Universitat de les Illes Balears

escola politècnica superior

Treball Final de Grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Representacions lineals de grups finits

Pedro Berruezo Guillamón

Tutor
Gabriel Cardona Juanals

Escola Politècnica Superior
Universitat de les Illes Balears
Palma, 9 de setembre de 2016

A tots els professors que m'han ensenyat i
ajudat al llarg de la meva vida. En particular
al meu tutor, Biel Cardona,per haver-me
ajudat i guiat en tot moment necessari
durant aquests darrers mesos.

Un agraïment especial als meus companys, amics
i família pel seu suport en els bons i mals moments.
Tots ells, m'han ajudat a perseguir un somni que es
farà realitat amb la lectura d'aquest treball.

A tots aquells que algun dia
em digueren que no ho aconseguiria:

Aquí el teniu, va per vosaltres!

SUMARI

Resum

En el següent treball, introduirem el concepte de representació lineal d'un grup, juntament amb altres definicions i propietats que ens permetran estudiar-les.

En primer lloc, es definirà el que és la representació lineal d'un grup finit, juntament amb alguns exemples i definicions bàsiques. Seguidament, introduirem algunes operacions entre representacions com poden ser el producte tensorial o la suma directa de representacions.

Una vegada clara la idea de representació lineal, introduirem el concepte de caràcter d'una representació, i veurem amb detall un recull de resultats de la teoria de caràcters. Aquesta part serà la més important així com la més complexa. La seva importància, com veurem, radica en el fet que el caràcter d'una representació la caracteritza per complet. Vista la teoria de caràcters, veurem el que són el producte de representacions així com les representacions induïdes.

Per acabar amb la teoria, deixarem una mica de banda el títol del treball i introduirem breument el que serien les representacions lineals de grups no finits i com es poden aplicar tots els resultats vists en el cas dels grups finits.

Entesa la teoria, es presentaran exemples concrets de grups i calcularem els seus caràcters irreductibles, que determinaran les representacions irreductibles, a partir de les quals, com haurem vist, podrem calcular tota la resta de representacions. A més, els capítols 3,4 i 6 inclouen un grapat d'exercicis resolts que ens ajudaran a assimilar la teoria i utilitzar-la per demostrar altres propietats, generalment derivades de les ja vistes.

CAPÍTOL 1

INTRODUCCIÓ

En l'àmbit l'àlgebra abstracta, més específicament de la teoria de grups, existeix una branca anomenada Teoria de representació que estudia les estructures algebraiques abstractes en termes de grups de transformacions lineals d'espais vectorials i l'estudi dels seus mòduls sobre aquestes estructures algebraiques. En aquest treball, ens centrarem en l'estudi de les representacions de grups. En particular ens centrarem en l'estudi de les representacions de grups finits a partir del llibre de *J.-P. Serre Linear Representations of Finite Groups* [1]. Donarem demostracions més detallades i inclourem la resolució de la majoria dels exercicis que és deixen pendents pel lector, la qual cosa ens permetrà demostrar l'assoliment dels coneixements que explicarem en la teoria.

Dins la teoria de representació, es troba la teoria de caràcters. En aquest treball, dedicarem el capítol més extens i més dens a l'estudi d'aquesta. La teoria de caràcters és important perquè com veurem estudia els caràcters associats a una representació, i aquests caràcters determinen la representació a estudiar.

Les característiques generals de la teoria de representació d'un grup finit sobre el cos dels complexos, van ser descobertes per *Ferdinand Georg Frobenius* antes del 1900. Més endavant, *Richard Brauer* va desenvolupar la teoria de representació modular, la qual no inclourem en aquest treball, i finalment, el 1927 *Hermann Weyl* i el seu estudiant *Fritz Peter* presentaren el Teorema de Peter–Weyl que estén bastants de resultats sobre representacions de grups finits a les representacions de grups compactes. Així, encara que en dedicarem en general a grups finits, dedicarem un capítol del treball a una petita introducció de com estendre l'estudi fet a grups no finits. Per a l'elaboració d'aquest capítol ens ajudarem dels llibres de *Hermann Weyl* [2], i *L. Loomis* [3].

Per acabar, és important notar que la teoria de representacions és útil en temes de física, química quàntica, etc. De fet, per veure alguns exemples de l'us de la teoria estudiada, dedicarem el darrer capítol d'aquest treball a l'estudi de alguns càlculs de les diferents representacions de grups conegut com C_n, D_n o $\mathfrak{S}_4$. En aquest capítol, utilitzarem en algun exemples notació del llibre de *Eyring* [4], el qual dona alguns exemples de grups i proposa la notació que seguirem en aquest treball.

CAPÍTOL 2

GENERALITATS SOBRE LES REPRESENTACIONS LINEALS

2.1. Definicions

Considerem V un espai vectorial sobre el cos dels nombres complexos $\mathbb{C}$ i $GL(V)$ el grup d'isomorfismes de V en ell mateix. D'aquesta manera, un element a de $GL(V)$ és, per definició, una aplicació lineal de V en V amb inversa, a^{-1}. Quan V té una base finita $\{e_i\}$ de n elements, a ve definida per una matriu quadrada (a_{ij}) d'ordre n, on els coeficients a_{ij} són nombres complexos obtinguts per la expressió de les imatges $a(e_j)$ en termes de la base $\{e_i\}$. És a dir:

$$a(e_j) = \sum_i a_{ij} e_i \qquad \text{per a tot } j$$

D'aquesta manera, dir que a és un isomorfisme és equivalent a dir que $\det(a) = \det(a_{ij})$ és diferent de zero. I per tant, el grup $GL(V)$ és pot identificar amb el grup de les matrius quadrades invertibles d'ordre n.

Considerem G un grup finit, amb element identitat 1, i amb la composició $(s,t) \mapsto st$. Aleshores es defineixen les representacions lineals com:

Definició 1. *Una **representació lineal** de G en V és un homomorfisme ρ del grup G al grup $GL(V)$. Dit d'un altre manera, una aplicació*

$$\begin{array}{rccc} \rho: & G & \longrightarrow & GL(V) \\ & s & \longmapsto & \rho(s) \end{array}$$

de tal manera que satisfaci la igualtat:

$$\rho(st) = \rho(s)\cdot\rho(t) \quad \textit{per a tot } s,t \in G$$

Observem que la definició anterior implica les igualtats següents:

$$\rho(1) = 1, \qquad \rho((s^{-1})) = \rho(s)^{-1}$$

que són fàcilment demostrables a partir de la definició de representació lineal i les igualtats $s \cdot s^{-1} = 1$ i $s = s \cdot 1$.

Freqüentment, escriurem ρ_s enlloc de $\rho(s)$. D'altra banda, quan ρ estigui fixat, direm que V és un ***espai de representació*** de G, o de vegades , fent abús del llenguatge, simplement una *representació* de G.

A partir d'ara, ens limitarem a casos on $|V|$ tengui dimensió finita. És una gran restricció, però per a moltes aplicacions és interessant manejar un nombre finit d'elements $x_i \in V$, i per tant es solen representar grups finitament generats, i en particular grups finits. I com veurem més endavant, sempre podrem trobar una subrepresentació de V de dimensió finita, que contengui els x_i desitjats. Per fer-ho, bastarà considerar el subespai vectorial generat per les imatges $\rho_s(x_i)$ de les x_i.

Considerem ara V de dimensió finita, que indicarem per n. Aleshores direm que n és el grau de la representació de V.

$$\textbf{Grau de la representació} = \dim(V)$$

Fixada $\{e_i\}$ una base de V, podem considerar R_s la matriu de ρ_s respecte d'aquesta base. D'aquesta manera, les matrius R_s compliran que:

$$\det(R_s) \neq 0, \qquad R_{st} = R_s \cdot R_t \quad \forall s, t \in G$$

Ara, si indiquem els coeficients de la matriu R_s com $r_{ij}(s)$, podrem expressar la segona igualtat com:

$$r_{ij}(st) = \sum_j r_{ij}(s) \cdot r_{jk}(t)$$

D'aquesta manera, si donam matrius invertibles $R_s = \big(r_{ij}(s)\big)$ que satisfan les identitats anteriors, aquestes correspondran a una representació ρ de G en V. Això és el que es coneix com donar una representació en forma matricial.

Donades ρ i ρ' dues representacions del mateix grup G sobre espais vectorials V i V' respectivament, es diu que són **representacions semblants** (o isomorfes) si existeix un isomorfisme lineal $\tau : V \longrightarrow V'$ que "transforma" ρ en ρ', és a dir que es satisfà la identitat:

$$\tau \circ \rho(s) = \rho'(s) \circ \tau \qquad s \in G.$$

Dit d'un altre manera, que fa que el diagrama següent commuti per a tot $s \in G$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho(s)"] \arrow[d, "\tau"'] & V \arrow[d, "\tau"] \\ V' \arrow[r, "\rho'(s)"'] & V' \end{tikzcd}$$

Si ρ i ρ' venen donades en forma matricial per R_s i R'_s respectivament, això es tradueix en dir que existeix una matriu T invertible tal que

$$T \cdot R_s = R'_s \cdot T, \qquad \text{per a tot } s \in G$$

o escrit d'un altre manera $R'_s = T \cdot R_s \cdot T^{-1}$. Podrem identificar les dues representacions fent que cada $x \in V$ correspongui a un element $\tau(x) \in V'$, en particular, ρ i ρ' tendran el mateix grau.

2.2. Exemples bàsics

En primer lloc, vegem que una representació de grau 1 d'un grup G és un homomorfisme $\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$, on $\mathbb{C}^*$ és el grup multiplicatiu dels nombres complexes. Com que cada element de G té ordre finit, els valors $\rho(s)$ de ρ són arrels de la unitat i en particular tendrem que $|\rho(s)| = 1$.

A continuació podem veure alguns exemples bàsics per fer-nos una idea més clara del que són les representacions i aprofitarem per presentar algunes representacions que tenen un nom particular pel fet de ser comuns, especials o interessants.

2.2.1. Representació trivial (o unitat)

Si consideram $\rho(s) = 1$ per a tot $s \in G$, obtenim la representació de grau 1 que és coneix amb el nom de **representació trivial** o **representació unitat**.

$$\begin{array}{rccl} \rho : & G & \longrightarrow & GL(V) \\ & s & \longmapsto & \rho_s = 1 \end{array}$$

2.2.2. Representació regular

Diguem g l'ordre de G, i sigui V un espai vectorial de dimensió g amb base $\{e_t\}_{t\in G}$ indexada pels elements de G. Aleshores podem considerar per a cada $s \in G$ la aplicació lineal ρ_s determinada per:

$$\begin{array}{rccl} \rho_s : & V & \longrightarrow & V \\ & e_t & \longmapsto & e_{st} \end{array}$$

És immediat veure que això defineix una representació lineal ρ anomenada **representació regular** de G.

El grau d'aquesta representació és igual a l'ordre de G. A més, notem que $e_s = \rho_s(e_1)$, per tant, podem donar una base de V com les imatges de e_1, ja que

$$\{e_t\}_{t\in G} = \left\{\rho_t(e_1)\right\}_{t\in G}.$$

Proposició 1. *Sigui ρ' una representació de G en W, on W conté un vector ω de tal manera que $\left\{\rho'_s(\omega)\right\}_{s\in G}$ sigui una base de W, aleshores ρ' és isomorfa a la representació regular.*

Demostració. Considerem ρ la representació regular de G sobre V, i ρ' una representació de G en W on W conté un vector ω de tal manera que $\left\{\rho'_s(\omega)\right\}_{s\in G}$ és una base de W. Aleshores basta considerar l'isomorfisme

$$\begin{array}{rccl} \tau : & V & \longrightarrow & W \\ & e_s & \longmapsto & \rho'_s(\omega) \end{array}$$

que satisfà que $\tau \circ \rho_s = \rho'_s \circ \tau$ per a tot $s \in G$. Per veure-ho basta veure que es compleix la igualtat per als elements de la base $\{e_t\}_{t\in G}$:

$$(\tau \circ \rho_s)(e_t) = \tau(e_{st}) = \rho'_{st}(\omega) \quad \forall s, t \in G$$

$$(\rho'_s \circ \tau)(e_t) = \rho'_s\left(\rho'_t(\omega)\right) = \rho'_{st}(\omega) \quad \forall s, t \in G$$

Per tant, ρ i ρ' són semblants. $\square$

2.2.3. Representació permutació (associada a X)

Suposem que G opera sobre un conjunt finit X. És a dir, que per a cada $s \in G$ existeix una permutació $x \mapsto sx$ de X que satisfà les identitats:

$$1x = x, \quad s(tx) = (st)x \qquad \forall s,t \in G \quad \forall x \in X$$

Aleshores, si consideram V un espai vectorial amb una base $\{e_x\}_{x \in X}$ indexada pels elements de X, per a cada $s \in G$ podem prendre ρ_s com l'aplicació lineal determinada per

$$\begin{array}{rccc} \rho_s: & V & \longrightarrow & V \\ & e_x & \longmapsto & e_{sx} \end{array}$$

D'aquesta manera, enviant cada $s \in G$ a l'aplicació lineal $\rho_s \in GL(V)$ que acabem de definir, s'obté el que es coneix com a **representació permutació** associada a X.

2.3. Subrepresentacions

Considerem $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ una representació lineal i W un subespai vectorial de V. Suposem que W és estable sota ρ, és a dir, suposem que W és estable [1] respecte ρ_s, $(\rho_s(W) \subseteq W)$, per a tot $s \in G$,

Aleshores, si restringim ρ_s a W, al ser ρ_s un isomorfisme de V en ell mateix i W estable per aquest, obtindrem un isomorfisme del subespai W en ell mateix que indicarem per ρ_s^W. A més, com que $\rho_s(x) \cdot \rho_t(x) = \rho_{st}(x)$ per a tot $x \in V$, en particular es compleix per a tot $x \in W \subseteq V$ i per tant també tendrem que $\rho_s^W(x) \cdot \rho_t^W(x) = \rho_{st}^W(x)$ per a tot $x \in W$. Per tant, podem definir l'homomorfisme

$$\begin{array}{rccc} \rho^W: & G & \longrightarrow & GL(W) \\ & s & \longmapsto & \rho_s^W \end{array}$$

que és una representació de G en W. Aquesta representació, ρ^W, s'anomena una subrepresentació de ρ. Fent abús del llenguatge és diu que W és una subrepresentació de V.

Vegem-ne un exemple per a que quedi més clar:

Exemple 1. *Considerem V la representació regular de G, i considerem W el subespai de V de dimensió 1 generat per l'element $x = \sum_{t \in G} e_t$. Aleshores aplicant la definició de morfisme es satisfarà la igualtat*

$$\rho_s(x) = \rho_s\left(\sum_{t \in G} e_t\right) = \sum_{t \in G} \rho_s(e_t) = \sum_{t \in G} e_{st} = x$$

per a tot $s \in G$. És a dir, que W serà estable respecte ρ, la representació de G sobre V. Per tant podrem considerar la subrepresentació de ρ, sobre W donada per

$$\begin{array}{rccc} \rho^W: & G & \longrightarrow & GL(W) \\ & s & \longmapsto & \rho_s^W \end{array}$$

on ρ_s^W són les restriccions de ρ_s al subespai W per a tot $s \in G$, i com veurem més endavant, aquesta representació és isomorfa a la representació trivial [2].

[1] Direm que un subespai vectorial $W \subseteq V$ és estable (o invariant) respecte d'una aplicació lineal $f : V \longrightarrow V$, quan per a tot $x \in W$, $f(x) \in W$.

[2] Demostrat a la secció 3.4, on determinarem totes les subrepresentacions de la representació regular.

Vegem ara un teorema sobre l'existència d'espais estables.

Teorema 1. *Sigui $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ una representació lineal de G en V i W un subespai vectorial de V estable sota G. Aleshores existeix un espai complementari W^c de W en V que és estable sota G.*

Demostració. Considerem W' un espai vectorial complementari arbitrari de W en V, i considerem p la corresponent projecció de V sobre W. Podem construir la mitjana p^0 dels conjugats de p per els elements de G:

$$p^0 = \frac{1}{g}\sum_{t\in G}\rho_t \cdot p \cdot \rho_t^{-1} \qquad \text{On } g \text{ és l'ordre de G}$$

Com que p és la projecció de V sobre W, i ρ_t és un isomorfisme de V en ell mateix sota el que W és estable, tendrem que p^0 serà una aplicació lineal de V en W. Notem que cada un dels conjugats satisfà:

$$V \xrightarrow{\rho_t^{-1}} V \xrightarrow{p} W \xrightarrow{\rho_t} W$$

i per tant la suma de tots ells també. D'altra banda, com que ρ_t és un isomorfisme que preserva W, $\rho_t^{-1}(x) \in W$ per a tot $x \in W$. Per tant, per a qualsevol $x \in W$, si $\left(p \cdot \rho_t^{-1}\right)(x) = \rho_t^{-1}(x)$ llavors $\left(\rho_t \cdot p \cdot \rho_t^{-1}\right)(x) = x$, i com això és cert per a tot $t \in G$, tenim que $p^0(x) = x$. És a dir, que W és estable sota p^0. Per tant, com que p^0 és una aplicació de V en W que deixa estable W, p^0 és una projecció de V sobre W. D'aquesta manera, el nucli de p^0, diguem-li W_0, serà un complementari de W en V.

D'altra banda, si consideram $\rho_s \cdot p^0 \cdot \rho_s^{-1}$ podem observar que:

$$\rho_s \cdot p^0 \cdot \rho_s^{-1} = \frac{1}{g}\sum_{t\in G}\rho_s \cdot \rho_t \cdot p \cdot \rho_t^{-1} \cdot \rho_s^{-1} = \frac{1}{g}\sum_{t\in G}\rho_{st} \cdot p \cdot \rho_{st}^{-1} = p^0 \qquad \forall s \in G$$

Escrit d'un altre manera, tendrem que $\rho_s \cdot p^0 = p^0 \cdot \rho_s$ per a tot $s \in G$. Finalment, per a tot $x \in W^0$ i $s \in G$ tendrem que $p^0(x) = 0$ i per tant

$$\left(p^0 \cdot \rho_s\right)(x) = \left(\rho_s \cdot p^0\right)(x) = \rho_s\left(p^0(x)\right) = \rho_s(0) = 0$$

Per tant, $\rho_s(x) \in W^0$ per a tot $x \in W^0$, la qual cosa demostra que W^0 és estable sota G. □

Existeix una forma alternativa de demostrar aquest mateix teorema:

Demostració. Considerem V un espai vectorial dotat d'un producte escalar $\langle x, y\rangle$ que satisfà les condicions usuals: linealitat en x, semilinealitat en y (és a dir que $\langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$) i $\langle x, x\rangle > 0$ per a tot $x \neq 0$. Suposem que aquest producte escalar és invariant sota G [3], és a dir, que $\langle \rho_s(x), \rho_s(y)\rangle = \langle x, y\rangle$. Fixem-nos que sempre podrem substituir $\langle x, y\rangle$ per $\sum_{t\in G}\langle \rho_s(x), \rho_s(y)\rangle$ de manera que sigui invariant. Aleshores, l'espai ortogonal W^0 complementari de W en V és estable sota G. □

[3] Notem que si el producte escalar $\langle x, y\rangle$ és invariant vol dir que, donada una base ortonormal de V, aleshores la matriu ρ_s respecte d'aquesta base és una matriu unitària.

Mantenint les hipòtesis del teorema 1, considerem $x \in V$, i w i w^0 les projeccions de x en W i W^0 respectivament. Com que W i W^0 són complementaris, tendrem que $x = w + w^0$. I per tant, $\rho_s(x) = \rho_s(w) + \rho_s(w^0)$ per a tot $s \in G$. Ara bé, W i W^0 són estables sota G, per tant, $\rho_s(w) \in W$ i $\rho_s(w^0) \in W^0$. D'on deduïm que $\rho_s(w)$ i $\rho_s(w^0)$ són les projeccions de $\rho_s(x)$. En conseqüent les representacions de G sobre W i W^0 determinaran la representació sobre V. Quan això passi, direm que V és suma directa de W i W^0 i escriurem $V = W \oplus W^0$. En aquest cas, cada element de V s'identifica amb un parell (w, w^0) on $w \in W$ i $w^0 \in W^0$. Si W i W^0 venen donats en forma matricial per R_s i R_s^0, aleshores $W \oplus W^0$ vendrà donat en forma matricial per

$$\begin{pmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s^0 \end{pmatrix}$$

En el cas de tenir més de dues representacions en suma directa donades en forma matricial, $R_s^1, R_s^2, \ldots, etc$ la suma directa d'un nombre arbitrari però finit, n, de representacions és defineix de forma similar mitjançant:

$$\begin{pmatrix} R_s^0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_s^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & R_s^n \end{pmatrix}$$

2.4. Representacions irreductibles

Per començar aquesta nova secció, definirem representació irreductible.

Definició 2. *Donada $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ una representació lineal de G, direm que aquesta es **irreductible** o **simple** si V és un espai vectorial diferent del trivial,* 0, *que no conté cap subespai estable sota G, exceptuant clar està el trivial, i el total, V.*
Pel teorema 1, la segona condició és equivalent a dir que V no és suma directa de dues representacions, apart de $V = 0 \oplus V$.

Notem que una representació qualssevol de grau 1 és sempre irreductible. Ja que si la representació és de grau 1, aleshores $|V| = 1$, els únics subespais de V són el trivial i el total i per tant no conté cap subespai estable sota G, exceptuant el trivial i el total. Més endavant, a la secció 4.1, veurem que tot grup abelià té almenys una representació irreductible de grau major que 1.

Les representacions irreductibles solen ser utilitzades per construir-ne d'altres mitjançant la suma directa d'aquestes.

Teorema 2. *Tota representació és suma directa de representacions irreductibles.*

Demostració. Considerem V una representació lineal de G. Demostrarem el que volem aplicant inducció sobre la dimensió de V.

