 2	39
3.2	Gráfica de funciones de respuesta exponenciales con diferentes umbrales	
	$(\theta = 0.1, 0.25, 0.5, 0.5, 1.5)$ .	40
3.3	Histograma del vector <i>numConvergencias</i> con $q = 0.3$ , $0 < \theta \le 5$ con incre-	
	mentos de 0.5, $0 < 3 \le 1000$ con incrementos de 20. El vector <i>num</i> Conver-	
	gencias contiene 500 valores.	46
3.4	Histograma del vector <i>numConvergencias</i> con $q = 0.6$ , $0 < \theta \le 5$ con incrementos de 0.5, $0 < s \le 1000$ con incrementos de 20. El vector <i>numConver</i> -	
	gancias contiono 500 valoros	17
2 5	Histograms del vector num Convergencias con $a = 0.0, 0.4 \le 5$ con incre	47
5.5	Histografia del vector <i>numConvergencias</i> con $q = 0.9, 0 \le 0 \le 5$ con incre-	
	mentos de 0.5, $0 < s \le 1000$ con incrementos de 20. El vector <i>num</i> Conver-	
	gencias contiene 500 valores.	47
3.6	Gráfica estímulo <i>vs</i> número de iteraciones, $q = 0.6$ , $\theta = 0.5$ , $0 < s \le 1000$ con	
	incrementos de 20. Se han representado 50 pares de puntos de la forma	
	( <i>s</i> , <i>iteraci</i> ó <i>n</i> )	49
3.7	Gráfica distancia <i>vs</i> número de iteraciones, $q = 0.6$ , $\theta = 0.5$ , $0 < d \le 40$ con	
	incrementos de 2. Se han representado 20 pares de puntos de la forma	
	( <i>d</i> , <i>iteración</i> ).	50
3.8	Gráfica distancia <i>vs</i> número de iteraciones, $a = 0.6$ , $\theta = 0.5$ , $0 < d \le 100$	
	con incrementos de 2. Se han representado 50 pares de puntos de la forma	
	( <i>d</i> , <i>iteración</i> )	50
3.9	Gráfica distancia <i>vs</i> número de iteraciones, $q = 0.6$ , $\theta = 1.5$ , $0 < d \le 40$ en	
	incrementos de 2. Se han representado 20 pares de puntos de la forma	
	( <i>d</i> .iteración)	51
3 10	Gráfica distancia <i>us</i> número de iteraciones $a = 0.6$ $\theta = 1.5$ $0 < d < 100$	01
5.10	con incrementos de 2. Se han representado 50 pares de puntos de la forma	
	( <i>d</i> , <i>iteraci</i> ó <i>n</i> )	52

## **ACRÓNIMOS**

- **SMR** Sistema Multi-Robot
- **CMR** Cadena de Markov Regular
- CM Cadena de Markov
- **IE** Inteligencia de Enjambre
- AO Auto-Organización

### RESUMEN

#### **Resumen (Castellano)**

En los últimos años han habido numerosos estudios vinculados al desarrollo de algoritmos para la asignación de tareas con múltiples robots. El concepto de inteligencia de enjambre o colectiva (swarm intelligence) en insectos juega un papel importante en este aspecto y está asociado a la flexibilidad y eficiencia con la que dichos insectos llevan a cabo todas sus tareas. Este enfoque no solo permite introducir simplicidad en el diseño de un robot, sino también modelar un sistema de asignación de tareas multi-robot mediante una serie de parámetros que no son precisamente biológicos (umbrales de respuesta). Un umbral de respuesta es un valor que refleja cuándo un robot pasa a ejecutar una tarea, de hecho, éste pasa a realizar la tarea si el estímulo asociado a dicha tarea excede su umbral. El concepto de umbral de respuesta junto con el hecho de considerar un sistema multi-robot en la realización de una tarea, como un proceso sin memoria, es decir, no tener en cuenta el historial de decisiones que ha tomado un robot, sino solo lo que ha hecho en un instante anterior, son la clave para modelarlo como una Cadena de Markov (tipo de proceso estocástico), principal finalidad y contribución de este proyecto. Además, debido a la aplicación del Teorema de Punto Fijo de Banach a un tipo especial de cadenas de Markov, se introduce también el concepto de convergencia del modelo (Cadena de Markov). Dicho concepto es relevante en el campo de la robótica, especialmente, porque se puede conocer el comportamiento futuro de un sistema multi-robot con la particularidad que dicho comportamiento no cambia a partir de un cierto instante. Finalmente, este proyecto culmina con un conjunto de experimentos que ilustran un estudio de la convergencia del sistema en función de ciertos parámetros (umbral de respuesta  $\theta$ , estímulo s y probabilidad de transición q), obteniendo como principal resultado que la convergencia se obtiene en un tiempo considerablemente pequeño y con suficiente precisión, con una amplia influencia de los parámetros adoptados. En las conclusiones se da una visión global del trabajo, conceptos aprendidos, resultados obtenidos y por último se comenta el problema de asignación de tareas en un sistema multi-robot cuando el número de tareas a realizar es *n* (con  $n \ge 1$ ), cuyo análisis excede el objetivo de este proyecto.

#### Abstract (English)

In recent years there have been numerous studies which are related to the development of task allocation algorithms using multiple robots. The notion of swarm intelligence plays an important role in this issue due to the flexibility and efficiency by which insects carry out all of their tasks. This approach allows not only to introduce simplicity to the design of a robot, but also models a multi-robot task allocation system by means of several parameters beyond the biological framework (response thresholds). A response threshold is a value that reflects when a robot starts to perform a task, in fact, the robot will performe the task if the task-associated stimulus exceeds their threshold. The concept of response threshold, added to the fact of considering a multi-robot system when only a (only one) task has to be done, as a process without memory, namely, not keep in mind the decisions history that have been made by a robot but what it has done in a previous instant, are the key to model it as a Markov chain (a kind of stochastic process), main aim and contribution of this project. Moreover, the concept of model of convergence is included due to an application of Banach Fixed Point Theorem to a special Markov chain, the concept of model convergence is also included. This concept is relevant in the field of robotics, specially, because the future behaviour of a multi-robot system may be determined with the particularity that it does not change after a certain instant. Finally, this project ends with a set of experiments which show a survey of the convergence of the system depending on certain parameters (response threshold  $\theta$ , stimulus s and transition probability q), obtaining as a major result that the convergence is achieved with a time considerably short and with enough precision, with an extensive influence of the adopted parameters. Through the conclusions the task allocation problem with n ( $n \ge 1$ ) tasks is discussed, analysis that exceeds the aim of this project.



## **INTRODUCCIÓN**

#### 1.1 Motivación y objetivos

Andréi Andréyevich Márkov (14 de junio de 1856 - 20 de julio de 1922) fue un matemático ruso conocido por sus trabajos en la teoría de números y la teoría de probabilidades. Su trabajo teórico relacionado con los procesos en los que están involucradas componentes aleatorias (procesos estocásticos) darían fruto en un instrumento matemático que actualmente se conoce como Cadena de Markov (CM): secuencias de valores de una variable aleatoria en las que el valor de la variable en el futuro depende del valor de la variable en el presente, pero es independiente de la historia de dicha variable. Las cadenas de Markov tienen aplicaciones en campos tan dispares como la economía, la ingeniería, la investigación de operaciones y muchos otros.

El objetivo de este proyecto es el estudio de las cadenas de Markov para su posterior aplicación al campo de la robótica. Así mismo, se presta especial atención a las cadenas de Markov regulares, un tipo de proceso estocástico que permite establecer el concepto de convergencia o estabilidad de una CM a través del Teorema de Punto Fijo de Banach. De esta forma, como veremos posteriormente, se traslada la noción de convergencia de un proceso estocástico al ámbito de la robótica.

Con las cadenas de Markov se pueden realizar predicciones de comportamientos futuros. Denominando como estados a las distintas opciones que un experimento pueda presentar, se consigue conocer a corto y largo plazo el estado en el que se encuentra un proceso en un tiempo futuro. Además, gracias al concepto de convergencia, se podrá establecer que un proceso estocástico modelado por una Cadena de Markov Regular (CMR) es estable, si es convergente.

Con respecto a robótica, de entre los múltiples problemas a solucionar, este trabajo se centrará en la asignación de una tarea a realizar por un conjunto de robots, a partir de ahora definido como un Sistema Multi-Robot (SMR). Para modelar este tipo de

problemas como una CM son fundamentales dos aspectos: el concepto de Inteligencia de Enjambre (IE), el cual hace referencia a la forma en la que algunos insectos llevan a cabo sus tareas de forma organizada, y el supuesto de que se tratará como un proceso sin memoria. El último punto, se refiere a que no se tendrá en cuenta lo que haya hecho un robot en el pasado, sino simplemente el instante inmediatamente anterior.

En diversos artículos relacionados con esta temática (véase [1] [2]), se muestra un planteamiento de posibles algoritmos de asignación de tareas desde un punto de vista heurístico. Esto implica que aunque los algoritmos proporcionan una buena solución óptima (sin prueba de ello), su tiempo de ejecución pueda crecer exponencialmente. Incluso en aquellos casos en los que se alcance una solución razonablemente rápido, no hay prueba de que esto siempre ocurra así.

Por lo tanto, en este trabajo se aportará por un lado, un formalismo matemático para el modelado del problema de asignación de una tarea en un SMR y, por otro, determinar la evolución de dicho sistema. Además, también se introducirán conceptos relacionados con la estabilidad del sistema. La estabilidad, en este aspecto, se refiere a que la probabilidad de que un robot ejecute una acción, a partir de un instante no cambie. He aquí, la importancia de la convergencia en el modelo adoptado. Todo ello se realizará empleando los conceptos y formalismos de la IE.

#### 1.2 Estructura

Así pues, el Capítulo 2 seguirá principalmente la referencia [3] y desarrollará la teoría relacionada con las cadenas de Markov, y en particular, se tratará una CMR, a la cual se podrá aplicar el Teorema de Punto Fijo de Banach. Además, se incluirá una serie de resultados vinculados tanto con el teorema mencionado como con las CMR. Dichos resultados permitirán establecer no solo la estabilidad de una CM sino también un algoritmo para alcanzar dicha estabilidad.

Una vez expuesto cómo determinar la estabilidad de una CMR, el Capítulo 3 reunirá la teoría vista en el Capítulo 2 para aplicarla a un SMR. Este capítulo se verá apoyado en artículos como [1, 4]. Previamente, se incorporarán en este capítulo todos los conceptos básicos de un SMR basado en la inteligencia de enjambre, que como mencionamos anteriormente, es el paradigma al problema de asignación de tareas. Además, es el capítulo donde se expondrá la principal contribución de este trabajo: el modelado de un SMR a partir de una CM, aportando los conceptos de convergencia asentados en el Capítulo 2. Este capítulo culmina con un conjunto de experimentos y resultados que se han basado en diversas simulaciones (implementadas en el software de cálculo técnico Matlab), encauzadas hacia el estudio y simulación de la convergencia del modelo.

En el Capítulo 4, se hará una valoración global del proyecto, tanto en el marco teórico como en los resultados numéricos obtenidos. Así mismo, se hará una breve mención al problema de asignación de n (n > 2) tareas en un SMR, y a posibles líneas de trabajo (de investigación) futuro.

Finalmente, se ha añadido dos apéndices: uno, asociado a definiciones y resultados básicos de espacios métricos y normados, con el fin de hacer la lectura de este trabajo autocontenida, y otro, donde se explica y se detalla el código implementado en Matlab, empleado para el apartado de la evaluación de los resultados numéricos relacionados con la convergencia del modelo.



## **CADENAS DE MARKOV REGULARES**

Una variable aleatoria es una función  $X : \Omega \to \mathbb{R}$  sobre un espacio muestral finito  $\Omega$  que asigna un valor numérico al resultado de un experimento aleatorio. Ahora bien, estos experimentos pueden representar la evolución de un cierto proceso y por tanto, estaríamos añadiendo una componente temporal a cada variable aleatoria. Los procesos en los que interviene el azar, se denominan procesos estocásticos, los cuales se centran en el estudio de sistemas que evolucionan a lo largo del tiempo de acuerdo a leyes no deterministas. Así pues, el concepto de un proceso estocástico consiste en una sucesión de variables aleatorias indexadas con un número *n* que generalmente se identifica con el tiempo, esto es,  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ , donde  $\mathbb{N}$  denota el conjunto de enteros no negativos. De este modo, el número de personas que espera ante una ventanilla de un banco en un instante *n* de tiempo; el precio de las acciones de una empresa a lo largo de un año; el número de parados en el sector de la construcción a lo largo de un año, constituyen ejemplos de procesos estocásticos.

El concepto de proceso estocástico se puede extender de manera natural, permitiendo que los instantes de tiempo en los que se definen las variables aleatorias sean continuos, es decir,  $\{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ . No obstante, a lo largo de este trabajo nos ocuparemos exclusivamente de los procesos estocásticos dados por variables aleatorias que toman valores discretos y que son indexadas con un tiempo discreto, proceso estocástico que se conoce como *Cadena*.

El valor que toma una variable aleatoria en un instante de tiempo n depende del valor que haya tomado en todos los instantes anteriores. Sin embargo, un tipo de proceso estocástico en el que nos centraremos es aquél en el que el valor de una variable aleatoria en un instante n depende únicamente del valor que haya tomado ésta en el instante n - 1, dicho concepto es la noción de una CM. De esta forma, estamos interesados en conocer la probabilidad de que una variable tome un determinado valor, conociendo el valor que ha tomado en el instante inmediatamente anterior, no teniendo en cuenta la historia de dicha variable. Una pregunta que responderemos en el desarrollo de este capítulo es: ¿Existe un instante a partir del cual las probabilidades de que las variables aleatorias tomen un cierto valor sean siempre las mismas?; si es así, ¿en qué instante de tiempo se alcanza dicha circunstancia?. En otras palabras, nuestro objetivo será determinar una cierta estabilidad de la CM en cuestión.

Por lo tanto, el objetivo de este capítulo es abarcar el concepto de convergencia de una CM. Para abordar dicho concepto empezaremos mostrando algunas definiciones básicas formales de, por un lado, vectores y matrices estocásticas y, por otro, de CM. Seguidamente, definiremos las cadenas de Markov regulares y veremos que con este tipo de CM podremos conseguir nuestro propósito.

#### 2.1 Matrices estocásticas

Todos los conceptos y propiedades que exponemos en este capítulo pueden consultarse en [3]. Para empezar, vamos a introducir dos definiciones fundamentales las cuales utilizaremos a lo largo de todo el trabajo, tales como matrices estocásticas y vectores estocásticos.

#### 2.1.1 Definiciones

Sea  $\mathbb{R}^n$  un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial. A cada matriz  $\mathbf{P} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$  le podemos asociar la aplicación lineal  $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$  definida por  $p(x) = x\mathbf{P}$ . Denotamos por  $e^1 := (1, 0, ..., 0), ..., e^n := (0, ..., 0, 1)$  a los vectores de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ . Así, para cada i = 1, ..., n el vector fila  $p(e^i) := e^i \mathbf{P}$  es la fila i-ésima de la matriz  $\mathbf{P}$ .

En lo sucesivo, un vector  $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$  será llamado vector estocástico si

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \ y \ x_i \ge 0 \ \forall i \in \{1, ..., n\}.$$

El conjunto de vectores estocásticos en  $\mathbb{R}^n$  lo denotaremos por  $\mathcal{T}$ , es decir,

$$\mathcal{T} := \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \, \middle| \, x_i \ge 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}.$$

Finalmente, diremos que una matriz  $\mathbf{P} = (\mathbf{P}_j^i) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$  es una **matriz estocástica** si cada una de sus filas es un vector estocástico:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_{j}^{i} = 1 \quad \text{y} \quad \mathbf{P}_{j}^{i} \ge 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

**Proposición 2.1.1.** Sean  $\mathbf{P} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$  y  $p(x) := x\mathbf{P}$ . Entonces  $\mathbf{P}$  es estocástica si y solo si  $p(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{T}$ .

*Demostración.* Asumamos que **P** es estocástica. Recordemos que  $p(\mathcal{T}) = \{p(x) \mid x \in \mathcal{T}\}$ . Entonces si consideramos  $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{T}$ , debemos probar que  $p(x) \in \mathcal{T}$ . Como  $\mathbf{P}_i^i \ge 0 \quad \forall i, j \neq x_i \ge 0 \quad \forall i$ , entonces la coordenada *j*-ésima del vector  $p(x) = x\mathbf{P}$  es

$$(x\mathbf{P})_j = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{P}_j^i \ge 0 \quad \forall j$$

Por otro lado, la suma de las coordenadas del vector  $x\mathbf{P}$  es

$$\sum_{j=1}^{n} (x\mathbf{P})_{j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_{i} \mathbf{P}_{j}^{i} = \sum_{i=1}^{n} x_{i} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_{j}^{i} = \sum_{i=1}^{n} x_{i} = 1,$$

y por tanto  $p(x) \in \mathcal{T}$ .

Ahora supongamos que  $p(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{T}$ . En este caso la hipótesis es que  $p(x) \in \mathcal{T} \forall x \in \mathcal{T}$ , en particular para  $x = e^i$ . De esta manera, como la fila *i*-ésima de **P** la podemos escribir como  $e^i \mathbf{P} = p(e^i) \in \mathcal{T}$  para cada  $i \in \{1, ..., n\}$ , entonces concluimos que **P** es estocástica.

En estos términos, la Proposición 2.1.1, nos afirma que el subconjunto  $\mathcal{T}$  de  $\mathbb{R}^n$  es invariante por la aplicación *p* siempre que **P** sea una matriz estocástica. En otras palabras, si **P** es estocástica, el resultado de aplicar *p* a cualquier vector  $x \in \mathcal{T}$  será también un vector estocástico. Por tanto, según la Proposición 2.1.1, la aplicación

$$p: \quad \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T} \\ x \longmapsto x\mathbf{P}$$

está bien definida. En particular, si **P** es una matriz estocástica,  $p^2(x) = p(p(x)) = p(x\mathbf{P}) = x\mathbf{P}^2 \in \mathcal{T}$ , y por tanto  $p^2(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{T}$ . Por lo que se deduce de la Proposición 2.1.1 que cualquier potencia de una matriz estocástica es estocástica.

A continuación introducimos la definición de un tipo de matriz estocástica que nos será útil en algunas demostraciones posteriores.

**Definición 2.1.1.** Sea **P** una matriz estocástica,  $n \in \mathbb{N}$  y S un conjunto finito  $\{1, ..., n\}$ . Si  $i, j \in S$  diremos que i conduce a j, o que j es accesible desde i cuando existe  $k \ge 0$ tal que  $(\mathbf{P}^k)_j^i > 0$  y lo denotaremos como  $i \to j$ . Si  $i \to j$  y  $j \to i$ , diremos que i y jestán comunicados. Si i y j están comunicados para todo  $i, j \in S$ , entonces la matriz se denomina irreducible.

Observemos que la Definición 2.1.1 significa que es suficiente que para distintas potencias de **P** todos los elementos de *S* estén comunicados para que **P** sea irreducible; no tiene por qué darse para una única potencia. Veamos un ejemplo.

**Ejemplo 2.1.** Consideremos la siguiente matriz estocástica con  $S = \{1, 2\}$ :

$$\mathbf{P} = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1\\ 1 & 0 \end{array}\right).$$

Como

$$\mathbf{P}^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{P}^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \forall n \ge 1,$$

entonces la matriz **P** es irreducible ya que para diferentes potencias de **P** todos los elementos de *S* están comunicados.

#### 2.2 Cadenas de Markov

En esta sección, después de hacer una breve introducción a los procesos estocásticos y sus matrices de transición, presentaremos la definición de CM.

#### 2.2.1 Procesos estocásticos

Sea  $S = \{1, 2, ..., n\}$  un conjunto finito. Una sucesión de variables aleatorias  $\{X_n : \Omega \to S : n \in \mathbb{N}\}^1$  definidas sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , se denomina un *proceso estocástico* con valores en *S*. A los elementos de *S* se les llama estados y *S* es el espacio de estados del proceso, es decir, es el conjunto de todos los posibles valores que puede tomar cada una de las variables aleatorias  $X_n$ .

**Observación.** El conjunto *S* se refiere a los diferentes estados físicos en los que se encuentra un determinado proceso estocástico. Sin embargo, hemos establecido una biyección entre el conjunto de estados y el conjunto  $\{1, ..., n\}$ . De aquí que  $S = \{1, 2, ..., n\}$ .

Así, un *proceso estocástico* es una familia de variables aleatorias que proporciona una descripción de la evolución de un determinado proceso a través del tiempo. Estamos interesados en describir las leyes probabilísticas relacionadas a la evolución del proceso. De esta manera,  $X_0(x)$  representa el estado inicial del proceso y se dice que  $X_n$  está en el estado j en el instante n-ésimo cuando  $X_n(x) = j$ . A lo largo del trabajo escribiremos simplemente  $X_n = j$ .

En estos términos definimos  $\mathbb{P}(X_n = j)$  como la probabilidad de que  $X_n$  esté en el estado j en el instante n-ésimo y  $\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$  como la **probabilidad de transi-ción en un paso**, es decir, la probabilidad de que el proceso { $X_n$ } esté en el estado j en el instante n + 1, dado que en el instante n se encontraba en el estado i.

Como podemos observar las probabilidades condicionadas juegan un papel importante en la descripción de un proceso estocástico. Estas probabilidades se pueden representar de forma compacta mediante una matriz tal y como vemos en la siguiente subsección.

#### 2.2.2 Matrices de transición

Sea {*X<sub>n</sub>*} un proceso estocástico con un espacio de estados finito *S*. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $\mathbf{P}(n) := (\mathbf{P}(n)_i^i)_{i,j \in S}$  la matriz estocástica dada por

$$\mathbf{P}(n+1)_{i}^{i} := \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_{n} = i),$$

siempre que  $\mathbb{P}(X_n = i) > 0$  (ya que si no, la probabilidad condicionada no estaría definida). A la matriz estocástica  $\mathbf{P}(n)$  se le denomina matriz de probabilidades de transición en un paso o la **matriz de transición del proceso** { $X_n$ } desde el instante *n*-ésimo al instante (*n* + 1)-ésimo. Fijémonos en que al ser **P** una matriz estocástica, cada fila de **P** 

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Observemos que la componente temporal de las variables aleatorias y el cardinal del conjunto *S* coinciden. No obstante, mantendremos esta notación a lo largo del trabajo ya que debido al contexto no hay lugar a confusión.

es una distribución de probabilidad (vector estocástico).

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  la matriz  $\mathbf{P}(n+1)$  relaciona la distribución de las variables aleatorias  $X_n$  y  $X_{n+1}$  de la siguiente manera: si denotamos, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , por  $\pi(n) := (\pi(n)_i)_{i \in S}$  a la distribución de probabilidad de  $X_n$ , es decir,  $\pi(n)_i := \mathbb{P}(X_n = i) \forall i \in S$ , entonces considerando una partición de *S* según los posibles valores del proceso  $\{X_n\}$  en el paso n, podemos usar la fórmula de las probabilidades totales y obtenemos

$$\pi(n+1)_j = \mathbb{P}(X_{n+1} = j) = \sum_{i \in S} \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) \mathbb{P}(X_n = i) = \sum_{i \in S} \pi(n)_i \mathbf{P}(n+1)_j^i,$$

es decir,

$$\pi(n+1) = \pi(n)\mathbf{P}(n+1).$$
(2.1)

#### 2.2.3 Procesos homogéneos

En general, las probabilidades condicionadas podrían depender del instante n. Por ejemplo, la probabilidad de pasar al estado j dado que estoy en el estado i en el instante 0, podría ser diferente a la probabilidad de pasar al estado j dado que estoy en el estado i en el instante de tiempo 20. En lo sucesivo nos centraremos en aquellos procesos estocásticos cuya matriz de transición no depende de n, es decir, los denominados procesos estocásticos homogéneos. La siguiente definición introduce dicho concepto formalmente.