Si $\dim(V) = 0$, aleshores V és suma directa d'una família buida de representacions irreductibles.

Una vegada vist un cas base, suposem que totes les representacions de grau menor o igual que n, $\dim(V) \leq n$ són suma directa de representacions irreductibles. Vegem ara que també es compleix per representacions de grau $n+1$:
Si V és irreductible no hi ha res que provar.
Si V no és irreductible, aleshores pel teorema 1, V es pot descompondre en suma directa $V' \oplus V''$ on $\dim(V') < \dim(V) = n+1$ i $\dim(V'') < \dim(V) = n+1$. Aleshores per la hipòtesis d'inducció les nostres representacions V' i V'' són suma directa de representacions irreductibles. Per tant, la suma directa de totes elles és una suma directa de representacions irreductibles que és V. Per tant, també es compleix per a representacions de dimensió $n+1$. Pel que queda demostrat per inducció que és compleix per a tota representació de dimensió n. $\square$

D'aquesta manera, donada una representació V i una de les seves descomposicions en suma directa de representacions irreductibles $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$, ens podem demanar si aquesta descomposició és única. Ara bé, el cas en que $\rho_s = 1$ per a tot $s \in G$ demostra que no és cert en general. Ja que en aquest cas els subespais W_i seran rectes, i sabem que l'espai vectorial generat per suma directa de diverses rectes pot ser expressat com suma directa d'altres rectes, de fet, existeixen infinites descomposicions d'aquests espai vectorials com a suma directa de diferents rectes. No obstant això, a la secció 3.3 veurem que el nombre de W_i isomorfs a una representació irreductible donada, no depèn de la descomposició escollida.

2.5. Producte tensorial de dues representacions

En aquesta secció, veurem que a més de la suma directa ja estudiada, que té les propietats formals d'una adició, també tenim una "multiplicació": el **producte tensorial**, també anomenat de vegades **producte *Kronecker***. Aquest producte es defineix de la forma següent:

Definició 3. *Donats 3 espais vectorials V_1, V_2 i W, i l'aplicació*

$$\begin{array}{rccc} f: & V_1 \times V_2 & \longrightarrow & W \\ & (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1 \cdot x_2 \end{array}$$

Direm que W és el producte tensorial de V_1 i V_2, i el denotarem per $V_1 \otimes V_2$, si es compleixen les dues condicions següents:

(i) $x_1 \cdot x_2$ és lineal en cada una de les variables de x_1 i x_2.

(ii) Si (e_i^1) és una base de V_1 i (e_i^2) és una base de V_2, la família de productes $(e_i^1 \cdot e_i^2)$ és una base de W.

Aquest espai existeix, i llevat d'isomorfismes, és únic.

Demostració. Sigui $(e_i^1)_{i \in I_1}$ una base de V_1 i $(e_i^2)_{i \in I_2}$ una base de V_2, considerem U l'espai vectorial donat per $U = \langle u_{ij} \rangle_{\substack{i \in I_1 \\ j \in I_2}}$. Sigui l'aplicació $\widehat{f}$ donada per

$$\begin{array}{rccc} \widehat{f}: & V_1 \times V_2 & \longrightarrow & U \\ & \sum_{i,j} a_{ij} \left(e_i^1, e_j^2\right) & \longmapsto & \sum_{i,j} a_{ij} u_{ij}, \end{array}$$

llavors U i $\widehat{f}$ compleixen les condicions (i) i (ii). Per tant, U serà un producte tensorial de V_1 i V_2.

Vegem Ara que aquest producte és únic.

Suposem que existeixen dos productes tensorials de V_1 i V_2 i diem-lis W i W' associats a les aplicacions $f : V_1 \times V_2 \to W$ i $f' : V_1 \times V_2 \to W'$ respectivament. Aleshores, per ser productes tensorials, f i f' són lineals en V_1 i en V_2, i a més, sigui $(e_i^1)_{i\in I_1}$ una base de V_1 i $(e_i^2)_{i\in I_2}$ una base de V_2, aleshores $\left(f\left(e_i^1, e_j^2\right)\right)_{\substack{i\in I_1\\ j\in I_2}}$ és una base de W i $\left(f'\left(e_i^1, e_j^2\right)\right)_{\substack{i\in I_1\\ j\in I_2}}$ és una base de W'.
Considerem doncs, l'aplicació F donada per

$$\begin{array}{rccc} F: & W & \longrightarrow & W' \\ & \sum\limits_{i,j} a_{ij} f\left(e_i^1, e_j^2\right) & \longmapsto & \sum\limits_{i,j} a_{ij} f'\left(e_i^1, e_j^2\right). \end{array}$$

i l'aplicació F' donada per

$$\begin{array}{rccc} F': & W' & \longrightarrow & W \\ & \sum\limits_{i,j} a_{ij} f'\left(e_i^1, e_j^2\right) & \longmapsto & \sum\limits_{i,j} a_{ij} f\left(e_i^1, e_j^2\right). \end{array}$$

Notem que ambdues estan ben definides, ja que W i W' són espais vectorials i per tant

$$\sum_{i,j} a_{ij} f\left(e_i^1, e_j^2\right) \in W \qquad \text{i} \qquad \sum_{i,j} a_{ij} f'\left(e_i^1, e_j^2\right) \in W'.$$

D'altra banda, la linealitat d'ambdues aplicacions és immediata. A més, si consideram $x \in W$ i $x' \in W'$, tendrem que

$$x = \sum_{i,j} a_{ij}^x f\left(e_i^1, e_j^2\right) \in W \qquad \text{i} \qquad x' = \sum_{i,j} a_{ij}^{x'} f'\left(e_i^1, e_j^2\right) \in W',$$

i així, és fàcil veure que:

$$\left(F' \circ F\right)(x) = F'\left(F\left(\sum_{i,j} a_{ij}^x f\left(e_i^1, e_j^2\right)\right)\right) = F'\left(\sum_{i,j} a_{ij}^x f'\left(e_i^1, e_j^2\right)\right) = \sum_{i,j} a_{ij}^x f\left(e_i^1, e_j^2\right) = x$$

$$\left(F \circ F'\right)(x') = F\left(F'\left(\sum_{i,j} a_{ij}^{x'} f'\left(e_i^1, e_j^2\right)\right)\right) = F\left(\sum_{i,j} a_{ij}^{x'} f\left(e_i^1, e_j^2\right)\right) = \sum_{i,j} a_{ij}^{x'} f'\left(e_i^1, e_j^2\right) = x'$$

D'on deduïm que $F' \circ F = F' \circ F = Id$, i per tant $W \cong W'$, i per tant el producte tensorial és únic llevat d'isomorfismes. $\square$

A continuació, notem que de la condició (ii) obtenim que

$$\dim(V_1 \otimes V_2) = \dim(V_1) \cdot \dim(V_2)$$

Ja que per cada element de la base de V_1, hi haurà tants d'elements a la base de $V_1 \otimes V_2$ com elements hi ha a la base de V_2.

De la mateixa manera, si consideram dues representacions lineals de G,

$$\begin{array}{rccc} \rho^1: & G & \longrightarrow & GL(V_1) \\ & s & \longmapsto & \rho^1_s \end{array} \qquad \text{i} \qquad \begin{array}{rccc} \rho^2: & G & \longrightarrow & GL(V_2) \\ & s & \longmapsto & \rho^2_s \end{array},$$

podem definir un element $\rho_s \in GL(V_1 \otimes V_2)$ per a cada $s \in G$ de la forma següent:

$$\rho_s(x_1 \cdot x_2) = \rho^1_s(x_1) \cdot \rho^2_s(x_2) \qquad \forall x_1 \in V_1,\ x_2 \in V_2,$$

el qual escriurem com $\rho_s = \rho^1_s \otimes \rho^2_s$. D'aquesta manera, si consideram tots els isomorfismes ρ_s donats per cada $s \in G$, ens defineixen una representació de G en $V_1 \otimes V_2$ que anomenarem **producte tensorial** de les representacions ρ^1 i ρ^2 donades.

Com en el cas dels productes tensorials d'espais vectorials, podem veure que aquesta representació existeix i és única. La existència ve donada per la existència de cada un dels isomorfismes, els quals existeixen per la existència del producte tensorial d'espais vectorials. De la mateixa manera, la unicitat ve donada per la unicitat de cada un dels isomorfismes, els quals de la mateixa manera, són únics per la unicitat del producte tensorial d'espais vectorials.

La matriu de la representació $\rho = \rho^1 \otimes \rho^2$ es pot construir de la forma següent: Considerem $\left(e^1_i\right)$ una base de V_1 i $r^1_{ij}(s)$ la matriu de ρ^1_s respecte d'aquesta base. De la mateixa manera, considerarem $\left(e^2_i\right)$ una base de V_2 i $r^2_{ij}(s)$ la matriu de ρ^2_s respecte d'aquesta base. Aleshores, satisfà que:

$$\rho^1_s\left(e^1_j\right) = \sum_i r_{ij}(s) \cdot e^1_i \qquad\qquad \rho^2_s\left(e^2_j\right) = \sum_i r^2_{ij}(s) \cdot e^2_i$$

D'on, aplicant la definició $\rho_s(x_1 \cdot x_2) = \rho^1_s(x_1) \cdot \rho^2_s(x_2)$, tendrem que:

$$\rho_s\left(e^1_{j_1} \cdot e^2_{j_2}\right) = \rho^1_s\left(e^1_{j_1}\right) \cdot \rho^2_s\left(e^2_{j_2}\right) = \sum_{i_1, i_2} r^1_{i_1 j_1}(s) \cdot r^2_{i_2 j_2}(s) \cdot e^1_{i_1} \cdot e^2_{i_2}$$

En conseqüència, com que $\left(e^1_i \cdot e^2_i\right)$ és una base de $V_1 \otimes V_2$, tendrem que la matriu de ρ_s respecte d'aquesta base serà $\left(r^1_{i_1 j_1}(s) \cdot r^2_{i_2 j_2}(s)\right)$, que és el que coneixem com producte tensorial de les matrius de ρ^1_s i ρ^2_s.

El producte tensorial de dues representacions irreductibles, en general, no és irreductible. En el cas de no ser irreductible, es podrà descompondre en suma directa de representacions irreductibles, les quals vendran determinades per la anomenada teoria de caràcters que veurem en la secció 3.3.

2.6. Quadrat simètric i quadrat alternat

Una vegada definit el producte tensorial de dues representacions V_1 i V_2, considerem el cas en que $V_1 = V_2 = V$. És a dir, el producte tensorial d'una representació lineal per ella mateixa, $V \otimes V$. Aleshores, podem definir l'automorfisme θ de $V \otimes V$ com:

$$\begin{array}{rccc} \theta: & V \otimes V & \longrightarrow & V \otimes V \\ & x \cdot y & \longmapsto & y \cdot x \end{array}$$

Fixem-nos que θ és independent de la base escollida. A més, observem que $\theta^2 = 1$.

A partir d'aquest automorfisme, i considerant (e_i) una base de V, podem definir dos subespais vectorials de $V \otimes V$:

- Quadrat Simètric:
$$Sym^2(V) = \{z \in V \otimes V \mid \theta(z) = z\}$$
Generat per la base: $(e_i \cdot e_j + e_j \cdot e_i)_{i \leq j}$.
- Quadrat Alternat:
$$Alt^2(V) = \{z \in V \otimes V \mid \theta(z) = -z\}$$
Generat per la base: $(e_i \cdot e_j - e_j \cdot e_i)_{i<j}$.

Per veure que efectivament són bases dels respectius subespais, sigui el conjunt $(e_i \cdot e_j + e_j \cdot e_i)_{i \leq j} \cup (e_i \cdot e_j - e_j \cdot e_i)_{i<j}$, veurem que és un conjunt de vectors linealment independents. Considerem una combinació lineal de tots aquests vectors igual a 0:

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{ij} \left(e_i \cdot e_j + e_j \cdot e_i\right) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \beta_{ij} \left(e_i \cdot e_j - e_j \cdot e_i\right) = 0$$

Reorganitzant els sumatoris obtenim:

$$\sum_i^n 2\alpha_{ii}(e_i \cdot e_i) + \sum_{1 \leq i<j \leq n} (\alpha_{ij} + \beta_{ij})(e_i \cdot e_j) + \sum_{1 \leq i<j \leq n} (\alpha_{ij} - \beta_{ij})(e_j \cdot e_i) = 0$$

Però com que $(e_i \cdot e_j)$ és una base de $V \otimes V$, tots els coeficients han de ser 0, d'on obtenim que $\alpha_{ii} = 0$ per a tot $i = 1, \ldots, n$. A més, per a tot $1 \leq i < j \leq n$: $(\alpha_{ij} + \beta_{ij}) = 0 = (\alpha_{ij} - \beta_{ij})$ d'on $\beta_{ij} = 0$, i per tant $\alpha_{ij} = 0$. I com que tots els coeficients han de ser obligatòriament 0 els nostres vectors són linealment independents dos a dos.

Obtenim així, n^2 vectors independents en un espai de dimensió n^2, la qual cosa implica que tenim una base de $V \otimes V$. Ara bé, si consideram els subespais generats per $(e_i \cdot e_j + e_j \cdot e_i)_{i \leq j}$ i per $(e_i \cdot e_j - e_j \cdot e_i)_{i<j}$ podem observar fàcilment que

$$\theta(e_i \cdot e_j + e_j \cdot e_i) = e_j \cdot e_i + e_i \cdot e_j = e_i \cdot e_j + e_j \cdot e_i \forall i \leq j$$

$$\theta(e_i \cdot e_j - e_j \cdot e_i) = e_j \cdot e_i - e_i \cdot e_j = -(e_i \cdot e_j - e_j \cdot e_i) \forall i < j$$

i per tant, aquests dos subespais es troben dins el quadrat simètric i el quadrat alternat respectivament. Finalment, com que la intersecció del quadrat simètric i el quadrat alternat és $\{0\}$, i hem vist que la unió dels nostres subespais era una base de $V \otimes V$, podem concloure que els nostres subespais generen el quadrat simètric i el quadrat alternat respectivament, és a dir que els dos subconjunts són les seves bases com volíem demostrar.

Obtenim així, que aquests espais tenen la propietat que estan en suma directa, ja que com hem dit la seva intersecció és $\{0\}$ ja que és l'únic vector que és igual al seu oposat $(z = -z)$, i la seva suma directa és $V \otimes V$:

$$V \otimes V = Sym^2(V) \oplus Alt^2(V)$$

Si diem $\dim(V) = n$, tendrem que:

$$\dim\big(Sym^2(V)\big) = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{i} \qquad \dim\big(Alt^2(V)\big) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Vegem a més, que els subespais $Sym^2(V)$ i $Alt^2(V)$ són estables sota G:

$$\begin{aligned}(\rho_s \otimes \rho_s)(e_i \cdot e_j + e_j \cdot e_i) &= \rho_s(e_i \cdot e_j) + \rho_s(e_j \cdot e_i) = \rho_s(e_i) \cdot \rho_s(e_j) + \rho_s(e_j) \cdot \rho_s(e_i)\\ &= \sum_{i_1,i_2} r_{ij}(s) \cdot r_{ij}(s) \cdot (e_i \cdot e_j) + \sum_{i_1,i_2} r_{ij}(s) \cdot r_{ij}(s) \cdot (e_j \cdot e_i)\\ &= \sum_{i_1,i_2} r_{ij}(s) \cdot r_{ij}(s) \cdot (e_i \cdot e_j + e_j \cdot e_i)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\rho_s \otimes \rho_s)(e_i \cdot e_j - e_j \cdot e_i) &= \rho_s(e_i \cdot e_j) - \rho_s(e_j \cdot e_i) = \rho_s(e_i) \cdot \rho_s(e_j) - \rho_s(e_j) \cdot \rho_s(e_i)\\ &= \sum_{i_1,i_2} r_{ij}(s) \cdot r_{ij}(s) \cdot (e_i \cdot e_j) - \sum_{i_1,i_2} r_{ij}(s) \cdot r_{ij}(s) \cdot (e_j \cdot e_i)\\ &= \sum_{i_1,i_2} r_{ij}(s) \cdot r_{ij}(s) \cdot (e_i \cdot e_j - e_j \cdot e_i).\end{aligned}$$

Per tant, aquests defineixen dues representacions lineals anomenades **quadrada simètrica** i **quadrada alternada** de la representació V.

CAPÍTOL 3

TEORIA DE CARÀCTERS

3.1. El caràcter d'una representació

Considerem V un espai vectorial generat per la base $\{e_i\}$ de n elements. D'altra banda, considerem a una aplicació de V en ell mateix amb matriu (a_{ij}). Anomenarem *traça* de a l'escalar donat per la funció:

$$\operatorname{Tr}(a) = \sum_{i}^{n} a_{ii}$$

Sabem que aquesta suma coincideix amb la suma dels valors propis d'a tenint en compte la multiplicitat de cada un, per tant, no dependrà de la base escollida.
Considerem ara $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ una representació del grup finit G a l'espai vectorial V. Aleshores, per a cada $s \in G$ definim el caràcter de la representació ρ com la funció χ_ρ de G en $\mathbb{C}$ donada per

$$\chi_\rho(s) = \operatorname{Tr}(\rho_s).$$

La importància d'aquesta funció ve donada principalment pel fet de que *caracteritza* la representació ρ, tal i com veurem més endavant a la secció 3.3.

Proposició 2. *Si χ és el* ***caràcter d'una representació*** *ρ de grau n, aleshores tendrem que:*

(i) $\chi(1) = n$

(ii) $\chi\left(s^{-1}\right) = \chi(s)^*$ *per a tot* $s \in G$ [1]

(iii) $\chi\left(tst^{-1}\right) = \chi(s)$ *per a tot* $s, t \in G$.

[1] Sigui $z = x + iy$ un nombre complexe, denotarem per z^* o $\overline{z}$ el seu conjugat $x - iy$.

Demostració. Sabem que $\rho(1) = 1$, i per tant la seva matriu és la identitat, d'on obtenim que $\mathrm{Tr}(1) = \dim(V) = n$ i queda demostrat (i).

Per demostrar (ii) observem que ρ_s és d'ordre finit. En conseqüència, passa el mateix amb els valors propis $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ que tendran valor absolut igual a 1. [2] Aleshores, com sabem que el conjugat d'un nombre complex de mòdul 1 és igual al seu invers, tendrem que:

$$\chi(s)^* = \mathrm{Tr}\left(\rho_s\right)^* = \sum \lambda_i^* = \sum \lambda_i^{-1} = \mathrm{Tr}\left(\rho_s^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\left(\rho_{s^{-1}}\right) = \chi\left(s^{-1}\right)$$

I d'aquesta manera, queda demostrada la igualtat (ii).

Per demostrar la igualtat (iii) fixem-nos que si prenem $u = ts$ i $v = t^{-1}$ aleshores la igualtat a demostrar queda reduïda a $\chi(uv) = \chi(vu)$. Ara bé, com que sabem que la igualtat

$$\mathrm{Tr}(ab) = \mathrm{Tr}(ba)$$

és compleix per a qualssevol matrius a i b , que es puguin multiplicar, la igualtat (iii) queda demostrada. □

Definició 4. *Una funció de classe és una funció f de G en $\mathbb{C}$ que satisfà (iii), o el que és el mateix, que $f(uv) = f(vu)$. A més, veurem més endavant a la secció 3.5 que tota funció de classe és composició de caràcters.*

Proposició 3. *Considerem $\rho^1 : G \longrightarrow GL(V_1)$ i $\rho^2 : G \longrightarrow GL(V_2)$ dues representacions lineals de G. Aleshores, si consideram χ_1 i χ_2 els seus caràcters, és satisfà que:*

(i) El caràcter χ de la representació suma directa $V_1 \oplus V_2$ és igual a $\chi_1 + \chi_2$.

(ii) El caràcter Ψ de la representació producte tensorial $V_1 \otimes V_2$ és igual a $\chi_1 \cdot \chi_2$.

Demostració. Considerem ρ_1 i ρ_2 dues representacions lineals donades en forma matricial R_s^1 i R_s^2 respectivament. Aleshores la representació $V_1 \oplus V_2$ vendrà donada de forma matricial per

$$R_s = \begin{pmatrix} R_s^1 & 0 \\ 0 & R_s^2 \end{pmatrix}$$

Per tant, $\mathrm{Tr}(R_s) = \mathrm{Tr}\left(R_s^1\right) + \mathrm{Tr}\left(R_s^2\right)$, d'on obtenim que $\chi(s) = \chi_1(s) + \chi_2(s)$.

Si procedim de la mateixa forma per demostrar (ii), seguint amb la notació de la secció 2.5, tendrem que els espais V_1 i V_2, d'ordre n i m respectivament, representats per les matrius $R_s^1 = \left(r_{ij}^1(s)\right)$ i $R_s^2 = \left(r_{ij}^2(s)\right)$ respectivament, aleshores el producte tensorial $V_1 \otimes V_2$ vendrà donat en forma matricial per

$$R_s = \begin{pmatrix} r_{11}^1(s) R_s^2 & r_{1n}^1(s) R_s^2 \\ r_{n1}^1(s) R_s^2 & r_{nn}^1(s) R_s^2 \end{pmatrix}$$

[2] Notem que aquest fet és conseqüència del fet que ρ_s pot ser definida per una matriu unitària tal i com hem vist a la secció 3 del capítol 2.

Vegem un exemple reduït, d'una forma més explícita. Considerem les representacions ρ_1 i ρ_2 de graus 2 i 3 respectivament, donades en forma matricial per:

$$R_s^1 = \begin{pmatrix} r_{11}^1(s) & r_{12}^1(s) \\ r_{21}^1(s) & r_{22}^1(s) \end{pmatrix} \qquad R_s^2 = \begin{pmatrix} r_{11}^2(s) & r_{12}^2(s) & r_{13}^2(s) \\ r_{21}^2(s) & r_{22}^2(s) & r_{23}^2(s) \\ r_{31}^2(s) & r_{32}^2(s) & r_{33}^2(s) \end{pmatrix}$$

Aleshores el producte tensorial $\rho_1 \otimes \rho_2$ vendrà donat en forma matricial per:

$$R_s = \begin{pmatrix} r_{11}^1(s)r_{11}^2(s) & r_{11}^1(s)r_{12}^2(s) & r_{11}^1(s)r_{13}^2(s) & r_{12}^1(s)r_{11}^2(s) & r_{12}^1(s)r_{12}^2(s) & r_{12}^1(s)r_{13}^2(s) \\ r_{11}^1(s)r_{21}^2(s) & r_{11}^1(s)r_{22}^2(s) & r_{11}^1(s)r_{23}^2(s) & r_{12}^1(s)r_{21}^2(s) & r_{12}^1(s)r_{22}^2(s) & r_{12}^1(s)r_{23}^2(s) \\ r_{11}^1(s)r_{31}^2(s) & r_{11}^1(s)r_{32}^2(s) & r_{11}^1(s)r_{33}^2(s) & r_{12}^1(s)r_{31}^2(s) & r_{12}^1(s)r_{32}^2(s) & r_{12}^1(s)r_{33}^2(s) \\ r_{21}^1(s)r_{11}^2(s) & r_{21}^1(s)r_{12}^2(s) & r_{21}^1(s)r_{13}^2(s) & r_{22}^1(s)r_{11}^2(s) & r_{22}^1(s)r_{12}^2(s) & r_{22}^1(s)r_{13}^2(s) \\ r_{21}^1(s)r_{21}^2(s) & r_{21}^1(s)r_{22}^2(s) & r_{21}^1(s)r_{23}^2(s) & r_{22}^1(s)r_{21}^2(s) & r_{22}^1(s)r_{22}^2(s) & r_{22}^1(s)r_{23}^2(s) \\ r_{21}^1(s)r_{31}^2(s) & r_{21}^1(s)r_{32}^2(s) & r_{21}^1(s)r_{33}^2(s) & r_{22}^1(s)r_{31}^2(s) & r_{22}^1(s)r_{32}^2(s) & r_{22}^1(s)r_{33}^2(s) \end{pmatrix}$$

Aleshores, el caràcter del producte tensorial de dues representacions V_1 i V_2 serà:

$$\Psi(s) = \sum_{i,j} r_{ii}^1(s) r_{jj}^2(s) = \left(\sum_i r_{ii}^1(s)\right) \cdot \left(\sum_j r_{jj}^2(s)\right) = \chi_1(s) \cdot \chi_2(s)$$

Com volíem demostrar. □

Proposició 4. *Considerem $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ una representació lineal de G i χ el seu caràcter. Aleshores si consideram χ_σ^2 el caràcter de la representació quadrada simètrica $Sym^2(V)$ de V i χ_α^2 el caràcter de la representació quadrada alternada $Alt^2(V)$ de V. Aleshores per a cada $s \in G$ tendrem que:*

$$\chi_\sigma^2(s) = \frac{1}{2}\left(\chi(s)^2 + \chi\left(s^2\right)\right)$$

$$\chi_\alpha^2(s) = \frac{1}{2}\left(\chi(s)^2 - \chi\left(s^2\right)\right)$$

i per tant: $\chi_\sigma^2(s) + \chi_\alpha^2(s) = \chi(s)^2$.

Demostració. Considerem un cert $s \in G$ fixat però arbitrari. Aleshores podem considerar els vectors propis de ρ_s com una base (e_i) de V, ja que ρ_s és pot expressar en forma d'una matriu unitària i per tant els seus vectors propis són una base ortonormal. En conseqüència, tendrem que per a cada valor propi $\lambda_i \in \mathbb{C}$ de ρ_s, es satisfarà la igualtat $\rho_s e_i = \lambda_i e_i$. I per tant:

$$\chi(s) = \sum \lambda_i$$

Ara bé, $\rho_{s^2} = \rho_s \rho_s$ i per tant els valors propis de ρ_{s^2} en la base (e_i) escollida seran $\lambda_i^2 \in \mathbb{C}$. D'on obtenim que el caràcter de ρ_s^2 serà:

$$\chi\left(s^2\right) = \sum \lambda_i^2$$

D'altra banda, tenim que:

$$(\rho_s \otimes \rho_s)(e_i \cdot e_j - e_j \cdot e_i) = \lambda_i \lambda_j \cdot (e_i \cdot e_j - e_j \cdot e_i)$$

$$(\rho_s \otimes \rho_s)(e_i \cdot e_j + e_j \cdot e_i) = \lambda_i \lambda_j \cdot (e_i \cdot e_j + e_j \cdot e_i)$$

Per tant:

$$\chi^2_\sigma(s) = \sum_{i \leq j} \lambda_i \lambda_j = \sum \lambda_i^2 + \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j = \frac{1}{2}\left(\sum \lambda_i\right)^2 + \frac{1}{2}\sum \lambda_i^2$$

$$\chi^2_\alpha(s) = \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j = \frac{1}{2}\left(\sum \lambda_i\right)^2 - \frac{1}{2}\sum \lambda_i^2$$

Simplement operant, obtenim que:

$$\chi^2_\sigma(s) + \chi^2_\alpha(s) = \frac{1}{2}\left(\chi(s)^2 + \chi\left(s^2\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\chi(s)^2 - \chi\left(s^2\right)\right) = \frac{1}{2}\chi(s)^2 + \frac{1}{2}\chi(s)^2 = \chi(s)^2$$

On es veu reflectit el fet de que $V \otimes V$ és suma directa de $Sym^2(V)$ i $Alt^2(V)$. □

3.2. Lema de Schur; aplicacions bàsiques

Proposició 5. *(Lema de Schur) Siguin $\rho^1 : G \longrightarrow GL(V_1)$ i $\rho^2 : G \longrightarrow GL(V_2)$ dues reprsentacions irreductibles de G, i f una aplicació lineal de V_1 a V_2 tal que $\rho^2_s \circ f = f \circ \rho^1_s$ per a tot $s \in G$. Aleshores:*

(1) Si ρ^1 i ρ^2 no són isomorfes, aleshores tendrem que $f = 0$.

(2) Si $V_1 = V_2$ i $\rho_1 = \rho_2$, aleshores f és una homotècia, és a dir, un múltiple escalar de la identitat.

Demostració. En el cas en que $f = 0$ és trivial. Suposem doncs que $f \neq 0$ i considerem W_1 el seu nucli, que és el conjunt de $x \in V_1$ tals que $f(x) = 0$. Per a cada $x \in W_1$ tendrem que $\left(f\rho^1_s\right)(x) = \left(\rho^2_s f\right)(x) = 0$, per tant $\rho^1_s(x) \in W_1$, i per tant W_1 és estable sota G. Com que V_1 és irreductible, W_1 és V_1 o 0; el primer cas està exclòs, ja que implica que $f = 0$ i com ja hem dit és un cas trivial.
De la mateixa manera, la imatge W_2 de f, que és el conjunt de les $f(x) \in V_2$ tals que $x \in V_1$, és estable, i per tant, com que $W_2 \neq 0$ és igual a V_2. Doncs bé, les dues propietats $W_1 = 0$ i $W_2 = V_2$ demostren que f és un isomorfisme de V_1 a V_2, el que prova el punt (i) del lema.
Suposem ara que $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$ i considerem λ un valor propi de f, sabem que n'existeix almenys un ja que el cos d'escalars és el cos dels nombres complexes. Indiquem $f' = f - \lambda Id$. Aleshores, com que λ és un valor propi de f, el nucli de f' és diferent de 0. D'altre banda, tenim que

$$\rho^2_s f' = \rho_s(f - \lambda Id) = \rho_s f - \lambda\rho_s = f\rho_s - \lambda\rho_s = f'\rho^1_s.$$

Aleshores, la primera part de la demostració, demostra que aquesta propietat és possible únicament si $f' = 0$, és a dir, si $f = \lambda Id$. □

Considerem en el que queda de secció, V_1 i V_2 dues representacions irreductibles del grup G d'ordre g.

Corol·lari 1. *Sigui h una aplicació lineal de V_1 a V_2, si consideram*

$$h^0 = \frac{1}{g}\sum_{t\in G}\left(\rho_t^2\right)^{-1} h\rho_t^1$$

aleshores:

(1) Si ρ^1 i ρ^2 no són isomorfes, aleshores $h^0 = 0$.

(2) Si $V_1 = V_2$ i $\rho^1 = \rho^2$, h^0 és una homotècia de raó $(1/n)\mathrm{Tr}(h)$, amb $n = \dim(V_1)$.

Demostració. En primer lloc, notem que $\rho_s^2 h^0 = h^0\rho_s^1$, ja que

$$\left(\rho_s^2\right)^{-1} h^0\rho_s^1 = \frac{1}{g}\sum_{t\in G}\left(\rho_s^2\right)^{-1}\left(\rho_t^2\right)^{-1} h\rho_t^1\rho_s^1 = \frac{1}{g}\sum_{t\in G}\left(\rho_{ts}^2\right)^{-1} h\rho_{ts}^1 = h_0.$$

Aleshores, podem aplicar el lemma de Shur prenent $f = h^0$. Aplicant-la, obtenim $h^0 = 0$ en el primer cas i $h^0 = \lambda$ on λ és un escalar en el segon. A més, en el darrer cas tenim que

$$\mathrm{Tr}(h^0) = \frac{1}{g}\sum_{t\in G}\mathrm{Tr}\left(\left(\rho_t^1\right)^{-1} h\rho_t^1\right) = \frac{1}{g}\sum_{t\in G}\mathrm{Tr}(h) = \mathrm{Tr}(h)$$

i com que $\mathrm{Tr}\left(h^0\right) = \mathrm{Tr}(\lambda) = n\cdot\lambda$, tendrem que $\lambda = (1/n)\mathrm{Tr}(h)$. □

Considerem ara el corol·lari 1 suposant que ρ^1 i ρ^2 venen donades en forma matricial:

$$\rho_t^1 = \left(r_{ij}^1(t)\right)_{i,j\in I_1} \qquad \rho_t^2 = \left(r_{ij}^2(t)\right)_{i,j\in I_2}$$

L'aplicació lineal h està definida per la matriu (x_{ij}) on $i\in I_2$ i $j\in I_1$, de la mateixa manera h^0 vendrà donada per $\left(x_{ij}^0\right)$ on $i\in I_2$ i $j\in I_1$. Aleshores, per la definició de h^0 tendrem que

$$x_{i_2 i_1}^0 = \frac{1}{g}\sum_{t,j_1,j_2} r_{i_2 j_2}^2\left(t^{-1}\right)x_{j_2 j_1} r_{j_1 i_1}^1(t) \quad \text{amb } i_1, j_1\in I_2,\ i_2, j_2\in I_2 \text{ i } t\in G.$$

La part dreta de la igualtat és una forma lineal respecte a $x_{j_2 j_1}$. En el cas (1) aquesta forma desapareix per a tot sistema de valors de $x_{j_2 j_1}$; ja que els seus coeficient són 0.

Corol·lari 2. *Si ρ^1 i ρ^2 no són isomorfes, mantenint la notació anterior, tendrem:*

$$\frac{1}{g}\sum_{t\in G} r_{i_2 j_2}^2\left(t^{-1}\right)x_{j_1 j_1} r_{j_1 i_1}^1(t) = 0 \quad \textit{amb } i_1, j_1\in I_2,\ i_2, j_2\in I_2.$$

per a i_1, i_2, j_1, j_2 arbitraris.

En el cas (2), de la mateixa manera, tendrem que $h^0 = \lambda$, i.e., $x_{i_2 i_1}^0 = \lambda\delta_{i_2 i_1}$ (on $\delta_{i_2 i_1}$ denota el símbol de Kronecker, igual a 1 si $i_1 = i_2$ i 0 altrament), amb $\lambda = (1/n)\mathrm{Tr}(h)$, és a dir que $\lambda = (1/n)\delta_{j_2 j_1}x_{j_2 j_1}$. D'on obtenim l'igualtat:

$$x_{i_2 i_1}^0 = \frac{1}{g}\sum_{t,j_1,j_2} r_{i_2 j_2}^2\left(t^{-1}\right)x_{j_2 j_1} r_{j_1 i_1}^1(t) = \frac{1}{n}\sum_{j_1,j_2}\delta_{i_2 i_1}\delta_{j_2 j_1}x_{j_2 j_1}$$

amb $i_1, j_1\in I_2$ i $i_2, j_2\in I_2$. Llavors, igualant els coeficients de $x_{j_2 j_1}$, obtenim com calia esperar:

Corol·lari 3. *Si $V_1 = V_2$ i $\rho^1 = \rho^2$, mantenint la notació anterior, tendrem:*

$$\frac{1}{g}\sum_t r^2_{i_2 j_2}\left(t^{-1}\right) r^1_{j_1 i_1}(t) = \frac{1}{n}\delta_{i_2 i_1}\delta_{j_2 j_1} = \begin{cases} 1/n & si\ i_1 = i_2\ i\ j_1 = j_2 \\ 0 & altrament \end{cases}$$

amb $i_1, j_1, i_2, j_2 \in I_1$[3].

Per acabar aquesta secció, cal remarcar que:

(1) Si ϕ and ψ són funcions de G a $\mathbb{C}$, l'operació

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{g}\sum_{t\in G}\phi\left(t^{-1}\right)\psi(t) = \frac{1}{g}\sum_{t\in G}\phi(t)\psi\left(t^{-1}\right).$$

satisfà $\langle \phi, \psi \rangle = \langle \psi, \phi \rangle$. A més $\langle \phi, \psi \rangle$ és lineal en ϕ i en ψ. Amb aquesta notació, els corol·laris 2 i 3 venen donats respectivament per

$$\langle r^2_{i_2 j_2}, r^1_{j_1 i_1} \rangle = 0 \quad \text{i} \quad \langle r^2_{i_2 j_2}, r^1_{j_1 i_1} \rangle = \frac{1}{n}\delta_{i_2 i_1}\delta_{j_2 j_1}.$$

(2) Suposem que les matrius $(r_{ij}(t))$ són unitàries, en cas contrari, podem aconseguir-ho mitjançant el canvi explicat a la demostració alternativa del teorema 1). Aleshores tendrem que $r_{ij}\left(t^{-1}\right) = r_{ji}(t)^*$ i els corol·laris 2 i 3 són exactament relacions d'ortogonalitat per al producte escalar $(\phi|\psi)$ definit a la secció següent.

3.3. Relacions ortogonals de caràcters.

Per començar, aquesta secció, introduirem una mica de notació.

Definició 5. *Sigui G un grup finit d'ordre g, i ϕ i ψ dues funcions de G en $\mathbb{C}$, indicarem per*

$$(\phi|\psi) = \frac{1}{g}\sum_{s\in G}\phi(s)\psi(s)^*$$

*el **producte escalar** d'aquestes. Aquest és lineal en ϕ, semilineal en ψ i satisfà que $(\phi|\phi) > 0$ per a tot $\phi \neq 0$.*

Considerem ara $\widehat{\psi}$ la funció definida per la expressió $\widehat{\psi}(s) = \psi\left(s^{-1}\right)^*$, aleshores satisfà que

$$(\phi|\psi) = \frac{1}{g}\sum_{s\in G}\phi(s)\widehat{\psi}\left(s^{-1}\right) = \langle \phi, \widehat{\psi} \rangle.$$

En particular, si χ és el caràcter d'una representació G, sabem per la proposició 1 que $\widehat{\chi} = \chi$, per tant, $(\phi|\chi) = \langle \phi, \chi \rangle$ per a totes les funcions ϕ sobre G. Per tant, utilitzarem $(\phi|\chi)$ o $\langle \phi, \chi \rangle$ indistintament, quan tractem amb caràcters.

Teorema 3. *Siguin χ i χ' caràcters de dues representacions irreductibles no isomorfes aleshores:*

[3] Notem que com que $V_1 = V_2$ llavors podem considerar $I_1 = I_2$

(i) $(\chi|\chi) = 1$. *És a dir, χ és "de norma 1".*

(ii) $(\chi|\chi') = 0$. *És a dir, χ i χ' són ortogonals.*

Demostració. Considerem ρ una representació irreductible de caràcter χ, donada en forma matricial $\rho_s = \big(r_{ij}(s)\big)$. Aleshores sabem que $\chi(s) = \sum r_{ii}(s)$, per tant:

$$(\chi|\chi) = \langle \chi, \chi \rangle = \sum_{i,j} \langle r_{ii}, r_{jj} \rangle.$$

Ara pel corol·lari 3 del Lema de Schur, sabem que $\langle r_{ii}, r_{jj} \rangle = \delta_{ij}/n$, on n és el grau de ρ. Aleshores:

$$(\chi|\chi) = \left(\sum_{i,j} \delta_{ij} \right) / n = \left(\sum_{i} \delta_{ii} \right) / n = n/n = 1$$

ja que la matriu $\big(r_{ij}(s)\big)$ és d'ordre n. D'on obtenim (i).

Considerem ara ρ' una altra representació irreductible de caràcter χ', no isomorfa a ρ, donada en forma matricial $\rho'_s = \left(r'_{ij}(s)\right)$. Aleshores sabem que $\chi'(s) = \sum r'_{ii}(s)$, per tant:

$$(\chi|\chi') = \langle \chi, \chi' \rangle = \sum_{i,j} \langle r_{ii}, r'_{jj} \rangle.$$

Ara bé, com que ρ i ρ' no són isomorfes, podem aplicar el corol·lari 2 del Lema de Schur, que ens diu que $\langle r_{ii}, r'_{jj} \rangle = 0$, pel que $(\chi|\chi') = 0$ com volíem veure. □

Aquest darrer teorema, demostra que els caràcters irreductibles, que són caràcters de representacions irreductibles, formen un sistema ortonormal.

Teorema 4. *Sigui V una representació lineal de G, amb caràcter ϕ, suposem que V descompon en suma directa de representacions irreductibles:*

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$$

Aleshores, si W és una representació amb caràcter χ, el nombre de W_i isomorfes a W és igual al producte escalar $(\phi|\chi) = \langle \phi, \chi \rangle$.

Demostració. Siguin χ_i els caràcters de les representacions W_i, per la proposició 2 tenim que $\phi = \chi_1 + \cdots + \chi_k$.
Aleshores $(\phi|\chi) = (\chi_1|\chi) + \cdots + (\chi_k|\chi)$, i aplicant el teorema 3 sabem que $(\chi_i|\chi)$ és 1 si W_i és isomorfa a W i 0 si no ho és. Per tant, $(\phi|\chi)$ serà igual el nombre de W_i isomorfes a W com volíem demostrar. □

Corol·lari 4. *El nombre de W_i isomorfes a W no depèn de la descomposició escollida.*

Demostració. Això és degut a que $(\phi|\chi)$ no depèn de la descomposició escollida. □

Aquest nombre, l'anomenarem "nombre de vegades que W apareix en V" o també, "nombre de vegades que W està contingut en V".

Corol·lari 5. *Dues representacions amb el mateix caràcter són isomorfes.*

Demostració. Considerem ρ i ρ', dues representacions lineals de G en V i V' respectivament. Siguin χ i χ' els seus caràcters tals que $\chi = \chi'$, aleshores si descomponem V i V' en irreductibles, aplicant el corol·lari anterior, sabem que tota representació irreductible de V esta continguda en V' el mateix nombre de vegades, i de la mateixa manera, tota representació irreductible de V' apareix el mateix nombre de vegades en V. Per tant, són suma directa dels mateixos subespais i per tant existeix un isomorfisme entre les dues sumes directes. □

Aquest darrers resultats ens permeten reduir l'estudi de representacions a l'estudi dels seus caràcters. Si $\chi_1, \dots, \chi_h$ són els distints caràcters irreductibles de G, i $W_1, \dots, W_h$ les respectives representacions, cada representació V és isomorfa a la suma directa

$$V = W_1 \oplus \overset{m_1}{\cdots} \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_h \oplus \overset{m_h}{\cdots} \oplus W_h$$

on m_i són enters majors que 0. Aleshores, el caràcter ϕ de V és descompon en

$$\phi = m_1\chi_1 + \cdots + m_h\chi_h, \tag{3.1}$$

on cada m_i satisfarà que $m_i = (\phi|\chi_i)$.
Notem, que en particular, si aplicam això al producte tensorial $W_i \otimes W_j$ de dues representacions irreductibles, obtenim que el producte $\chi_i \cdot \chi_j$ descompon en $\chi_i\chi_j = \sum m_{ij}^k \chi_k$, on m_{ij}^k són enters majors que 0.

Vist això, si consideram $(\phi|\phi)$ i fem us de les relacion ortogonals vistes al teorema 3 i l'expressió (2.1), obtenim la igualtat:

$$(\phi|\phi) = \sum_{i,j}^{h} m_i m_j \chi_i \chi_j = \sum_{i=1}^{h} m_i^2$$

d'on obtenim el teorema següent, que ens dona un bon criteri d'irreductibilitat.

Teorema 5. *Sigui ϕ el caràcter d'una representació V, aleshores $(\phi|\phi)$ és un enter positiu. A més, $(\phi|\phi) = 1$ si, i només si, V és irreductible.*

Demostració. Clarament, $\sum m_i^2$ és un enter positiu per ser cada m_i un enter positiu. Ara bé, com que cada m_i^2 és un enter positiu, $\sum m_i^2$ és 1 si, i només si, una de les m_i's és igual a 1 i les altres són 0, és a dir, si

$$V = 0W_1 \oplus \cdots 1W_i \oplus \cdots \oplus 0W_h$$

i per tant V és isomorfa a una de les W_i. □

3.4. Descomposició de la representació regular

A continuació, introduirem una mica de notació.
Per al que queda del Capítol 2, denotarem amb $\chi_1, \dots, \chi_h$ els caràcters irreductibles de G, i amb $n_1, \dots, n_h$ els seus graus. Recordem doncs, que, per la proposició 1, $n_i = \chi_i(1)$.