**Definición 2.2.1.** Un proceso estocástico  $\{X_n : \Omega \to S : n \in \mathbb{N}\}$  con un espacio de estados finito  $S = \{1, ..., n\}$  se dice que es homogéneo si la matriz de transición del proceso  $\{X_n\}$  es independiente de n, i.e., si existe una matriz estocástica  $\mathbf{P} = (\mathbf{P}_j^i), i, j \in S$  tal que para cualesquiera  $i, j \in S$  con  $\mathbb{P}(X_n = i) > 0$ , se tiene que

$$\mathbf{P}_{i}^{i} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En lo sucesivo para referirnos al elemento (i, j) de la matriz **P** escribiremos  $\mathbf{P}_{j}^{i}$  en lugar de  $\mathbf{P}(n+1)_{j}^{i}$ . Veamos un ejemplo.

**Ejemplo 2.2.** Supongamos  $S = \{1, 2\}$  y un proceso estocástico homogéneo  $\{X_n\}$  con probabilidades de transición representadas en la siguiente matriz estocástica:

$$\mathbf{P} = \left( \begin{array}{cc} 0.3 & 0.7 \\ 0.1 & 0.9 \end{array} \right).$$

Entonces, por ejemplo la entrada  $\mathbf{P}_2^1 = \mathbb{P}(X_1 = 2|X_0 = 1) = 0.7$ , nos dice que la probabilidad de pasar del estado 1 al estado 2 en un paso es 0.7. De la misma forma, por ejemplo,  $\mathbf{P}_2^1 = \mathbb{P}(X_8 = 2|X_7 = 1) = 0.7$ , es decir, la probabilidad de estar en el estado 2 en el instante 8, dado que en el instante anterior estaba en el estado 1 es 0.7. Con este ejemplo ilustramos que por razones de homogeneidad, nos referiremos simplemente a que la probabilidad de transición del estado 1 al estado 2 en un paso (no importa cual), es 0.7.

**Nota 2.1.** Debido a la homogeneidad ( $\mathbf{P}(n) = \mathbf{P} \forall n \in \mathbb{N}$ ), de la igualdad (2.1) deducimos que si un proceso {*X<sub>n</sub>*} empieza con una distribución inicial  $\pi(0)$  y **P** es su respectiva matriz de transición entonces

$$\pi(1) = \pi(0)\mathbf{P}$$

$$\pi(2) = \pi(0)\mathbf{P}^{2}$$

$$\vdots$$

$$\pi(n-1) = \pi(0)\mathbf{P}^{n-1}$$

$$\pi(n) = \pi(0)\mathbf{P}^{n}.$$
(2.2)

y por tanto

ción realizamos algunas observaciones relacionadas con la fórmula (2.2):

- La distribución de probabilidades de la variable aleatoria  $X_n$  queda completamente determinada a partir de la distribución inicial  $\pi(0)$  y de la matriz de transición **P**.
- A lo largo del proceso se ha ido avanzando en el tiempo hasta llegar al instante n, por lo que  $\mathbf{P}^n$  nos muestra en cierto modo, la evolución del proceso después de n instantes. Esta idea la desarrollaremos en detalle cuando hablemos de una matriz de transición en n pasos en la Subsección 2.2.5.

En definitiva, la evolución de un proceso estocástico homogéneo se reduce al estudio de su matriz de transición **P**.

A continuación nos centramos en las denominadas cadenas de Markov, un tipo de proceso estocástico que se caracteriza por la ausencia de memoria. Las CM serán el concepto fundamental del estudio de este proyecto.

#### 2.2.4 Cadenas de Markov

Hablando informalmente, una CM es un proceso aleatorio, en el cual si tenemos la información del estado presente del proceso, saber cómo llegó a dicho estado no afecta a las probabilidades de pasar a otro estado en el futuro. En el caso en que el espacio de estados es finito la definición precisa es la siguiente.

**Definición 2.2.2 (Cadena de Markov).** Un proceso estocástico  $\{X_n\}$  con un espacio de estados finito S se dice que tiene la propiedad de Markov si para todo  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \ge 1$  y para cualquier elección de estados  $i_0, i_1, \dots, i_{n+1}$  en S se tiene que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n)$$
(2.3)

siempre que las probabilidades condicionales estén definidas. Si  $\{X_n\}$  tiene la propiedad de Markov, se dice que  $\{X_n\}$  es una Cadena de Markov con espacio de estados S.

La siguiente definición alternativa de la propiedad de Markov la hemos incluido siguiendo la referencia [5], porque nos será útil cuando hablemos posteriormente de la matriz de transición en *n* pasos y de las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov.

**Definición 2.2.3 (Propiedad de Markov Equivalente).** *Para cualesquiera n, m*  $\in \mathbb{N}$  *con*  $n \ge 1$  *e*  $i_0, i_1 \dots, i_n, i_{n+m} \in S$ , *se tiene que* 

$$\mathbb{P}(X_{n+m+1} = i_{n+m+1} | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = \mathbb{P}(X_{n+m+1} = i_{n+m+1} | X_n = i_n).$$

Es decir, la probabilidad de pasar al estado  $i_{n+m+1}$  en el instante n + m + 1 depende solamente de la última observación, que no tiene por qué ser la del instante n + m.

En realidad, estamos hablando de una equivalencia entre definiciones, y además la Definición 2.2.3 parece ser más general, por lo que vamos a demostrar que, efectivamente, ambas definiciones son equivalentes.

Definición 2.2.3  $\Rightarrow$  Definición 2.2.2. Esta implicación se verifica tomando m = 0.

Definición 2.2.2  $\Rightarrow$  Definición 2.2.3. Procederemos por inducción sobre *m*. La Definición 2.2.3 es cierta para m = 0 ya que coincide con la Definición 2.2.2. Asumimos entonces que la Definición 2.2.3 es cierta para un *m* fijado y demostraremos que también se cumple la propiedad equivalente para m + 1. Denotando s := n + m + 2 y considerando una partición según los posibles valores de la CM en el instante n + m + 1, podemos aplicar la fórmula de las probabilidades totales:

$$\begin{split} \mathbb{P}(X_{s} = i_{s} | X_{0} = i_{0}, \dots, X_{n} = i_{n}) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \in S} (X_{s} = i_{s}, X_{n+m+1} = k) | X_{0} = i_{0}, \dots, X_{n} = i_{n}\right) \\ &= \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \in S} (X_{s} = i_{s}, X_{n+m+1} = k, X_{0} = i_{0}, \dots, X_{n} = i_{n})\right)}{\mathbb{P}(X_{0} = i_{0}, \dots, X_{n} = i_{n})} \\ &= \sum_{k \in S} \frac{\mathbb{P}(X_{s} = i_{s}, X_{n+m+1} = k, X_{0} = i_{0}, \dots, X_{n} = i_{n})}{\mathbb{P}(X_{n+m+1} = k, X_{0} = i_{0}, \dots, X_{n} = i_{n})} \frac{\mathbb{P}(X_{n+m+1} = k, X_{0} = i_{0}, \dots, X_{n} = i_{n})}{\mathbb{P}(X_{0} = i_{0}, \dots, X_{n} = i_{n})} \end{split}$$

Para cada término de la suma, en la primera probabilidad podemos aplicar la hipótesis de esta implicación, mientras que en la segunda probabilidad aplicaremos la hipótesis de inducción, obteniendo:

$$\mathbb{P}(X_s = i_s | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n)$$
  
=  $\sum_{k \in S} \mathbb{P}(X_s = i_s | X_{n+m+1} = k, X_n = i_n) \mathbb{P}(X_{n+m+1} = k | X_n = i_n).$ 

Notemos que en la suma, en la primera probabilidad hemos dejado la variable  $X_n$  que condiciona. Lo podemos hacer porque esto no afecta a la probabilidad de  $X_s = i_s$  condicionada a  $X_{n+m+1}$ . La razón por la cual la hemos dejado es para poder aplicar la fórmula

$$\mathbb{P}(A \cap B|C) = \mathbb{P}(A|B \cap C)\mathbb{P}(B|C)$$

para cualesquiera sucesos A, B y C. Por tanto,

 $\mathbb{P}(X_{n+m+2} = i_{n+m+2} | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n)$   $= \mathbb{P}(X_s = i_s | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n)$   $= \sum_{k \in S} \frac{\mathbb{P}(X_s = i_s, X_{n+m+1} = k | X_n = i_n)}{\mathbb{P}(X_{n+m+1} = k | X_n = i_n)} \mathbb{P}(X_{n+m+1} = k | X_n = i_n)$   $= \sum_{k \in S} \mathbb{P}(X_s = i_s, X_{n+m+1} = k | X_n = i_n)$   $= \sum_{k \in S} \mathbb{P}(X_{n+m+2} = i_{n+m+2}, X_{n+m+1} = k | X_n = i_n)$   $= \mathbb{P}(X_{n+m+2} = i_{n+m+2} | X_n = i_n)$ 

y por tanto la Propiedad de Markov Equivalente es cierta para m + 1.

Como una CM es un tipo de proceso estocástico, definiremos a continuación lo que es una CM homogénea.

**Definición 2.2.4 (Cadenas de Markov homogéneas).** Una Cadena de Markov  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  con un espacio de estados finito S es homogénea si la cadena  $\{X_n\}$  es un proceso estocástico homogéneo.

Recordemos que a lo largo del proyecto solamente trabajaremos con cadenas de Markov homogéneas y que por tanto  $\mathbf{P}_{j}^{i}$  es la **probabilidad de transición en un paso.** Veremos a continuación de manera más formal la definición de una matriz de transición en *n* pasos mencionada en la Subsección 2.2.3.

# 2.2.5 Matrices de transición en *n* pasos y ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

Una herramienta fundamental en el estudio de las cadenas de Markov lo constituyen las matrices de transición en *n* pasos ya que éstas nos muestran de cierta manera la evolución del proceso, hecho que ya se ha comentado en la Nota 2.1. Así, procedemos a definir la **matriz de transición en** *n* **pasos** como la matriz  $\mathbf{P}^{(n)} := \left(\mathbf{P}_{ij}^{(n)}\right)$  donde  $\mathbf{P}_{ij}^{(n)}$  denota la probabilidad de que el proceso pase del estado *i* al estado *j* tras transcurrir *n* instantes de tiempo. Así,

$$\mathbf{P}_{i\,i}^{(n)} = \mathbb{P}(X_{n+m} = j | X_m = i) \quad \forall n \in \mathbb{N} \ (n \ge 1), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

En particular, para cadenas de Markov homogéneas (que no dependen del tiempo) tenemos que

$$\mathbf{P}_{i\,i}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) \quad \forall n \in \mathbb{N} \ (n \ge 1),$$

es la probabilidad de que partiendo de *i* llegue al estado *j* tras *n* instantes de tiempo.

**Nota 2.2.** Por definición,  $\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}$ .

En el siguiente teorema, de acuerdo con la referencia [6], mostraremos la relación que existe entre la matriz de transición en un paso y la matriz de transición en *n* pasos.

**Teorema 2.2.1** (Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov). Si  $\mathbf{P} = (\mathbf{P}_j^i)$  es la matriz de transición (en un paso) de una Cadena de Markov con espacio de estados finito  $S = \{1, ..., n\}$ , entonces

$$\mathbf{P}_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in S} \mathbf{P}_{ik}^{(r)} \mathbf{P}_{kj}^{(s)}$$
(2.4)

para cualquier par de enteros no negativos r y s que satisfagan r + s = n.

*Demostración*. Procediendo de forma similar a la demostración de las Definiciones 2.2.2 y 2.2.3, para calcular  $\mathbf{P}_{ij}^{(n)}$  haremos una partición según los valores posibles de la cadena en el instante *r*, obteniendo

$$\mathbf{P}_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i)$$

$$= \sum_{k \in S} \mathbb{P} \left( X_n = j | X_r = k, X_0 = i \right) \mathbb{P}(X_r = k | X_0 = i)$$

$$= \sum_{k \in S} \mathbb{P} \left( X_n = j | X_r = k \right) \mathbb{P}(X_r = k | X_0 = i) \quad \text{(Prop. Markov equivalente)}$$

$$= \sum_{k \in S} \mathbb{P} \left( X_{r+s} = j | X_r = k \right) \mathbb{P}(X_r = k | X_0 = i)$$

$$= \sum_{k \in S} \mathbf{P}_{ik}^{(r)} \mathbf{P}_{kj}^{(s)}.$$

**Nota 2.3.** De la relación (2.4) se deduce que  $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{(r)}\mathbf{P}^{(s)}$  y por lo tanto

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{(n-1)}\mathbf{P}^{(1)}$$
$$= \mathbf{P}^{(n-2)} (\mathbf{P}^{(1)})^2$$
$$\vdots$$
$$= \mathbf{P}^{(1)} (\mathbf{P}^{(1)})^{n-1}$$
$$= (\mathbf{P}^{(1)})^n$$
$$= \mathbf{P}^n,$$

es decir, la matriz de transición en *n* pasos la podemos obtener como la potencia *n*-ésima de la matriz de transición en un paso **P**. De esta manera,  $\mathbf{P}_{ij}^{(n)}$  representa la entrada (i, j) de la potencia *n*-ésima de **P**.

**Nota 2.4.** Observemos que tanto en la Nota 2.1 como en la Nota 2.3, hemos llegado a las mismas conclusiones; en una, de forma algebraica y, en otra, empleando teoría de la probabilidad, respectivamente.

A continuación, demostraremos un resultado relacionado con las matrices irreducibles y con las Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, que nos será útil más adelante. Esta relación puede ser encontrada en [3] sin demostración. **Proposición 2.2.1.** Sea  $\mathbf{P} = (\mathbf{P}_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$  una matriz de transición en un paso de una Cadena de Markov con espacio de estados finito  $S = \{1, ..., n\}$  y  $\mathbf{P}_{ij}^{(N)}$  la entrada (i, j) de la potencia N-ésima de la matriz  $\mathbf{P}$ . Si  $\mathbf{P}$  es irreducible y existe un  $j \in \{1, ..., n\}$  tal que  $\mathbf{P}_{ij}^{(N)} \rightarrow \lambda$  cuando  $N \rightarrow \infty$ , entonces  $\lambda > 0$ .

*Demostración.* Para empezar, como **P** es una matriz estocástica todas sus entradas serán valores entre 0 y 1. Por tanto las entradas de las potencias sucesivas de **P** serán también números entre 0 y 1, nunca estrictamente negativos. En consecuencia, por reducción al absurdo supongamos que  $\lambda = 0$ . Como **P** es irreducible, existe  $k_0(i) > 0$  tal que  $\mathbf{P}_{ij}^{(k_0(i))} > 0$  (como *j* esta fijada, para cada *i* encontraremos un  $k_0 > 0$  de manera que  $\mathbf{P}_{ij}^{(k_0)} > 0$ ). Usando las Ecuaciones de Chapman-Komogorov, obtenemos que

$$\mathbf{P}_{jj}^{(N+k_0(i))} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_{jk}^{(N)} \cdot \mathbf{P}_{kj}^{(k_0(i))}.$$

En particular, para k = i

$$\mathbf{P}_{ji}^{(N)} \cdot \mathbf{P}_{ij}^{(k_0(i))} \le \mathbf{P}_{jj}^{(N+k_0(i))}.$$
(2.5)

Ahora bien, cuando  $N \to \infty$ ,  $\mathbf{P}_{jj}^{(N+k_0(i))} \to 0$  por la suposición que hemos hecho  $(\lambda = 0)$ . Como  $\mathbf{P}_{ij}^{(k_0(i))} > 0$ , entonces para que se satisfaga la desigualdad (2.5), ha de ser  $\mathbf{P}_{ji}^{(N)} \to 0$ . Por un lado, para cada j > 0,  $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_{ji}^{(N)} = 1$  por ser  $\mathbf{P}^{(N)}$  una matriz estocástica. Por otro lado, para cada i,  $\mathbf{P}_{ji}^{(N)} \to 0$  y por lo tanto, dado  $0 < \epsilon < 1$ , existe  $N_0 > 0$  tal que  $\mathbf{P}_{ji}^{(N)} < \frac{\epsilon}{n}$  para todo  $N \ge N_0$ . De esta manera,

$$\forall j > 0, \quad 1 = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_{ji}^{(N)} < \frac{\epsilon}{n} \cdot n = \epsilon < 1,$$

lo cual es una contradicción.

En general no es sencillo calcular las matrices de transición en n pasos. En el próximo ejemplo presentamos un caso particular en el cual esto se puede hacer explícitamente. Este ejemplo ha sido extraído de [3]. Sin embargo, aquí detallamos los cálculos que no son mostrados en dicha referencia.

**Ejemplo 2.3. (Cadena de Markov con dos estados)** Supongamos que necesitamos una cierta pieza de una máquina para nuestro trabajo. Cada vez que encendamos la máquina, ésta pueda estar rota o empezar a funcionar. Asumamos que el estado de la máquina se verifica al comienzo de cada día y que se dan los siguientes supuestos:

- (*i*) El primer día que se enciende la máquina, la probabilidad de que ésta funcione es *a*, y la probabilidad de que esté rota es b = 1 a.
- (*ii*) En el encendido de la máquina en un día cualquiera hay dos opciones:
  - Si la máquina está rota, al inicio del siguiente día ésta puede seguir dañada con probabilidad 1 – q o ser reparada ese día con probabilidad q.
  - Si la máquina funciona, al inicio del siguiente día se puede romper con probabilidad *p* o seguir funcionando con probabilidad 1 – *p*.

Bajo estos supuestos, a continuación describimos cómo evoluciona con el tiempo el estado de funcionamiento de la máquina.

Sea  $X_n$  el estado de la máquina al inicio del día *n*-ésimo. El espacio de estados tiene dos elementos (funciona o rota), digamos  $S = \{1, 2\}$  y  $X_n = 1$  si la máquina está rota y  $X_n = 2$  si funciona. El proceso es una CM porque lo que pasa en cada encendido depende únicamente del encendido anterior y es homogénea debido a que las probabilidades no dependen del día en el que se haya encendido. Además, fijémonos en que las variables son independientes ya que cada vez que encendemos la máquina, esta puede estar rota o empezar a funcionar. Entonces el proceso puede ser descrito por la condición inicial,

$$\mathbb{P}(X_0 = 1) = 1 - a, \quad \mathbb{P}(X_0 = 2) = a$$

y por la matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-q & q \\ p & 1-p \end{pmatrix}.$$
 (2.6)

Las probabilidades de que la máquina esté rota o funcione en el día *n*-ésimo, son las componentes del vector  $\pi(n) = (\mathbb{P}(X_n = 1), \mathbb{P}(X_n = 2))$  y aplicando la fórmula (2.2) obtenemos que

$$\begin{cases} \pi(n) = \pi(0)\mathbf{P}^n & \forall n \ge 1, \\ \pi(0) = (b, a). \end{cases}$$

Procedemos por tanto a calcular  $\mathbf{P}^n$ . Si p = q = 0, entonces

$$\mathbf{P}^n = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0\\ 0 & 1 \end{array}\right) \quad \forall n \ge 1.$$

Si p > 0 y q > 0, entonces **P** tiene dos valores propios diferentes y por tanto es diagonalizable. En este caso, sabemos que podemos escribir **P** como

$$\mathbf{P} = BDB^{-1},$$

donde *D* es una matriz diagonal (con los valores propios  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  de **P** en su diagonal) y *B* es una matriz donde cada columna es un vector propio asociado a los valores propios  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  de **P**. Además, la *n*-ésima potencia de *P* está dada por

$$\mathbf{P}^n = BD^n B^{-1}.$$

A continuación detallamos el cálculo de los valores propios de P.

$$\begin{vmatrix} 1-q-\lambda & q\\ p & 1-p-\lambda \end{vmatrix} = (1-q-\lambda)(1-p-\lambda) - pq = 0,$$

De aquí se tiene que

$$\begin{array}{rcl} 0 &=& 1-p-\lambda-q+pq+q\lambda-\lambda+p\lambda+\lambda^2-pq\\ &=& \lambda^2-2\lambda+1+(\lambda-1)q+(\lambda-1)p\\ &=& (\lambda-1)^2+(\lambda-1)q+(\lambda-1)p\\ &=& (\lambda-1)(\lambda-1+q+p), \end{array}$$

#### y por tanto

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1 - p - q.$$

Los vectores propios asociados a los valores propios obtenidos se calculan del modo siguiente: si las coordenadas de un vector v son  $v = (w_1, w_2)$ , entonces para que v sea un vector propio de valor propio  $\lambda$  se ha de cumplir que

$$\left(\begin{array}{cc} 1-q & q \\ p & 1-p \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \end{array}\right) = \lambda \left(\begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \end{array}\right),$$

de donde obtenemos que

$$(1-q)w_1 + qw_2 = \lambda w_1 \Rightarrow (1-q)w_1 - \lambda w_1 = -qw_2 \Rightarrow (1-q-\lambda)w_1 = -qw_2.$$

De aquí, se tiene que

si 
$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow v = (-q, -q) = -q(1, 1) \Rightarrow v_1 = (1, 1),$$
  
si  $\lambda_2 = 1 - p - q \Rightarrow v = (-q, 1 - q - 1 + p + q) = (-q, p) \Rightarrow v_2 = \left(1, \frac{-p}{q}\right).$ 

Entonces las matrices *B* y *D* son:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{-p}{q} \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - p - q \end{pmatrix}.$$

Calculemos ahora la inversa de *B* como  $B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot \text{Adj}(B^T)$ . El determinante de *B* es  $|B| = \frac{p+q}{-q}$  y la matriz adjunta de la traspuesta de *B* es

$$\operatorname{Adj}(B^{T}) = \begin{pmatrix} \frac{-p}{q} & -1\\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De esta manera,

$$B^{-1} = \frac{-q}{p+q} \begin{pmatrix} \frac{-p}{q} & -1\\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} p & q\\ q & -q \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{n} &= BD^{n}B^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{-p}{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-p-1)^{n} \end{pmatrix} \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} p & q \\ q & -q \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{-p}{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ q(1-p-q)^{n} & -q(1-p-q)^{n} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} p+q(1-p-q)^{n} & q-q(1-p-q)^{n} \\ p-p(1-p-q)^{n} & q+p(1-p-q)^{n} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{p+q} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ p & q \end{pmatrix} + (1-p-q)^{n} \begin{pmatrix} q & -q \\ -p & p \end{pmatrix} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

16

Concluimos que la distribución de probabilidades de  $X_n$  viene dada por:

$$\pi(n) = \pi(0)\mathbf{P}^{n}$$

$$= \frac{1}{p+q}(b,a)\left[ \begin{pmatrix} p & q \\ p & q \end{pmatrix} + (1-p-q)^{n} \begin{pmatrix} q & -q \\ -p & p \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{p+q}\left[ (bp+ap, bq+aq) + (1-p-q)^{n}(bq-ap, -bq+ap) \right].$$

Por tanto

$$\pi(n) = \frac{1}{p+q} \left( p + (1-p-q)^n (bq-ap), q + (1-p-q)^n (ap-bq) \right).$$
(2.7)

En particular, la probabilidad de que la máquina esté funcionando en el encendido *n*-ésimo, sabiendo que funcionó en el primer encendido es:

$$\mathbb{P}(X_n = 2 | X_0 = 1) = \pi(n)_2 = \frac{1}{p+q} \left( q + (1-p-q)^n (ap-bq) \right).$$
(2.8)

Vamos a estudiar el comportamiento asintótico de la cadena, es decir

$$\lim_{n\to\infty}\pi(0)\mathbf{P}^n.$$

- Si (*p*, *q*) = (0,0), entonces P<sup>n</sup> =Id ∀n, por tanto las probabilidades de que la máquina esté funcionando o esté rota son la misma en cada encendido.
- Si  $(p,q) \neq (0,0)$  y  $(p,q) \neq (1,1)$ , entonces p+q < 2 y as |1-p-q| = |1-(p+q)| < 1. Por lo tanto  $(1-p-q)^n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y, as i, la matriz  $\mathbf{P}^n$  converge a la matriz

$$W := \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} p & q \\ p & q \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$\lim_{n \to \infty} \pi(0) \mathbf{P}^n = \pi(0) W = \frac{1}{p+q} (b,a) \begin{pmatrix} p & q \\ p & q \end{pmatrix} = \frac{1}{p+q} (p,q).$$
(2.9)

• Si p = q = 1, entonces  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}$ 

$$\mathbf{P}^{n} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es par,} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

En este caso, el límite de  $\mathbf{P}^n$  cuando  $n \to \infty$  no existe.

En el siguiente ejemplo vamos a analizar un caso particular empleando el desarrollo del ejemplo anterior.

**Ejemplo 2.4.** Vamos a reproducir el ejemplo anterior con valores concretos de *a*, *b*, *p* y *q*. Entonces fijamos

$$a = 0.8$$
,  $b = 0.2$ ,  $p = 0.3$ ,  $q = 0.4$ .

Así, las probabilidades de que la máquina en el primer día funcione o no, son respectivamente

$$\mathbb{P}(X_0 = 1) = 0.2, \quad \mathbb{P}(X_0 = 2) = 0.8.$$

Según (2.6), la matriz de transición P viene dada por

$$\mathbf{P} = \left( \begin{array}{cc} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{array} \right).$$

Aplicando (2.7), la distribución de probabilidades de  $X_n$  es el vector de dos componentes

$$\pi(n) = \frac{1}{0.7} \left( 0.3 + 0.3^n \cdot (-0.16), \ 0.4 + 0.3^n \cdot 0.16 \right).$$

Si quisiéramos conocer las probabilidades de estar en un estado u otro, por ejemplo en el quinto día, tendríamos que:

$$\pi(5) = (0.43, 0.57),$$

es decir, la probabilidad de que la máquina esté rota en el quinto día es 0.43 y la probabilidad de que funcione en el quinto día es 0.57. Recordemos también que

$$\mathbb{P}(X_5 = 2 | X_0 = 2) = \pi(5)_2 = 0.57$$

es la probabilidad de que funcione en el quinto día, dado que haya funcionado en el primero. En otras palabras, un 57% de las veces se encenderá la máquina el quinto día sabiendo que se ha encendido en el primer día.

Como  $(p, q) \neq (1, 1)$ , según (2.9), el comportamiento asintótico del proceso viene dado por el vector

$$\lim_{n \to \infty} \pi(0) \mathbf{P}^n = \frac{1}{0.7} (0.3, 0.4) = (0.428, 0572).$$

De donde se deduce que, después de un número n suficientemente grande de días, el proceso se estabiliza, es decir, a partir de dicho día las probabilidades de que la máquina esté rota o funcione, no cambian. De forma explícita, sabemos que la evolución del proceso la podemos ver reflejada a través de  $\pi(n)$ , por tanto

$$\pi(1) = \pi(0)\mathbf{P} = (0.54, 0.46)$$
  

$$\pi(2) = \pi(0)\mathbf{P}^2 = (0.462, 0.538)$$
  

$$\pi(3) = \pi(0)\mathbf{P}^3 = (0.4386, 0.5614)$$
  

$$\pi(4) = \pi(0)\mathbf{P}^4 = (0.43158, 0.56842)$$
  

$$\pi(5) = \pi(0)\mathbf{P}^5 = (0.429474, 0.570526),$$

que como podemos ver tiende a la distribución de probabilidades estacionaria. Esto significa que a partir del 5 día, aproximadamente la probabilidad de que la máquina esté rota o funcione será siempre 0.43 y 0.57, respectivamente.

**Nota 2.5.** En los Ejemplos 2.3 y 2.4 hemos esbozado un concepto clave para el desarrollo de este trabajo: **estabilidad de una Cadena de Markov** (comportamiento asintótico). En la siguiente sección introduciremos los conceptos y definiciones que nos permitirán abarcar dicha cuestión de manera formal. Así mismo, deduciremos bajo qué condiciones se tendrá la estabilidad (también llamada convergencia) de una CM.

#### 2.3 Matrices estocásticas regulares

En esta sección abordaremos fundamentalmente un tipo de matrices estocásticas, las denominadas regulares, que proporcionarán buenas propiedades a una CM. Este concepto será importante porque es el que nos conducirá a la convergencia o estabilidad esbozada en los Ejemplos 2.3 y 2.4.

Con este objetivo recordaremos, siguiendo [3] y [7], algunos aspectos básicos de sistemas dinámicos discretos y análisis convexo.

#### 2.3.1 Aplicaciones iterativas

Sea (X, d) un espacio métrico y sea  $f : X \to X$  una aplicación continua sobre X. A la terna (X, d, f) se denomina sistema dinámico discreto. A continuación denotaremos por  $f^k : X \to X$ , con  $k \in \mathbb{N}$ , la composición de f con ella misma k veces. Asumiremos también que  $f^0(x) = x$ . Diremos que  $w \in X$  es un **punto fijo** de f si f(w) = w. Además, si para cada  $x \in X$ 

$$\lim_{k \to \infty} f^k(x) = w, \tag{2.10}$$

diremos que *w* es el **punto atractor global** de *f*. Para simplificar notación, en lugar de (2.10) escribiremos simplemente  $f^k(x) \rightarrow w$ .

En relación a los puntos fijos y atractores, se tiene la siguiente proposición.

**Proposición 2.3.1.** Sea (X, d, f) un sistema dinámico discreto. Las siguientes afirmaciones son ciertas:

- (*i*) Si w es un punto fijo de f, entonces w es un punto fijo de  $f^k \forall k \in \mathbb{N}$ .
- (*ii*) Si para algún  $x \in X f^k(x) \to w$ , entonces w es un punto fijo de f.
- (*iii*) Si w es el punto atractor de f, entonces w es el único punto fijo de f.
- (*iv*) Sea  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \ge 1$ . Un punto  $w \in X$  es el punto atractor de f si y solo si es el punto atractor de  $f^n$ .

*Demostración.* (*i*) Lo demostraremos por inducción. Para k = 1 es cierto por hipótesis. Supongamos que es cierto para k y probémoslo para k + 1. Como  $f^k(w) = w$  por hipótesis de inducción, entonces

$$f^{k+1}(w) = f(f^k(w)) = f(w) = w.$$

(*ii*) Si 
$$f^k(x) \rightarrow w$$
, entonces  $f^{k+1}(x) \rightarrow w$  y por continuidad se tiene que  $f^{k+1}(x) =$ 

 $f(f^k(x)) \rightarrow f(w)$  y por lo tanto, f(w) = w ya que el límite es único.

(iii) Si  $f^k(x) \to w$ , entonces por (ii), f(w) = w, es decir, w es un punto fijo de f. Supongamos que existe un punto  $w' \in X$  tal que f(w') = w', entonces por (i),  $f^k(w') = w'$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , es decir,  $f^k(w')$  es constante y así  $f^k(w') \to w'$ . Como  $f^k(x) \to w$  $\forall x \in X$ , en particular x = w' se tiene que  $f^k(w') \to w$ , hecho que implica que w = w'.

(iv) Asumimos que w es el punto atractor global de f. Si n = 1, entonces  $f^n(x) \rightarrow w$  por hipótesis. Sea n > 1. Como  $f^k(x) \rightarrow w$ , entonces dado  $\epsilon > 0$ ,

$$\exists k_0 > n : d(f^k(x), w) < \epsilon \quad \forall k \ge k_0.$$

Ahora bien, como  $k \ge k_0$ , entonces  $nk \ge k_0$ . Por lo tanto,

$$(f^n)^k(x) = f^{nk}(x) \to w.$$

Supongamos que *w* es el punto atractor de  $f^n$ . Como  $(f^n)^k(x) \to w$ , entonces dado  $\epsilon > 0$ , existe un  $k_0 > 1$  tal que

$$d\left(\left(f^{n}\right)^{k}(x),w\right) < \epsilon \quad \forall k \ge k_{0}.$$

Como  $k \ge k_0$ ,  $nk \ge k_0$ . Entonces si tomamos k' = nk, tenemos que

$$d\left(f^{k'}(x),w\right) < \epsilon \quad k' \ge k_0,$$

es decir,  $f^{k'}(x) \to w$  cuando  $k' \to \infty$ .

Vamos a presentar dos ejemplos relacionados con puntos fijos y con puntos atractores, que ilustran la Proposición 2.3.1.

 $\square$ 

#### Ejemplo 2.5.

• La aplicación  $f(x) = x^2 \operatorname{con} x \in (-1, 1)$  tiene un único punto fijo y, además, para cada  $x \in (-1, 1)$ 

$$f^k(x) = x^{2^k} \to 0.$$

Por tanto, f tiene como punto atractor el 0.

• La aplicación  $f(x) = -2x \forall x \in \mathbb{R}$  tiene un único punto fijo x = 0 y, además,

$$f^k(x) = (-1)^k 2^k x.$$

Por tanto, no existe el límite cuando  $k \rightarrow \infty$ . Así, *f* no tiene punto atractor.

**Nota 2.6.** Como podemos observar en el Ejemplo 2.5, no todas las aplicaciones tienen puntos atractores. No obstante, bajo ciertas condiciones, que veremos más adelante, sí que podremos asegurar no solo la existencia de un punto atractor sino también la unicidad.

Procedemos entonces a introducir una definición, la cual proporcionará una de las condiciones mencionadas en la Nota 2.6.

**Definición 2.3.1.** Una aplicación  $f : X \to X$  es contractiva, si existe una constante  $L \in [0, 1)$  (constante de contractividad), tal que  $d(f(x), f(y)) \le Ld(x, y) \ \forall x, y \in X$ .

Nota 2.7. Toda aplicación contractiva es continua.

Con la contractividad de una aplicación junto con la propiedad de que un espacio métrico sea completo, podremos asegurar la existencia y unicidad de un punto fijo tal y como el siguiente teorema demuestra.

**Teorema 2.3.1** (Teorema de punto fijo de Banach<sup>2</sup>). Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea  $f : X \to X$  una aplicación contractiva con constante de contractividad L. Entonces

- (*i*) Existe un punto  $w \in X$  que es el punto atractor de f.
- (*ii*) Se satisfacen las cotas de la estimación previa (2.11) y posterior (2.12) del error:

$$d(f^{n}(x), w) \leq \frac{L^{n}}{1 - L} d(f(x), x) \quad \forall n \in \mathbb{N} \ (con \ n \geq 1), \ \forall x \in X.$$

$$(2.11)$$

$$d(f^n(x), w) \le \frac{L}{1-L} d(f^{n-1}(x), f^n(x)) \quad \forall n \in \mathbb{N} \ (con \ n \ge 1), \ \forall x \in X.$$
(2.12)

(iii) La relación de convergencia está dada por

$$d(f^{n}(x), w) \le L^{n} d(x, w) \quad \forall n \in \mathbb{N} \ (con \ n \ge 1), \ \forall x \in X.$$

$$(2.13)$$

*Demostración*. Queremos demostrar que existe un punto  $w \in X$  tal que  $f^k(x) \to w$  $\forall x \in X$ . Para cada  $x \in X$ , sea  $x_k := f^k(x)$ , donde  $k \in \mathbb{N}$  con  $k \ge 1$ . Como

$$\begin{aligned} d(x_{k+1}, x_k) &= d(f^{k+1}(x), f^k(x)) = d(f(f^k(x)), f(f^{k-1}(x))) \le Ld(f^k(x), f^{k-1}(x)) \\ &= Ld(x_k, x_{k-1}), \end{aligned}$$

entonces iterando el proceso anterior tendríamos que

$$d(x_{k+1}, x_k) \le Ld(x_k, x_{k-1}) \le \dots \le L^k d(x_1, x_0) = L^k d(f(x), f^0(x))$$
$$= L^k d(f(x), x).$$

Por lo tanto para  $m > n \ge 1$ ,

 $d(x_m, x_n) \leq d(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+2}, x_{n+1}) + \dots + d(x_m, x_{m-1})$  (Des. triangular)

$$= \sum_{k=n}^{m-1} d(x_{k+1}, x_k)$$
  
$$\leq \sum_{k=n}^{m-1} L^k d(x_1, x_0)$$
  
$$\leq d(x_1, x_0) \sum L^k.$$

 $\sum_{k \ge n}$ 

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Hemos escrito este teorema tomando como referente [3] y [8], ya que hemos añadido las cotas del error (2.11) y (2.12) que en [3] no se mencionan. Sin embargo, hemos mantenido la tesis del punto atractor de *f* de la referencia [3].

De donde obtenemos que

$$d(x_m, x_n) \le \frac{L^n}{1 - L} d(x_1, x_0) = \frac{L^n}{1 - L} d(f(x), x).$$
(2.14)

La expresión (2.14) tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ , y entonces

$$\lim_{n\to\infty}d(x_m,x_n)=0,$$

lo que indica que  $\{x_k\}_{k\geq 0}$  es una sucesión de Cauchy. Ahora bien, como X es completo, existe  $w \in X$  tal que  $x_k \to w$ , es decir,  $f^k(x) \to w$ . Por (iii) de la Proposición 2.3.1, w es el único punto fijo de f.

Para demostrar (*ii*) utilizaremos (2.14). Como  $d(\cdot, x)$  es una aplicación continua  $\forall x \in X$  y tenemos (2.14), se deduce que

$$d(f^{n}(x), w) = d(x_{n}, w) \leq \frac{L^{n}}{1-L}d(x_{1}, x_{0}) = \frac{L^{n}}{1-L}d(f(x), x).$$

Lo cual da la cota previa (2.11).

Para obtener la cota posterior (2.12), notemos que por la contractividad de f,

$$d(x_{n+1}, x_n) \le Ld(x_n, x_{n-1}).$$
(2.15)

En general,

$$d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) \le L^k d(x_n, x_{n-1})$$

Probémoslo por inducción sobre *k*. Para k = 1 es cierto por (2.15). Supongamos que es cierto para k = r y comprobémoslo para k = r + 1. Como por hipótesis de inducción  $d(x_{n+r}, x_{n+r-1}) \leq L^r d(x_n, x_{n-1})$  entonces

$$d(x_{n+r+1}, x_{n+r}) \le Ld(f^{n+r}(x), f^{n+r-1}(x)) \le L^r \cdot Ld(x_n, x_{n-1}) = L^{r+1}d(x_n, x_{n-1}).$$

Por tanto, para  $q \in \mathbb{N}$  con  $q \ge 1$ ,

$$\begin{aligned} d(x_{n+q}, x_n) &\leq d(x_{n+q}, x_{n+q-1}) + d(x_{n+q-1}, x_{n+q-2}) + \dots + d(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq L^q d(x_n, x_{n-1} + L^{q-1} d(x_n, x_{n-1}) + \dots + L d(x_n, x_{n-1}) \\ &= (L + L^2 + \dots + L^q) d(x_n, x_{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^q L^k d(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq \sum_{k\geq 1} L^k d(x_n, x_{n-1}), \end{aligned}$$

y, en consecuencia,

$$d(x_{n+q}, x_n) \le \frac{L}{1-L} d(x_n, x_{n-1})$$
(2.16)

 $\square$ 

ya que *L* < 1. Tomando límites en (2.16) cuando  $q \rightarrow \infty$  tenemos que

$$d(f^{n}(x), w) = d(x_{n}, w) \le \frac{L}{1-L}d(x_{n}, x_{n-1}).$$

Finalmente, la relación de convergencia la obtenemos con el hecho de que w es un punto fijo de f, entonces  $f^{j}(w) = w$  para todo  $j \ge 1$ . En efecto,

$$d(f^{n}(x), w) = d(f^{n}(x), f^{n}(w)) \le Ld(f^{n-1}(x), f^{n-1}(w)) \le \dots \le L^{n}d(x_{0}, w).$$

**Nota 2.8.** Obsérvese que la demostración del Teorema 2.3.1 es constructiva; es decir, no solo probamos la existencia del punto fijo sino que además damos un método constructivo para aproximarlo con tanta precisión como se requiera. Esta metodología va a ser la utilizada en el Capítulo 3.

**Nota 2.9.** De acuerdo con [8], cada una de las desigualdades (2.11) y (2.12), nos permite hallar los errores al aproximarnos a *p* usando la sucesión de iterados  $\{x_k\}_{k\geq 0}$ . La estimación previa (2.11) muestra que, cuando empezamos en un punto inical  $x_0 \in X$ , el error de aproximación está completamente determinado por la constante de contracción *L* y el desplazamiento inicial  $d(x_1, x_0)$ . De manera similar, la estimación posterior (2.12) muestra que, para tener  $d(x_n, w) < \epsilon$ , necesitamos que el proceso pare en la primera iteración *n*-ésima para la cual la distancia entre dos iterados consecutivos sea como mucho  $\epsilon(1 - L)/L$ , es decir,

$$d(x_n, x_{n-1}) \leq \frac{\epsilon(1-L)}{L}.$$

Dicha nota formará parte de un algoritmo que se utilizará en la Sección 3.4 del Capítulo 3.

Veamos a continuación que el Teorema 2.3.1 se puede extender cuando una potencia de f es contractiva.

**Corolario 2.3.2.** Sea (X, d) un espacio métrico completo, con X acotado<sup>3</sup> y sea  $f : X \to X$ una aplicación continua. Si para algún  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \ge 1$ ,  $f^n$  es una contracción con constante de contractividad L, entonces f tiene un único punto atractor  $w \in X$  y, para  $k \in \mathbb{N}$  con  $k \ge n$  se satisface

$$d(f^k(x), w) \le diam(X)L^{\lfloor \frac{k}{n} \rfloor}.$$
(2.17)

*Demostración*. Por el Teorema 2.3.1, existe un único punto atractor  $w \in X$  de  $f^n$  y por (iv) de la Proposición 2.3.1, también w es el punto atractor de f. Por otro lado, como  $k \ge n$ , entonces existen enteros q y j, con  $0 \le j < n$  tales que k = qn + j, donde  $q = \lfloor \frac{k}{n} \rfloor$ . Observemos que si w es el punto atractor de f, por (iii) de la Proposición 2.3.1, w es el único punto fijo de f y por tanto  $f^m(w) = w$  para todo  $m \in \mathbb{N}$  con  $m \ge 1$ . Así, aplicando la contractividad de  $f^n$  obtenemos

$$d(f^{k}(x), w) = d(f^{qn+j}(x), f^{k}(w)) = d\left(f^{qn}(f^{j}(x)), f^{qn}(w)\right) = d\left(f^{qn}(x_{j}), f^{qn}(w)\right)$$

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Para ver una definición de espacio métrico acotado se puede consultar el Apéndice A.

$$= d\left(f^n\left(f^{(q-1)n}(x_j)\right), f^n\left(f^{(q-1)n}(w)\right)\right) \le Ld\left(f^{(q-1)n}(x_j), f^{(q-1)n}(w)\right)$$
$$\le \dots \le L^q d(x_j, w) = L^q d(f^j(x), w) \le L^{\left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor} \operatorname{diam}(X).$$

**Nota 2.10.** Observemos que la desigualdad (2.17), nos proporciona también una cota del error al aproximarnos a w. Sin embargo, si aplicamos el Teorema 2.3.1 a la aplicación contractiva  $f^n$ , entonces según la relación de convergencia (2.13), iterando k veces obtendríamos que

$$d\left((f^n)^k, w)\right) \le L^k d(x_0, w) \le L^q \operatorname{diam}(X)$$

ya que  $q = \lfloor \frac{k}{n} \rfloor \le k$  y L < 1. En definitiva, la cota dada por el Teorema 2.3.1 es más precisa que la dada por el Corolario 2.3.2, con la diferencia que una se expresa en términos de la contracción y la otra en términos de *f*, respectivamente. No obstante, lo incluimos en este trabajo de acuerdo con la referencia [3], ya que será necesario para una demostración posterior. Haremos referencia a este comentario en la Nota 2.14.

#### 2.3.2 Convexidad

En este apartado presentaremos algunas definiciones básicas y resultados en general sobre convexidad extraídas de la referencia [7]; conceptos necesarios para comprender un resultado posterior.

**Definición 2.3.2.** Sea *S* un subconjunto de un espacio vectorial *X*. Una combinación convexa de los elementos  $x_0, x_1, ..., x_k \in S$ , es una combinación lineal  $\sum_{i=0}^k \alpha_i x_i, \alpha_i \ge 0$  para  $i = 0, 1, ..., k y \sum_{i=0}^k \alpha_i = 1$ .

Según la definición anterior podemos escribir el conjunto de todas las combinaciones convexas de *S* como

 $S = \{x \mid x \text{ es una combinación convexa de } S\}$ 

o de manera matemática, si  $x_i \in S$  para cada  $i \in \{0, 1, ..., k\}$ , entonces

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mid \exists \; \alpha_i \geq 0, \; \sum_{i=0}^k \alpha_i = 1, \; x = \sum_{i=0}^k \alpha_i x_i \right\}.$$

En cuanto al conjunto de todas las combinaciones convexas S, mostramos el siguiente resultado.

**Proposición 2.3.2.** *El conjunto S de todas las combinaciones convexas de un conjunto S es convexo.* 

*Demostración.* Sean  $x, y \in S$ . Debemos probar que  $\lambda x + (1 - \lambda)y$  pertenece a S con  $0 \le \lambda \le 1$ , es decir, que  $\lambda x + (1 - \lambda)y$  es una combinación convexa de S. Como  $x, y \in S$ , entonces existen escalares  $\alpha_i \ge 0$  y  $\beta_j \ge 0$ , i = 0, ..., n, j = 0, ..., m tales que

$$x = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_i, \quad y = \sum_{j=0}^{m} \beta_j y_j$$
con  $x_i, y_j \in S \forall i, j \neq \sum_{i=0}^n \alpha_i = 1 \neq \sum_{j=0}^m \beta_j = 1$ . Entonces la expressión  $\lambda x + (1 - \lambda)y$ , con  $0 \le \lambda \le 1$ , viene dada por

$$\lambda x + (1 - \lambda)y = \lambda \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i} x_{i} + (1 - \lambda) \sum_{j=0}^{m} \beta_{j} y_{j}$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \lambda \alpha_{i} x_{i} + \sum_{j=0}^{m} (1 - \lambda) \beta_{j} y_{j}$$

lo cual es una combinación lineal de los elementos  $x_i$  e  $y_j$  de S. Además

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda \alpha_{i} + \sum_{j=0}^{m} (1-\lambda)\beta_{j} = \lambda \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i} + (1-\lambda) \sum_{j=0}^{m} \beta_{j}$$
$$= \lambda + (1-\lambda)$$
$$= 1$$

lo que nos dice que  $\lambda x$  + (1 −  $\lambda$ )y es una combinación convexa de S y por lo tanto  $\lambda x$  + (1 −  $\lambda$ )y ∈ S.