Considerem R la representació regular de G. Recordem de la secció 2 del capítol 2 que la representació regular és aquella tal que si considerem la base de V donada per $(e_t)_{t\in G}$ la representació ρ satisfà que $\rho_s e_t = e_{st}$. Si $s \neq 1$, tendrem que $st \neq t$ per a tot t, pel que els termes de la diagonal de la matriu de ρ_s seran tot zeros. En altres paraules, tendrem que $\mathrm{Tr}(\rho_s) = 0$. D'altra banda, per $s = 1$ tendrem que

$$\mathrm{Tr}(\rho_s) = \mathrm{Tr}(1) = \dim(R) = g.$$

D'aquesta manera, obtenim el resultat següent:

Proposició 6. *El caràcter r_G de la representació regular ve donat per les igualtats següents:*

$$\begin{aligned} r_G(1) &= g \qquad \textit{amb } g \textit{ l'ordre de } G, \\ r_G(s) &= 0 \qquad \textit{si } s \neq 1. \end{aligned}$$

Corol·lari 6. *Tota representació irreductible W_i està continguda dins la representació regular amb multiplicitat igual al seu grau n_i.*

Demostració. D'acord amb el teorema 4, el nombre de vegades que W_i està continguda en R és igual a $\langle r_G, \chi_i \rangle$. Aleshores aplicant la definció de producte escalar tenim que

$$\langle r_G, \chi_i \rangle = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} r_G\left(s^{-1}\right) \chi_i(s) = \frac{1}{g} g \cdot \chi_i(1) = \chi_i(1) = n_1.$$

□

Corol·lari 7. *Siguin W_i les representacions irreductibles d'un grup G d'ordre g, aleshores els seus graus n_i i els seus caràcters χ_i satisfan:*

(i) La relació

$$\sum_{i=1}^{h} n_i^2 = g.$$

(ii) Si $s \in G$ és diferent de 1, aleshores

$$\sum_{i=1}^{h} n_i \chi_i(s) = 0.$$

Demostració. Per el corol·lari 1, tenim que $r_G = \sum n_i \chi_i(s)$ per a tot $s \in G$. Aleshores, si prenem $s = 1$ obtenim el resultat (i), d'altra banda, si prenem $s \neq 1$ obtenim el resultat (ii). □

3.5. Nombre de representacions irreductibles

Recordem que una funció f de G a $\mathbb{C}$ s'anomena funció de classe si $f\left(tst^{-1}\right) = f(s)$ per a tot $s, t \in G$. Una vegada recordat això, vegem alguns resultats.

Proposició 7. *Sigui f una funció de classe de G i $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ una representació lineal de G, considerem ρ_f l'aplicació lineal de V en ell mateix definida per:*

$$\rho_f = \sum_{t \in G} f(t) \rho_t.$$

Aleshores, si V és irreductible de grau n i caràcter χ, ρ_f és una homotècia de radi λ donat per:

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{t \in G} f(t) \chi(t) = \frac{g}{n} (f | \chi^*).$$

Demostració. Si consideram $\rho_s^{-1}\rho_f\rho_s$, obtenim

$$\rho_s^{-1}\rho_f\rho_s = \sum_{t\in G} f(t)\rho_s^{-1}\rho_t\rho_s = \sum_{t\in G} f(t)\rho_{s^{-1}ts}$$

A continuació, si prenem $u = s^{-1}ts$ tendrem que:

$$\rho_s^{-1}\rho_f\rho_s = \sum_{u\in G} f\left(sus^{-1}\right)\rho_u = \sum_{u\in G} f(u)\rho_u = \rho_f$$

Per tant, acabam de veure que $\rho_f\rho_s = \rho_s\rho_f$ i en conseqüència, podem aplicar la segona part del *lema de Shur* que demostra que ρ_f és una homotècia. Aleshores, la traça d'una homotècia de radi λ és $n\lambda$, i la traça de ρ_f és $\sum_{t\in G} f(t)\mathrm{Tr}(\rho_t) = \sum_{t\in G} f(t)\chi(t)$. D'aquesta manera, igualant ambdues traces obtenim com volíem demostrar que

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{t\in G} f(t)\chi(t) = \frac{g}{n}(g|\chi^*)$$

□

Definim l'espai H com l'espai de funcions de classe de G. Notem, que els caràcters irreductibles $\chi_1,\ldots,\chi_h$ són elements de H.

Teorema 6. *Els caràcters $\chi_1,\ldots,\chi_h$ formen una base ortonormal de H.*

Demostració. Al teorema 3, ja hem demostrat que els caràcters χ_i formen un sistema ortonormal en H. Per tant, només ens queda demostrar que aquest sistema genera H. Per veure això, és suficient veure que tot element de H ortogonal a tots els χ_i^* és zero. Considerem f un element de H ortogonal a tots els χ_i^*. Aleshores, si per a cada representació ρ de G, consideram $\rho_f = \sum_{t\in G} f(t)\rho_t$, com que f és ortogonal als χ_i^*, utilitzant la proposició anterior obtenim que ρ_f és zero sempre que ρ sigui irreductible, ja que si és irreductible $\rho_f = \frac{g}{n}(g|\chi^*)Id$, que és zero per l'ortogonalitat de f amb els χ_i^*. Ara bé, si considerem la descomposició de ρ en suma directa d'irreductibles ρ_i, llavors ρ_f serà la suma directa de les respectives ${\rho_i}_f = \sum_{t\in G} f(t){\rho_i}_t$. Ara bé, com que ρ_i és irreductible, ja hem vist que ${\rho_i}_f = 0$ per a tota subrepresentació ρ_i, i per tant ρ_f també serà zero. Acabam de veure que ρ_f és zero sempre, tant si ρ és irreductible com si no. Aleshores, si aplicam això a la representació regular i calculem la imatge del vector e_1 de la base sota ρ_f, obtenim que:

$$\rho_f e_1 = \sum_{t\in G} f(t)\rho_t e_1 = \sum_{t\in G} f(t)e_t$$

Doncs bé, com que ρ_f és zero, $\rho_f e_1 = 0$ i per tant, $\sum_{t\in G} f(t)e_t = 0$ d'on podem concloure que $f(t) = 0$ per a tot $t\in G$, pel que $f = 0$ com volíem veure. □

Recordem que dos elements t i t' de G s'anomenen conjugats un de l'altre si existeix $s\in G$ tal que $t' = sts^{-1}$. Recordem també que això és una relació d'equivalència que parteix G en *classes* que s'anomenen *classes de conjugació.*

Teorema 7. *El nombre de representacions irreductibles de G (llevat d'isomorfismes) és igual al nombre de classes de conjugació G.*

Demostració. Considerem $C_1, \ldots, C_k$ les distintes classes de conjugació de G. Aleshores, dir que f és una funció de classe en G és el mateix que dir que f és constant en cada una de les classes. La constant de cada classe C_i la denotarem per λ_i i aquesta podrà ser elegida arbitràriament, en conseqüència, la dimensió de l'espai H de funcions de classe és igual a k, ja que cada dimensió fa referència a la constant d'una classe diferent. D'altra banda, pel teorema 6, aquesta dimensió és igual al nombre de representacions irreductibles de G (llevat d'isomorfismes), ja que els seus caràcters irreductibles en són una base, pel que queda demostrat el que volíem. □

Un altre conseqüència del teorema 6 és la següent:

Proposició 8. *Considerem $s \in G$, i $c(s)$ el nombre d'elements de la classe de conjugació de s. Aleshores:*

(i) Es satisfà la igualtat:

$$\sum_{i=1}^{h} \chi_i(s)^* \chi_i(s) = \frac{g}{c(s)}$$

(ii) Per a cada $t \in G$ no conjugat de s, es satisfà la igualtat:

$$\sum_{i=1}^{h} \chi_i(s)^* \chi_i(t) = 0$$

Demostració. Considerem f_s la funció que té per imatges: 1 en tota la classe de s i 0 a la resta de G. Com que f_s és una funció de classe, pel teorema 6 podem escriure-la com:

$$f_s = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i \chi_i, \qquad \text{amb } \lambda_i = (f_s|\chi_i) = \frac{c(s)}{g}\chi_i(s)^*$$

Aleshores, per a cada $t \in G$ tendrem que

$$f_s(t) = \frac{c(s)}{g} \sum_{i=1}^{h} \chi_i(s)^* \chi_i(t)$$

Finalment, si prenem $t = s$, $f_s(s) = 1$ i per tant, aïllant, obtenim (i). D'altra banda, si prenem t no conjugat de s, $f_s(t) = 0$ i per tant, obtenim (ii). □

3.6. Descomposició canònica d'una representació

Considerem $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ una representació lineal de G. A continuació, definirem una descomposició en suma directa de V que és menys "fina" que la descomposició en representacions irreductibles, però amb l'avantatge que és única.

Definició 6. *Considerem $\chi_1, \ldots, \chi_h$ els distints caràcters de les representacions irreductibles $W_1, \ldots, W_h$ de G, i $n_1, \ldots, n_h$ els seus graus. Sigui $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$ una descomposició de V en suma directa de representacions irreductibles, per a cada $i = 1, \ldots, h$ denotarem per V_i la suma directa dels $U_1, \ldots U_m$ que són isomorfs a W_i. D'aquesta manera, obtindrem la descomposició*

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_h$$

*que és el que es coneix com **descomposició canònica** de V.*

Notem, que com que els W_i són tots els caràcter irreductibles de G, llavors tot U_j, al ser irreductible, serà isomorf a algun W_i, i com que els caràcters dels W_i són distints, només podrà ser isomorf a un d'ells. Això ens demostra que cada U_j amb $j \in \{1, \dots, m\}$ es trobarà contingut en un, i només un, V_i, el que demostra que la descomposició està ben definida.

En altres paraules, podem dir que la descomposició canònica de V és una descomposició en suma directa de representacions irreductibles agrupant aquelles representacions que són isomorfes. Vegem a continuació alguna de les seves propietats:

Proposició 9. *La projecció p_i de V sobre V_i associada a la descomposició canònica ve donada per la expressió:*

$$p_i = \frac{n_i}{g} \sum_{t \in G} \chi_i(t)^* \rho_t.$$

Demostració. Considerem

$$q_i = \frac{n_i}{g} \sum_{t \in G} \chi_i(t)^* \rho_t$$

i vegem que q_i és igual a la projecció p_i de V en V_i.

Per la proposició 7, si restringim q_i a una representació irreductible W de caràcter χ i de grau n, és una homotècia de radi $\frac{n_i}{n}(\chi_i|\chi)$. D'aquesta manera, per l'ortogonalitat de caràcters irreductibles $q_i = 0$ si $\chi \neq \chi_i$ i $q_i = 1$ si $\chi = \chi_i$. En altres paraules q_i és la identitat en una representació isomorfa a W_i i zero en la resta de representacions. Per tant, en vista de la definició de V_i, q_i serà la identitat en V_i i serà zero en la resta de V_j amb $j \neq i$. D'aquesta manera, si descomponem un element $x \in V$ en les seves components $x_i \in V_i$, $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_h$, tendrem que $q_i(x) = \sum_{j=1}^{h} q_i(x_j) = x_i$. Pel que q_i és igual a la projecció p_i de V en V_i com volíem demostrar. □

Teorema 8. *La descomposició canònica no depèn de la descomposició de V en suma de representacions irreductibles escollida inicialment.*

Demostració. Per la proposició anterior, p_i determina V_i i com que p_i no depèn de la descomposició de V en suma de representacions irreductibles escollida inicialment, la nostra representació canònica tampoc. □

Així, la descomposició d'una representació V pot ser donada en dos passos. En primer lloc, la descomposició canònica $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ que acabam de determinar. Aquesta pot ser trobada fàcilment mitjançant les expressions donades per a les projeccions p_i. Seguidament, si és necessari, s'escull una descomposició de V_i com suma directa de representacions irreductibles W_i:

$$V_i \cong W_i \oplus \cdots \oplus W_i$$

Aquesta darrera descomposició, en general, pot ser donada d'una infinitat de maneres. Aquesta, és tan arbitraria com l'elecció de la base en un espai vectorial.

3.7. Descomposició explicita d'una representació

Mantenint la notació de la secció anterior, considerem la descomposició canònica de la representació V com

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_h.$$

Hem vist que podíem determinar la component i-ésima V_i mitjançant la corresponent projecció vista a la proposició 9. Ara, donarem un mètode per construir explícitament una descomposició de V_i com suma directa de subrepresentacions isomorfes a W_i. Considerem W_i donada en forma matricial $(r_{\alpha\beta}(s))$ respecte d'una base $(e_1,\dots,e_n)$, aleshores sabem que $\chi_i(s) = \sum_\alpha r_{\alpha\alpha}(s)$ i $n = n_i = \dim(W_i)$. Seguidament, per a cada parell d'enters $\alpha, \beta \in \{1,\dots,n\}$, prendrem $p_{\alpha\beta}$ l'aplicació lineal de V en V definida per

$$p_{\alpha\beta} = \frac{n}{g}\sum_{t\in G} r_{\beta\alpha}\left(t^{-1}\right)\rho_t.$$

Proposició 10. *Elegir una base de $V_{i,1}$ ens dona una descomposició de V_i com suma directa de representacions isomorfes a W_i.*

(i) La aplicació $p_{\alpha\alpha}$ és una projecció que és zero sobre els V_j amb $j \neq i$. La seva imatge, $V_{i,\alpha}$, es troba continguda en V_i, i V_i és la suma directa dels $V_{i,\alpha}$ per $1 \leq \alpha \leq n$. És a dir, que $p_i = \sum_\alpha p_{\alpha\alpha}$.

(ii) La aplicació lineal $p_{\alpha\beta}$ és zero sobre els V_j amb $j \neq i$, així com també ho és sobre els $V_{i,\gamma}$ per $\gamma \neq \beta$. Aquesta aplicació defineix un isomorfisme de $V_{i,\beta}$ a $V_{i,\alpha}$.

(iii) Sigui x_1 un element diferent de 0 de $V_{i,1}$, considerem $x_\alpha = p_{\alpha,1}(x_1) \in V_{i,\alpha}$. Aleshores els x_α són linealment independents i generen un subespai vectorial $W(x_1)$ estable sota G i de dimensió n. Per a cada $s \in G$, tendrem que

$$\rho_s(x_\alpha) = \sum_\beta r_{\beta\alpha}(s)x_\beta$$

En particular, $W(x_1)$ és isomorf a W_i.

(iv) Si $\left(x_1^{(1)},\dots,x_1^{(m)}\right)$ és una base de $V_{i,1}$, la representació V_i és la suma directa de les subrepresentacions $W\left(x_1^{(1)}\right),\dots,W\left(x_1^{(m)}\right)$ definida al punt (ii).

Demostració. En primer lloc, observem que la definició de l'aplicació $p_{\alpha\beta}$ ens permet definir-la en qualsevol representació arbitraria de G, i en particular en les representacions irreductibles W_j. Doncs bé, per a cada W_i tendrem l'aplicació

$$p_{\alpha\beta}(e_\gamma) = \frac{n}{g}\sum_{t\in G} r_{\beta\alpha}\left(t^{-1}\right)\rho_t(e_\gamma) = \frac{n}{g}\sum_\delta\sum_{t\in G} r_{\beta\alpha}\left(t^{-1}\right)r_{\delta\gamma}(t)e_\delta$$

Pel corol·lari 3 de la proposició 5, el lema de Schur, obtenim que:

$$p_{\alpha\beta}(e_\gamma) = \begin{cases} e_\alpha & \text{si } \gamma = \beta \\ 0 & altrament. \end{cases} \tag{3.2}$$

D'aquesta igualtat, obtenim que en particular:

$$p_{\alpha\alpha}(e_\gamma) = \begin{cases} e_\alpha & \text{si } \gamma = \alpha \\ 0 & altrament, \end{cases} \tag{3.3}$$

d'on deduïm que $\sum_\alpha p_{\alpha\alpha}(e_\gamma) = e_\gamma$. Per tant, l'aplicació $\sum_\alpha p_{\alpha\alpha}$ és l'aplicació identitat sobre W_i. A més, podem obtenir la propietat següent:

$$p_{\alpha\beta} \circ p_{\gamma\delta} = \begin{cases} p_{\alpha\delta} & \text{si } \beta = \gamma \\ 0 & altrament. \end{cases} \tag{3.4}$$

Ja que,

$$\left(p_{\alpha\beta} \circ p_{\gamma\delta}\right)(e_i) = \left\{ \begin{array}{ll} p_{\alpha\beta}(e_\gamma) & \text{si } i = \delta \\ 0 & altrament \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} e_\alpha & \text{si } i = \delta \text{ i } \beta = \gamma \\ 0 & altrament. \end{array} \right.$$

Que és equivalent a:

$$\left(p_{\alpha\beta} \circ p_{\gamma\delta}\right)(e_i) = \begin{cases} p_{\alpha\delta}(e_i) & \text{si } \beta = \gamma \\ 0 & altrament. \end{cases}$$

Fixem-nos, que això implica que $p_{\alpha\alpha} \circ p_{\alpha\alpha} = p_{\alpha\alpha}$, el que demostra que $p_{\alpha\alpha}$ és una projecció. D'altra banda, si veiem com actua sobre la base, tendrem que satisfà la igualtat

$$\rho_s \circ p_{\alpha\gamma} = \sum_\beta r_{\beta\alpha}(s) p_{\beta\gamma}. \tag{3.5}$$

Ja que :

$$\left(\rho_s \circ p_{\alpha\gamma}\right)(e_i) = \left\{ \begin{array}{ll} \rho_s(e_\alpha) & \text{si } i = \gamma \\ 0 & altrament \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_\beta r_{\beta\alpha}(s)(e_\beta) & \text{si } i = \gamma \\ 0 & altrament, \end{array} \right.$$

i això, és el mateix que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_\beta r_{\beta\alpha}(s)(e_\beta) & \text{si } i = \gamma \\ 0 & altrament \end{array} \right\} = \sum_\beta r_{\beta\alpha}(s) p_{\beta,\gamma}(e_i).$$

D'altra banda, fixem-nos que per a cada W_j amb $j \neq i$, també podem utilitzar el corol·lorari 2 del lema de Schur amb el mateix raonament per demostrar que totes les aplicacions $p_{\alpha\beta}$ són zero. Així, com que $p_{\alpha\alpha}$ és zero sobre W_j, i V_j és isomorf a una suma directa de copies de W_j, $p_{\alpha\alpha}$ és zero sobre totes aquestes copies, i per tant també sobre V_j. Aleshores, $\sum_\alpha p_{\alpha\alpha}$ també serà zero sobre V_j.

Doncs bé, com que anteriorment hem vist que $p_{\alpha\alpha}$ enviava elements de la base de V_i a ells mateixos o a zero, hem vist que $p_{\alpha\alpha}(V_i) \subset V_i$. Per tant, essent $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_h$, tendrem que $p_{\alpha\alpha}(V) = p_{\alpha\alpha}(V_i) \subseteq V_i$. Definim $V_{i\alpha} = p_{\alpha\alpha}(V_i)$.

Recordem, que com $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_h$ és una descomposició canònica de V, llavors $V_i = W_i^{(1)} \oplus W_i^{(2)} \oplus \cdots \oplus W_i^{(m)}$ on tots els $W_i^{(k)}$ són irreductibles i isomorfs entre ells. Aleshores, si consideram $W_i = W_i^{(1)}$,tendrem que $W_i \cong W_i^{(k)}$ per a tot $k \in \{1, \ldots, m\}$. Per tant, podem prendre una base de W_i, $\{e_1^i, \ldots, e_n^i\}$, i els respectius isomorfismes a $W_i^{(k)}$ i per les expressions (3.2) i (3.3) tendrem que:

$$p_{\alpha\beta}\left(e_\gamma^i\right) = \begin{cases} e_\alpha^i & \text{si } \gamma = \beta \\ 0 & altrament \end{cases} \qquad p_{\alpha\alpha}\left(e_\gamma^i\right) = \begin{cases} e_\alpha^i & \text{si } \gamma = \alpha \\ 0 & altrament. \end{cases}$$

Vist això, descomponem V_i en suma directa de subrepresentacions isomorfes a les diferents $W_i^{(k)}$

$$V_i = W_1^{(1)} \oplus \cdots \oplus W_n^{(1)} \oplus \cdots\cdots \oplus W_1^{(m)} \oplus \cdots \oplus W_n^{(m)}$$

aleshores si aplicam $p_{\alpha\alpha}$ obtenim

$$p_{\alpha\alpha}V_i = \{0\} \oplus \cdots \oplus W_\alpha^{(1)} \oplus \cdots \oplus \{0\} \oplus \cdots\cdots \oplus \{0\} \oplus \cdots \oplus W_\alpha^{(m)} \oplus \cdots \oplus \{0\} = V_{i,\alpha}.$$

d'on deduïm que $V_i = V_{i,1} \oplus \cdots \oplus V_{i,n}$ i per tant $\sum_\alpha p_{\alpha\alpha} = p_i$, pel que queda demostrat (i).

D'altra banda, hem vist que $p_{\alpha\beta}(x) = 0$ per a tot $x \in V_j$, vegem que passa si $x \in V_i$. Considerem $x \in V_{i,\gamma}$. Aleshores, com que $V_{i,\gamma} = p_{\gamma\gamma}V_i$, podem escriure x de la forma $x = p_{\gamma\gamma}(y)$ amb $y \in V_i$. Així, si calculam $p_{\alpha\beta}(x)$ amb $\beta \neq \gamma$ utilitzant l'expressió (3.4) obtenim

$$p_{\alpha\beta}(x) = \left(p_{\alpha\beta} \circ p_{\gamma\gamma}\right)(x) = 0,$$

ja que $\beta \neq \gamma$ per hipòtesis. En canvi, si $\gamma = \beta$, per l'expressió (3.2) l'aplicació $p_{\alpha\beta}$ envia la base de $V_{i,\beta}$ a la base de $V_{i,\alpha}$, i per tant, defineix un isomorfisme de $V_{i,\beta}$ a $V_{i,\alpha}$, demostrant així l'apartat (ii).