El siguiente resultado muestra que  $S \subseteq S$  cuando S es convexo.

#### **Proposición 2.3.3.** Si S es convexo y x es una combinación convexa de S, entonces $x \in S$ .

*Demostración.* Sea  $x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i$  una combinación convexa de *S*. Es decir,  $x_i \in S$  y  $\lambda_i \ge 0$ , i = 0, ..., n y además  $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$ . Debemos probar que  $x \in S$ . Lo haremos por inducción. Para n = 1 y n = 2 es cierto por ser *S* convexo. Supongamos que es cierto para n = r y consideramos la combinación convexa  $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{r+1} x_{r+1}$ .

Definimos 
$$\Lambda := \sum_{i=0}^{r} \lambda_i$$
. Entonces como  $1 - \Lambda = \sum_{i=0}^{r+1} \lambda_i - \sum_{i=0}^{r} \lambda_i = \lambda_{r+1}$ , tenemos que  
 $\left(\sum_{i=0}^{r} \lambda_i x_i\right) + \lambda_{r+1} x_{r+1} = \Lambda \left(\sum_{i=0}^{r} \frac{\lambda_i}{\Lambda} x_i\right) + (1 - \Lambda) x_{r+1}.$  (2.18)

Notemos que

$$\sum_{i=0}^{r} \frac{\lambda_i}{\Lambda} = \frac{\sum_{i=0}^{r} \lambda_i}{\sum_{i=0}^{r} \lambda_i} = 1,$$

entonces por hipótesis de inducción,  $\sum_{i=0}^{r} \frac{\lambda_i}{\Lambda} x_i \in S$ . Como  $x_{r+1} \in S$ , se sigue que el miembro derecho de la igualdad (2.18), es una combinación convexa de dos elementos de *S* y por tanto pertenece a *S* (ya que *S* es convexo).

Para cualquier conjunto dado que no sea convexo, con frecuencia es útil querer encontrar un conjunto que sea convexo y lo contenga. Teniendo presente que la intersección de cualquier número de conjuntos convexos es convexo, presentamos la siguiente definición. **Definición 2.3.3** (**Envoltura convexa**). Sea S un subconjunto de un espacio vectorial X. La envoltura convexa de S es el conjunto convexo más pequeño que contiene a S, es decir, es el conjunto

$$[S] = \cap \{K \subseteq X | S \subseteq K \ y \ K \ es \ convexo\}.$$

En relación a la envoltura convexa, probaremos la siguiente proposición.

**Proposición 2.3.4.** *La envoltura convexa* [*S*] *de un conjunto*  $S \subseteq X$  *es el conjunto de todas las combinaciones convexas de elementos de S.* 

*Demostración.* Sea S el conjunto de todas las combinaciones convexas de S. Queremos demostrar que S = [S]. Si  $x \in S$ , entonces x es una combinación convexa de elementos de S y como  $S \subseteq [S]$ , x será una combinación convexa de elementos de [S]. Ahora bien, como [S] es convexo por definición, entonces por la Proposición 2.3.3,  $x \in [S]$ . Por el contrario, como S es convexo (Proposición 2.3.2), en particular,  $[S] \subseteq S$ .

A la luz de los conceptos básicos expuestos sobre sistemas dinámicos discretos y análisis convexo, nos centraremos en el estudio de las matrices estocásticas regulares. Tal y como introdujimos al inicio de esta sección, las matrices regulares serán un concepto decisivo para la convergencia de una CM. A continuación introducimos dicho concepto.

### 2.3.3 Cadenas de Markov regulares

En este apartado introducimos la definición de una matriz estocástica regular. Dicha definición la utilizaremos ampliamente a lo largo del presente capítulo y además en la implementación formal del modelo presentado en la Subsección 3.3.1 del Capítulo 3.

**Definición 2.3.4.** Una matriz estocástica finita  $\mathbf{P}$  se dice que es regular si existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que todos los elementos de la matriz  $\mathbf{P}^{k_0}$  son distintos de cero.

Ejemplo 2.6. Consideremos la siguiente matriz de transición:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso, como

$$\mathbf{P}^2 = \left(\begin{array}{cccc} \frac{11}{18} & \frac{1}{9} & \frac{5}{18} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

entonces  $\mathbf{P}$  es una matriz regular ya que  $\mathbf{P}^2$  tiene todas las entradas diferentes de cero.

Es evidente que toda matriz estocástica regular es en particular irreducible; mientras que una irreducible no tiene porque ser regular (veáse Ejemplo 2.1).

**Definición 2.3.5** (Cadena de Markov regular). Una Cadena de Markov  $\{X_n\}$  es regular si su matriz de transición en un paso es regular.

# 2.3.4 Convergencia

En el Ejemplo 2.3, hablamos de la estabilidad de la CM que representaba el *n*-ésimo encendido de una máquina. A pesar de que no habíamos introducido formalmente ningún concepto de estabilidad, la idea es clara: a partir de un instante de tiempo *n* suficientemente grande el proceso se estabiliza, es decir, el vector de distribución a partir de dicho instante es constante, por lo que las probabilidades de transición no varían.

A continuación ya tenemos todas las herramientas necesarias para profundizar en la cuestión de la convergencia de una CM. Empezaremos mostrando algunos resultados sobre espacios métricos que emplearemos para tal fin.

Para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ , la aplicación  $|| \cdot ||_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$  definida por

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \tag{2.19}$$

define una norma en  $\mathbb{R}^n$ . De esta manera, para cada vector estocástico  $x \in \mathbb{R}^n$ , se tiene que  $||x||_1 = 1$ . Si  $||\cdot||_2$  es la norma Euclidea, entones  $||\cdot||_1 y ||\cdot||_2$  son equivalentes en el sentido de que

$$||x||_2 \le ||x||_1 \le n||x||_2. \tag{2.20}$$

**Lema 2.1.** *El espacio vectorial*  $\mathbb{R}^n$ *, con la norma*  $|| \cdot ||_1$  *es completo*<sup>4</sup>*.* 

*Demostración*. Sabemos que  $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2)$  es un espacio normado completo (i.e, el espacio métrico asociado es completo). Sea { $x_n$ } una sucesión de Cauchy respecto de  $||\cdot||_1$ , por la desigualdad (2.20), también lo es, de nuevo por la desigualdad (2.20), respecto de la norma  $||\cdot||_2$ , luego es convergente para esta norma, y también lo es respecto de la norma equivalente  $||\cdot||_1$ . Esto demuestra que el espacio ( $\mathbb{R}^n, ||\cdot||_1$ ) es completo.

**Nota 2.11.** En el Apéndice A se demuestra que el conjunto de vectores estocásticos  $\mathcal{T}$  es un subconjunto cerrado. Por tanto, como todo subconjunto cerrado de un espacio métrico completo, es completo (para una demostración véase la Proposición A.2.2 del Apéndice A), se deduce que el conjunto de vectores estocásticos  $\mathcal{T}$ , es un espacio métrico completo con la métrica asociada a la norma  $||\cdot||_1$ .

De este modo, la aplicación  $p: \mathcal{T} \to \mathcal{T}$  definida como  $p(x) = x\mathbf{P}$  (veáse Sección 2.1), donde  $\mathbf{P}$  es una matriz estocástica, es una aplicación definida sobre un espacio métrico completo, una de las hipótesis que requiere el Teorema 2.3.1. Nuestro objetivo ahora será, a través del siguiente teorema, demostrar que p es una aplicación contractiva, para finalmente poder aplicar el teorema de punto fijo mencionado.

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Para seguir la demostración fácilmente, se puede consultar el apartado A.2 del Apéndice A, donde se han introducido algunos conceptos sobre espacios métricos, normados, así como también la definición de una sucesión de Cauchy.

**Teorema 2.3.3.** Sea **P** una matriz estocástica  $n \times n$ . Sea  $K = \{R^1, ..., R^n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ , donde  $R^1, ..., R^n$  son las filas de **P**. Sea [K] la envoltura convexa de  $K^5$ . Por último, definimos

$$C := \frac{1}{2} \max_{i,j} ||R^{i} - R^{j}||_{1}$$

Entonces:

- (i)  $C \leq 1$ .
- (*ii*) Si todas las entradas de **P** son distintas de cero, entonces C < 1.
- (*iii*)  $diam_1([K]) := \sup_{x,y \in [K]} ||x y||_1 = 2C.$
- (*iv*) Sea  $p(x) = x\mathbf{P}$ . Entonces  $||p(x) p(y)||_1 \le C||x y||_1 \ \forall x, y \in \mathcal{T}$ .

*Demostración.* (*i*) Como cada fila de **P** pertenece a  $\mathcal{T}$ , entonces  $||R^i - R^j||_1 \le ||R^i||_1 + ||R^j||_1 = 2 \forall i, j \in \{1, ..., n\}$ . Por tanto,

$$C = \frac{1}{2} \max_{i,j} ||R^{i} - R^{j}||_{1} \le \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

Vamos a probar (*ii*) en dos pasos. Primero, demostraremos que si existieran dos vectores estocásticos *x*, *y* tales que  $||x - y||_1 = 2$ , entonces algunas componentes de dichos vectores serán cero; segundo, procederemos por reducción al absurdo ya que si  $||R^i - R^j||_1 = 2$ , entonces algunas componentes de dichos vectores serían cero, lo cual es una contradicción ya que todas las entradas de **P** son distintas de cero. Sean entonces  $x = (x_1, ..., x_n)$  e  $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathcal{T}$  tales que  $||x - y||_1 = 2 = ||x||_1 + ||y||_1$  y consideremos los siguientes conjuntos:

$$A := \{i \in \{1, \dots, n\} | x_i > y_i\} \quad \text{y} \quad B := \{1, \dots, n\} \setminus A.$$

Afirmamos que *A* y *B* son conjuntos diferentes del vacío. En efecto, supongamos por reducción al absurdo que  $A = \emptyset$ , entonces  $B = \{1, ..., n\}$  y así  $x_i \le y_i \forall i$ . Entonces  $y_i = x_i + \delta_i$ , con  $\delta_i \ge 0 \forall i$ . Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \delta_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \delta_i = 0$$

ya que  $x, y \in \mathcal{T}$ . Como  $\delta_i \ge 0$ , de lo anterior se deduce que  $\delta_i = 0 \forall i$  y por tanto,  $x_i = y_i \forall i$ , es decir, x = y. De aquí que  $||x - y||_1 = 0 \ne 2$ , lo cual es una contradicción. Ahora, si *B* es vacío,  $x_i > y_i \forall i$ . Entonces

$$1 = ||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| > \sum_{i=1}^n |y_i| = ||y_i||_1 = 1$$

y llegamos a una contradicción. Probaremos ahora que necesariamente algunas componentes de *x* e *y* son nulas. En efecto,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = 2 = ||x - y||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i \in A} (x_i - y_i) + \sum_{i \in B} (y_i - x_i),$$

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Recordemos que debido a la Proposición 2.3.4, [K] no es más que el conjunto de todas las combinaciones convexas de las filas  $R^1, \ldots, R^n$ .

así, descomponiendo el miembro izquierdo de la primera igualdad, obtenemos

$$\sum_{i \in A} x_i + \sum_{i \in B} x_i + \sum_{i \in A} y_i + \sum_{i \in B} y_i = \sum_{i \in A} x_i - \sum_{i \in A} y_i + \sum_{i \in B} y_i - \sum_{i \in B} x_i$$

y por tanto

$$2\left(\sum_{i\in A} y_i + \sum_{i\in B} x_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i\in A} y_i + \sum_{i\in B} x_i = 0.$$

En particular,  $y_i = 0 \forall i \in A$  y  $x_i = 0 \forall i \in B$ . Es decir, algunas componentes de x y de y son cero. Finalmente, si suponemos que  $||R^i - R^j||_1 = 2$ , algunas componentes de  $R^i$  y  $R^j$  son cero, lo cual es una contradicción porque todas las entradas de **P** son distintas de cero. Por tanto, ha de ser  $||R^i - R^j||_1 < 2$  y así

$$C = \frac{1}{2} \max_{i,j} ||R^{i} - R^{j}||_{1} < \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

(iii) Sea  $\delta := \text{diam}_1([K])$ . Tenemos que demostrar que  $\delta = 2C$ . Recordemos que por definición,  $K \subseteq [K]$  y por tanto [K] contiene todos los vectores  $R^i$ ,  $i \in \{1, ..., n\}$ . Así, obtenemos que

$$2C = \max_{i,j} ||R^i - R^j||_1 \le \delta.$$

Vamos a probar que  $\delta \leq 2C$ . Sea  $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid ||y - x||_1 \leq r\}$  la bola cerrada en  $\mathbb{R}^n$  centrada en x y radio r, respecto a la norma  $||\cdot||_1$ . Por definición de C,  $R^i \in B(R^j, 2C)$  para cada  $i, j \in \{1, ..., n\}$ . Como  $B(R^j, 2C)$  es convexo, entonces  $[K] \subseteq B(R^j, 2C) \forall j$ , o equivalentemente,  $R^j \in B(x, 2C) \forall x \in [K]$ . Como B(x, 2C) es convexo,  $[K] \subseteq B(x, 2C)$   $\forall x \in [K]$ , es decir,  $||x - y||_1 \leq 2C \forall x, y \in [K]$  y así se tiene que  $\delta \leq 2C$ .

(iv) Probaremos que si  $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$  es tal que  $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ , entonces

$$||p(a)||_1 \le C||a||_1. \tag{2.21}$$

Después, tomando a = x - y, con  $x, y \in \mathcal{T}$ , obtendremos el resultado que se pide. Si a = (0, 0, ..., 0), la desigualdad (2.21) se satisface siempre. Supondremos entonces que *a* es diferente del vector (0, 0, ..., 0) y además, sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $||a||_1 = 2^6$ . Notemos que, como

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{a_i > 0} a_i + \sum_{a_i < 0} a_i = 0,$$

entonces

$$\sum_{a_i>0}a_i=-\sum_{a_i<0}a_i.$$

Por otro lado,

$$2 = ||a||_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_i| = \sum_{a_i > 0} a_i - \sum_{a_i < 0} a_i = \sum_{a_i > 0} a_i + \sum_{a_i > 0} a_i = 2 \sum_{a_i > 0} a_i,$$

<sup>6</sup>Siempre lo podemos hacer en  $\mathbb{R}^d$ , ya que si *a* es tal que  $||a|| \neq 2$ , podemos redefinir un vector  $\bar{a}$  tal que  $\bar{a} = \frac{2a}{||a||}$ , y así se tiene que  $||\bar{a}|| = \left| \left| \frac{2a}{||a||} \right| = 2$ .

y por tanto  $\sum_{a_i>0} a_i = 1$ , de donde obtenemos que

$$\sum_{a_i > 0} a_i = -\sum_{a_i < 0} a_i = 1.$$

De esta manera, las combinaciones convexas

$$x' = \sum_{a_i > 0} a_i R^i$$
 y  $x'' = -\sum_{a_i < 0} a_i R^i$ 

pertenecen a [*K*] ya que por la Proposición 2.3.4, la envoltura convexa de *K* coincide con el conjunto de todas las combinaciones convexas de *K*. Entonces por el punto (*iii*) de este teorema,

$$||p(a)||_{1} = ||a\mathbf{P}||_{1} = \left| \left| \sum_{i=1}^{n} a_{i} R^{i} \right| \right|_{1} = ||x' - x''||_{1} \le 2C = C||a||_{1}.$$

Fijémonos en que  $\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) = 0$  para todo  $x, y \in \mathcal{T}$  y por tanto estamos bajo las hipótesis que conducen a la desigualdad (2.21); así, tomando a = x - y y teniendo en cuenta que la aplicación p es lineal obtenemos

$$||p(x-y)||_1 = ||p(x) - p(y)||_1 \le C||x-y||_1, \quad \forall x, y \in \mathcal{T}.$$

**Nota 2.12.** El punto (ii) y (iv) del Teorema 2.3.3, nos está diciendo que, en particular, si la matriz **P** es regular, ya que todas sus entradas son diferentes de cero, entonces p es contractiva con constante de contractividad C.

**Nota 2.13.** De acuerdo con la Notas 2.12, y teniendo en cuenta que  $\mathcal{T}$  es un espacio métrico completo, resulta que la aplicación p cumple todas las hipótesis del Teorema 2.3.1. Por tanto, bajo las condiciones ya mencionadas en dicha nota, p tendrá un único punto fijo que es atractor. Haremos especial referencia a esta nota en la Subsección 3.3.1 del Capítulo 3.

A pesar de estar en estos momentos en disposición de poder aplicar toda la teoría en el Capítulo 3, iremos un poco más allá, en el sentido de demostrar algunas equivalencias relacionadas con las matrices regulares e irreducibles. Para ello, probaremos un lema previo necesario para desarrollar un teorema posterior.

**Lema 2.2.** Sea  $p(x) := x\mathbf{P}$ . Si  $\mathbf{P}$  es una matriz estocástica irreducible y existe  $w \in \mathcal{T}$  tal que  $x\mathbf{P}^m \to w \ \forall x \in \mathcal{T}$ , entonces todas las componentes de w son positivas.

*Demostración*. Como  $x\mathbf{P}^m \to w \ \forall x \in \mathcal{T}$ , en particular,  $e^i \mathbf{P}^m \to w \ \forall i = 1,...,n$ . Pero  $e^i \mathbf{P}^m$  es la fila *i*-ésima de  $\mathbf{P}^m$ . Entonces, como cada fila de  $\mathbf{P}^m$  converge a *w*, donde  $w = (w_1,...,w_j,...,w_n)$ , en particular, el elemento  $\mathbf{P}_{jj}^m$  de la matriz  $\mathbf{P}^m$  convergerá a  $w_j$  para cada j = 1,...,n, es decir,  $\mathbf{P}_{jj}^{(m)} \to w_j$  y como  $\mathbf{P}$  es irreducible, por la Proposición 2.2.1,  $w_j > 0$  para todo j = 1,...,n y por tanto todas las componentes de *w* son positivas.

**Teorema 2.3.4.** Sea **P** una matriz estocástica  $n \times n$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (*i*) **P** es regular.
- (*ii*) **P** es irreducible y la aplicación  $p: \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ ,  $p(x) = x\mathbf{P}$  tiene un punto atractor  $w \in \mathcal{T}$ , esto es  $x\mathbf{P}^m \to w \ \forall x \in \mathcal{T}$ .
- (*iii*) Existe  $m_0 > 0$  tal que  $\forall m \ge m_0$ , toda las entradas de  $\mathbf{P}^m$  son distintas de cero.

*Demostración.* (*i*)  $\Rightarrow$  (*ii*). Como **P** es regular, existe  $k_0 > 0$  tal que todas las entradas de  $\mathbf{P}^{k_0}$  son positivas, esto nos dice que todos los estados están comunicados y por tanto **P** es irreducible. Por el Teorema 2.3.3,

$$C = \frac{1}{2} \max_{i,j} ||R^{i} - R^{j}||_{1} < 1,$$

donde  $R^1, R^2, ..., R^n$  son las filas de  $\mathbf{P}^{k_0}$ . Por tanto,  $p^{k_0}(x) = x\mathbf{P}^{k_0}$  es una aplicación contractiva con factor de contracción *C*. Entonces por el Teorema 2.3.1,  $p^{k_0}$  admite un único punto atractor  $w \in \mathcal{T}$  y aplicando (iv) de la Proposición 2.3.1, obtenemos que *w* es un punto atractor de *p*.

 $(ii) \Rightarrow (iii)$ . Como  $x\mathbf{P}^m \to w$  y  $\mathbf{P}$  es irreducible, por el Lema 2.2, todas las componentes de w son positivas. Como  $e^i \mathbf{P}^m$  es la fila *i*-ésima de  $\mathbf{P}^m$ , entonces cada fila converge a un vector cuyas componentes son todas positivas, lo que nos dice que todas las entradas de  $\mathbf{P}^m$  son distintas de cero. En otras palabras, existirá  $m_0 > 0$  de manera que  $\mathbf{P}^m$  tenga todas las entradas positivas para todo  $m \ge m_0$ .

 $(iii) \Rightarrow (i)$ . Es evidente por definición de matriz estocástica regular.

**Nota 2.14.** El hecho más importante que cabe resaltar del Teorema 2.3.4, es que si **P** es regular, entonces una potencia de la aplicación p es contractiva. De esta manera, observamos que estaremos en condiciones de poder aplicar el Corolario 2.3.2. En la Nota 2.10, habíamos comentado que se haría alusión a dicho corolario más adelante. Así pues, este es el momento en el que a través del siguiente resultado encontramos una justificación de haber incluido el Corolario 2.3.2 en nuestro trabajo.

Corolario 2.3.5. Bajo las condiciones del Teorema 2.3.4, se afirma lo siguiente:

- (i) w es el único punto fijo en  $\mathcal{T}$  de p.
- *(ii)* Se satisface la siguiente cota superior:

$$||x\mathbf{P}^m - w||_1 \le 2C^{\left\lfloor \frac{m}{k_0} \right\rfloor} \quad \forall m \ge k_0$$

*Demostración.* (*i*) Como w es un punto atractor de p, entonces por (*iii*) de la Proposición 2.3.1, tenemos que w es el único punto fijo de p.

(ii) La aplicación  $p^{k_0}$  es contractiva con factor de contracción C < 1. Además,  $||x-y||_1 \le ||x||_1 + ||y||_1 = 2$  para todo  $x, y \in \mathcal{T}$ , lo que nos dice que diam $(\mathcal{T}) \le 2$  y por tanto  $\mathcal{T}$  es acotado. De aquí que, aplicando el Corolario 2.3.2 obtengamos

$$||p^{m}(x)-w||_{1} \leq 2C^{\left\lfloor \frac{m}{k_{0}} \right\rfloor} \quad \forall m \geq k_{0}.$$

La idea fundamental de estos dos últimos resultados consiste en que si  $\mathbf{P}$  es regular, entonces la aplicación p tiene un único punto fijo y, además, que una potencia de p es contractiva, por lo que logramos aplicar el Corolario 2.3.2 el cual nos proporciona también otra cota superior a la hora de aproximarnos al punto fijo. De aquí que, la matriz de transición de una CM sea decisiva en el estudio de este tipo de procesos estocásticos. En definitiva, en un proceso estocástico determinado por una una CMR, siempre se alcanzará una condición de estabilidad, es decir, una distribución de probabilidades que a partir de un instante no varía con el tiempo.

En el Capítulo 3, presentaremos un modelo de un SMR al cual se asigna una tarea, y se modelará mediante una CM que resultará ser regular. Por tanto, a dicho modelo se podrá aplicar la teoría estudiada en en este capítulo.



# **APLICACIÓN A LA ROBÓTICA**

A lo largo del capítulo anterior, esencialmente, se ha visto que una CMR siempre es estable, es decir, asintóticamente se alcanzará un vector de distribución que no varíe con el tiempo. En el presente capítulo se introducirá al lector en conceptos relacionados con la robótica y, en especial, se verá cómo aplicar los conceptos vistos en el Capítulo 2 a robótica.

La IE, un concepto ligado a la robótica y que trataremos a lo largo de este capítulo, se fundamenta en aplicar el funcionamiento del reino animal y la naturaleza. Pequeños eventos o formas de actuar de algunos animales que para nosotros puedan parecer insignificantes resultan ser fundamentales en el momento de resolver ciertos problemas en robótica. Muchos se preguntarán, ¿cómo se puede dar este vínculo entre dos aspectos tan diversos como lo son la robótica y el mundo animal?. Algunos ejemplos claros de esta situación lo constituyen la construcción de nidos de hormigas, nidos de avispas o la formación de un enjambre de abejas. Todos los conceptos que se derivan de la IE están estrechamente ligados a conocer cómo estos insectos se organizan de una forma muy eficiente para llevar a cabo todas sus tareas.

Un SMR es un sistema compuesto por múltiples agentes inteligentes que pueden ser utilizados para diversos fines. En este capítulo tendrán que ejecutar una tarea y dicho sistema se modelará mediante la IE y como un proceso sin memoria, ya que la siguiente tarea a realizar por cada robot solo depende de la tarea que está desempeñando actualmente. La parte teórica asentada en el Capítulo 2 permitirá implementar el modelo como una CM, al tratarse de un proceso sin memoria. Finalmente, al final del capítulo actual mostraremos algunos experimentos, gráficas y tablas en las que estudiaremos la convergencia del modelo en función de algunos parámetros.

# 3.1 Inteligencia de enjambre

En esta sección además de describir algunos conceptos básicos que rodean el mundo animal, en particular los insectos, daremos una breve explicación de la importancia del comportamiento de estos animales en un tema, en un principio, tan dispar como lo es la robótica.

### 3.1.1 Conceptos preliminares

De siempre, las sociedades de insectos han atraído al hombre, por lo que no es extraño que casi todos nosotros nos hayamos parado alguna vez a mirar cómo trabajan y hayamos quedado maravillados por su organización [9].

El comportamiento social es la conducta de una especie cuando sus miembros interactúan unos con otros. De esta manera, introducimos el primer concepto, **Euso-cialidad**. Este término tiene que ver con el nivel más alto de organización social que se da en ciertos animales. Así pues, nos referiremos a insectos eusociales, a aquéllos que cooperen con el cuidado de crías, superpongan generaciones dentro de una colonia de adultos y realicen una división eficiente de tareas. El término superponer generaciones se refiere a que en un mismo nido conviven dos o más generaciones.

Muchos animales se coordinan sin necesidad de un líder, basándose solamente en interacciones locales. Este fenómeno se conoce como Auto-Organización (AO). El concepto de la AO puede ser aplicada a los insectos eusociales como por ejemplo en la búsqueda de comida, construcción de nidos y división eficiente de tareas. Lo anterior constituye un ejemplo de un **sistema descentralizado**, es decir, un sistema en el que el conocimiento y la información se encuentran distribuidos entre todos los individuos de la colonia.

De forma general se dice que la **inteligencia colectiva** es un proceso de apoyo mútuo y colaboración para la resolución de problemas por parte de una comunidad, especie de animales o grupo de personas. En cuanto a insectos se refiere, diríamos que la inteligencia colectiva es una combinación de los conceptos anteriores, es decir, consiste en un sistema descentralizado y auto-organizado de insectos eusociales.

Las hormigas cortadoras de hojas, las hormigas tejedoras, las abejas, las avispas y las termitas son algunos ejemplos de animales en cuyos comportamientos, la inteligencia colectiva juega un papel importante en su desarrollo.

## 3.1.2 Modelo de comportamiento colectivo

Al parecer, el comportamiento individual de un insecto, podría diferir del comportamiento global de la colonia a la que pertenece, o en otras palabras, a priori no tienen ninguna relación.

Un insecto es un animal complejo: puede procesar bastantes entradas sensoriales, modular su comportamiento de acuerdo a varios estímulos, incluyendo interacciones con compañeros de nido, y tomar decisiones en base a una gran cantidad de información. Quizá la pregunta más difícil es cómo conectar el comportamiento individual con el rendimiento colectivo. Dicho de otro modo, ¿cómo se lleva a cabo esta cooperación? (véase pág. 6 de [10]); preguntas que tendrán como respuesta el modelo de comportamiento colectivo presentado en este apartado.

El párrafo anterior da lugar a presentar una definición de IE que será clave en este capítulo.

**Definición 3.1.1 (Inteligencia de enjambre).** *Es la aparición de un comportamiento colectivo complejo a partir de la interacción de comportamientos simples.* 

Los modelos basados en AO no excluyen la complejidad individual: estos modelos muestran que en algún nivel de descripción es posible explicar el comportamiento colectivo asumiendo que los insectos son entidades de interacción relativamente simples. Por ejemplo, cuando se trata de volar desde un nido a una fuente de comida, este proceso incluye mecanismos sensomotores complejos, pero lo que realmente nos interesa es la fuente de comida colectiva y no el proceso de vuelo de un lugar a otro; esto será considerado un comportamiento simple, aunque a un nivel neurobiológico de descripción regresar al nido verdaderamente no es una maniobra fácil de explicar. La idea clave es que los modelos basados en AO asumen que puede ser posible explicar algo aparentemente complejo en términos de procesos de interacción simples. Así pues, los modelos basados en AO nos proporciona con potentes herramientas para transferir el conocimiento de insectos eusociales al campo del **diseño de sistemas inteligentes** (no biológicos) ([10]).

Siguiendo con la analogía, una colonia de insectos eusociales es un sistema descentralizado de solución de problemas, formado por muchas entidades de interacción parcialmente simples. Los problemas diarios, a los que se enfrentan los individuos de una colonia son: búsqueda de comida, construcción o ampliación de un nido, división eficiente de tareas entre individuos, alimentación eficiente de crías, responder a retos externos, etc. Una de las características más importantes de los insectos eusociales es que pueden resolver estos problemas de una forma flexible y sólida: la flexibilidad permite la adaptación a ambientes variables, mientras que la solidez dota a la colonia con la habilidad de funcionar incluso si algunos individuos fallan al realizar sus tareas asignadas. Finalmente, los insectos eusociales tienen habilidades cognitivas limitadas; por lo tanto, es simple diseñar **agentes físicos** (no biológicos) cuyo comportamiento simula, de cierta forma, al de los insectos eusociales ([10]). Por agente físico entendemos un dispositivo dotado de movimiento. En lo sucesivo asumiremos que los agentes físicos serán robots.

A pesar de la teórica simplicidad para diseñar robots, es necesario tener en cuenta que han habido muy pocas aplicaciones de inteligencia de enjambre que hayan sido desarrolladas. Una de las principales razones de la falta de éxito en este campo se debe a que la solución a estos problemas no está predefinida sino que depende de las interacciones entre individuos, y entre individuos y su entorno, así como también del comportamiento de cada individuo. Por lo tanto, para predecir el comportamiento de un sistema de IE se requiere de un exhaustivo conocimiento no solo de los comportamientos individuales que deben ser implementados sino también de las interacciones que se necesitan para producir el comportamiento global buscado (veáse [10] para más detalles).

Un camino posible, tal y como se propone en este trabajo, consistirá en considerar un SMR sin memoria, es decir, suponer que la ejecución de la siguiente tarea a realizar depende solamente de la tarea actual que se esté realizando. Éste es exactamente el concepto que abarca una CM, donde el conjunto de estados estará formado por: realizar la tarea o no realizar la tarea; y las probabilidades de transición vendrán determinadas por lo que más adelante definiremos como función de respuesta del robot (agente).

La función de respuesta dependerá de ciertos parámetros que se basarán en dos aspectos: el estímulo que tenga un robot por realizar una tarea específica y los umbrales de respuesta, concepto relacionado con lo activo que puede ser un robot. Por ejemplo, si un robot tiene como umbral de respuesta 2 y como estímulo 5, quiere decir que el estímulo es mayor que el umbral y por ello dicho robot realizará la tarea asignada. En otras palabras, si el estímulo supera el umbral, entonces el robot ejecuta la tarea y en caso contrario no la realizará.

En general, cada robot puede tener asociado un umbral de respuesta diferente en función del tiempo, al igual que el estímulo, pero en nuestro estudio y diferentes experimentos que realizaremos, tanto el umbral de respuesta como el estímulo será el mismo en cada instante de tiempo para cada robot que constituye el sistema. De esta forma, la CM del modelo, nos proporcionará información del estado de un robot en un instante de tiempo.

Estas primeras ideas del modelo, las vamos a definir más adelante de una manera más formal. Sin embargo, una primera cuestión en la que podríamos pensar radica en cómo definir una distribución de probabilidades de forma que simule el comportamiento de dichos robots. Es aquí donde se pone de manifiesto el uso de las funciones basadas en umbrales de respuesta, o simplemente funciones de respuesta.

# 3.2 Funciones basadas en umbrales de respuesta

Antes de introducir cualquier definición, es necesario tener en cuenta que el enfoque de este modelo no es conocer la naturaleza del estímulo asociado a una tarea, sino más bien en cómo un individuo pasa a realizar la tarea en cuestión, dada la exposición al estímulo asociado. Así pues, las nociones que mencionamos anteriormente de estímulo y umbrales de respuesta, van a estar relacionadas con las probabilidades de transición del modelo.

Empezaremos por definir qué es un estímulo.

**Definición 3.2.1** (Estímulo). Un estímulo s es la intensidad de un incentivo asociado con una tarea particular.

De este modo, *s* puede ser una concentración química. Por ejemplo si la tarea consiste en alimentación de larvas, entonces el estímulo asociado podría ser la emisión de feromonas, ya que éstas se emiten para dejar rastro y poder llegar a la fuente de alimentación, o una función de la distancia a una tarea (veáse [4]). En este último ejemplo nos centraremos en los experimentos que veremos en la Sección **3.5**.

Un umbral de respuesta  $\theta$ , es una variable que determina la tendencia de un robot (agente) para responder al estímulo *s* y realizar la tarea asociada. De forma más precisa presentamos la siguiente definición.

**Definición 3.2.2** (**Umbral de respuesta**). Un umbral  $\theta$  debe ser tal que la probabilidad de respuesta sea baja para s  $\ll^{1} \theta$  y alta para s  $\gg^{2} \theta$ .

En otras palabras, si el estímulo es muy pequeño respecto del umbral, entonces la idea intuitiva es que el robot (agente) no se siente suficientemente estimulado para realizar la tarea y esto se traduce en que la probabilidad de respuesta del robot debe ser baja.

A la luz de lo expuesto, la anterior propiedad es el factor clave en el que se basarán las funciones de respuesta. En los siguientes apartados veremos dos ejemplos concretos de funciones de respuesta: la función de respuesta semi-logarítmica y la función de respuesta exponencial.

### 3.2.1 Función de respuesta semi-logarítmica

**Definición 3.2.3 (Función de respuesta semi-logarítmica).** Una función de respuesta semi-logarítmica  $T_{\theta}(s)$  es aquélla que satisface el requerimiento exigido por un umbral de respuesta  $\theta$  y viene dada por

$$T_{\theta}(s) = \frac{s^n}{s^n + \theta^n},\tag{3.1}$$

donde  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \ge 1$  determina la inclinación de la curva de respuesta y s es un estímulo.

Posteriormente,  $T_{\theta}(s)$  será considerada como la probabilidad de transición del modelo.

Cuanto más grande es *n*, más inclinada es la curva de respuesta. Realizaremos a continuación un breve estudio de la función (3.1) para hacernos una idea de su comportamiento. Para empezar,  $T_{\theta}(0) = 0$  y

$$\lim_{s \to +\infty} T_{\theta}(s) = \lim_{s \to +\infty} \frac{s^n}{s^n + \theta^n} = 1,$$

por lo que  $T_{\theta}(s)$  tiene una asíntota horizontal en  $T_{\theta}(s) = 1$ . Por un lado,  $T'_{\theta}(s) > 0 \forall s$ ( $T_{\theta}(s)$  es creciente), y por otro lado

$$T_{\theta}''(s) = \frac{n(n-1)\left(\theta^n s^{2n-2} + \theta^{2n} s^{n-2}\right) - 2n^2 \theta^n s^{2n-2}}{(s^n + \theta^n)^3}.$$
(3.2)

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>El símbolo « significa, en este caso, que el estímulo *s* es suficientemente pequeño respecto de  $\theta$ .

 $<sup>^2 \</sup>text{El}$ símbolo $\gg$ significa, en este caso, que el estímulo s es suficientemente grande respecto de  $\theta.$ 

Ahora, si  $T''_{\theta}(s^*) = 0$  y  $T''_{\theta}(s^*) \neq 0$  para algún  $s^* > 0$ , entonces el punto de inflexión vendrá dado por  $s^*$ . En efecto, para que (3.2) sea cero, ha de pasar que

$$0 = n(n-1) \left( \theta^{n} s^{2n-2} + \theta^{2n} s^{n-2} \right) - 2n^{2} \theta^{n} s^{2n-2}$$
  
$$= n^{2} \theta^{n} s^{2n-2} + n^{2} \theta^{2n} s^{n-2} - n \theta^{n} s^{2n-2} - n \theta^{2n} s^{n-2} - 2n^{2} \theta^{n} s^{2n-2}$$
  
$$= -n^{2} \theta^{n} s^{2n-2} + n^{2} \theta^{2n} s^{n-2} - n \theta^{n} s^{2n-2} - n \theta^{2n} s^{n-2}$$
  
$$= s^{n-2} \left( -n^{2} \theta^{n} s^{n} + n^{2} \theta^{2n} - n \theta^{n} s^{n} - n \theta^{2n} \right),$$

de donde se deduce que

$$n\theta^{n}s^{n} + n^{2}\theta^{n}s^{n} = n^{2}\theta^{2n} - n\theta^{2n}$$

$$s^{n}n\theta^{n}(n+1) = n\theta^{2n}(n-1)$$

$$s^{n} = \theta^{n}\frac{n-1}{n+1}$$

$$s = \theta \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Por tanto, tomando

$$s^* = \theta \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}},$$

se tiene que  $T_{\theta}''(s^*) = 0$  y  $T_{\theta}'''(s^*) \neq 0^3$ . Por tanto,  $T_{\theta}$  alcanza un punto de inflexión  $s^*$  para cualquier n > 1.

A lo largo del trabajo, emplearemos (3.1) en el caso n = 2 tal como en [1, 4]. En la Figura 3.1 podemos observar una gráfica de la función (3.1) con n = 2 para distintos valores de  $\theta$ .

El significado de  $\theta$  queda perfectamente reflejado en las curvas de respuesta semilogarítmicas de la Figura 3.1. En efecto, para  $s \ll \theta$ , la probabilidad de pasar a realizar una tarea es cercana a 0 (poco probable que dicho robot realice la tarea), y para  $s \gg \theta$ , esta probabilidad está muy cerca de 1, es decir, como el estímulo del robot hacia la tarea a realizar es grande y el umbral pequeño, entonces es muy probable que el robot pase a ejecutar la tarea. Fijémonos que cuando  $s = \theta$ , se tiene que  $T_{\theta}(\theta) = \frac{1}{2}$ , es decir, la probabilidad de que pase a realizar la tarea es exactamente  $\frac{1}{2}$  (veáse pág. 756 de [4]).

Una idea intuitiva de umbral de respuesta, nos dice que si un umbral es más pequeño que otro, entonces la probabilidad de que un robot pase a realizar la tarea con el umbral más pequeño sea más alta que con el umbral grande para un estímulo fijado.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Debido a la extensión de este cálculo y que no tiene relevancia en el trabajo, se ha omitido dicha comprobación; sin embargo, se puede verificar mediante cualquier software matemático.



Figura 3.1: Gráfica de funciones de respuesta semi-logarítmicas con diferentes umbrales ( $\theta = 1, 5, 10, 20, 50$ ), y n = 2.

Dado *s* y *n*, si  $\theta_1 < \theta_2$ , entonces  $(s^n + \theta_1^n) < (s^n + \theta_2^n)$  y por tanto  $T_{\theta_1}(s) > T_{\theta_2}(s)$ . En otras palabras, para valores bajos de  $\theta$  es más probable que los robots respondan al estímulo que con valores de  $\theta$  más altos (veáse pág. 172 de [2]).

Todo parece indicar que la familia de funciones de respuesta (3.1), cumple con las especificaciones exigidas por un umbral de respuesta. Sin embargo, la definición de umbral dada anteriormente no exige un cambio en la concavidad, por lo que es natural pensar en otro tipo de funciones de respuesta. Un ejemplo importante es la función de respuesta exponencial (veáse pág. 756 de [4]), la cual exponemos a continuación.

# 3.2.2 Función de respuesta exponencial

A continuación introducimos una función de respuesta que no presenta cambios en la concavidad.

**Definición 3.2.4** (Función de respuesta exponencial). Una función de respuesta exponencial es aquélla que satisface el requerimiento exigido por un umbral de respuesta viene dada por

$$T_{\theta}(s) = 1 - e^{-\frac{s}{\theta}}, \qquad (3.3)$$

donde s es un estímulo.

Para una interpretación biológica de este tipo de funciones de respuesta se puede consultar la página 758 de [4].

Si hacemos un pequeño análisis de la función (3.3) obtenemos que,  $T_\theta(0)=0$ y que

$$T'_{\theta}(s) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{s}{\theta}} > 0$$

lo que nos asegura que este tipo de función es creciente. Además,

$$\lim_{s \to +\infty} \left( 1 - e^{-\frac{s}{\theta}} \right) = 1,$$

y de esta manera ya tenemos la suficiente información para realizar una representación gráfica. En la Figura 3.2, se muestra la representación gráfica de (3.3) para diferentes valores de  $\theta$ .



Figura 3.2: Gráfica de funciones de respuesta exponenciales con diferentes umbrales ( $\theta = 0.1, 0.25, 0.5, 0.5, 1.5$ ).

Como podemos observar en las gráficas de la Figura 3.2, las funciones de respuesta exponenciales no presentan cambios en la concavidad. Así mismo, observamos que la probabilidad de pasar a realizar una tarea es pequeña si  $s \ll \theta$  y cercana a 1 si  $s \gg \theta$ . Por tanto, el umbral de respuesta asociado a este tipo de funciones también satisface la Definición 3.2.2, aunque no haya un cambio en la concavidad.

Además, si  $\theta_1 < \theta_2$ , entonces  $\frac{s}{\theta_2} < \frac{s}{\theta_1}$ , y por tanto  $e^{-\frac{s}{\theta_1}} < e^{-\frac{s}{\theta_2}}$ , es decir,  $T_{\theta_1}(s) > T_{\theta_2}(s)$ , por lo que se mantiene la idea intuitiva de que cuanto más pequeño sea el umbral de respuesta, la probabilidad de pasar a ejecutar una tarea es más alta que si el umbral es más grande.

A partir de ahora, vamos a fijar las bases del modelo final. Para ello, nos centraremos en sistemas multi-agentes donde los agentes son robots, cuyo objetivo es realizar una tarea de modo colectivo, y emplearemos las CMR para modelar la evolución de dicho sistema. Llegados a este punto, cabe destacar el hecho de que la visión formal matemática del modelo mencionado no ha sido desarrollada en las referencias que se han seguido para la elaboración de este trabajo ([1, 2, 4]).

# 3.3 Modelo a partir de una Cadena de Markov

A lo largo de este capítulo hemos hablado de diversos aspectos tales como inteligencia colectiva, de cómo este concepto es utilizado para establecer una analogía con el diseño

de sistemas inteligentes y, sobre todo, de la importancia de los parámetros (estímulo y umbral) en el comportamiento de los robots que conforman el sistema. Es importante hacer énfasis en el hecho de que no es primordial conocer el origen de los parámetros, sino tener en cuenta que estamos interesados en cómo un robot abandona una tarea para pasar a realizar otra, o por el contrario, se queda realizándola. Es en este momento, donde entra en juego el papel de las funciones de respuesta, que están estrechamente ligadas a probabilidades de transición.

# 3.3.1 Función de respuesta como probabilidad de transición

En nuestro modelo, <sup>4</sup> tendremos un conjunto finito de robots dispuestos a realizar una única tarea a lo largo del tiempo. Además, como la tarea se va ejecutando a lo largo del tiempo, vamos a considerar que se trata de un proceso sin memoria, es decir, el estado futuro de cada robot depende solamente del estado actual de dicho robot, hipótesis crucial que permitirá modelar el proceso como una CM.

El estímulo *s* que cada robot tiene hacia la tarea será constante, de la misma forma que lo será el umbral  $\theta$ . Nos centraremos entonces en fijar la probabilidad de que un robot pase a realizar dicha tarea.

Notemos que el modelo adoptado es un proceso meramente estocástico ya que a lo largo del tiempo el sistema estará descrito de la forma siguiente: sea  $X_n$  el estado de un robot en el instante *n*. El conjunto de estados *S* del proceso está formado por dos elementos: realizar la tarea o no realizar la tarea, así  $S = \{1, 2\}$ . De este modo,

 $\begin{cases} X_n = 1 & \text{si un robot no realiza la tarea en el instante } n, \\ X_n = 2 & \text{si un robot realiza la tarea en el instante } n. \end{cases}$ 

Dado que el proceso estocástico  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  lo hemos modelado como un proceso sin memoria, a continuación fijamos las probabilidades de transición como sigue:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 2 | X_n = 1) = T_{\theta}(s) = \frac{s^2}{s^2 + \theta^2}.$$
(3.4)

Obsérvese que estamos empleando la función de respuesta semi-logarítmica con n = 2 como probabilidad de transición, o dicho de otra manera, como probabilidad de ejecución de realizar la tarea. Este supuesto se ha realizado de acuerdo con [1, 4]. Entonces (3.4) refleja la probabilidad de que un robot pase a realizar la tarea dado que anteriormente no la estaba realizando. De la misma forma, un robot dejará de estar activo, es decir, dejará de realizar la tarea con probabilidad *q*:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 2) = q. \tag{3.5}$$

Recordemos que todo proceso estocástico, dadas las probabilidades de transición, tiene asociada una matriz de transición **P**. Además, el proceso estocástico  $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$  es un proceso homogéneo ya que las probabilidades de transición no dependen del

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Utilizaremos también la palabra "sistema" para referirnos al modelo y emplearemos ambos términos indistintamente a lo largo del trabajo.

tiempo. Entonces, según la Subsección 2.2.3 donde se define un proceso estocástico homogéneo, podemos escribir

$$\mathbf{P}_{2}^{1} = \frac{s^{2}}{s^{2} + \theta^{2}} \quad \text{y} \quad \mathbf{P}_{1}^{2} = q.$$
 (3.6)

De (3.6) se sigue que la matriz de transición en un paso del proceso viene dada por

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{s^2}{s^2 + \theta^2} & \frac{s^2}{s^2 + \theta^2} \\ q & 1 - q \end{pmatrix}.$$
 (3.7)

Teniendo en cuenta la Definición 2.3.4 de matriz estocástica regular, concluimos que la matriz **P** es regular y por tanto el proceso se trata de una CMR. Es momento de recordar también la aplicación p estudiada a lo largo del Capítulo 2:

$$p: \quad \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T} \\ x \longmapsto x \mathbf{P}$$
(3.8)

donde P es la matriz regular (3.7) y en nuestro caso

$$\mathcal{T} = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 \ge 0, \ x_1 + x_2 = 1 \right\}.$$

# Importancia de la convergencia en robótica

De acuerdo a la Nota 2.13, nuestro modelo tiene un único punto fijo atractor. En otras palabras, existirá una distribución de probabilidad que será constante a partir de un cierto instante. Recordemos que es una convergencia asintótica y por tanto la estabilidad del proceso se puede dar en el infinito, lo que quiere decir que llegará un momento a partir del cual, la probabilidad de que un robot ejecute una tarea sea siempre la misma, o equivalentemente, que el sistema ha alcanzado una estabilidad concreta, poniendo de manifiesto que este hecho se da para cualquier condición inicial.