Considerem $x_1 \in V_{i,1}$ diferent de 0. Així, podem definir $x_\alpha = p_{\alpha 1}(x_1) \in V_{i,\alpha}$. Aleshores, com que els $V_{i,\alpha}$ estan en suma directa, x_α i $x_{\alpha'}$ són linealment independents per a tot $\alpha, \alpha' \in \{1, \ldots, n\}$. Així, els n vectors linealment independents generen un subespai vectorial, $W(x_1)$, que serà de dimensió n. A més, fent ús de l'expressió (3.5) fixem-nos que

$$\rho_s(x_\alpha) = \left(\rho_s p_{\alpha 1}\right)(x_1) = \sum_\beta r_{\beta\alpha}(s) p_{\beta 1} x_1 = \sum_\beta r_{\beta\alpha}(s) x_\beta.$$

On podem observar que $\rho_s(x_\alpha) \in W(x_1)$ per a tot $x_\alpha \in W(x_1)$, per tant com que les imatges de tots els vectors de la base de $W(x_1)$ són de $W(x_1)$ el subespai $W(x_1)$ serà estable sota G. Notem que $W(x_1)$ és una subrepresentació estable de W_i, ja que els seus generadors de $x_\alpha \in W_i$ per a tot $\alpha \in \{1, \ldots, n\}$. Ara bé, com que W_i és una representació irreductible de dimensió n, $W_i \cong W(x_1)$, demostrant així l'apartat (iii).

Finalment, considerem $\left(x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(m)}\right)$ una base de $V_{i,1}$, i recordem que:

$$V_i = W_1^{(1)} \oplus \cdots \oplus W_n^{(1)} \oplus \cdots\cdots \oplus W_1^{(m)} \oplus \cdots \oplus W_n^{(m)}$$

i d'altra banda,

$$V_{i,1} = W_1^{(1)} \oplus \cdots \oplus \{0\} \oplus \cdots\cdots \oplus W_1^{(m)} \oplus \cdots \oplus \{0\},$$

que és el mateix espai que

$$V_{i,1} = W_1^{(1)} \oplus \cdots \oplus W_1^{(m)}.$$

Aleshores, per l'apartat (iii), sabem que $W_i \cong W(x_1)$ per a cada $x_1 \in V_{i,1}$ diferent de 0, en particular per a cada vector $x_1^{(k)}$ de la base donada. Per tant, tendrem que

$$V_{i,1} = W\left(x_1^{(1)}\right) \oplus \cdots \oplus W\left(x_1^{(m)}\right).$$

Obtenint així l'apartat (iv), com volíem demostrar.

□

3.8. Exercicis

Exercici 1. *Siguin χ i χ' els caràcters de dues representacions, provau les igualtats:*

$$(\chi+\chi')^2_\sigma = \chi^2_\sigma + {\chi'_\sigma}^2 + \chi\chi'$$
$$(\chi+\chi')^2_\alpha = \chi^2_\alpha + {\chi'_\alpha}^2 + \chi\chi'$$

Demostració. Sabem que $\chi^2_\sigma(s) = \frac{1}{2}\left(\chi(s)^2 + \chi\left(s^2\right)\right)$ i $\chi^2_\alpha(s) = \frac{1}{2}\left(\chi(s)^2 - \chi\left(s^2\right)\right)$. Aleshores, utilitzant la mateixa notació, com que el caràcter d'una representació és un nombre complex, podem demostrar les igualtats de la manera següent:

Considerem un cert $s \in G$ fixat però arbitrari. Aleshores:

$$\begin{aligned}
(\chi+\chi')^2_\sigma(s) &= \frac{1}{2}\left(\left(\chi(s)+\chi'(s)\right)^2 + \left(\chi\left(s^2\right)+\chi'\left(s^2\right)\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\chi(s)^2 + \chi'(s)^2 + 2\chi(s)\chi'(s) + \chi\left(s^2\right) + \chi'\left(s^2\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\chi(s)^2 + \chi\left(s^2\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\chi'(s)^2 + \chi'\left(s^2\right)\right) + \chi(s)\chi'(s) = \chi^2_\sigma + {\chi'_\sigma}^2 + \chi\chi'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\chi+\chi')^2_\alpha(s) &= \frac{1}{2}\left(\left(\chi(s)+\chi'(s)\right)^2 - \left(\chi\left(s^2\right)+\chi'\left(s^2\right)\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\chi(s)^2 + \chi'(s)^2 + 2\chi(s)\chi'(s) - \chi\left(s^2\right) - \chi'\left(s^2\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\chi(s)^2 - \chi\left(s^2\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\chi'(s)^2 - \chi'\left(s^2\right)\right) + \chi(s)\chi'(s) = \chi^2_\alpha + {\chi'_\alpha}^2 + \chi\chi'
\end{aligned}$$

□

Exercici 2. *Sigui X un conjunt finit sobre el que actua G, considerarem ρ la representació permutació associada a X, vista a la secció 2.2.3 , i χ_X el caràcter de ρ. Sigui $s \in G$, demostrau que $\chi_X(s)$ és igual al nombre d'elements de X fixats per s.*

Demostració. Sabem que ρ_s envia cada element de la base V escollida a un element de la mateixa base, ja sigui ell o un altre. Aleshores, si consideram $R_X(s) = (r_{ij}(s))$ la matriu associada a $\rho_X(s)$, cada fila i cada columna tindrà un únic 1 i la resta seran zeros. Ara bé, sigui $\{e_x\}_{x\in X}$ una base de V indexada pels elements de X. Aleshores tendrem que

$$\rho_{X_s}(e_x) = \sum_i r_{ix} e_i = e_{sx}.$$

Per tant, els elements de la base que queden fixos seran aquells que $\rho_{X_s}(e_x) = e_x$, és a dir, aquells que tenguin l'u de la columna col·locats a la diagonal, $r_{xx} = 1$. Concloem així, que la traça de la nostra matriu i per tant $\chi_X(s)$ serà la suma de tots els elements que queden fixos ja que serà el nombre d'uns que hi haurà a la diagonal. □

Exercici 3. *Considerem $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ una representació lineal amb caràcter χ i indiquem amb V' el dual de V, i.e., l'espai de formes lineals de V. Per a cada $x \in V$ i $x' \in V'$ indicarem per $\langle x, x'\rangle$ el valor de la forma lineal x' en x. Demostrau que existeix una única representació lineal $\rho' : G \longrightarrow GL(V')$, tal que*

$$\langle \rho_s x, \rho'_s x'\rangle = \langle x, x'\rangle \qquad \textit{per a tot } s \in G, x \in V, x' \in V'.$$

Aquesta és anomenada representació contragradient (o representació dual) de ρ. A més, el seu caràcter és χ^*.

Demostració. Considerem l'aplicació $\widehat{\rho}: G \longrightarrow GL(V')$ donada per $\widehat{\rho}_s(x') = \widehat{\rho}_s x'$ on $\widehat{\rho}_s x'$ ve donat per: $\widehat{\rho}_s x'(x) = \langle \rho_{s^{-1}}(x), x' \rangle$.

$$\begin{array}{llllllll} \widehat{\rho}: & G & \longrightarrow & GL(V') & & & & \\ & s & \longmapsto & \widehat{\rho}_s: & V' & \longrightarrow & V' & \\ & & & & x' & \longmapsto & \widehat{\rho}_s x': & V \longrightarrow \mathbb{C} \\ & & & & & & & x \longmapsto \widehat{\rho}_s x'(x) = \langle \rho_{s^{-1}}(x), x' \rangle \end{array}$$

Vegem que és una representació que satisfà el que ens demanen.

Vegem que és una representació, és a dir que satisfà la igualtat $\widehat{\rho}_{st}(x') = \widehat{\rho}_s(x') \cdot \widehat{\rho}_t(x')$ per a tot $s, t \in G$, $x' \in V'$. És a dir, volem veure que $\widehat{\rho}_{st} x'(x) = \widehat{\rho}_s x'(x) \cdot \widehat{\rho}_t x'(x)$ per a tot $s, t \in G$, $x' \in V'$, $x \in V$. Vegem-ho:

$$\widehat{\rho}_{st} x'(x) = \langle \rho_{(st)^{-1}}(x), x' \rangle = \langle \rho_{t^{-1}s^{-1}}(x), x' \rangle = \langle \rho_{t^{-1}}(x) \rho_{s^{-1}}(x), x' \rangle = \langle \rho_{t^{-1}}(x), x' \rangle \cdot \langle \rho_{s^{-1}}(x), x' \rangle$$

Ara bé, $\langle \rho_{s^{-1}}(x), x' \rangle$ és un element dels complexes, un cos commutatiu. Pel que

$$\langle \rho_{t^{-1}}(x), x' \rangle \cdot \langle \rho_{s^{-1}}(x), x' \rangle = \langle \rho_{s^{-1}}(x), x' \rangle \cdot \langle \rho_{t^{-1}}(x), x' \rangle = \widehat{\rho}_s x'(x) \cdot \widehat{\rho}_t x'(x)$$

com volíem veure. Per tant $\widehat{\rho}$ és una representació de G en V'.

D'altra banda, utilitzant que $\rho_{s^{-1}} = \rho_s^{-1}$ podem veure fàcilment que es satisfà la condició $\langle \rho_s x, \widehat{\rho}_s x' \rangle = \langle x, x' \rangle$ per a tot $s \in G, x \in V, x' \in V'$.

$$\langle \rho_s x, \widehat{\rho}_s x' \rangle = \widehat{\rho}_s x' \left(\rho_s x \right) = \langle \rho_{s^{-1}}(\rho_s x), x' \rangle = \langle \rho_s^{-1} \left(\rho_s(x) \right), x' \rangle = \langle x, x' \rangle$$

Considerem ara una representació lineal $\rho': G \longrightarrow GL(V')$, tal que satisfà la condició del enunciat.

Aleshores, ρ' vendrà determinada per les imatges de ρ'_s de cada x', i.e. $\rho'_s x'$. Ara bé, $\rho'_s x'$ ve determinat per $\rho'_s x'(x) = \langle \rho_s^{-1} x, x' \rangle$ per a tot $s \in G, x \in V, x' \in V'$. Per el mateix raonament, $\widehat{\rho}$ vendrà determinat per $\widehat{\rho}_s x'(x) = \langle \rho_s^{-1} x, x' \rangle$ per a tot $s \in G, x \in V, x' \in V'$. Per tant, $\rho' = \widehat{\rho}$ serà la representació dual de ρ i queda demostrada la unicitat d'aquesta.

Vegem ara que si χ és el caràcter de ρ el caràcter de la representació dual ρ' és χ^*.

En primer lloc, sabem que $\rho'_s x'(x) = x' \left(\rho_s^{-1}(x) \right)$. D'altra banda, sabem que si $\{e_1, \dots, e_n\}$ és una base de V, aleshores la base dual associada $\{e^1, \dots, e^n\}$ de V' ve donada per:

$$e^i(e_j) = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

Aleshores, si indiquem per $R_s = \left(r_{ij}(s) \right)$ la matriu de ρ_s sabem que la matriu de ρ_s^{-1} ve donada per R_s^{-1} que indicarem per $\left(r_{ij}^{-1}(s) \right)$. D'aquesta manera, la representació ρ' vendrà donada en forma matricial per

$$R'_s = \begin{pmatrix} r_{1,1}\left(s^{-1}\right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_{2,2}\left(s^{-1}\right) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & r_{n,n}\left(s^{-1}\right) \end{pmatrix}$$

Finalment, el caràcter de la representació dual vendrà donat per la traça de R'_s, que serà la mateixa que la traça de R_s^{-1}. Utilitzant el segon punt de la proposició 2, obtenim com volíem demostrar que $\chi' = \chi^*$. □

Exercici 4. *Siguin $\rho_1 : G \longrightarrow GL(V_1)$ i $\rho_2 : G \longrightarrow GL(V_2)$ dues representacions lineals de caràcters χ_1 i χ_2 respectivament. Considerem $W = Hom(V_1, V_2)$ l'espai vectorial d'aplicacions lineals $f : V_1 \longrightarrow V_2$. Per a cada $s \in G$ i $f \in W$ indicarem $\rho_s f = \rho_{2,s} \circ f \circ \rho_{1,s}^{-1}$; pel que $\rho_s f \in W$. Demostrau que això defineix una representació lineal $\rho : G \longrightarrow GL(W)$, i que el seu caràcter és $\chi_1^* \cdot \chi_2$. Aquesta representació, és isomorfa a $\rho'_1 \otimes \rho_2$, on ρ'_1 és la representació dual de ρ_1 que hem vist a l'exercici anterior.*

Demostració. En primer lloc, vegem quina forma te la nostra aplicació ρ.

$$\begin{array}{rcccccc} \rho: & G & \longrightarrow & GL(W) & & & \\ & s & \longmapsto & \rho_s: & W & \longrightarrow & W \\ & & & & f & \longmapsto & \rho_s f \end{array}$$

Vegem ara que és una representació, és a dir, que $\rho(st)f = \rho(s)\rho(t)f$ per a tot $f \in W$ i $s, t \in G$. Sabem que

$$\rho_{(st)} f = \rho_{2,(st)} \circ f \circ \rho_{1,(st)}^{-1}.$$

Ara, com que ρ_1 i ρ_2 són representacions es satisfà que

$$\rho_{2,(st)} \circ f \circ \rho_{1,(st)}^{-1} = \rho_{2,(st)} \circ f \circ \rho_{1,(st)^{-1}} = \rho_{2,s}\rho_{2,t} \circ f \circ \rho_{1,t^{-1}}\rho_{1,s^{-1}}$$

I si tornam a agrupar en termes de la nostra representació ρ, tenim que

$$\rho_{2,s}\rho_{2,t} \circ f \circ \rho_{1,t^{-1}}\rho_{1,s^{-1}} = \rho_{2,s} \circ \rho_t f \circ \rho_{1,s^{-1}} = \rho_s \rho_t f = \rho(s)\rho(t)f$$

com volíem demostrar.

Vegem ara que el caràcter de ρ_s és $\chi(s) = \chi_1^* \cdot \chi_2$. Per demostrar-ho, considerarem en primer lloc una base de W donada per $\left(e_{i_1,i_2}\right)$, on cada element de la base vendrà definit de la forma següent:

$$\begin{array}{rccl} e_{i_1,i_2}: & V_1 & \longrightarrow & V_2 \\ & e_{j_1} & \longmapsto & e_{i_1,i_2}\left(e_{j_1}\right) = \left\{ \begin{array}{lll} e_{i_2} & si & e_{j_1} = e_{i_1} \\ 0 & si & e_{j_1} \neq e_{i_1} \end{array} \right. \end{array}$$

Una vegada fixada una base de W, sabem que el caràcter de ρ_s vendrà donat per la traça de la matriu que representa ρ_s en forma matricial, diguem-li $R(s)$. Doncs bé, per definició, la traça de $R(s)$ vendrà donada per la suma de les components e_{i_1,i_2} dels respectius elements $\rho_{2,s} \circ e_{i_1,i_2} \circ \rho_{1,s^{-1}}$. És a dir, la suma de les components λ_{i_1,i_2} que satisfan la igualtat següent

$$\rho_{2,s} \circ e_{i_1,i_2} \circ \rho_{1,s^{-1}} = \lambda_{i_1,i_2} e_{i_1,i_2} + \sum_{j_1,j_2 \neq i_1,i_2} \lambda_{j_1,j_2} e_{j_1,j_2}$$

Ara bé, fixem-nos que si avaluem les dues aplicacions en e_{i_1} obtenim

$$\rho_{2,s} \circ e_{i_1,i_2} \circ \rho_{1,s^{-1}}\left(e_{i_1}\right) = \lambda_{i_1,i_2} e_{i_1,i_2}\left(e_{i_1}\right) + \sum_{j_1,j_2 \neq i_1,i_2} \lambda_{j_1,j_2} e_{j_1,j_2}\left(e_{i_1}\right)$$

Aplicant la definició de la base $\left(e_{i_1,i_2}\right)$ a la part dreta de la igualtat, obtenim

$$\lambda_{i_1,i_2} e_{i_1,i_2}\left(e_{i_1}\right) + \sum_{j_1,j_2\neq i_1,i_2} \lambda_{j_1,j_2} e_{j_1,j_2}\left(e_{i_1}\right) = \lambda_{i_1,i_2} e_{i_2} + \sum_{j_2\neq i_2} \lambda_{i_1,j_2} e_{j_2}$$

És a dir, que la component $\lambda_{i_1,i_2} e_{i_2}$ que volem conèixer coincideix amb la component e_{i_2} de la imatge de e_{i_1}.
A continuació, considerarem $\lambda_{1,j}^{i*}$ els coeficients de la columna $i-$ésima de la matriu de $R_1^{-1}(s)$ que representa $\rho_{1,s^{-1}}$ en forma matricial, i $\lambda_{2,j}^{i}$ els coeficients de la columna $i-$ésima de la matriu de $R_2(s)$ que representa $\rho_{2,s}$ en forma matricial. Aleshores, si avaluem la aplicació de la part esquerra de la igualtat en e_{i_1}, tenim que:

$$\rho_{2,s} \circ e_{i_1,i_2} \circ \rho_{1,s^{-1}}\left(e_{i_1}\right) = \rho_{2,s} \circ e_{i_1,i_2}\left(\lambda_{1,i_1}^{i_1*} e_{i_1} + \lambda_{1,j_1}^{i_1*} e_{j_1}\right)$$

On aplicant la definició de la base $\left(e_{i_1,i_2}\right)$ obtenim

$$\rho_{2,s} \circ e_{i_1,i_2}\left(\lambda_{1,i_1}^{i_1*} e_{i_1} + \lambda_{1,j_1}^{i_1*} e_{j_1}\right) = \rho_{2,s}\left(\lambda_{1,i_1}^{i_1*} e_{i_2}\right) = \lambda_{2,i_2}^{i_2}\lambda_{1,i_1}^{i_1*} e_{i_2} + \sum_{j_2\neq i_2} \lambda_{j_2}^{i_2}\lambda_{i_1}^{i_1*} e_{j_2}$$

Aleshores, la nostra component λ_{i_1,i_2} coincideix amb $\lambda_{2,i_2}^{i_2}\lambda_{1,i_1}^{i_1*}$ par a tot i_1, i_2, pel que el caràcter de la nostra representació vendrà donat per

$$\chi = \sum_{i_1,i_2} \lambda_{i_1,i_2} = \sum_{i_1,i_2} \lambda_{2,i_2}^{i_2}\lambda_{1,i_1}^{i_1*}$$

Finalment, com que $\lambda_{1,i_1}^{i_1*}$ són les components de la diagonal de $R_1^{-1}(s)$, sabem que $\sum_{i_1}\lambda_{1,i_1}^{i_1*} = \chi_1^*$, i com que $\lambda_{2,i_2}^{i_2}$ són les components de la diagonal de $R_2(s)$, sabem que $\sum_{i_2}\lambda_{2,i_2}^{i_2} = \chi_2$, i per tant:

$$\sum_{i_1,i_2} \lambda_{2,i_2}^{i_2}\lambda_{1,i_1}^{i_1*} = \sum_{i_1}\lambda_{1,i_1}^{i_1*}\sum_{i_2}\lambda_{2,i_2}^{i_2} = \chi_2\sum_{i_1}\lambda_{1,i_1}^{i_1*} = \chi_2\chi_1^*$$

On queda demostrat com volíem que $\chi = \chi_2\chi_1^*$.

□

Exercici 5. *Considerem ρ una representació lineal amb caràcter χ. Demostrau que el nombre de vegades que la representació unitat està continguda en ρ és exactament $(\chi|1) = (1/g)\sum_{s\in G}\chi(s)$.*

Demostració. Sabem que el el caràcter de la representació trivial és $\chi_1(s) = 1$ per a tot $s \in G$. D'altra banda, sabem pel teorema 4 que el nombre de vegades que ρ conté la representació trivial és $(\chi|\chi_1) = (\chi|1)$. Aplicant la definició del producte escalar obtenim com volíem

$$(\chi|1) = (1/g)\sum_{s\in G}\chi(s)1^* = (1/g)\sum_{s\in G}\chi(s)$$

□

Exercici 6. *Sigui X un conjunt finit sobre el que G actua, considerem ρ la representació permutació corresponent i χ el seu caràcter.*

(a) *El conjunt Gx, d'imatges sota G d'un element de $x \in X$, és el que anomenam una òrbita. Diguem-li c al nombre d'òrbites diferents. Demostrar que c és igual al nombre de vegades que ρ conté la representació unitat 1; deduir d'aquest fet, que $(\chi|1) = c$. En particular, si G és transitiu (i.e., si $c = 1$), ρ pot ser descompost de la forma $1 \oplus \theta$ on θ no conte la representació unitat. Si ψ és el caràcter de θ, tendrem que $\chi = 1 + \psi$ i $(\psi|1) = 0$.*

(b) *Considerem ara que G actua sobre el producte $X \times X$ de X amb ell mateix mitjançant la igualtat $s(x, y) = (sx, sy)$. Demostrar que el caràcter de la corresponent representació permutació és igual a χ^2.*

(c) *Suposem que G és transitiva sobre X i que X té com a mínim dos elements. Aleshores direm que G és doblement transitiva si, per a tot $x, y, x', y' \in X$ amb $x \neq y$ i $x' \neq y'$, existeix $s \in G$ tal que $x' = sx$ i $y' = sy$. Demostrar que les propietats següents són equivalents:*

(i) *G és doblement transitiu.*

(ii) *La acció de G sobre $X \times X$ té dues orbites, la diagonal i la seva complementaria.*

(iii) $(\chi^2|1) = 2$.