A partir de la CM determinada por la matriz de transición (3.7), podemos estudiar la evolución del sistema, es decir, su comportamiento a lo largo del tiempo. Sin embargo, la **importancia** de encontrar un punto fijo en robótica radica en el hecho de que a partir de un cierto instante, podremos conocer el comportamiento definitivo de un robot, ya que dicho comportamiento no cambiará.

La aplicación p no solo tiene un único punto fijo atractor sino que además el Teorema 2.3.1 nos proporciona un algoritmo para construirlo, tal y como se menciona en la Nota 2.8. La forma de construirlo será trascendental para la culminación de este trabajo, ya que sobre este algoritmo se fundamentarán los distintos experimentos que realizaremos en la Sección 3.5.

# 3.4 Descripción de la implementación

En esta sección presentaremos la base teórica del algoritmo principal que se encuentra implementado en el Apéndice B. Dicho algoritmo nos permitirá determinar el punto fijo del proceso estocástico en cuestión y las cotas del error proporcionadas por el Teorema 2.3.1. Además, se ilustrará la explicación proporcionada en la Nota 2.9.

### 3.4.1 Algoritmo iterativo proporcionado por Banach

En la demostración del Teorema 2.3.1, se construye la sucesión de iterados  $x_k := f^k(x)$ , teniendo en cuenta que  $x_0 = f^0(x) = x$ , donde f es una aplicación contractiva. Entonces en dicha demostración, se construye el punto fijo como el límite de la sucesión de iterados.

Es necesario recordar algunas notaciones. En nuestro caso la condición inicial, es decir, la probabilidad de que un robot realice o no realice la tarea en el instante 0, viene dada por el vector

$$\pi(0) = (\mathbb{P}(X_0 = 1), \mathbb{P}(X_0 = 2)). \tag{3.9}$$

Además, según la Nota 2.1, se tiene que

$$\pi(n) = \pi(0)\mathbf{P}^n,\tag{3.10}$$

y por tanto la distribución de probabilidades de la variable aleatoria  $X_n$  viene dada por la distribución inicial y la matriz de transición **P**.

En nuestro caso, teniendo en cuenta que  $\pi(0) = p^0(x) = x$ , la sucesión de iterados descrita por la demostración del Teorema 2.3.1 es la siguiente:

$$p^{1}(\pi(0)) = \pi(0)\mathbf{P}$$

$$p^{2}(\pi(0)) = \pi(0)\mathbf{P}^{2}$$

$$\vdots = \vdots$$

$$p^{n}(\pi(0)) = \pi(0)\mathbf{P}^{n},$$

y por tanto

$$p^{n}(\pi(0)) = \pi(n) = \pi(0)\mathbf{P}^{n}.$$
(3.11)

Las igualdades descritas en (3.11) establecen que para conocer el vector de distribución de la variable aleatoria  $X_n$ , basta iterar n veces la aplicación p. Dicho de otra manera, si queremos conocer la probabilidad de que un robot ejecute la tarea o no, en un instante cualquiera n, debemos iterar n veces la aplicación p.

Ahora bien, si  $w \in \mathcal{T}$  es el punto fijo en cuestión, entonces gracias al Teorema 2.3.1, se tiene que

$$\lim_{n \to \infty} p^n(\pi(0)) = \lim_{n \to \infty} \pi(0) \mathbf{P}^n = w \tag{3.12}$$

para cualquier condición inicial  $\pi(0) \in \mathcal{T}$ .

Todo lo anterior expone claramente una forma de construir el punto fijo. En el siguiente apartado veremos una implementación de este algoritmo con Matlab.

### 3.4.2 Condición de convergencia en la implementación

En la subsección anterior hemos visto y detallado que el punto fijo lo podemos construir a partir de la sucesión de iterados  $\{p^n(x)\}_{n\geq 1}$ . Pero, ¿hasta qué instante debemos iterar la aplicación *p*?. Pues bien, si dos iterados consecutivos son iguales, esto es,

$$p^{n}(\pi(0)) = p^{n+1}(\pi(0)) = w, \qquad (3.13)$$

entonces se tiene que  $w \in \mathcal{T}$  es un punto fijo de *p*. En efecto,

$$w = p^{n+1}(\pi(0)) = p(p^n(\pi(0))) = p(w),$$

lo que implica que w es un punto fijo de p que, a su vez, es atractor. Además, como la matriz de transición **P** es regular, w será el único punto fijo de p.

La condición (3.13), será el criterio de parada que utilizaremos para obtener la convergencia de la CM. Los diferentes scripts de la implementación se pueden consultar en los apartados B.1, B.3, B.6, B.7 del Apéndice B. Estos scripts se utilizarán para distintos fines.

Los scripts relacionados con la cota previa y la cota posterior del error, de acuerdo con la Nota 2.9, serán expuestos en detalle en los apartados B.5, B.4, B.6, B.7 del Apéndice B.

En la siguiente sección presentaremos un conjunto de experimentos y resultados con el fin de estudiar la convergencia de la CM dada por la matriz de transición (3.7), para diferentes valores del umbral  $\theta$ , diversos estímulos y en caso de que no converja en el tiempo (iteraciones) requerido, seremos capaces no solo de determinar cuán cerca "estamos" del punto fijo (distribución de probabilidad), sino también de acercarnos con la precisión que se desee.

# 3.5 Evaluación de resultados

Antes de profundizar en el conjunto de experimentos, vamos a realizar un pequeño ejemplo, para adentrarnos en el tema de la convergencia y sobre todo interpretar qué significado tiene la asignación de tareas a robots. Es importante destacar que, al igual que se ha hecho en el Apéndice B, todos los resultados mostrados tienen una precisión de 15 decimales.

Ejemplo 3.1. Supongamos que la distribución inicial del sistema viene dada por

$$\pi(0) = (0.7, 0.3),$$

esto es, la probabilidad de no realizar la tarea es 0.7 y la de ejecutar la tarea es 0.3, ambas probabilidades en el instante 0. Hemos ejecutado el script B.1 del Apéndice B con s = 10 y  $\theta = 0.5$ . Matlab arroja como resultado el vector

w = (0.231212761868153, 0.768787238131846)

en la iteración 31. Esto quiere decir que tras 31 pasos, la probabilidad de que el robot se encuentre en el estado 1 (no ejecutar la tarea) es de aproximadamente 0.23 y la probabilidad de que se encuentre en el estado 2 (realizar la tarea) es de aproximadamente 0.77. Dicho de otra manera, tras 31 unidades de tiempo, el 23 % de las veces el robot no estará realizando la tarea y el 77 % restante la estará realizando. Entonces, lo que hay que resaltar de este hecho es que dicha probabilidad **no cambia** a partir del instante 31; por tanto en el instante 32 será la misma probabilidad, en el instante 33 será idéntica, y así sucesivamente; por lo que se dice que el sistema es estable a partir de dicho instante. A lo largo de esta sección, presentaremos diversos ejemplos en los que el objetivo principal será siempre encontrar la distribución de probabilidades estable (el punto fijo) de la CM dada por la matriz de transición (3.7). También podremos verificar, cuando no converja, cuán próximos "estamos" del punto fijo o determinar la convergencia con la precisión que queramos.

A continuación estudiaremos cómo influye la probabilidad  $q = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 2)$ en el número de pasos necesarios para converger.

## 3.5.1 Influencia de la probabilidad de transición q en la convergencia

Como ya hemos anunciado anteriormente, en este apartado se realizarán algunas pruebas para los siguientes valores de q: 0.3, 0.6 y 0.9; mostrando los resultados a través de algunos histogramas en los que el eje de ordenadas representa el número de veces que ha convergido el sistema y el eje de abscisas el número de iteraciones. Como la convergencia se da para cualquier condición inicial todo el estudio sucesivo lo hemos hecho tomando como condición inicial

$$\pi(0) = (\mathbb{P}(X_0 = 1), \mathbb{P}(X_0 = 2)) = (0.7, 0.3).$$

Para generar cada histograma hemos utilizado el script B.1 del Apéndice B.

**Caso** *q* = 0.3

El procedimiento que se sigue para generar el vector *numConvergencias* el cual contiene el conjunto de datos para generar el histograma, es el siguiente:

- Fijamos q = 0.3, que es la probabilidad de que un robot deje de estar activo.
- Para cada umbral *θ*, se fija un estímulo *s*. El incremento de *θ* es de 0.5 hasta 5 y el de *s* es de 20 hasta 1000.
- Empieza la evolución de la CM hasta su convergencia.
- Se guarda un valor en el vector *numConvergencias* que corresponde con la iteración en la que ha convergido, o en su defecto, un –1 si no ha convergido en un máximo de 10000 iteraciones.
- Al final del proceso, el vector *numConvergencias* contiene 500 valores a partir del cual obtenemos el histograma de la Figura 3.3.

En la Tabla 3.1 se muestra el contenido del vector *numConvergencias* y las frecuencias absolutas y relativas. Así por ejemplo, vemos que en 101 veces las cadenas de Markov correspondientes han convergido en 19 iteraciones, representando dicha cantidad un 20.20% de las veces. Podemos también observar que no hay ninguna CM que no converja ya que para ningún valor de  $\theta$  y *s* se ha guardado el valor –1 en el vector *numConvergencias*. Así mismo, el mayor número de convergencias se encuentra entre los pasos 17 y 21.



Figura 3.3: Histograma del vector *numConvergencias* con q = 0.3,  $0 < \theta \le 5$  con incrementos de 0.5,  $0 < s \le 1000$  con incrementos de 20. El vector *numConvergencias* contiene 500 valores.

numConvergencias	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas
1	0	0.00%
:	:	
13	0	0.00%
14	3	0.60%
15	11	2.20%
16	16	3.20%
17	60	12.00%
18	70	14.00%
19	101	20.20%
20	64	12.80%
21	62	12.40%
22	37	7.40%
23	24	4.80%
24	19	3.80%
25	22	4.40%
26	7	1.40%
27	3	0.60%
28	0	0.00%
29	0	0.00%
30	0	0.00%
31	1	0.20%

Tabla 3.1: Frecuencias absolutas y relativas del vector *numConvergencias* en el caso q = 0.3.

# **Caso** q = 0.6

Realizaremos el mismo proceso anterior pero fijando q = 0.6. Para cada  $\theta$  y para cada s



tendremos una CM y estudiaremos su evolución hasta su convergencia.

Figura 3.4: Histograma del vector *numConvergencias* con q = 0.6,  $0 < \theta \le 5$  con incrementos de 0.5,  $0 < s \le 1000$  con incrementos de 20. El vector *numConvergencias* contiene 500 valores.

En la Figura 3.4 se muestra el histograma correspondiente a los valores que contiene el vector *numConvergencias*, con incrementos de  $\theta$  de 0.5 hasta 5 e incrementos de *s* de 20 hasta 1000. En dicha figura podemos observar que hay algunas cadenas de Markov que no convergen y una gran mayoría que converge entre 35 y 50 pasos. Así pues, vemos que tarda más en converger que en el caso q = 0.3.

**Caso** q = 0.9

Siguiendo la misma idea que en los dos casos anteriores, esta vez con q = 0.9, para cada  $\theta$  fijamos un estímulo *s*, y procedemos con la evolución de la CM correspondiente.



Figura 3.5: Histograma del vector *numConvergencias* con q = 0.9,  $0 < \theta \le 5$  con incrementos de 0.5,  $0 < s \le 1000$  con incrementos de 20. El vector *numConvergencias* contiene 500 valores.

En la Figura 3.5 se puede contemplar el histograma que contiene los datos agru-

pados, correspondientes a los valores del vector *numConvergencias*, con incrementos de  $\theta$  de 0.5 hasta 5 e incrementos de *s* de 20 hasta 1000. En dicha figura podemos observar que se presenta un gran incremento en el número de cadenas de Markov que no convergen. Además, el tiempo de convergencia ha aumentado considerablemente en comparación a los casos *q* = 0.3 y *q* = 0.6.

En definitiva, podemos deducir que hay una influencia de la probabilidad de transición  $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 2) = q$  en la convergencia de la cadena. Esto es, cuanto más probable es que el robot abandone la tarea que está realizando para estar inactivo, entonces la convergencia de la cadena se da en un número más elevado de pasos que para valores pequeños de q.

Hasta el momento hemos hablado de la influencia de q en la convergencia de la cadena. Otra cuestión interesante es saber cómo influye la evolución del estímulo (con un umbral fijado) en la convergencia de la cadena. Este estudio lo haremos en el apartado siguiente.

#### 3.5.2 Convergencia en función del estímulo fijado un umbral

En el apartado anterior vimos el desarrollo de distintas cadenas de Markov para diferentes valores de  $\theta$  y *s*, concluyendo que cuanto más grande sea *q* más tarda en converger. Para fijar ideas, como con el valor *q* = 0.6 hemos obtenido una convergencia "equilibrada", en el sentido de que unas pocas no convergen y la mayoría sí convergen, a partir de ahora, en los experimentos subsiguientes hemos decidido fijar *q* = 0.6. Para la obtención del resultado hemos utilizado el script B.2.

En la Figura 3.6 se muestra una gráfica de estímulo *vs* número de iteraciones ya que nuestro objetivo es estudiar el número de iteraciones en el cual la CM correspondiente converge dado un estímulo, teniendo en cuenta que el valor de  $\theta$  está fijado en 0.5. Entonces en este caso, el procedimiento es como sigue:

- Fijados los valores q = 0.6 y  $\theta = 0.5$ , el estímulo *s* va a variar de 20 hasta 1000 con incrementos de 20.
- Comienza el proceso de evolución de la CM correspondiente.
- Si converge, se guarda en el vector *numConvergencias* la iteración en la que ha convergido. Si no converge, se guarda un −1.

De este modo, suponiendo que el primer estímulo es 20 y que la CM ha convergido en 75 iteraciones, entonces en nuestra gráfica de la Figura 3.6, el primer punto correspondería con el par (20,75).

Así pues, en la Figura 3.6 podemos contemplar que a medida que aumenta el estímulo, se necesitan menos iteraciones para la convergencia de la cadena. Los picos son debido a que para algunos valores de *s* la cadena no ha convergido, y por tanto a dichos valores de *s* se les asigna un -1. Podemos deducir entonces, que en 4 ocasiones no ha convergido.



Figura 3.6: Gráfica estímulo *vs* número de iteraciones, q = 0.6,  $\theta = 0.5$ ,  $0 < s \le 1000$  con incrementos de 20. Se han representado 50 pares de puntos de la forma (*s*, *iteración*).

# 3.5.3 El inverso de la distancia como un estímulo

A lo largo de la Sección 3.2 mencionamos que pueden haber diversos tipos de estímulos, y que en general, se podría decir que un estímulo es cualquier señal cuantitativa que puedan percibir los robots. En nuestro caso, vamos a suponer que el estímulo es el inverso de la distancia que hay entre un robot y la tarea a realizar, esto es,  $s = \frac{1}{d}$ . El estímulo anterior es constante, es decir, no depende del tiempo.

Notemos que la elección del estímulo como  $s = \frac{1}{d}$  refleja que a mayor distancia, menos estímulo tiene el robot para realizar la tarea. Esta nueva forma de tomar el estímulo coincide con la apreciación más natural, es decir, si la tarea se encuentra lejos de donde está localizado el robot, éste se sentirá poco estimulado para ejecutarla.

En los siguientes puntos, nos disponemos a estudiar la influencia de la distancia en la convergencia de la CM correspondiente. Efectuaremos diversas pruebas fijando un valor de  $\theta$  y variando la distancia *d*. A continuación, a través de los siguientes apartados visualizaremos el conjunto de pruebas mencionado y en cada uno de ellos utilizaremos el script del apartado B.3 del Apéndice B.

**Pruebas con**  $\theta$  = 0.5 y 0 <  $d \le 40$ 

Para llevar a cabo este apartado, fijaremos  $\theta = 0.5$  y *d* variará entre 2 y 40 con incrementos de 2. Así mismo, recordemos que como valor de *q* hemos elegido *q* = 0.6, y que empezamos con la condición inicial  $\pi(0) = (0.7, 0.3)$ .

En la Figura 3.7, podemos apreciar que para los primeros valores de d, a medida que aumenta la distancia, las cadenas correspondientes tardan en converger, y que a partir de un cierto valor de d, el instante en el que converge va disminuyendo a medida que aumenta d.

A continuación ampliaremos el rango de la distancia para observar qué comporta-



Figura 3.7: Gráfica distancia *vs* número de iteraciones, q = 0.6,  $\theta = 0.5$ ,  $0 < d \le 40$  con incrementos de 2. Se han representado 20 pares de puntos de la forma (*d*, *iteración*).

miento tiene la convergencia en función de dicha distancia.

#### Pruebas con $\theta = 0.5$ y $0 < d \le 100$

El motivo por el cual hemos ampliado el rango de la distancia hasta 100, es para comprobar si la tendencia decreciente a partir de un cierto valor de *d* se sigue manteniendo.

En la Figura 3.8 podemos contemplar que al aumentar la variable d hasta un límite de 100, se tiene que, a partir de un cierto momento, el número de iteraciones en el que se da la convergencia disminuye notablemente.



Figura 3.8: Gráfica distancia *vs* número de iteraciones, q = 0.6,  $\theta = 0.5$ ,  $0 < d \le 100$  con incrementos de 2. Se han representado 50 pares de puntos de la forma (*d*, *iteración*).

En las Figuras 3.7 y 3.8 se pone de manifiesto que a partir de un cierto valor, a medida que aumenta la distancia, en general, las cadenas de Markov asociadas a la matriz de transición (3.7), convergen más rápido. En otras palabras, cuanto menor

estímulo sienta el robot para ejecutar la tarea, el sistema tarda menos en estabilizarse. Si nos fijamos, dicha conclusión podría entrar en discordancia con la intuición. Es decir, al inicio de esta subsección habíamos comentado que fijar el inverso de la distancia como un estímulo, implicaba que a mayor distancia, menor estímulo, y por tanto se podría pensar que el sistema tardará más tiempo en estabilizarse; pero como acabamos de apreciar en las dos gráficas anteriores, a mayor distancia el modelo converge en menos iteraciones a partir de un cierto valor d.

Todo lo anterior expone que el hecho de que el sistema converja depende no solo del estímulo sino también de otros factores tales como la probabilidad de transición q y el umbral  $\theta$ . En los siguientes experimentos, reproduciremos los dos ejemplos anteriores pero cambiando del umbral  $\theta = 0.5$  al umbral  $\theta = 1.5$ , todo ello con el fin de observar si hay algún tipo de cambio en el comportamiento de la convergencia.

**Pruebas con**  $\theta$  = 1.5 y 0 <  $d \le 40$ 

En este conjunto de pruebas se ha fijado  $\theta = 1.5$  y se ha variado *d* desde 2 hasta 40 en incrementos de 2.



Figura 3.9: Gráfica distancia *vs* número de iteraciones, q = 0.6,  $\theta = 1.5$ ,  $0 < d \le 40$  en incrementos de 2. Se han representado 20 pares de puntos de la forma (*d*, *iteración*).

En la Figura 3.9, se muestra una gráfica del número de iteraciones en los que la CM correspondiente converge, en función de la distancia. Tal como se puede observar en la Figura 3.9, el número de iteraciones necesario para converger aumenta hasta un punto a partir del cual el número de iteraciones en el que se da la convergencia, empieza a disminuir. Lo que indica una tendencia decreciente a partir de un cierto valor.

**Pruebas con**  $\theta$  = 1.5 y 0 <  $d \le 100$ 

En esta parte, aumentamos el valor de d hasta 100. En la Figura 3.10 podemos observar que, en general, a medida que aumenta la distancia, el número de iteraciones necesarios para converger, disminuye. A pesar de que al principio el número de iteraciones para converger aumenta y que en la gráfica se ven algunos picos, la tendencia global de la convergencia en función de la distancia sigue siendo decreciente. Así pues, la conjetura que hemos obtenido con  $\theta = 0.5$  en la cual afirmamos que a mayor distancia, menos iteraciones se requieren para alcanzar la estabilidad a partir de un cierto valor de *d*, se sigue manteniendo cuando  $\theta = 1.5$ .



Figura 3.10: Gráfica distancia *vs* número de iteraciones, q = 0.6,  $\theta = 1.5$ ,  $0 < d \le 100$  con incrementos de 2. Se han representado 50 pares de puntos de la forma (*d*, *iteración*).

Hasta el momento, nuestros esfuerzos se han centrado en estudiar la convergencia en función de los parámetros tales como el umbral  $\theta$  o el estímulo *s*. A lo largo de este capítulo hemos mencionado en diversas ocasiones que seríamos capaces de determinar cuán lejos "estamos" del punto fijo (distribución estable de probabilidad) de la aplicación *p*, en nuestro caso definida en (3.8), y también de "acercarnos" a dicho punto con una cierta precisión. Todo ello lo realizaremos en la siguiente subsección.

### 3.5.4 Cota previa

En este apartado se determinará los valores  $\theta$  y *s* para los cuales la CM asociada a la matriz (3.7) no ha convergido y la cota previa descrita en general en (2.11).

Se utilizará principalmente el script implementado en el apartado B.6 del Apéndice B. En las dos pruebas siguientes nuestro objetivo será determinar, para los valores de  $\theta$ y *s* para los cuales no ha convergido la CM y cúan lejos nos hemos quedado del punto fijo. En otras palabras, saber si estamos cerca de alcanzar la estabilidad del sistema.

Para llevarlo a cabo, fijaremos la probabilidad de transición en q = 0.6 y se empezará el proceso con  $\theta = 0.5$  y estímulo s = 20. Para cada umbral, se fija un estímulo y sus incrementos son de 0.5 hasta 5 y de 20 hasta 1000, respectivamente.

### Pruebas con un número máximo de 10000 iteraciones

Fijamos a 10000 el número máximo de iteraciones. En la primera columna de la Tabla 3.2 se muestran dos vectores donde cada uno contiene la siguiente información:

- *thetaNoConverge*: Contiene los valores de  $\theta$  para los cuales la CM no ha convergido.
- *sNoConverge*: Contiene los valores de *s* para los cuales la CM no ha convergido.

En la segunda fila de la Tabla 3.2 se muestra el número de pares para los cuales la CM no ha convergido. En este caso, tenemos 51 pares ( $\theta$ , s) que no convergieron en un máximo de 10000 iteraciones. Por ejemplo, fijado el segundo par (0.5,600) (umbral 0.5 y estímulo 600), la CM asociada a (3.7) no ha convergido en 10000 iteraciones.

	1	2	3	•••	40	50	51
thetaNoConverge	0.5	0.5	0.5	•••	5	5	5
sNoConverge	220	600	660	•••	600	680	840

Tabla 3.2: Valores de  $\theta$  y *s* para los cuales la Cadena de Markov asociada a (3.7) no ha convergido.  $0 < \theta \le 5$  con incrementos de 0.5 y  $0 < s \le 1000$  con incrementos de 20. Número máximo de iteraciones 10000.

La pregunta es entonces, dados los valores para los cuales no ha convergido el sistema, ¿cuán lejos se está del punto fijo?. Para responderla, haremos uso del script relacionado con la cota previa implementado en el apartado B.6 del Apéndice B. En este script, se generan los valores de  $\theta$  y *s* para los cuales la CM correspondiente no converge y seguidamente se utiliza la función *cotaPrevia* que retorna un vector denominado *cotaPrevia* que contiene la cota superior de la distancia entre el punto fijo *w* y la aplicación *p* iterada *n* veces, esto es

$$d(p^{n}(x), w) \le \frac{L^{n}}{1-L}d(p(x), x) \quad \forall n$$

donde L es la constante de contracción que según la Sección 2.3.3 viene dada por

$$L = \frac{1}{2} ||R^1 - R^2||_1,$$

ya que la matriz estocástica (3.7) de nuestro sistema es una matriz  $2 \times 2$ .