(iv) *La representació θ definida a l'apartat (a) és irreductible.*

(a) *Demostració.* Sigui $\{x_i\}_{i\in I}$ el conjunt de representants de les diferents òrbites de la nostra acció, aleshores $|I|$ és el nombre d'òrbites diferents, és a dir c.
D'altra banda, per l'exercici anterior, sabem que el nombre de vegades que ρ conté la representació unitat 1 és exactament $(\chi|1)$ que ve donat per:

$$(\chi|1) = \frac{1}{g}\sum_{s\in G}\chi(s)$$

Ara bé, com que $\chi(s)$ és el caràcter d'una representació permutació, sabem per l'exercici 2 que coincideix amb el nombre d'elements fixos per s. És a dir que

$$\frac{1}{g}\sum_{s\in G}\chi(s) = \frac{1}{g}\sum_{s\in G}|\{x \in X|s\cdot x = x\}|$$

Seguidament, sabem que $\sum_{s\in G}|\{x \in X|s\cdot x = x\}| = \sum_{x\in X}|\{s \in G|s\cdot x = x\}|$, on aquests darrers conjunts són els que coneixem com *estabilitzador* de x ($Stab(x)$). Pel que

$$\frac{1}{g}\sum_{s\in G}|\{x \in X|s\cdot x = x\}| = \frac{1}{g}\sum_{x\in X}|Stab(x)|$$

A més, sabem també que $|Gx| = [G : Stab(x)]$, pel que $|Stab(x)| = [G : Gx]$ i per tant, com que $|G| = g$ tenim que

$$\frac{1}{g}\sum_{x\in X}|Stab(x)| = \frac{1}{g}\sum_{x\in X}\frac{|G|}{|Gx|} = \sum_{x\in X}\frac{1}{|Gx|}$$

Finalment, si consideram n_i el nombre d'elements de l'òrbita Gx_i obtenim que

$$\sum_{x\in X}\frac{1}{|Gx|} = \sum_{i\in I}\frac{n_i}{|Gx_i|} = \sum_{i\in I}1 = |I| = c$$

On acabam de demostrar que $(\chi|1)$, el nombre de vegades que ρ conté la representació unitat 1 és exactament c, és a dir el nombre d'òrbites diferents. $\square$

D'aquest fet, deduïm que si $c = 1$, ρ pot ser descompost de la forma $1 \oplus \theta$, ja que 1 és una representació irreductible. A més, sigui ψ el caràcter de θ sabem que $\chi = 1 + \psi$, i com que $(\chi|1) = c = 1$, tendrem que $(\chi|1) = (1|1) + (\psi|1) = 1 + (\psi|1)$. D'on deduïm que $(\psi|1) = 0$ i per tant que θ no conté la representació unitat.

(b) *Demostració.* Sigui $\chi_{X\times X}$ el caràcter de la representació permutació de $X \times X$, sabem que $\chi_{X\times X}(s)$ és el nombre d'elements de $X \times X$ fixos per s. Aleshores, sigui $F_s = \{x \in X | sx = x\}$ sabem que $|F_s| = \chi_X(s) = \chi(s)$. Ara bé, si consideram el conjunt d'elements fixos per s en $X \times X$ el podem expressar com

$$\{(x, y) \in X \times X | sx = x, sy = y\} = F_s \times F_s$$

i per tant $\chi_{X\times X}(s) = |F_s \times F_s| = \chi^2(s)$. Per tant, acabam de demostrar com volíem que $\chi_{X\times X} = \chi^2$. $\square$

(c) Vegem primer l'equivalència entre (i) i (ii).

Com que G és transitiu, la diagonal, diguem-li D, de $X \times X$ serà una òrbita. Ja que fixat un element de la diagonal, per exemple $(x, x) \in D \subset X \times X$, per qualssevol altre element $(y, y) \in D$ sabem que existirà un $s \in G$ tal que $s(x, x) = (y, y)$ i per tant tot D serà una òrbita. D'altra banda, notem que $s(x, x) = (sx, sx)$ és un element de la diagonal pel que no hi haurà elements de fora de la diagonal, $\overline{D}$, dins aquesta òrbita.
D'altra banda, vegem que si G és doblement transitiu $\overline{D}$ sirà un altre òrbita. Sigui $(x, y) \in \overline{D}$, per ser G doblement transitiu, sabem que per a tot $(x', y') \in \overline{D}$ existeix un $s \in G$ tal que $s(x, y) = (x', y')$ d'on deduïm que $\overline{D}$ està tot dins una òrbita, i com que les òrbites són disjuntes, $\overline{D}$ serà una òrbita, i D un altre. Pel que acabam de demostrar que $(i) \Rightarrow (ii)$.

Sempre que G sigui transitiu D sirà una òrbita, ara bé, si $\overline{D}$ també és una òrbita, aleshores voldrà dir que per a tot $(x, y), (x', y') \in \overline{D}$ existirà un s tal que $s(x, y) = (x', y')$. És a dir, que donats $x, y, x', y' \in X$ amb $x \neq y$ i $x' \neq y'$, existeix $s \in G$ tal que $x' = sx$ i $y' = sy$, que és la definició de que G sigui doblement transitiu. Pel que acabam de demostrar que $(ii) \Rightarrow (i)$.

Ara bé, de l'apartat (a), sabem que el nombre d'òrbites diferents d'una acció coincideix amb el nombre de vegades que conté la representació unitat, i de l'apartat (b), sabem que el caràcter de la representació permutació de G sobre $X \times X$ és χ^2. Per tant, el nombre d'òrbites de l'acció de G sobre $X \times X$ és igual a $(\chi^2|1)$. D'on obtenim que $(ii) \Rightarrow (iii)$.

D'altra banda, com ja hem dit sempre que G sigui transitiu D sirà una òrbita, per tant si $(\chi^2|1) = 2$ forçosament $\overline{D}$ sirà l'altre òrbita. D'on obtenim que $(iii) \Rightarrow (ii)$ i per tant que $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$.

Finalment, sigui ψ el caràcter de la representació θ definida en l'apartat (a), sabem que $\chi = 1 + \psi$. A més, sabem de l'apartat (a) que $(\psi|1) = 0$ i com que la representació trivial és irreductible, $(1|1) = 1$. Per tant

$$\chi^2 = 1 + 2\psi + \psi^2.$$

Aleshores, $(\chi^2|1) = 2$ si, i només si:

$$(\chi^2|1) = (1|1) + 2(\psi|1) + (\psi^2|1) = 1 + 0 + (\psi^2|1) = 2$$

És a dir, ssi $(\psi^2|1) = 1$. Ara bé, per l'exercici 5, com que ψ és un valor real,

$$1 = (\psi^2|1) = \frac{1}{g}\sum_{s\in G}\psi^2(s) = (\psi|\psi)$$

D'on, aplicant el teorema 5, això passa ssi ψ és irreductible. Pel que acabam de veure que $(iii) \Leftrightarrow (iv)$.

D'aquesta manera, queda demostrada, com volíem, l'equivalència entre les 4 propietats.

Exercici 7. *Demostrar que per cada caràcter de G que és zero per a tot $s \neq 1$ és un múltiple integral del caràcter r_G de la representació regular.*

Demostració. Recordem que el caràcter r_G de la representació regular és 0 per a tot $s \neq 1$ i g per a $s = 1$. Aleshores si considerem χ un caràcter qualssevol d'una representació W de G tal que $\chi(s)$ és zero per a tot $s \neq 1$, tenim la igualtat $\chi(s) = r_G(s) = 0$ per a tot $s \neq 1$. Pel que per veure que el nostre caràcter és un múltiple integral del caràcter r_G bastarà veure que $\chi(1) = k \cdot g$ amb $k \in \mathbb{N}$, ja que $g = r_G(1)$.

Considerem a continuació la representació trivial de caràcter 1. Aleshores, pel teorema 4, el nombre de vegades que W conté la representació trivial és exactament $(\chi|1)$. Aleshores aplicant la definició del producte escalar tenim que:

$$(\chi|1) = \langle\chi|1\rangle = \frac{1}{g}\sum_{s\in G}\chi\left(s^{-1}\right)\cdot 1$$

Ara bé, com que $\chi(s)$ és zero per a tot $s \neq 1$ tendrem la igualtat $(\chi|1) = \frac{1}{g}\chi(1)$. És a dir, que

$$\chi(1) = (\chi|1)g$$

Finalment, el nombre de vegades que W conté la representació trivial ha de ser un enter, per tant prenent $k = (\chi|1) \in \mathbb{N}$ es satisfà com volíem que el nostre caràcter arbitrari és un múltiple integral del caràcter r_G. □

Exercici 8. *Sigui H_i l'espai vectorial d'aplicacions lineals $h : W_i \to V$ tals que $\rho_s h = h\rho_s$ per a tot $s \in G$. Cada $h \in H_i$ envia W_i a V_i.*

(a) *Demostrar que la dimensió de H_i és igual al nombre de vegades que W_i apareix en V, i.e., a $\dim(V_i)/\dim(W_i)$.*

(b) *Considerem que G actua sobre $H_i \otimes W_i$ mitjançant el producte tensorial de la representació trivial de G sobre H_i i la representació donada sobre W_i. Demostrar que la aplicació*

$$F : H_i \otimes W_i \to V_i$$

definida per la l'expressió

$$F(\sum h_\alpha \cdot w_\alpha) = \sum h_\alpha(w_\alpha)$$

és un isomorfisme de $H_i \otimes W_i$ a V_i.

(c) *Considerem* $(h_1, \ldots, h_k)$ *una base de* H_i *i formem la suma directa* $W_i \oplus \cdots \oplus W_i$ *de* k *copies de* W_i. *El sistema* $(h_1, \ldots, h_k)$ *defineix de manera obvia l'aplicació lineal* h *de* $W_i \oplus \cdots \oplus W_i$ *a* V_i. *Es demana, demostrar que aquesta aplicació és un isomorfisme de representacions i que cada isomorfisme es pot obtenir d'aquesta manera. En particular, descompondre* V_i *en suma directa de representacions isomorfes a* W_i *equival a elegir una base de* H_i.

Demostració. (a) Considerem $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_h$ la descomposició canònica de V on cada V_i és una suma directa de W_i, és a dir, que $V_i = W_{i_1} \oplus \cdots \oplus W_{i_k}$. Aleshores, si consideram l'aplicació projecció $\pi_j : V_i \longrightarrow W_{i_j}$ podem escriure h com $(h_1, h_2, \ldots, h_k)$ on $h_j = \pi_j \circ h$. Ara bé, cada h_j sirà de la forma $h_j : W_i \longrightarrow W_i$, i a més, satisfarà com h que $\rho_s h_j = h_j \rho_s$ per a tot $s \in G$, per tant, estam en condicions d'aplicar el *lema de Shur*, que ens diu que h_j és una homotècia i per tant un isomorfisme. És a dir, que si considerem H_{ij} l'espai vectorial d'aplicacions lineals h_j tals que $h_j : W_i \longrightarrow W_i$ i $\rho_s h_j = h_j \rho_s$, H_{ij} tendrà dimensió 1.

D'aquesta manera, podem descompondre H_i com

$$H_i = H_{i1} \oplus \cdots \oplus H_{ik}$$

On tots els H_{ij} seran de dimensió 1, d'on deduïm que H_i tindrà dimensió k que és el nombre de vegades que apareix W_i en V_i, a més, com que la descomposició de V era la canònica, k sirà també el nombre de vegades que apareix W_i en V.

b) Per demostrar que F és un isomorfisme, hem de veure que és un morfisme bijectiu que admet inversa.

Vegem en primer lloc que és una funció exhaustiva. Considerem un element qualssevol $v = \sum v_\alpha \in V_i$, aleshores com que V_i és suma directa de W_i, per l'apartat anterior existirà un isomorfisme $h_\alpha \in H_i$ tal que $h_\alpha(w_\alpha) = v_\alpha$ per a qualque $w_\alpha \in W_i$. Aleshores,

$$F\left(\sum h_\alpha \cdot w_\alpha\right) = \sum h_\alpha (w_\alpha) = \sum v_\alpha = v$$

Per tant, F és exhaustiva. D'altra banda, per veure que es injectiva i per tant bijectiva, bastarà veure que la dimensió de $H_i \otimes W_i$ és la mateixa que la de V_i. Doncs bé, sabem que $\dim(H_i \otimes W_i) = \dim(H_i) \cdot \dim(W_i)$, i a l'apartat anterior, hem vist que $\dim(H_i)$ és igual al nombre de vegades que apareix W_i en V_i, per tant $\dim(H_i) \cdot \dim(W_i) = \dim(V_i)$. D'aquest fet deduïm que F és una aplicació injectiva, ja que era exhaustiva, i per tant és bijectiva.

Finalment, ens queda veure que F admet invers. Per veure-ho, bastarà amb demostrar que F commuta amb l'acció de G sobre $H_i \otimes W_i$ i sobre V_i, és a dir, que el diagrama següent commuta:

$$\begin{array}{ccc} H_i \otimes W_i & \xrightarrow{F} & V_i \\ {\scriptstyle \rho' = 1_{H_i} \otimes \rho|_{W_i}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \rho|_{V_i}} \\ H_i \otimes W_i & \xrightarrow[F]{} & V_i \end{array}$$

Per veure-ho, considerem $h \in H_i$, $w \in W_i$, i $s \in G$ qualssevol aleshores tendrem que

$$\begin{aligned}\left(F \circ \rho'_s\right)(h \otimes w) &= F\left(\rho'_s(h \otimes w)\right)\\ &= F\left(\left(1_{H_i} \otimes \rho|_{W_i s}\right)(h \otimes w)\right)\\ &= F\left(h \otimes \rho|_{W_i s}(w)\right)\\ &= h\left(\rho_{W_i s}(w)\right)\end{aligned}$$

Ara bé, com que $h \in H_i$, es compleix que $h\left(\rho|_{W_i s}(w)\right) = \rho|_{V s}(h(w))$, d'on

$$\begin{aligned}\left(F \circ \rho'_s\right)(h \otimes w) &= \rho|_{V s}(h(w))\\ &= \rho|_{V_i s}(h(w))\\ &= \rho|_{V_i s}(F(hw))\\ &= (\rho|_{V_i s} \circ F)(hw)\end{aligned}$$

D'aquesta manera, acabam de veure que per qualssevol $h \in H_i$, $w \in W_i$, i $s \in G$ es satisfarà la igualtat

$$\left(F \circ \rho'_s\right)(h \otimes w) = (\rho|_{V_i s} \circ F)(hw)$$

És a dir, que el diagrama commuta, per tant F admet inversa, $F^{-1} = \rho'^{-1} \circ F^{-1} \circ \rho|_{V_i}$, d'on concloem que F serà un isomorfisme.

$\square$

CAPÍTOL 4

Subgrups, productes i representacions induïdes

4.1. Subgrups abelians

Considerem G un grup finit, i mantendrem aquesta restricció per a tots els grups considerats en aquest capítol a excepció de que es digui el contrari. Direm que G és *abelià* (o commutatiu) si $st = ts$ per a tot $s, t \in G$. Aquest fet implica que cada classe de conjugació de G constarà d'un únic element. A més, també es complirà que qualsevol funció de G serà una funció de classe. Les representacions lineals d'aquests grups seran particularment simples del teorema següent.

Teorema 9. *Les propietats següents són equivalents:*

(i) *G és abelià.*

(ii) *totes les representacions irreductibles de G són de grau 1.*

Demostració. Sigui g l'ordre de G, considerem $(n_1, \ldots, n_h)$ els graus de les distintes representacions irreductible de G. Aleshores del capítol 2 sabem pel teorema 7 que h és el nombre de classes de G i pel corol·lari 7 que es satisfà l'equació $g = n_1^2 + \cdots + n_h^2$. Doncs bé, G és abelià si, i només si, les seves classes tenen un element. Això passarà si, i només si, G té g classes, és a dir si $g = h$. Ara bé, $h = n_1^2 + \cdots + n_h^2$ si, i només si, tots els n_i són igual a 1. Pel que queda demostrat el teorema. $\square$

Corol·lari 8. *Sigui A un subgrup abelià d'un grup G no necessàriament abelià, si consideram $a = |A|$ i $g = |G|$ aleshores cada representació irreductible de G és de grau menor o igual a l'index de A dins G, que és igual a g/a.*

Demostració. Considerem $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ una representació irreductible de G. Restringint ρ al subgrup A, obtenim una representació de A donada per $\rho_A : A \longrightarrow GL(V)$.

Considerem ara $W \subseteq V$ una subrepresentació irreductible de ρ_A, aleshores per el teorema anterior, la subrepresentació W és de grau 1. Seguidament, si consideram V' el subespai vectorial de V generat per les imatges $\rho_s W$ de W, variant s dins G. És clar que V' és estable sota G, i com que ρ és irreductible no té subespais estables llevat del zero i ell mateix, pel que $V' = V$. Ara bé, per a cada $s \in G$ i cada $t \in A$ tendrem que

$$\rho_{st} W = \rho_s \rho_t W = \rho_s W.$$

Pel que el nombre de $\rho_s W$ diferents és com a molt g/a, i per tant el nombre de generadors de V són com a molt g/a i obtenim, com volíem, que $\dim(V) \le g/a$. □

4.2. Producte de dos grups

Considerem $\rho^1 : G_1 \to GL(V_1)$ i $\rho^2 : G_2 \to GL(V_2)$ dues representacions lineals de G_1 i G_2 respectivament. Definirem una representació lineal $\rho^1 \otimes \rho^2$ de $G_1 \times G_2$ a $V_1 \otimes V_2$ d'una forma similar al procediment vist a la secció 2.5. Definirem la representació producte tensorial de les representacions ρ^1 i ρ^2, $\rho^1 \otimes \rho^2$, per

$$(\rho^1 \otimes \rho^2)(s_1, s_2) = \rho^1(s_1) \otimes \rho^2(s_2).$$

On $\rho^1(s_1) \otimes \rho^2(s_2)$ és un isomorfisme de $V_1 \otimes V_2$ en ell mateix que podem escriure de la forma $\rho^1_{s_1} \otimes \rho^2_{s_2}$ i ve donat per:

$$\begin{array}{cccc} \rho^1_{s_1} \otimes \rho^2_{s_2} : & V_1 \otimes V_2 & \longrightarrow & V_1 \otimes V_2 \\ & (x_1, x_2) & \longmapsto & \left(\rho^1_{s_1}(x_1), \rho^2_{s_2}(x_2)\right) \end{array}$$

D'aquesta manera, procedint com a la proposició 3 del capítol anterior, siguin χ_1 i χ_2 els caràcters de ρ^1 i ρ^2 respectivament, el caràcter χ de $\rho^1 \otimes \rho^2$ ve donat per:

$$\chi(s_1, s_2) = \chi_1(s_1) \cdot \chi_2(s_2).$$

Notem que si G_1 i G_2 són iguals a un mateix grup G, la representació $\rho^1 \otimes \rho^2$ definida és una representació de $G \times G$. Aleshores, quan ens restringim al subgrup diagonal de $G \times G$ (donat pels elements (s, s) amb $s \in G$), obtenim la representació de G denotada per $\rho^1 \otimes \rho^2$ vista a la secció 2.5; malgrat la idèntica notació d'aquestes dues representacions, és important distingir-les. La principal diferència, és que un és producte tensorial de dues representacions d'un mateix grup i l'altre és el producte tensorial de dues representacions de grups diferents.

Teorema 10. *Siguin $\rho^1 : G_1 \to GL(V_1)$ i $\rho^2 : G_2 \to GL(V_2)$ dues representacions lineals de G_1 i G_2 respectivament, aleshores:*

(i) Si ρ^1 i ρ^2 són irreductibles, $\rho^1 \otimes \rho^2$ és una representació irreductible de $G_1 \times G_2$.

(ii) Cada representació irreductible de $G_1 \times G_2$ és isomorfa a una representació $\rho^1 \otimes \rho^2$, on ρ^1 i ρ^2 són representacions irreductibles de G_1 i G_2 respectivament.

Demostració. Si ρ^1 i ρ^2 són irreductibles, pel teorema 3 de la secció 3.3 sabem que:

$$\frac{1}{g_1} \sum_{s_1} |\chi_1(s_1)|^2 = 1, \qquad \frac{1}{g_2} \sum_{s_2} |\chi_2(s_2)|^2 = 1$$

Si multiplicam ambdues expressions, obtenim:

$$\frac{1}{g_1 g_2}\sum_{s_1,s_2} |\chi_1(s_1)|^2|\chi_2(s_2)|^2 = \frac{1}{g}\sum_{s_1,s_2} |\chi_1(s_1,s_2)|^2 = 1$$

el que demostra que la representació $\rho^1 \otimes \rho^2$ és irreductible, per el teorema 5.

Per provar (ii), sabem pel teorema 3 del capítol 2 que si dues representacions no són isomorfes llavors els seus caràcters són ortogonals, per tant, serà suficient demostrar que cada funció de classe, f, de $G_1 \times G_2$ que és ortogonal als caràcters de la forma $\chi_1(s_1)\chi_2(s_2)$, és zero. Suposem doncs que existeix f tal que

$$\sum_{s_1,s_2} f(s_1,s_2)\chi_1(s_1)^*\chi_2(s_2)^* = 0.$$

Si fixam χ_2 i definim $g_1(s_1) := \sum_{s_2} f(s_1,s_2)\chi_2(s_2)^*$ tendrem que:

$$\sum_{s_1} g_1(s_1)\chi_1(s_1)^* = 0 \qquad \text{per a tot } \chi_1.$$

Ara bé, com que f és una funció de classe de $G_1 \times G_2$, g_1 és una funció de classe de G_1, el que implica que $g_1(s_1) = 0$ per a tot $s_1 \in G_1$. Ara bé, si $g_1(s_1) = 0$, podem fixar un s_1 fixat i definir $g_2(s_2) = f(s_1,s_2)$, llavors

$$g_1(s_1) = \sum_{s_2} f(s_1,s_2)\chi_2(s_2)^* = \sum_{s_2} g_2(s_2)\chi_2(s_2)^* = 0 \qquad \text{per a tot } \chi_2 \text{ i tot } s_1.$$

Per tant, com que $g_2(s_2)$ és una funció de classe de G_2, ja que f és una funció de classe de $G_1 \times G_2$, implica que $g(s_2) = 0$ per a tot $s_2 \in G_2$. Finalment, com que $g(s_2) = 0$ per a qualsevol s_1 fixat, obtenim, com volíem veure, que $f(s_1,s_2) = 0$ per a tot $(s_1,s_2) \in G_1 \times G_2$ □

El teorema anterior redueix completament l'estudi de representacions de $G_1 \times G_2$ a l'estudi de representacions de G_1 i de G_2.