Por tanto, el script del apartado B.6 del Apéndice B nos proporciona los datos que se encuentran reflejados en la Tabla 3.3. En la segunda columna de esta tabla se encuentra el vector *cotaPrevia*, que contiene las cotas superiores de la distancia entre el punto fijo *w* y la aplicación *p* tras iterar 10000 veces.

Tal y como se pueda observar en la Tabla 3.3, al iterar 10000 veces la aplicación p, "nos encontramos" a distancia cero del punto fijo, en otras palabras, de acuerdo con el algoritmo, para cada par de valores ( $\theta$ , s) de la Tabla 3.2 resulta que ya "estamos" en el punto fijo.

Analicemos este caso un poco más en detalle. Recordemos que la cota previa viene dada por

$$d(p^n(x), w) \le \frac{L^n}{1-L} d(p(x), x),$$

	1	2	3	•••	40	50	51
cota Previa	0	0	0	•••	0	0	0

Tabla 3.3: Cota previa para los valores de  $\theta$  y *s* reflejados en la Tabla 3.2 para los cuales la Cadena de Markov asociada a (3.7) no ha convergido. Número máximo de iteraciones 10000.

donde *w* es el punto fijo de *p* y  $0 \le L < 1$ . Por tanto, si n = 10000 (iteración 10000), entonces  $0 \le L^n \ll 1$  y por tanto la fracción  $\frac{L^n}{1-L} \approx 0$  incluso para valores pequeños de *n*. Veamos a continuación un ejemplo en el cual fijamos el número máximo de iteraciones a 50.

#### Pruebas con un número máximo de 50 iteraciones

En este caso, fijamos el número máximo de iteraciones en 50 y repetimos el proceso descrito en el caso anterior. En la Tabla 3.4 se muestran algunos de los valores para los cuales el modelo no ha convergido. Fijémonos en que el número de no convergencias ha incrementado a 138, lo cual es lógico ya que hemos pasado de 10000 iteraciones a exigir solo 50.

	1	2	3	•••	136	137	138
thetaNoConverge	0.5	0.5	0.5	•••	5	5	5
sNoConverge	20	40	60	•••	600	680	840

Tabla 3.4: Valores de  $\theta$  y *s* para los cuales la Cadena de Markov asociada a (3.7) no ha convergido.  $0 < \theta \le 5$  con incrementos de 0.5 y  $0 < s \le 1000$  con incrementos de 20. Número máximo de iteraciones 50.

Así mismo, la cota previa asociada a los valores de  $\theta$  y *s* descritos en la Tabla 3.4, se muestra en la Tabla 3.5.

	1	2	3	•••	136	137	138
cota Previa ( $10^{-10}$ )	0.1990	0.2073	0.2088	•••	0.2088	0.2091	0.2095

Tabla 3.5: Cota previa para los valores de  $\theta$  y *s* reflejados en la Tabla 3.4 para los cuales la Cadena de Markov asociada a (3.7) no ha convergido. Número máximo de iteraciones 50.

De esta forma, observemos por ejemplo, que para el primer par (0.5, 20) (umbral 0.5 y estímulo 20), se tiene que la cota previa viene dada por  $10^{-10} \cdot 0.1990 = 0.0000000000199$ , que es un número extremadamente pequeño y nos dice que "estamos", como mucho, a dicha distancia del punto fijo en cuestión. En este caso, la precisión de máquina ha jugado un papel fundamental, porque recordemos que estamos trabajando con una precisión de 15 decimales; por lo tanto, si hubiéramos fijado una precisión de por ejemplo 4 decimales, la cota previa hubiera sido cero.

Lo anterior pone de manifiesto que, con tan solo 50 iteraciones "estamos" muy

cerca del punto fijo. De este modo, la precisión es crucial a la hora de referirnos a cotas relacionadas a la proximidad del punto fijo. Por este motivo, en el apartado siguiente determinaremos una cota que nos ayudará a conocer cuán lejos "estamos" del punto fijo con una precisión fijada.

### 3.5.5 Cota Posterior

En esta subsección especificaremos una cota cuyo sentido es opuesto al de la Subsección 3.5.4. Esta cota es la llamada cota posterior que ha sido comentada en la Nota 2.9 y que, a continuación, la adaptaremos a nuestro caso. Si *w* es el punto fijo de la aplicación *p*, la estimación posterior (o cota posterior) nos dice que si queremos que  $d(p^n(x), w) < \epsilon$ , necesitaremos que el proceso acabe en la primera iteración *n*-ésima para la cual la distancia entre dos iterados consecutivos sea como mucho  $\frac{\epsilon(1-L)}{L}$ , es decir,

$$d\left(p^n(x), p^{n-1}(x)\right) < \frac{\epsilon(1-L)}{L},\tag{3.14}$$

donde *L* es la constante de contractividad. La desigualdad anterior se deduce fácilmente de la expresión de la estimación posterior dada en (2.12). Consiguientemente, la relación (3.14) será crucial en el desarrollo del script del apartado B.7 del Apéndice B que nos permitirá obtener cotas posteriores.

Recordemos que, como ha venido siendo habitual, fijaremos como condición inicial (0.7, 0.3) y q = 0.6. Además, el conjunto de experimentos de este apartado va a consistir en determinar algunas cotas posteriores cuando el número máximo de iteraciones sea 10000 y 50, con diferentes precisiones.

### Pruebas con un número máximo de 10000 iteraciones

En este apartado, fijamos el número máximo de iteraciones a 10000 en el script del apartado B.7 y además hacemos distintas pruebas con  $\epsilon = 10^{-2}$ ,  $\epsilon = 10^{-10}$  y  $\epsilon = 10^{-15}$ . En la Tabla 3.6 se reflejan todos los resultados, con las distintas precisiones mencionadas.

La información de la Tabla 3.6 nos muestra que con cada  $\epsilon$ , el sistema no ha convergido en 51 ocasiones con el número máximo de 10000 iteraciones. Ahora bien, con dicho número de iteraciones se alcanza la precisión deseada en cada caso. Por esa razón, la columna *iteraciones* se repite con el número 10000.

Por ejemplo, en la fila 50, con la precisión  $\epsilon = 10^{-10}$  se tiene que para el par (5,680) (umbral 5 y estímulo 680) la CM asociada a la matriz (3.7) no ha convergido en 10000 iteraciones. Sin embargo, cuando continúa el proceso resulta que la distancia entre dos iterados consecutivos es menor que la cota  $\frac{\epsilon(1-L)}{L}$ , por lo que se tiene que

$$d(p^n(x), w) < \epsilon$$

donde w es el punto fijo del proceso, es decir, nos encontramos a una distancia de 0.0000000001 del vector de distribución estable. En el siguiente apartado veremos qué pasa cuando pasamos de 10000 iteraciones a un máximo de 50.

#### 3. Aplicación a la Robótica

e		thetaNoConverge	sNoConverge	iteraciones	
	1	0.5	220	10000	
	2	0.5	600	10000	
	3	0.5	660	10000	
10 <sup>-2</sup>	:	:	:	•	
	49	5	600	10000	
	50	5	680	10000	
	51	5	840	10000	
	1	0.5	220	10000	
	2	0.5	600	10000	
	3	0.5	660	10000	
10 <sup>-10</sup>	:	:	:	•	
	49	5	600	10000	
	50	5	680	10000	
	51	5	840	10000	
	1	0.5	220	10000	
	2	0.5	600	10000	
	3	0.5	660	10000	
10 <sup>-15</sup>	:	:		•	
	49	5	600	10000	
	50	5	680	10000	
	51	5	840	10000	

Tabla 3.6: Resumen de las iteraciones a partir de las cuales se obtiene la precisión deseada en cada caso, cuando la cadena no ha convergido en un número máximo de 10000 iteraciones.

### Pruebas con un número máximo de 50 iteraciones

En este caso, fijamos a 50 el número máximo de iteraciones en el script B.7 y probaremos, al igual que antes, con las precisiones  $\epsilon = 10^{-2}$ ,  $\epsilon = 10^{-10}$  y  $\epsilon = 10^{-15}$ . En la Tabla 3.7 se muestra un resumen de las pruebas hechas.

En la Tabla 3.7 podemos contemplar que el sistema no ha convergido en 145 ocasiones. Con las precisiones  $10^{-2}$  y  $10^{-10}$ , se alcanza con 50 iteraciones, la precisión deseada; mientras que si exigimos una precisión de  $10^{-15}$ , se tiene que por ejemplo en la primera fila, el par (0.5,20) (umbral 0.5 y estímulo 20), para el cual no ha convergido la CM en un máximo de 50 iteraciones, resulta que en la iteración 70 se alcanza la precisión deseada.

En cualquier caso, debemos poner especial atención en que la convergencia del modelo se obtiene con una amplia precisión en tan solo pocos pasos del proceso. Con este conjunto de pruebas, culmina nuestro estudio.

En el siguiente capítulo, referente a las conclusiones, proporcionaremos una visión

e		thetaNoConverge	sNoConverge	iteraciones
	1	0.5	20	50
	2	0.5	40	50
	3	0.5	60	50
10 <sup>-2</sup>	:	:	•	
	143	5	600	50
	144	5	680	50
	145	5	840	50
	1	0.5	20	50
	2	0.5	50	50
	3	0.5	60	50
$10^{-10}$	÷	÷	•	•
	143	5	600	50
	144	5	680	50
	145	5	840	50
	1	0.5	20	70
	2	0.5	40	54
	3	0.5	60	51
10 <sup>-15</sup>	:	÷		
	143	5	600	50
	144	5	680	50
	145	5	840	50

Tabla 3.7: Resumen de las iteraciones a partir de las cuales se obtiene la precisión deseada en cada caso, cuando la cadena no ha convergido en un número máximo de 50 iteraciones.

general de este proyecto desde un punto de vista más amplio, haremos hincapié en los resultados de esta sección y se comentarán algunas dificultades al generalizar este modelo a *n* tareas.



# **CONCLUSIONES**

A lo largo de este proyecto, se ha ampliado el conocimiento obtenido durante los estudios del Grado de Matemáticas y se ha profundizado en la noción general de procesos estocásticos, cadenas de Markov, y en particular, se ha estudiado las propiedades principales de las CMR. Se ha tratado este tipo de procesos estocásticos desde el punto de vista de la teoría de punto fijo la cual ha sido empleada para introducir el concepto de convergencia de cadenas de Markov regulares. Se ha introducido el concepto de inteligencia de enjambre y se ha comprendido la importancia que tiene en el campo de la robótica, jugando un papel fundamental en el diseño de un SMR con una tarea a ser realizada. El hecho de considerar un SMR como un proceso estocástico sin memoria, fue un aspecto crucial para poder modelarlo como una CM, valor añadido de este trabajo, que se agrega al conocimiento adquirido. A partir de este punto, se desprenden una serie de experimentos y pruebas que consisten en estudiar la convergencia del modelo en función de ciertos parámetros.

No cabe duda que la implementación de algoritmos heurísticos es una primera buena aproximación en la realización de cualquier problema. Sin embargo, el objetivo era aplicar la teoría de cadenas de Markov en el ámbito de la robótica y así, establecer la convergencia del modelo mediante un algoritmo que se basa en la demostración del Teorema de Punto Fijo de Banach. Un aspecto a tener en cuenta, es que en este proyecto se ha formalizado de manera matemática la probabilidad de ejecución de una tarea a realizar por cada robot. Además, es importante resaltar el concepto de convergencia en robótica, ya que poder predecir cómo será el comportamiento de un robot en el futuro es relevante para posteriores tareas que tenga que realizar el robot o posibles decisiones que tenga que tomar.

En el último apartado del capítulo anterior concerniente a la evaluación de resultados, se tratan diversos aspectos de la convergencia en función de los parámetros del modelo tales como el estímulo, el umbral y la probabilidad de transición *q*. En vista de estos resultados se concluye que la convergencia, más allá de que se pueda alcanzar en un número pequeño de pasos con una precisión considerable, es indiscutible que depende en gran medida de los parámetros adoptados.

Es de vital importancia el hecho de considerar un SMR como un proceso sin memoria, ya que este hecho permitió establecer el modelo, y así alcanzar el propósito de este trabajo. Es cierto que, el conjunto de pruebas mostrado no son, en absoluto, experimentos de los cuales se puedan sacar conclusiones determinantes, debido a que se podría haber realizado más pruebas tales como: probar otro tipo de estímulos que no sea la distancia, escoger otra función de respuesta como probabilidad de transición con n > 2 o hacer un estudio en función de las condiciones iniciales del modelo. La extensión del trabajo no permitió incluir dichas pruebas. No obstante, hay algunas conclusiones que se pueden destacar:

- La probabilidad de transición *q* = 0.6 fue una buena elección para realizar las pruebas subsiguientes ya que, como pudimos comprobar, la convergencia se presentaba de forma casi equilibrada: unas pocas cadenas de Markov no convergían y la gran mayoría sí convergían.
- A mayor estímulo *s*, se presenta una tendencia decreciente a partir de un cierto valor en el tiempo de convergencia.
- A mayor distancia *d*, lo que implica menor estímulo  $s = \frac{1}{d}$ , también se presenta una tendencia decreciente a partir de un cierto valor en el tiempo de convergencia.
- Tanto el umbral *θ*, el estímulo *s* como la probabilidad de transición *q*, influyen en la convergencia del modelo.

Durante todo el proyecto se ha hablado de un SMR que realiza una única tarea, pero no hay que olvidar que esto implica que el sistema se modela mediante dos estados: realizar la tarea o no realizar la tarea. De este modo, teniendo en cuenta que el sistema se modela explícitamente mediante umbrales de respuesta, cuando asignamos las probabilidades

$$\mathbf{P}_{2}^{1} = \frac{s^{2}}{s^{2} + \theta^{2}} \text{ y } \mathbf{P}_{1}^{2} = q,$$

se sigue directamente que  $\mathbf{P}_1^1 = 1 - \frac{s^2}{s^2 + \theta^2}$  y  $\mathbf{P}_2^2 = 1 - q$  ya que cada fila de una matriz de transición representa una distribución de probabilidades y debe sumar 1. También, se debe prestar especial atención en que la convergencia se garantiza de forma asintótica. No obstante, cabe mencionar el principal problema cuando se intenta generalizar un **SMR** basado en inteligencia de enjambre, al caso en el que debe realizar *n* tareas (veáse [11]).

Este problema consiste en cómo asignar las probabilidades de transición de forma que sumen 1. Una solución, pasa por normalizar estas probabilidades de transición, pero esta modificación podría proporcionar cambios de comportamiento en la CM ([11]). Así pues, el estudio realizado en [11] propone un acercamiento de la asignación de *n* tareas en un SMR mediante la teoría de las posibilidades. Bajo esta teoría no se
encuentra la exigencia de que la suma sea igual a 1 de cada fila de la matriz de transición. De esta forma, las cadenas de Markov no emplearían la teoría de probabilidades, sino la teoría de posibilidades, y es cuando se habla de cadenas de Markov posibilísticas. Además, en el artículo mencionado se demuestra que cuando la posibilidad de transición depende de la distancia, la Cadena de Markov converge en un número **finito** de pasos, para cualquier condición inicial.

En esta línea, queda abierto un posible trabajo futuro con el objetivo de dar un formalismo matemático al estudio de la estabilidad (convergencia de las Cadenas de Markov Posibilísticas desde un punto de vista de la teoría de punto fijo), de la misma forma que se ha hecho en este trabajo, aplicando el Teorema de Punto Fijo de Banach a las cadenas de Markov probabilísticas.

Finalmente, cabe destacar que las principales aportaciones por mi parte a este trabajo se pueden resumir en los siguientes puntos:

- Extracción y estructuración de la información proporcionada por mis tutores.
- Realización de experimentos que no se encontraban en ninguna de las referencias empleadas y extracción de conclusiones basadas en dichos experimentos.
- Mostrar ejemplos cuyos cálculos no estaban desarrollados en las referencias empleadas.
- Ampliación de ejemplos y demostración de resultados que no se encontraban en las referencias utilizadas.



## **ESPACIOS MÉTRICOS Y NORMADOS**

#### A.1 Definiciones y ejemplos

A lo largo de este apéndice vamos a definir algunos conceptos básicos de espacios métricos y normados, y mostraremos algunos resultados relacionados con ellos que han sido de utilidad a lo largo de este trabajo siguiendo la referencia [12].

**Definición A.1.1 (Espacio métrico).** Un espacio métrico es un par (X, d) formado por un conjunto X y por una aplicación  $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ , donde  $\mathbb{R}^+$  denota el conjunto de números reales no negativos, que cumple los siguientes axiomas:

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .
- Simetría. d(x, y) = d(y, x) para cualesquiera  $x, y \in X$ .
- Designaldad triangular.  $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$  para cualesquiera  $x, y, x \in X$

Ejemplo A.1. Las funciones definidas como

$$d_{1}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_{i} - y_{i}|,$$
  

$$d_{2}(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{i} - y_{i})^{2}},$$
  

$$d_{\infty}(x, y) = \max\{|x_{i} - y_{i}|\}_{i=1}^{n}.$$

son funciones distancia definidas sobre  $\mathbb{R}^n$  con  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$ .

La distancia  $d_1$  para el caso n = 1 es la distancia usual cuando  $X = \mathbb{R}$ , mientras que a la distancia  $d_2$  se le conoce como la métrica Euclidea.

Los subconjuntos más importantes de un espacio métrico son las bolas abiertas ya que constituyen el concepto fundamental de subconjunto abierto (veáse pág. 37 de [12]).

**Definición A.1.2 (Bola abierta).** Sea (X, d) un espacio métrico y sean  $a \in X$  y  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$  con  $\epsilon > 0$ . Definimos la bola abierta en X, centrada en a y de radio  $\epsilon$ , como el conjunto

$$B(a,\epsilon) = \{x \in X : d(x,a) < \epsilon\}.$$

**Lema A.1.** Sea  $B(x,\epsilon)$  una bola abierta en un espacio métrico (X,d) y sea  $y \in B(x,\epsilon)$ , entonces existe  $\delta > 0$  tal que  $B(y,\delta) \subseteq B(x,\epsilon)$ .

*Demostración.* Como  $y \in B(x, \epsilon)$ , entonces  $d(x, y) < \epsilon$ . De esta forma tomamos  $\delta \le \epsilon - d(x, y) > 0$  y así, si  $z \in B(y, \delta)$ , entonces, por la desigualdad triangular se tiene que

$$d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \delta \le d(x, y) + \epsilon - d(x, y) = \epsilon$$

y por tanto  $z \in B(x, \epsilon)$ .

Este resultado permite plantearse la definición de un tipo de subconjuntos que cumplen la misma propiedad, es decir, de aquellos subconjuntos tales que para cualquier punto del subconjunto, existe una bola abierta centrada en él y totalmente incluida en el subconjunto (veáse pág. 41 de [12]).

**Definición A.1.3.** Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto A se dice abierto en (X, d) si para cada  $y \in A$  existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B(y, \epsilon) \subseteq A$ .

**Ejemplo A.2.** Con la métrica usual  $d_1$ , cualquier abierto de la recta real, incluyendo los casos de intervalos no acotados ( $\infty$ , a) y (b, $\infty$ ), es un subconjunto abierto de ( $\mathbb{R}$ ,  $d_1$ ). También lo son las uniones de intervalos abiertos.

Una vez introducido el concepto de subconjunto abierto, ya estamos en condiciones de definir lo que sería un conjunto cerrado.

**Definición A.1.4.** Sea (X,d) un espacio métrico. Un subconjunto C se dice cerrado en (X,d) si su complementario  $X \setminus C$  es un subconjunto abierto.

**Ejemplo A.3.** Todo intervalo cerrado [a, b] es un conjunto cerrado pues su complementario es abierto por ser la unión de los dos conjuntos abiertos

$$(-\infty, a)$$
 y  $(b, +\infty)$ .

Los conjuntos cerrados tienen una caracterización muy útil que se demostrará en el apartado A.2.

Otro tipo de subconjuntos importantes son los subconjuntos acotados.

**Definición A.1.5.** Un espacio métrico, (X, d), se dice acotado si existe un número real k tal que  $d(x, y) \le k$  para todo par de puntos  $x, y \in X$ . En este caso también se dice que la métrica d es una métrica acotada.<sup>1</sup>

 $<sup>^{1}</sup>$ Si no hay lugar a dudas de la métrica que se está empleando en el contexto, simplemente diremos que *X* es acotado.

**Definición A.1.6.** Una norma definida sobre un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial X, es una aplicación  $|| \cdot || : X \to \mathbb{R}^+$ , que verifica para todo  $x, y \in X$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$  las propiedades siguientes

- $||x|| \ge 0$
- ||x|| = 0 si y solo si x = 0
- $||\lambda x|| = |\lambda|||x||$
- $||x + y|| \le ||x|| + ||y||$  (Designal dad triangular de la norma).

**Definición A.1.7.** Un espacio normado sobre  $\mathbb{R}$  es el par  $(X, || \cdot ||)$ , donde X es un  $\mathbb{R}$ espacio vectorial  $y || \cdot ||$  una norma definida sobre el conjunto X.

**Ejemplo A.4.** Las siguientes aplicaciones son normas en  $\mathbb{R}^n$ .

$$||x||_{1} = \sum_{i=1}^{n} |x_{i}|,$$
$$||x||_{2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{i}^{2}},$$

$$||x||_{\infty} = \max_{1 \le i \le n} \{|x_i|\}.$$

Si  $(X, || \cdot ||)$  es un espacio normado, la aplicación

$$\begin{array}{rcccc} d: & X \times X & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \to & ||x-y|| \end{array}$$

es una métrica definida en *X*. Por lo tanto (X, d) es un espacio métrico. Es decir, dado un espacio vectorial *X* en el que se tiene definida una norma, automáticamente se tiene en *X* una estructura de espacio métrico. En estos términos se dice que (X, d) es un espacio métrico asociado a la norma  $|| \cdot ||$ .

**Ejemplo A.5.** Los espacios métricos asociados a las normas  $||\cdot||_1$ ,  $||\cdot||_2$  y  $||\cdot||_{\infty}$  sobre  $\mathbb{R}^n$  son, respectivamente, los correspondientes a las distancias ya introducidas en el Ejemplo A.1.

$$d_1(x, y) = ||x - y||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|,$$
  
$$d_2(x, y) = ||x - y||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

 $d_{\infty}(x, y) = ||x - y||_{\infty} = \max\{|x_i - y_i|\}_{i=1}^n.$ 

En definitiva, todo espacio normado es un espacio métrico; mientras que si (X, d) es un espacio métrico en el que X es un espacio vectorial, éste no tiene por qué poderse dotar de una norma de forma que d sea la distancia asociada a dicha norma.

De acuerdo con la página 179 de [13]: "Como espacios métricos, los espacios normados participan de todos los conceptos y propiedades de aquéllos, entre ellos las nociones de sucesión, sucesión de Cauchy y completitud", conceptos que detallaremos a continuación.

#### A.2 Cerrados, sucesiones y convergencia

En esta sección presentaremos algunas definiciones que nos conducirán, principalmente, a la caracterización de un conjunto cerrado. Empezaremos entonces definiendo la convergencia de una sucesión sobre un espacio métrico *X*.