4.3. Representacions induïdes

4.3.1. Definició de les representacions induïdes

Considerem $\rho : G \to GL(V)$ una representació lineal de G, i, essent H un subgrup de G, ρ_H la seva restricció sobre H. Sigui W una subrepresentació de ρ_H, és a dir, un subespai vectorial de V estable sota ρ_t per a tot $t \in H$, considerem $\theta : H \to GL(W)$ la representació de H sobre W definida per ρ_t. Donat $s \in G$, l'espai vectorial $\rho_s W$ depèn únicament de la classe lateral per l'esquerra sH de s; en efecte, com W és estable sota ρ_t, per a tot $t \in H$, es satisfà que $\rho_t W = W$, i si substituïm s per st, amb $t \in H$, obtenim que

$$\rho_{st}W = \rho_s\rho_t W = \rho_s W,$$

pel que les representacions de tots els elements d'una mateixa classe tenen la mateixa imatge.

Considerem un classe lateral per l'esquerra, σ, de H, llavors podem definir el subespai W_σ de V com $\rho_s W$ on $s \in \sigma$ (ja que per a tot $s \in \sigma$, $\rho_s W$ és el mateix espai). D'altra banda, les imatges dels W_σ respecte les diferents ρ_s amb $s \in \sigma$, són altres $W_{\sigma'}$, ja que sigui $W_\sigma = \rho_t W$ llavors

$$\rho_s W_\sigma = \rho_s \rho_t W = \rho_{st} W = \rho_{s'} W$$

on s' és el representant de la classe lateral on pertany st. Fixem-nos, a més, que com G/H és una partició de G, la suma $\sum_{\sigma \in G/H} W_\sigma$ és una subrepresentació de V.

Definició 7. *Direm que una representació ρ de G en V és induïda per la representació θ de H en W si V és igual a la suma directa de les W_σ on $\sigma \in G/H$. És a dir, si*

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma.$$

Podem escriure aquesta condició d'altres formes, com per exemple:

(i) Cada $x \in V$ és pot escriure de manera única com $\sum_{\sigma \in G/H} x_\sigma$, on $x_\sigma \in W_\sigma$ per a cada σ. (Ja que això implicaria que les W_σ estan en suma directa i la seva suma és V.)

(ii) Si R és un sistema de representants de G/H, l'espai vectorial V és suma directa de $\rho_r W$, amb $r \in R$. (Ja que si r és representant de la classe σ, llavors $\rho_r W = W_\sigma$ i la condició (ii) queda reduïda a la definició 7.)

En particular, tendrem que $\dim(V) = \sum_{r \in R} \dim(\rho_r W) = [G : H] \cdot \dim(W)$.

A continuació, veurem alguns petits resultats sobre representacions induïdes en forma d'exemples.

Exemple 2. *Considerem V la representació regular de G, aleshores l'espai V té una base de la forma $(e_t)_{t \in G}$ tal que $\rho_s e_t = e_{st}$ per a cada $s, t \in G$. Llavors, sigui W el subespai vectorial de V amb base $(e_t)_{t \in H}$, la representació θ de H en W és la representació regular de H.Sigui $r \in R$ (un sistema de representants de G/H), el representant de la classe σ, $\rho_r W = \{e_{rt}\}_{t \in H}$. Ara bé, sabem que qualsevol element $s \in G$ és pot escriure de forma única com $s = rt$ on $r \in R$, i $t \in H$, per tant els $\rho_r W$ són disjunts i a més contenen tots els elements de V. I per tant, V és suma directa de $\rho_r W$ amb $r \in R$ la qual cosa demostra, per la condició (ii), que ρ és induïda per θ.*

Exemple 3. *Considerem V un espai vectorial amb base (e_σ) indexada pels elements σ de G/H, i $\rho : G \to V$ la representació lineal determinada per $\rho_s e_\sigma = e_{s\sigma}$ per a cada $s \in G$ i $\sigma \in G/H$. Notem que ρ està ben definida, ja que si σ és una classe lateral per l'esquerra, $s\sigma$ serà també una classe lateral. D'aquesta manera, obtenim una representació de G que és la representació permutació de G associada a G/H. El vector e_H corresponent a la classe lateral per l'esquerra del neutre, H, és invariant sota H, de fet, la representació de H sobre el subespai W generat únicament per e_H és la representació trivial de H. D'aquesta manera, $\rho_r W = e_{rH}$ amb $r \in R$, on R és un sistema de representants de G/H, i per tant e_{rH} és un element de la base de V. Finalment, com que R és un sistema de representants de G/H i les classes formen una partició de V, podem escriure V com suma directa dels $\rho_r W$ i, per la condició (ii), W indueix la representació ρ de G en V.*

Exemple 4. *Si $\rho^1 : G \to V_1$ és induïda per $\theta_1 : H_1 \to W^1$ i $\rho^2 : G \to V_2$ és induïda per $\theta_2 : H_2 \to W^2$, llavors $\rho^1 \oplus \rho^2$ és induïda per $\theta_1 \oplus \theta_2$, ja que*

$$V_1 = \bigoplus_{\sigma_1 \in G/H_1} W^1_{\sigma_1} \qquad i \qquad V_2 = \bigoplus_{\sigma_2 \in G/H_2} W^2_{\sigma_2}$$

i per tant

$$V_1 \oplus V_2 = \left(\bigoplus_{\sigma_1 \in G/H_1} W^1_{\sigma_1}\right) \bigoplus \left(\bigoplus_{\sigma_2 \in G/H_2} W^2_{\sigma_2}\right).$$

Exemple 5. *Considerem (V, ρ) una representació de G que és induïda per (W, θ) una representació de H, i W_1 és un subespai estable de W. Llavors, sigui R un sistema de representants de G/H, el subespai de V donat per $V_1 = \sum_{r\in R} \rho_r W_1$, és estable sota G, ja que quan li aplicam ρ_t amb $t \in G$, obtenim que*

$$\rho_t V_1 = \rho_t \sum_{r\in R} \rho_r W_1 = \sum_{r\in R} \rho_{tr} W_1 = \sum_{r'\in R'} \rho_{r'} W_1$$

On R' és un altre sistema de representants de G/H, i com que ja hem vist que tots els elements d'una mateixa classe tenen la mateixa representació, $\sum_{r'\in R} \rho_{r'} W_1 = V_1$. A més, fixem-nos que $\sum_{r\in R} \rho_r W_1 \subseteq \sum_{r\in R} \rho_r W$, i per ser V induïda per W sabem que podem escriure $\sum_{r\in R} \rho_r W$ en suma directa, pel que si les $\rho_r W$ són disjuntes les $\rho_r W_1$ també i per tant tendrem que $V_1 = \bigoplus_{r\in R} \rho_r W_1$ d'on deduïm, per la condició (ii), que la representació de G en V_1 és induïda per la representació de H en W_1.

Exemple 6. *Considerem la representació (ρ, V) de G induïda per una representació (θ, W) de H, i (ρ', V') una altra representació de G tal que la seva restricció a H és (ρ'_H, V'). Llavors, per la definició de representació induïda, $V = \bigoplus_{\sigma\in G/H} W_\sigma$. Ara bé, si consideram les representacions $(\rho \otimes \rho', V \otimes V')$ i $(\theta \otimes \rho'_H, W \otimes V')$, es satisfarà que*

$$V \otimes V' = \bigoplus_{\sigma\in G/H} W_\sigma \otimes V',$$

i per tant, $\rho \otimes \rho'$ és induïda per $\theta \otimes \rho'_H$.

4.3.2. Existència i unicitat de representacions induïdes

Lema 1. *Suposem que (V, ρ) és induïda per (W, θ) i considerem $\rho' : G \to GL(V')$ una representació lineal de G. Sigui $f : W \to V'$ una aplicació lineal tal que $f(\theta_t w) = \rho'_t f(w)$ per a tot $t \in H$ i $w \in W$. Aleshores, existeix una única aplicació lineal $F : V \to V'$ que estén f i satisfà que $F \circ \rho_s = \rho'_s \circ F$ per a tot $s \in G$.*

Demostració. Vegem en primer lloc la unicitat de F. Considerem una una funció $F : V \to V'$ que estén f i satisfà que $F \circ \rho_s = \rho'_s \circ F$ per a tot $s \in G$. Llavors, sigui x un element de $\rho_s W$, tendrem que $\rho_s^{-1} x \in W$, pel que

$$F(x) = F(\rho_s \rho_s^{-1} x) = \rho'_s F(\rho_s^{-1} x) = \rho'_s f(\rho_s^{-1} x).$$

D'aquesta manera, qualssevol F que satisfà les condicions queda determinada per l'expressió anterior en $\rho_s W$. Ara bé, com que V és suma directa de les $\rho_s W$, també queda F determinada en V, fet que demostra la seva unicitat.

Vegem ara que efectivament existeix F. Considerem $x \in W_\sigma$ i $s \in \sigma$ fixat. Llavors podem definir la funció $F(x)$ de V en V' mitjançant l'expressió $F(x) = \rho'_s f(\rho_s^{-1} x)$ vista anteriorment. Ara bé, que aquesta definició no depèn de l'element s fixat, ja que si fixam qualsevol altre element $s' \in \sigma$ tendrem que $s' = st$ per a qualque $t \in H$, i per tant la imatge de F serà la mateixa:

$$F(x) = \rho'_{s'} f(\rho_{s'}^{-1} x) = \rho'_{st} f(\rho_{st}^{-1} x) = \rho'_s \rho'_t f(\rho_t^{-1} \rho_s^{-1} x)$$

i aplicant la propietat de f i que θ i ρ són iguals sobre H, obtenim

$$F(x) = \rho'_s \rho'_t f(\rho_t^{-1} \rho_s^{-1} x) = \rho'_s \rho'_t f(\theta_t^{-1} \rho_s^{-1} x) = \rho'_s f(\theta_t \theta_t^{-1} \rho_s^{-1} x) = \rho'_s f(\rho_s^{-1} x),$$

que és la imatge en cas de fixar s.

Finalment, com que V és la suma directa dels W_σ, existeix una única aplicació lineal $F: V \to V'$ que estén l'aplicació definida sobre W_σ, i a més, sigui $x \in W_\sigma$, podem observar que $F \circ \rho_s = \rho'_s \circ F$:

$$\left(F \circ \rho_s\right)(x) = \rho'_s f\left(\rho_s^{-1} \rho_s x\right) = \rho'_s f(x) = f(\theta_s x) = f\left(\rho_s x\right) = \rho_s'^{-1} \rho'_s f\left(\rho_s x\right) = \left(\rho'_s \circ F\right)(x)$$

per a tot $s \in G$, i com que V és la suma directa dels W_σ, també es compleix per a tot V com volíem demostrar. □

Teorema 11. *Donada (W,θ) una representació lineal de H, existeix una representació (V,ρ) de G que és induïda per (W,θ). A més, aquesta és única llevat d'isomorfismes.*

Demostració. En primer lloc, provarem l'existència de la representació induïda ρ. Pel corol·lari 6 de la proposició 6, sabem que si la nostra representació θ és irreductible llavors és isomorfa a una subrepresentació de la representació regular de H, la qual, per l'exemple 2, pot induir la representació regular de G. Ara bé, en el cas de que θ no sigui irreductible sabem que descompon en suma directa d'irreductibles, i per tant per l'exemple 4 pot induir una representació que serà suma de representacions regulars de G.

Vegem ara la unicitat de ρ llevat d'isomorfismes. Considerem (V,ρ) i (V',ρ') dues representacions induïdes per (W,θ). Aleshores si aplicam el lema 1 prenent com f l'aplicació inclusió de W en V', sabem que existeix una aplicació lineal $F: V \to V'$ que és la identitat en W, ja que estén la aplicació inclusió. A més, pel lema 1 també sabem que aquesta aplicació satisfà que $F \circ \rho_s = \rho'_s \circ F$ per a tot $s \in G$. Ara bé, com que F és la identitat en W, $F(W) = W$, i per tant $\left(\rho'_s \circ F\right) W = \rho'_s W$. Aleshores, la imatge de F conté totes les imatges $\rho'_s W$, i per tant és igual a V'. Ara bé, com que V' i V són ambdues induïdes per θ, $V' = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma = V$, d'on deduïm que ambdós espais tenen la mateixa dimensió: $\dim(V') = [G:H] \cdot \dim(W) = \dim(V)$. Aleshores, com que F és una aplicació exhaustiva, és un isomorfisme, d'on deduïm que $V \cong V'$, i queda demostrat el teorema. □

4.3.3. Caràcter d'una representació induïda

Sigui (V,ρ) una representació de G induïda per (W,θ) una representació de H, acabam de veure, (V,ρ) queda determinada, llevat d'isomorfismes, per (W,θ). Per tant, siguin chi_ρ i χ_θ els caràcters corresponents de ρ i de θ respectivament, podrem calcular χ_ρ a partir de χ_θ. Vegem com al teorema següent:

Teorema 12. *Considerem h l'ordre de H i R un sistema de representants de G/H. Llavors per a cada $s \in G$ el caràcter de ρ ve donat per:*

$$\chi_\rho(s) = \sum_{\substack{r \in R \\ r^{-1}sr \in H}} \chi_\theta\left(r^{-1}sr\right) = \frac{1}{h} \sum_{\substack{t \in G \\ t^{-1}st \in H}} \chi_\theta\left(t^{-1}st\right)$$

En particular, notem que $\chi_\rho(s)$ és una combinació lineal de valors de χ_θ sobre la intersecció de H amb la classe de conjugació de $s \in G$.

Demostració. En primer lloc, recordem que V és suma directa de les imatges $\rho_r W$ de les $r \in R$. A més, sabem també que ρ_s envia els $\rho_r W$ a altres $\rho_{r'} W$, és a dir els permuta entre ells. Més concretament, si consideram $sr \in G$, com que G/H és una partició de G, podem escriure sr de la forma $r_s t$ amb $r_s \in R$ i $t \in H$, on r_s és el representant escollit de la classe on pertany sr, i amb aquesta notació, podem veure que ρ_s envia $\rho_r W$ a $\rho_{r_s} W$, ja que $r_s t$ pertany a la classe representada per r_s i per tant sabem que les imatges de W de $\rho_{r_s t} W$ i ρ_{r_s} són iguals, i per tant tendrem:

$$\rho_s(\rho_r W) = \rho_s(\rho_r W) = \rho_{sr}(W) = \rho_{r_s t} W = \rho_{r_s} W$$

Vist això, podem determinar el caràcter $\chi_\rho(s) = \mathrm{Tr}(\rho_s)$, utilitzant la base de V que ve donada per la unió de les bases de les imatges $\rho_r W$. Fixant aquesta base, per a cada $r \in R$, els elements que corresponen a $\rho_r W$ tendran zeros a la diagonal si $r_s \neq r$, ja que hem vist que $\rho_s(\rho_r W) = \rho_{r_s} W$. En canvi, si $r_s = r$, els elements de la base que provenen de $\rho_r W$ ens proporcionaran la traça de ρ_s restringit a $\rho_r W$. D'aquesta manera, obtenim que:

$$\chi_\rho(s) = \sum_{r \in R_s} Tr_{\rho_r W}(\rho_{s,r}),$$

on R_s representa el conjunt de $r \in R$ tals que $r_s = r$ i $\rho_{s,r}$ és la restricció de ρ_s a $\rho_r W$. Ara bé, fixem-nos que r_s pertany a R_s i per tant $r_s = r$, si, i només si, $sr \in rH$ és a dir si podem escriure sr de la forma rt amb $t \in H$. Fixem-nos, que si $sr = rt$ llavors $r^{-1}sr = t$ i per tant $r^{-1}sr \in H$. Pel que podem expressar $\chi_\rho(s)$ com:

$$\chi_\rho(s) = \sum_{\substack{r \in R \\ r^{-1}sr \in H}} Tr_{\rho_r W}(\rho_{s,r}),$$

D'altra banda, per calcular $Tr_{\rho_r W}(\rho_{s,r})$ per $r \in R_s$, fixem-nos que ρ_r és un isomorfisme, pel que si el restringim a W, defineix un isomorfisme de W a $\rho_r W$. Aleshores, si consideram un element del nostre sumatori, $t = r^{-1}sr \in H$, podem veure que sobre W és satisfà la igualtat

$$\rho_r \circ \theta_t = \rho_r \circ \rho_{r^{-1}sr} = \rho_{sr} = \rho_s \circ \rho_r = \rho_{s,r} \circ \rho_r,$$

Pel que $\chi_\rho(r)\chi_\theta(t) = \chi_\rho(s)\chi_\rho(r)$ i per tant $\chi_\theta(t) = \chi_\rho(s)$ sobre W. D'on obtenim que la traça de $\rho_{s,r}$ és la mateixa que la de θ_t, i per tant la podem escriure com $\chi_\theta(t) = \chi_\theta(r^{-1}sr)$. Aplicant aquest càlcul de la traça a la darrera expressió, obtenim la expressió desitjada

$$\chi_\rho(s) = \sum_{\substack{r \in R \\ r^{-1}sr \in H}} \chi_\theta\left(r^{-1}sr\right).$$

Finalment, notem que tots els elements u d'una mateixa classe lateral rH ($r \in R_s$) es poden escriure $u = rt$ amb $t \in H$, i per tant si $r^{-1}sr \in H$ aleshores $u^{-1}su = t^{-1}r^{-1}srt \in H$. D'aquesta manera, observam que tots els elements t d'una mateixa classe lateral rH satisfan que $\chi_\theta\left(t^{-1}st\right) = \chi_\theta\left(r^{-1}sr\right)$, d'on obtenim la segona expressió:

$$\chi_\rho(s) = \sum_{\substack{r\in R \\ r^{-1}sr\in H}} \chi_\theta\left(r^{-1}sr\right) = \frac{1}{h} \sum_{\substack{t\in G \\ t^{-1}st\in H}} \chi_\theta\left(t^{-1}st\right).$$

□

4.4. Exercicis

Exercici 9. *Demostrar directament, utilitzant el lema de Schur, que cada representació irreductible d'un grup abelià, finit o no, té grau 1.*

Demostració. Considerem (V, ρ) una representació irreductible d'un grup G abelià. Aleshores, com que G és abelià, $\rho_s \rho_t = \rho_t \rho_s$ per a tot $s, t \in G$, ja que $\rho_{st} = \rho_{ts}$. Aleshores, si fixam $t \in G$ podem aplicar el lemma de Schur prenent $f = \rho_t$ i $\rho^1 = \rho^2 = \rho$, tenint així que f és una homotècia. Per tant, ρ_t és una homotècia (múltiple escalar de la identitat) per a tot $t \in G$. Ara bé, ρ és irreductible, per tant ha de ser d'ordre 1, ja que si fos d'ordre $n > 1$ podríem descompondre $V = \langle e_1, \dots e_n \rangle$ de la forma següent:

$$V = \lambda_s W_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_s W_n$$

amb $W_i = \langle e_i \rangle$, i per tant ρ seria reductible. □

Exercici 10. *Considerem ρ una representació de G de grau n i caràcter χ. Sigui C el centre de G i c el seu ordre, es demana:*

(*a*) *Demostrar que ρ_s és una homotècia per a cada $s \in C$. Deduir d'aquest fet que $|\chi(s)| = n$ per a tot $s \in C$.*

(*b*) *Provar la desigualtat $n^2 \leq g/c$.*

(*c*) *Demostrar que, si ρ és una representació fidel (i.e., $\rho_s \neq 1$ per a tot $s \neq 1$), el grup C és cíclic.*

Demostració. (*a*) Com a l'exercici anterior, si fixam $s \in C$ podem aplicar el lemma de Schur prenent $f = \rho_s$ i $\rho^1 = \rho^2 = \rho$, tenint així que f és una homotècia i per tant ρ_s és una homotècia per a tot $s \in C$. Aleshores, tendrem que $\chi(s) = n\lambda_s$ per a tot $s \in C$ on λ_s són els valors propis de ρ_s una matriu unitària, pel que $\lambda_s \lambda_s^* = 1$ per atot $s \in C$. Aleshores per a tot $s \in C$ es satisfà

$$\left|\chi(s)\right| = \sqrt{n^2 \lambda_s \lambda_s^*} = n.$$

(*b*) Com que ρ és irreductible, pel teorema 3 sabem que

$$(\chi|\chi) = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} \chi(s)\chi(s)* = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} |\chi(s)|^2 = 1.$$

Per l'apartat anterior, sabem que

$$\sum_{s \in C} |\chi(s)|^2 = c \cdot n^2,$$

aleshores, com que $C \subset G$ tenim que

$$\frac{1}{g} \cdot n^2 = \frac{1}{g} \sum_{s \in C} |\chi(s)|^2 \leq \frac{1}{g} \sum_{s \in G} |\chi(s)|^2 = 1,$$

d'on deduïm la igualtat $n^2 \leq g/c$.