**Definición A.2.1.** La sucesión  $\{x_n\}$  en el espacio métrico (X, d) converge hacia  $x \in X$ , si y solo si para cada número real  $\epsilon > 0$ , existe un  $n_0$  tal que

$$d(x_n, x) < \epsilon \quad \forall \ n \ge n_0.$$

O equivalentemente, si y solo si

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0.$$

Lo que nos dice la anterior definición, intuitivamente, es que los términos de la sucesión pueden estar tan cerca de *x* como se quiera a partir de un cierto término. Con frecuencia escribiremos indistintamente que  $x_n \rightarrow x$  o que lím  $x_n = x$ , para referirnos a que la sucesión converge a *x*.

Dentro de las sucesiones que son convergentes, hay un tipo especial de sucesiones que presentaremos a continuación.

**Definición A.2.2.** Una sucesión  $\{x_n\}$  en un espacio métrico (X, d) es una sucesión de Cauchy si para cada número real  $\epsilon > 0$ , existe un natural  $n_0$  tal que

$$d(x_p, x_q) < \epsilon \quad \forall \ p, q \ge n_0.$$

Esta definición de una sucesión de Cauchy refleja que todos los términos de la sucesión se van acercando unos a otros tanto como se quiera a parir de un cierto término.

Así por tanto, se tiene que toda sucesión convergente es de Cauchy; mientras que la implicación contraria es falsa en general.

Finalmente, un concepto que también se utiliza en el desarrollo de este trabajo es el siguiente.

**Definición A.2.3.** Un espacio métrico es **completo** si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Después de las definiciones previas, vamos a dar la caracterización de un cerrado.

**Proposición A.2.1.** Un conjunto A es cerrado si y solo si toda sucesión convergente  $\{x_n\} \subseteq A$  tiene su límite en A.

*Demostración*. En primer lugar, sea *A* un cerrado y  $\{x_n\}$  una sucesión de *A* tal que  $x_n \to \bar{x}$ . Supongamos por reducción al absurdo que  $\bar{x} \notin A$ , i.e.,  $\bar{x} \in A^c$ . Como  $A^c$  es abierto, por definición se tiene que para cada  $x \in A^c$  existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B(x, \epsilon) \subseteq A^c$ , en particular  $B(\bar{x}, \epsilon) \subseteq A^c$ . Como  $x_n \to \bar{x}$ , entonces para cada  $\epsilon' > 0$ , existe un número natural  $n_0$  de manera que  $d(x_n, \bar{x}) < \epsilon'$  para todo  $n \ge n_0$ . En particular, también se cumple

para  $\epsilon' = \epsilon$ . De esta manera, para cada  $n \ge n_0$ , la sucesión  $x_n \in A$  también pertenece a  $A^c$  ya que  $x_n \in B(\bar{x}, \epsilon) \subseteq A^c$ , lo cual es una contradicción.

Recíprocamente, supongamos que *A* es abierto. Por tanto,  $A^c$  es cerrado, es decir, existe  $\bar{x} \in A^c$  tal que para cada  $\epsilon > 0$ , la bola  $B(\bar{x}, \epsilon)$  ha de contener al menos un elemento de  $(A^c)^c = A$  (negación de la definición de abierto). Para cada número natural *n* de manera que  $\frac{1}{n} < \epsilon$ , sea  $x_n \in B(\bar{x}, \frac{1}{n}) \subseteq B(\bar{x}, \epsilon) \subseteq A$ . De esta forma, se tiene una sucesión  $x_n \in A$  que converge a  $\bar{x}$  puesto que  $\bar{x} \notin A$  se tiene una contradicción.

Veamos ahora una proposición relacionada con un conjunto cerrado y un espacio métrico completo.

**Proposición A.2.2.** Todo subespacio cerrado de un espacio métrico completo, es completo.

*Demostración.* Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea  $H \subseteq X$  cerrado. Probemos que  $(H, d_H)^2$  también es completo. Sea  $\{x_n\}$  una sucesión de Cauchy en H. Como  $H \subseteq X$ ,  $\{x_n\}$  también será una sucesión de Cauchy en X. Por tanto, converge a un punto  $x \in X$ . Por el hecho de ser H cerrado, se tiene que  $x \in H$  y por tanto  $\{x_n\}$  converge a x en H.

#### A.3 Conjunto de vectores estocásticos $\mathcal{T}$

En la Sección 2.3 mencionamos que el conjunto de vectores estocásticos

$$\mathcal{T} := \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \, \middle| \, x_i \ge 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}$$

es un conjunto cerrado. A continuación demostramos dicho resultado.

Proposición A.3.1. El conjunto de vectores estocásticos es un conjunto cerrado.

*Demostración.* Sea  $\{x_k\}_{k=1}^m$  una sucesión en  $\mathcal{T}$  tal que  $x_k \to \bar{x}$ . Según la Proposición A.2.1, debemos probar entonces que  $\bar{x} \in \mathcal{T}$ . Por un lado, para cada k = 1, 2, ..., m se tiene que  $(x_k)_i \ge 0 \forall i = 1, ..., n$ . Por tanto,

$$\bar{x}_i = \left(\lim_{k \to \infty} x_k\right)_i \ge 0 \quad \forall \ i = 1, \dots, n$$

Por otro lado, como para cada k = 1, ..., m se tiene que  $\sum_{i=1}^{n} (x_k)_i = 1$ , entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_{i} = \sum_{i=1}^{n} \left( \lim_{k \to \infty} x_{k} \right)_{i} = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (x_{k})_{i} = \lim_{k \to \infty} 1 = 1.$$

Es decir,  $\bar{x} \in \mathcal{T}$ .

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Si *X* es un espacio métrico y *H* es un subconjunto de *X*, entonces *H* puede ser considerado como un espacio métrico con la métrica de *X*, restringida al conjunto *H*. Esta métrica se llama métrica inducida y se denota por  $d_H$  y el espacio métrico (*H*,  $d_H$ ) se llama subespacio métrico inducido.



# **IMPLEMENTACIÓN DE CÓDIGO**

A lo largo de este apéndice, se recopilan los scripts implementados en el software matemático Matlab para implementar los algoritmos relacionados con la convergencia de una cadena de Markov. Además también se implementará el algoritmo relacionado con las cotas del Teorema 2.3.1: estimación previa y estimación posterior del error.

Todos los scripts serán ejecutados con la instrucción previa format long, que asegura una precisión de 15 decimales.

### **B.1** Script histogramas

Este script genera un vector que contiene el número de iteraciones en el que se da la convergencia, y dichos datos, se utilizarán para realizar un histograma. El vector *numConvergencias* contendrá la iteración en la que la cadena de Markov ha convergido y contendrá un -1 en caso de que no converja en un máximo de *maxIter* iteraciones. Se comienza con la condición inicial *Xnew* = [0.7, 0.3], aunque hay que recordar que se puede empezar con cualquiera. La idea que se sigue en este script es fijar para cada umbral  $\theta$ , un estímulo *s*. Dados estos dos valores, empieza la evolución de la cadena de Markov. Finalmente, con el vector *numConvergencias* se realiza algunos histogramas que serán utilizados en la Subsección 3.5.1 del Capítulo 3 para determinar de forma global cuántas veces ha convergido o cuántas no.

q = 0.3; $\% q = P(X_{(n+1)=1} | X_{n=2})$ maxIter=10000;% Número máximo de iteracionesXnew=[0.7,0.3];% Condición inicialnumConvergencias = [];theta = 0.5;% Umbrals=20;% Estímuloind = 1;% Indice del vector numConvergenciaswhile theta <= 5</td>

```
while s <= 1000
        transicion=(s^2)/(s^2+ \text{ theta }^2); \ \% = P(X_(n+1)=2 \mid X_n=1)
        P=[1-transicion, transicion; q,1-q]; % Matriz de transición
        for n=1:maxIter % Evolución cadena de Markov
            Xold=Xnew;
            Xnew=Xold*P;
             if (roundn(Xnew, -15)==roundn(Xold, -15)) % Convergencia?
                 numConvergencias (ind)=n; % Iteración de convergencia
                 break:
                            % Pasamos al siguiente estímulo
            end
            numConvergencias(ind)=-1;
        end
        s = s + 20;
        ind = ind +1;
    end
    s = 20;
    theta = theta + 0.5;
end
```

#### B.2 Script gráfica estímulo vs número de iteraciones

Mediante este script, se generan par de valores (*s*, *iteración*) a partir de los cuales se realiza una gráfica estímulo *vs* número de iteraciones necesarias para converger. Para ello, se seguirá la misma idea que en el script **B**.1, con la diferencia que se añadirá un vector de estímulos, en el que en cada iteración se guardará el estímulo en cuestión. Así por ejemplo, *numConvergencias*(7)=48 y *estimulos*(7)=140 significa que con *s* = 140 la cadena de Markov ha convergido en 48 iteraciones. Para realizar dicho proceso se mantendrá fijo un valor de  $\theta$ . Este script es utilizado en la Subsección 3.5.2 del Capítulo 3 para estudiar cómo varía la convergencia en función del estímulo.

```
\% q = P(X_{(n+1)=1} | X_{n=2})
q = 0.6;
maxIter=10000;
                 % Número máximo de iteraciones
Xnew=[0.7,0.3]; % Condición inicial
numConvergencias = [];
                 % Umbral
theta = 0.5;
s = 20;
                 % Estímulo
                 % Índice de numConvergencias y estimulos
ind = 1;
estimulos = [];
while s <= 1000
    transicion=(s^2)/(s^2+ \text{ theta }^2); \ \% = P(X_(n+1)=2 \mid X_n=1)
    P=[1-transicion, transicion;q,1-q]; % Matriz de transición
    for n=1:maxIter
                           % Evolución cadena de Markov
        Xold=Xnew:
        Xnew=Xold*P;
        if (roundn(Xnew, -15) == roundn(Xold, -15)) % Convergencia?
             numConvergencias(ind)=n; % Iteración de convergencia
             break:
                        % Pasamos al siguiente estímulo
```

```
end
numConvergencias(ind)=-1;
end
estimulos(ind)= s;
s = s + 20;
ind = ind +1;
end
```

#### B.3 Script gráfica distancia vs número de iteraciones

Este script es muy similar al script del apartado B.2, con la diferencia que ahora el estímulo *s* será una función de la distancia, esto es,  $s = \frac{1}{d}$ . Por tanto, el vector *estimulos* pasa a llamarse *distancias* y se realiza el mismo procedimiento que en el apartado B.2. De este modo, este script genera par de valores (*d*, *iteración*) a partir de los cuales se realiza una gráfica distancia *vs* número de iteraciones necesarias para converger. Este script será utilizado en la Subsección 3.5.3 del Capítulo 3 para estudiar el comportamiento de la convergencia del modelo en función de la distancia, fijado un valor de  $\theta$ .

```
\% q = P(X_{(n+1)=1} | X_{n=2})
q = 0.6;
maxIter=10000; % Número máximo de iteraciones
Xnew=[0.7,0.3]; % Condición inicial
numConvergencias = [];
theta = 0.5;
                % Umbral
d=2;
                 % Distancia
ind = 1;
                % Índice de numConvergencias y distancias
distancias = [];
while d <= 100
    s=1/d:
                 % Estímulo en función de la distancia
    transicion=(s^2)/(s^2+ \text{ theta }^2); \ \% = P(X_(n+1)=2 \mid X_n=1)
    P=[1-transicion, transicion; q,1-q]; % Matriz de transición
    for n=1:maxIter
                           % Evolución cadena de Markov
        Xold=Xnew:
        Xnew=Xold*P;
        if (roundn(Xnew, -15) == roundn(Xold, -15)) % Convergencia?
            numConvergencias(ind)=n; % Iteración de convergencia
            break;
                       % Pasamos al siguiente estímulo
        end
        numConvergencias (ind) = -1;
    end
    distancias (ind) = d;
    d = d + 2;
    ind = ind +1;
end
```

#### **B.4** Función distancia

Esta función calcula la distancia entres dos vectores de  $\mathbb{R}^2$  y se empleará en la Sección B.6 y en la Sección B.7 del Apéndice B.

En el Capítulo 2, concretamente en la Sección 2.3.3, se utiliza la distancia derivada de la norma  $||\cdot||_1$  en  $\mathbb{R}^2$  dada por

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = ||(x_1, x_2) - (y_1, y_2)||_1 = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$
(B.1)

Por tanto, la expresión (B.1) será clave para la implementación de esta función que recibirá como parámetros dos vectores y devolverá su respectiva distancia. Dicha función se describe a continuación.

**function** d = distancia(v1,v2)

a=v1(1)-v2(1);b=v1(2)-v2(2);d = abs(a)+ abs(b);

end

#### **B.5** Función cota previa

La cota previa dada por la desigualdad (2.11) en el Teorema 2.3.1, dice cuán cerca "se está" del punto fijo w de la aplicación p. Dicha desigualdad es

$$d(p^{n}(x), w) \leq \frac{L^{n}}{1 - L} d(p(x), x) \quad \forall n,$$
(B.2)

donde *L* es la constante de contracción que según la Subsección 2.3.3 del Capítulo 2 viene dada por

$$L = \frac{1}{2} ||R^1 - R^2||_1,$$

ya que la matriz estocástica (3.7) del modelo es una matriz  $2 \times 2$ .

Sean  $(\theta_1, s_1), (\theta_2, s_2), \dots, (\theta_n, s_n)$  pares de valores de  $\theta$  y *s* para los cuales las cadenas de Markov determinada por (3.7) no han convergido. De esta forma, la función *cota-Previa* que se implementará a continuación recibe como parámetros un vector que se denotará como *thetaNoConverge*, el cual tendrá como componentes  $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ , un vector *sNoConverge* de componentes  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ , la condición inicial, la probabilidad de transición *q* y el número máximo de iteraciones *n*. Finalmente, la rutina en cuestión devolverá un vector *cotaPre* donde cada componente será la cota determinada por (B.2) correspondiente a los valores de  $\theta$  y *s* para los cuales la cadena no ha convergido. Así por ejemplo, *cotaPre*(3)=0.01 es la cota correspondiente al par *(theta-NoConverge*(3),*sNoConverge*(3)) =  $(\theta_3, s_3)$ . Entonces la función *cotaPrevia* se describe como sigue:

function [cotaPre] = cotaPrevia (thetaNoConverge, sNoConverge, condInicial, q, n)

```
cotaPre=[]; % Vector vacío
for i=1:length(thetaNoConverge)
   theta=thetaNoConverge(i);
   s = sNoConverge(i);
   transicion = s^(2)/(s^(2)+ theta^(2));
   % Matriz de transición
   P=[1- transicion, transicion ; q , 1-q ];
   % Constante de contracción
   L= (1/2)*(distancia(P(1,:),P(2,:)));
   % Calculamos la distancia inicial
   distInicial= distancia (condInicial*P,condInicial);
   % Cota
   cotaPre(i)= (L^(n)/(1-L))*distInicial;
```

end

end

#### **B.6** Script cota previa

En este script se utilizará la función *cotaPrevia* implementada en la Sección B.5. Principalmente, este script está diseñado para generar el par de valores ( $\theta$ , s) para los cuales las cadenas de Markov correspondientes no hayan convergido y en la última línea de código se obtiene la cota previa. Para cada par ( $\theta$ , s), se determinará la cotaPrevia (B.2) para especificar cuán lejos "se está" del punto fijo. Por ejemplo, si para 10000 iteraciones (n = 1000) y un par de valores ( $\tilde{\theta}$ ,  $\tilde{s}$ ) la cadena de Markov no ha convergido, entonces el script que se detalla a continuación, mostrará como resultado cuán lejos se ha quedado del punto fijo. Este script es utilizado en la Subsección 3.5.4 del Capítulo 3.

% Para guardar los valores de theta y s para los % cuales el proceso no ha convergido

```
thetaNoConverge = [];
sNoConverge =[];
% Índice de thetaNoConverge y sNoConverge
i = 1;
while theta <= 5
    while s<= 1000
        transicion = s^{(2)}/(s^{(2)}+ \text{ theta}^{(2)});
        % Matriz de transición
        P=[1- transicion, transicion ; q , 1-q ];
        for n=1:maxIter
                            % Evolución cadena de Markov
            Xold=Xnew;
            Xnew=Xold*P:
             if (roundn(Xnew, -15)==roundn(Xold, -15)) % Convergencia?
                 numConvergencias(ind) = n;
                 break;
            end
             if n==maxIter
                                 $ Si el proceso llega al final
                 numConvergencias (ind) = -1;
                 % Guardamos el par (theta, s)
                 thetaNoConverge(j)=theta;
                 sNoConverge(j)=s;
                 j= j + 1;
            end
        end
        ind = ind +1;
        s = s + 20;
    end
    s = 20;
    theta = theta + 0.5;
end
```

[cotaPre] = cotaPrevia (thetaNoConverge, sNoConverge, [0.7, 0.3], q, maxIter)

#### **B.7** Script cota posterior

Este script está estrechamente ligado a la cota (3.14) y es utilizado en la Subsección 3.5.5. En este script seremos capaces de determinar cuán lejos se quiere "estar" del punto fijo, después de iterar *n* veces la aplicación *p*.

Por ejemplo, si la precisión es  $\epsilon$  = 0.01, *L* = 0.2 y

$$d(p^{10}(x), p^{9}(x)) < \frac{\epsilon(1-L)}{L} = \frac{0.01(1-0.2)}{0.2} = 0.04,$$

entonces significa que tras iterar 10 veces el proceso, el modelo estará a una distancia de como mucho 0.01 del punto fijo.

En el desarrollo de este script se sigue la misma idea que en el script descrito en el apartado B.6, con la diferencia que se añade un parámetro *epsilon* que será el que se tendrá que modificar en función de la precisión que se desee y un vector *precision* donde se guardará la iteración para la cual la distancia de dos iterados consecutivos satisface la cota  $\frac{\epsilon(1-L)}{L}$ .

```
epsilon = 1e–5 % Precisión
```

```
q = 0.6;\% q = P\{X_{(i+1)=1} \mid X_{i} = 2\} = qmaxIter=10000;\% Número máximo de iteracionesXnew=[0.7,0.3];\% Condición inicialnumConvergencias=[];theta= 0.5;\% Umbrals = 20;\% Estímuloind = 1;\% Índice del vector numConvergencias
```

```
% Para guardar los valores de theta y s para los
% cuales el proceso no ha convergido
thetaNoConverge = [];
sNoConverge =[];
idx=1; % Índice de thetaNoConverge y sNoConverge
```

```
% Vector iteraciones donde cada componente contendrá la iteración
% para la cual el sistema ha alcanzado la precisión deseada
% cuando no ha convergido en maxIter iteraciones
iteraciones = [];
```

```
j = 1; % Índice del vector iteraciones
```

```
while theta <= 5
while s<= 1000
transicion = s^(2)/(s^(2)+ theta^(2));
% Matriz de transición
P=[1- transicion, transicion ; q , 1-q ];
n= 1; % Iteraciones
conv=false;
while (conv==false)
    Xold=Xnew;
    Xnew=Xold*P;
    if (roundn(Xnew,-15)==roundn(Xold,-15))
        numConvergencias(ind) = n;
        conv=true;</pre>
```

#### end

```
% Si el proceso llega al máximo de iteraciones sin que
        % haya convergido entonces continuamos la evolución de
        % la cadena, esta vez, el proceso parará cuando la
        % distancia de dos consecutivos sea menor que la cota
        if n==maxIter
            numConvergencias (ind) = -1;
            % Valores de theta y s para los cuales la C.M
            % no ha convergido
            thetaNoConverge(idx)=theta;
            sNoConverge(idx)=s;
            idx = idx + 1:
            % Constante de contracción
            L = (1/2) * distancia(P(1,:),P(2,:));
            % Cota
            bound= (epsilon*(1-L))/L;
            conv=false;
            while conv==false
            % Si la distancia de dos iterados consecutivos es
            % menor que la cota, guardamos la iteración para
            % la cual se ha dado este hecho
                if distancia (Xold, Xnew) < bound
                     iteraciones(j)= n;
                     j = j+1;
                    conv=true;
            % Si no es menor que la cota, continuamos el proceso
                else
                    n = n + 1;
                    Xold=Xnew;
                    Xnew=Xold*P;
                end
            end
        end
        n = n+1;
    end
    ind = ind +1;
    s = s + 20;
end
s = 20;
theta = theta + 0.5;
end
```

### **BIBLIOGRAFÍA**

- E. Bonabeau, A. Sobkowski, G. Theraulaz, and J.-L. Deneubourg, "Adaptive Task Allocation Inspired by a Model of Division of Labor in Social Insects," *Biocomputing and emergent computation*, pp. 36–45, 1997. 1.1, 1.2, 3.2.1, 3.2.2, 3.3.1
- [2] Y. Yang, C. Zhou, and Y. Tian, "Swarm Robots Task Allocation Based on Response Threshold Model," *4th International Conference on Autonomous Robots and Agents*, pp. 171–176, 2009. 1.1, 3.2.1, 3.2.2
- [3] G. Modica and L. Poggiolini, A First Course in Probability and Markov Chains.
   Wiley, 2012. 1.2, 2.1, 2.2.5, 2.2.5, 2.3, 2, 2.10
- [4] E. Bonabeau, G. Theraulaz, and J.-L. Deneubourg, "Fixed Response Thresholds and the Regulation of Division of Labor in Insect Societies," *Bulletin of Mathematical Biology*, vol. 60, pp. 753–807, 1998. 1.2, 3.2, 3.2.1, 3.2.1, 3.2.2, 3.2.2, 3.3.1
- [5] G. Takahara, "STAT 865 Stochastic Processes," Queen's University, Department of Mathematics and Statistics., no. Lecture notes, set 2, Discrete Time Markov Chains 1. (Último acceso: Julio 06 - 2017). [Online]. Available: http://www.mast.queensu.ca/~stat455/lecturenotes/lecturenotes.shtml 2.2.4
- [6] L. Breiman, Probability and Stochastic Processes: With a View Toward Applications. Houghton Mifflin Company, 1969. 2.2.5
- [7] R. Tyrrell Rockafellar, Convex Analysis, new ed., P. U. Press, Ed., 1997. 2.3, 2.3.2
- [8] V. Berinde, *Iterative Approximation of Fixed Points ABC*, 2nd ed., F. Takens and B. Teissier, Eds. Springer, 2007. 2, 2.9
- [9] I. Fernández Escudero, "Evolución de la Eusociabilidad en los Insectos," *Boletín de la S.E.A (Sociedad Entomológica Aragonesa)*, no. (Último acceso: Julio 06 2017), pp. 713–726, 1999. [Online]. Available: http://sea-entomologia.org/Publicaciones/Boletines/Boletin26/boletin26.htm 3.1.1
- [10] E. Bonabeau, M. Dorigo, and G. Theraulaz, *Swarm Intelligence: From Natural to Articial Systems*, primera ed. Oxford University Press, USA, 1999. 3.1.2, 3.1.2
- [11] J. Guerrero, Ó. Valero, and G. Oliver, "A First Step Toward a Possibilistic Swarm Multi-robot Task Allocation," Advances in Computational Intelligence: 13th International Work-Conference on Artificial Neural Networks, IWANN 2015, vol. 9094, no. Lecture Notes in Computer Science, pp. 147–158, 2015. 4

- [12] F. Mascaró Bonnin, J. Monterde Garcia-Pozuelo, J. Nuño Ballesteros, and R. Sivera Villanueva, *Introducció a la topologia*, Valencia, 1997. A.1, A.1, A.1
- [13] J. M. Díaz Moreno, *Introducción a la Topología de los Espacios Métricos*. Cádiz: Universidad, Servicio de Publicaciones, 1998. A.1
- [14] E. Seneta, Non-negative Matrices and Markov Chains. Springer New York, 2006.