(*c*) Considerem l'aplicació $\theta : C \longrightarrow W$ definida per $\theta(s) = \rho(s)$ per a tot $s \in C$. Aleshores com que C és un subgrup de G, θ està ben definida i a més és una representació de C en W. Ara bé, θ és una representació d'un grup abelià, i és irreductible per estar continguda dins ρ que és irreductible, aleshores pel teorema 9 és de grau 1, el que implica que $GL(W) = \mathbb{C}$. D'altra banda, si ρ és fidel, llavors el $\ker\rho = 1$ i pel primer teorema d'isomorfisme sabem que $C \cong \rho(C) \subseteq GL(W)$. Finalment, com que C és un subgrup finit, d'ordre c, isomorf a un subgrup d'ordre c dins $\mathbb{C}$, i l'únic grup de c elements dins $\mathbb{C}$ és el grup cíclic que formen les c arrels *c-èsimes* de la unitat, d'on deduïm que C serà un subgrup cíclic com volíem demostrar.

□

Exercici 11. *Sigui G un grup abelià d'ordre g, i sigui* $\widehat{G}$ *el conjunt de caràcters irreductibles de G. Si* $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{G}$*, aleshores* $\chi_1\chi_2 \in \widehat{G}$*. Demostrar que això converteix a* $\widehat{G}$ *en un grup abelià d'ordre g; aquest és el grup dual de G. Per a cada* $s \in G$*, l'aplicació* $f_s : \chi \mapsto \chi(s)$ *és un caràcter irreductible de* $\widehat{G}$ *i per tant un element del dual* $\widehat{\widehat{G}}$ *de* $\widehat{G}$*. Demostrar que l'aplicació*

$$\begin{aligned} F : G &\longrightarrow \widehat{\widehat{G}} \\ s &\longmapsto f_s \end{aligned}$$

és un homomorfisme injectiu, i concloure d'això que f és un isomorfisme.

Demostració. Com que $\widehat{G}$ és tancat pel producte, és un grup, i com que els seus elements són de $\mathbb{C}$, serà abelià ja que $\mathbb{C}$ un cos commutatiu. Com hem vist en la secció 4.1, un grup abelià d'ordre g té g classes de conjugació, i pel teorema 7 sabem que el nombre de classes de conjugació de G coincideix amb el nombre de representacions irreductibles llevat d'isomorfismes, o el que és el mateix el nombre de caràcters irreductible, d'on deduïm que $|\widehat{G}| = g$.

Considerem ara l'aplicació F donada per:

$$\begin{array}{rccccccc} F: & G & \longrightarrow & \widehat{\widehat{G}} & & & \\ & s & \longmapsto & f_s: & \widehat{G} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & & & \chi & \longmapsto & \chi(s) \end{array}$$

Vegem que F és un homomorfisme, és a dir, que $F(st) = F(s)F(t)$ per a tot $s, t \in G$. Ara bé, com que G és el grup de caràcters irreductibles, $\chi_{st} = \chi_s\chi_t$ d'on:

$$F(st) = f_{st} = \chi_{st} = \chi_s\chi_t = f_s f_t = F(s)F(t),$$

per a tot $s, t \in G$. Aleshores, queda demostrat que F és un homomorfisme. Vegem ara, que aquest homomorfisme és injectiu.

Vegem ara que aquest homomorfisme és injectiu. Com que G és abelià, sabem que és producte directe de grups cíclics, $G = C_{n_1} \times \cdots \times C_{n_k}$. Aleshores, pel teorema 10, sabem que tota representació irreductible ρ de G serà de la forma $\rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \cdots \otimes \rho_k$ amb ρ_i una representació irreductible del grup cíclic C_{n_i}, i per tant, per la proposició 3 un caràcter χ de ρ vendrà donat per $\chi(s) = \chi_1(s) \cdots \chi_k(s)$ on χ_i és el caràcter irreductible de la representació ρ_i. És a dir, que $\widehat{G} = \widehat{C_{n_1}} \times \cdots \times \widehat{C_{n_k}}$.

Calculem ara el nucli de F, que sabem que ve donat per

$$\ker F = \left\{ s \in G \mid f_s(\chi) = 1 \ \forall \chi \in \widehat{G} \right\}.$$

Ara bé, sigui $s \in \ker F$, llavors $\chi(s) = \chi_1(s) \cdots \chi_k(s) = 1$ i com veurem en la secció 6.1 més endavant, els caràcters irreductibles d'un grup cíclic venen donats per $\chi_j(r^l) = e^{\frac{2\pi i j l}{n}}$ la qual cosa implica que si $\chi_j(s) = 1$ per tot a $j \in \{1, 2, \ldots, n_1\}$, on n denota l'ordre del grup cíclic, llavors $s = 1$. Així, tendrem aquest fet per a tot $\chi_i(s)$ d'on deduïm que si $s \in \ker F$ llavors $s = 1$, i per tant F serà un homomorfisme injectiu. $\square$

Exercici 12. *Demostrar que cada representació irreductible de G està continguda en una representació induïda per una representació irreductible de H.*

Demostració. Considerem (V, ρ) una representació irreductible de G. Aleshores, pel corol·lari 6 sabem que com que V és irreductible, $V \subseteq R_G$ on R_G és la representació regular de G.

Considerem $\theta : H \longrightarrow GL(W)$ la representació lineal de H definida per $\theta(h) = \rho(h)$ per a tot $h \in H$. Així, com que $W \subseteq V \subseteq R_G$, θ serà isomorfa a la representació regular de H que per l'exemple 2 de la secció 4.3 sabem que indueix R_G, és a dir que θ indueix R_G

$$R_G = \bigoplus_{r \in R} \rho_r W.$$

On R és un sistema de representant de G/H. Suposem que W és reductible, aleshores existeix un subespai W' estable sobre H, és a dir que $\theta_t W' = W'$ per a tot $t \in H$. Aleshores podem definir la subrepresentació θ' de H en W' determinada per $\theta'(t) = \theta(t)$. D'altra banda, com hem vist al inici de la secció 4.3, $\sum_{r \in R} \rho_r W'$, on R és un sistema de representants de G/H, és una subrepresentació de V, ja que $\rho_r W' = \rho_{r'} W'$ i per tant és un subespai estable de V. Ara bé, V és una representació irreductible, per tant no pot existir una subrepresentació de V i en conseqüència la nostra hipòtesis és falsa i per tant W ha de ser irreductible. $\square$

Exercici 13. *Suposem que G és el producte directe de dos grups H i K i que ρ és una representació de G induïda per una representació θ de H. Demostrar que ρ és isomorfa a $\theta \otimes r_k$ on r_k denota la representació regular de K.*

Demostració. Considerem $t \in H$ i $s \in K$, llavors la representació $\theta \otimes r_k$ ve donada per:

$$\begin{aligned} \theta \otimes r_k : \quad H \times K &\longrightarrow V_1 \otimes V_2 \\ ts &\longmapsto \theta(t) \cdot r_k(s). \end{aligned}$$

Sabem per la proposició 3, que el caràcter d'aquesta representació és $\chi(tk) = \chi_\theta(t) \cdot \chi_{r_k}(k)$ per a tot $t \in H$ i $k \in K$. Ara bé, per la proposició 6, $\chi_{r_k}(1) = g$, on g denota l'ordre del grup, mentre que $\chi_{r_k}(k) = 0$ per a tot $k \neq 1$. Aleshores, sigui $s \in G$ podem escriure s de manera única com tk amb $t \in H$ i $k \in K$ i per tant χ serà

$$\chi(s) = \chi(tk) = \begin{cases} g \cdot \chi_\theta(t) & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k \neq 1. \end{cases}$$

És a dir que $\chi(s) = 0$ si $s \notin H$ i $\chi(s) = g\chi_\theta(s)$ si $s \in H$.

D'altra banda, el teorema 12 ens dona el caràcter χ_ρ de ρ en funció del caràcter χ_θ de θ. Sigui R un sistema de representants de G/H, llavors

$$\chi_\rho(s) = \sum_{\substack{r\in R \\ r^{-1}sr\in H}} \chi_\theta(r^{-1}sr).$$

Ara bé, considerant un $r \in R$ fixat, podem considerar $r \in \{1\} \times K$, i aleshores $r^{-1}sr \in H$ si, i només si, $s = t\cdot 1 \in H \times \{e\}$ d'on deduïm que $\chi_\rho(s) = 0$ per a tot $s = tk$ amb $k \neq 1$. D'altra banda, si $s = t \cdot 1 \in H \times \{e\}$, $r^{-1}sr = r^{-1}hr = h$ d'on obtenim que si $s \in H$, $\chi_\theta(r^{-1}sr) = \chi_\theta(s)$. Finalment, tenim g classes de conjugació, i per tant g representants i g sumands, per tant

$$\chi_\rho(s) = \begin{cases} g\cdot\chi_\theta(s) & \text{si } s \in H \\ 0 & \text{si } s \notin H. \end{cases}$$

Podem observar com els caràcters $\chi_r ho$ i χ són iguals, i per tant les representacions ρ i $\theta \otimes r_k$ són isomorfes. $\square$

CAPÍTOL 5

Grups compactes

5.1. Grups compactes

Per iniciar aquest capítol, introduirem algunes definicions que utilitzarem al llarg del capítol.

Definició 8. *Sigui* $(G,\cdot)$ *un grup i* $\mathcal{T}$ *una topologia sobre* G*, llavors* $(G,\mathcal{T},\cdot)$ *és un* ***grup topològic*** *si la operació* $s\cdot t$ *i la inversa* s^{-1} *són continues respecte* $\mathcal{T}$*.*

Una vegada definit el que és un grup topològic, ja podem donar la definició de grup compacte.

Definició 9. *Sigui* $(G,\mathcal{T},\cdot)$ *un grup topològic, serà un* ***grup compacte*** *si* $\mathcal{T}$ *és la topologia d'un espai compacte.*

Seguidament, enunciarem el teorema de *Borel-Lebesgue* molt útil a l'hora de mirar si un espai és compacte o no.

Teorema 13. *(**Teorema de Borel-Lebesgue**) Si un subconjunt* $E\subseteq\mathbb{C}^n$*, les propietats següents són equivalents:*

(i) E *és tancat i fitat.*

(ii) E *és compacte.*

(iii) Tot subconjunt infinit de E *té un punt d'acumulació en* E*.*

5.2. Mesura de Haar en un grup compacte

Durant tot l'estudi de representacions lineals de grups finits, hem utilitzat sovint la operació de mitjana sobre el grup a estudiar. És a dir, al estudiar un grup G d'ordre g, utilitzàvem mitjanes com la funció $(1/g)\sum_{t\in G} f(t)$, on els valors de f podien venir donats per nombres complexos o, més generalment, per elements d'un espai vectorial. En el cas dels grups compactes, existeix una operació anàloga que en lloc d'utilitzar una suma finita, utilitza una integral respecte d'una mesura dt, l'operació $\int_G f(t)dt$.

Aquesta mesura dt, és una manera d'assignar un *"volum invariant"* a subconjunts de grups topològics localment compactes [1]. Més formalment:

Definició 10. *Una **mesura de Haar** (o mesura invariant) en un grup G localment compacte és una mesura $\mu : \Sigma \to [0,\infty)$, amb Σ una σ-àlgebra continguda en tots els subconjunts de Borel de G, tal que:*

(i) $\mu(G) = 1$.

(ii) $\mu(sE) = \mu(E)$ *per a tot* $s \in G, E \in \Sigma$.

Està demostrat que la mesura de Haar per un grup G localment compacte sempre existeix i és única. D'altra banda, les propietats anteriors són equivalents a:

(i) Invariant sota translacions cap a la dreta (esquerra): per a cada funció continua f i cada $s \in G$ és satisfà

$$\int_G f(t)dt = \int_G f(ts)dt \qquad \left(\int_G f(t)dt = \int_G f(stdt\right)$$

(ii) La massa total de dt és igual a 1:

$$\int_G dt = 1$$

Notem per acabar, que si G és d'ordre finit g, la mesura de Haar dt és obtinguda assignant a cada element $t \in G$ una massa igual a $1/g$.

5.3. Representacions de grups compactes

Considerem G un grup compacte i V un espai vectorial de dimensió finita sobre el cos dels nombres complexos. Una representació lineal de G en V és un homomorfisme continu $\rho : G \to GL(V)$[2].

La majoria de propietats i resultats de representacions lineals de grups finits estudiats als capítols anteriors es compleixen per a representacions de grups compactes, únicament hem de reemplaçar les expressions "$(1/g)\sum_{t\in G} f(t)$" per les expressions "$\int_G f(t)dt$". Per exemple, el producte escalar $(\phi|\psi)$ de dues funcions ϕ i ψ vendrà donat per:

$$(\phi|\psi) = \int_G \phi(t)\psi(t)^* dt$$

Notem, que no sempre és suficient aquest canvi. Per exemple, en la descomposició de la representació regular, secció 3.4. En aquest cas, si G no és finit la representació és de dimensió infinita, i per tant no té sentit referir-nos al seu caràcter, pel que la proposició 5 perd el seu sentit.

[1] Recordem que un espai topològic compacte és localment compacte. I això implica que un grup compacte serà també un grup localment compacte (que la seva topologia sigui localment compacte).

[2] Equival a dir que la funció de dues variables $\eta(s,x) = \rho_s(x)$ amb $s \in G$ i $x \in V$ és continua.

CAPÍTOL 6

Exemples

Finalment, acabarem veient alguns exemples de com trobar les diferents representacions de determinats grups.

6.1. Grup cíclic C_n

Recordem que C_n és el grup d'ordre n que consisteix en les potencies d'un element r tal que $r^n = 1$, és a dir, $C_n = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$. Podem considerar-lo com el grup de les rotacions d'angles $2k\pi/n$ al voltant d'un punt. A més, recordem que tot grup cíclic és abelià, pel que C_n és un grup abelià.

Al ser un grup abelià, pel teorema 9, totes les representacions irreductibles de C_n són de grau 1. Sigui ρ una representació irreductible de C_n, considerem el caràcter de ρ_r donat pel nombre complex $\chi(r) = w$. D'aquesta manera, el caràcter de ρ_{r^k} serà $\chi(r^k) = w^k$. Aleshores, com que $r^n = 1$ i $\chi(1) = 1$, per ser una representació de grau 1, $\chi(r^n) = w^n = 1$. Aquest fet, implica que w ha de ser una arrel n-èsima de la unitat, és a dir que $w = e^{2\pi i j/n}$ amb $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Finalment, com que existeixen n caràcters diferents per les representacions de grau 1, existiran n representacions irreductibles diferents. Els caràcters de les representacions irreductibles de C_n vendran donats per $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{n-1}$ on

$$\chi_j(r^k) = e^{\frac{2\pi i jk}{n}}.$$

Notem que $\chi_j \cdot \chi_{j'} = \chi_{j+j'}$ si considerem l'index j de χ_j mòdul n, és a dir, si $\chi_{j+j'} = \chi_{j+j'-n}$ en cas de que $j + j' \geq n$.

Vegem un exemple més particular, per exemple C_4. La taula de caràcters és la següent:

	1	r	r^2	r^3
χ_0	1	1	1	1
χ_1	1	w	w^2	w^3
χ_2	1	w^2	1	w^2
χ_3	1	w^3	w^2	w^1

On

$$w = e^{\frac{2\pi i}{4}} = e^{\frac{\pi i}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

Podem observar, que $\chi_0 \cdot \chi_i = \chi_i$ per a tot $i = 0, 1, 2, 3$, així com també es compleixen també les igualtats següents.

$$\chi_1 \cdot \chi_1 = \chi_2 \qquad \chi_3 \cdot \chi_3 = \chi_2 \qquad \chi_2 \cdot \chi_2 = \chi_0$$

$$\chi_1 \cdot \chi_2 = \chi_3 \qquad \chi_1 \cdot \chi_3 = \chi_0 \qquad \chi_2 \cdot \chi_3 = \chi_1$$

6.2. Grup C_∞

El grup infinit, C_∞, és el grup de rotacions en el pla. Considerem doncs r_α la rotació d'angle α sobre el pla, amb α mòdul 2π. Aleshores, si representam r_α de la forma $r_\alpha = e^{\pi\alpha}$, la mesura de Haar definida al capítol 4 de C_∞ vendrà donada per $\frac{1}{2\pi} d\alpha$ [1].

D'altra banda, com que C_∞ és un grup abelià, totes les seves representacions irreductibles seran de grau 1. És a dir, que el caràcter d'una representació irreductible ρ aplicat a un element $r_\alpha \in C_\infty$ serà de $\mathbb{C}$. Ara bé, $r_\alpha^{2\pi/\alpha} = 1$, i per tant sigui χ el caràcter de ρ, $\chi(r_\alpha^{2\pi/\alpha}) = \chi(r_\alpha)^{2\pi/\alpha} = 1$. Per tant, $\chi(r_\alpha)$ serà una arrel $(2\pi/\alpha)$-ésima de la unitat. És a dir:

$$\chi(r_\alpha) = e^{in\alpha} \qquad \text{amb } n \in \mathbb{Z}$$

D'aquesta manera, per a cada $n \in \mathbb{Z}$ podem definir una representació irreductible diferent de manera que, si fixam n i consideram ρ_n, una representació irreductible,el seu caràcter vendrà donat per

$$\chi_n(r_\alpha) = e^{in\alpha}.$$

6.3. Grup dièdric D_n

Recordem que aquest és el grup de rotacions i simetries en el pla que preserven un polígon regular de n vèrtexs. Aquest grup està format per n rotacions, que formen un subgrup isomorf al grup cíclic C_n, i n simetries. És a dir, serà un grup d'ordre $2n$. Recordem algunes propietats d'aquest grup.

Si consideram r la rotació d'angle $2\pi/n$ i s una de les simetries, aleshores:

$$r^n = 1 \qquad s^2 = 1 \qquad srs^{-1} = r^{-1}.$$

Sabem a més, que cada element x de D_n es pot escriure de manera única com r^k, amb $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, si x és una rotació (és a dir si pertany a C_n), o com sr^k, amb $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, si x no és una rotació (és a dir si no pertany a C_n). Fixem-nos que la propietat $srs^{-1} = r^{-1}$ implica que $sr^k s^{-1} = r^{-k}$, i per tant $\left(sr^k\right)^2 = 1$.

[1] La constant $\frac{1}{2\pi}$ s'utilitza per imposar que satisfaci la condició (i) de la definició 11.

6.3.1. Realitzacions de D_n com un grup de moviments rígids d'un espai tridimensional

Hi ha diferents realitzacions de D_n:

(a) La realització usual. Es prenen les rotacions, com rotacions al voltant de l'eix Oz, i les simetries, com simetries respecte n línies del pla Oxy. Aquestes línies formen angles que són múltiples de π/n. *Eyring* la denota D_n al seu llibre [4].

(b) La mateixa realització, però en lloc de considerar les simetries respecte de línies del pla Oxy, es consideren respecte de plans que contenen l'eix Oz. Aquesta realització, és la que *Eyring* [4] denota $C_n v$ al seu llibre.

A continuació, vegem quines són les diferents representacions irreductibles d'aquests grups, per fer-ho separarem l'estudi entre els D_n de n parell i de n senar.

6.3.2. Representacions irreductibles del grup D_n amb n parell ($n \geq 2$)

En primer lloc, notem que existeixen 4 representacions de grau 1 (i per tant irreductibles) que venen donades per totes les possibles formes d'enviar r i s a 1 o -1. Els caràcters d'aquestes 4 representacions els podem representar a la taula següent:

	r^k	sr^k
ψ_1	1	1
ψ_2	1	-1
ψ_3	$(-1)^k$	$(-1)^k$
ψ_4	$(-1)^k$	$(-1)^{k+1}$

Vegem ara les representacions de grau 2. Considerem $w = e^{2\pi i/n}$ i $j \in \mathbb{Z}$ arbitrari. Així, podem definir una representació (ρ^j, V) de D_n donada per

$$\rho^j(r^k) = \begin{pmatrix} w^{jk} & 0 \\ 0 & w^{-jk} \end{pmatrix}, \qquad \rho^j(sr^k) = \begin{pmatrix} 0 & w^{-jk} \\ w^{jk} & 0 \end{pmatrix}.$$

És fàcil veure que és una representació, ja que tots els elements es poden representar per r^k o sr^k i per tant podem cobrir totes les possibilitats amb els 4 casos següents:

$$\rho^j(r^k)\cdot\rho^j(r^k) = \begin{pmatrix} w^{jk} & 0 \\ 0 & w^{-jk} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} w^{jk} & 0 \\ 0 & w^{-jk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w^{2jk} & 0 \\ 0 & w^{-2jk} \end{pmatrix} = \rho^j(r^k\cdot r^k)$$

$$\rho^j(sr^k)\cdot\rho^j(sr^k) = \begin{pmatrix} 0 & w^{-jk} \\ w^{jk} & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & w^{-jk} \\ w^{jk} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho^j(sr^k\cdot sr^k)$$

$$\rho^j(r^k)\cdot\rho^j(sr^k) = \begin{pmatrix} w^{jk} & 0 \\ 0 & w^{-jk} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & w^{-jk} \\ w^{jk} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \rho^j(r^k\cdot sr^k)$$

$$\rho^j(sr^k)\cdot\rho^j(r^k) = \begin{pmatrix} 0 & w^{-jk} \\ w^{jk} & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} w^{jk} & 0 \\ 0 & w^{-jk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & w^{-2jk} \\ w^{2jk} & 0 \end{pmatrix} = \rho^j(sr^k\cdot r^k)$$

Una vegada vist que és una representació, fixem-nos que la representació ρ^j és induïda per la representació irreductible de C_n vista a la secció 6.1. Per provar-ho, considerarem el subgrup normal de D_n generat per r, notem que aquest subgrup és $C_n = \langle r \rangle$. Si fixam s una simetria, podem considerar el sistema de representants de G/H donat per $R = \{1, s\}$. Sigui $(\widehat{\rho}, W)$ la representació irreductible de C_n, llavors

$$V = \bigoplus_{r \in R} \rho_r W$$

Recordem que els caràcters irreductibles de C_n són $\chi_j(r^k) = e^{\frac{2\pi i jk}{n}}$, que depenen únicament del valor de j mòdul n. D'aquesta manera, les representacions ρ^j i ρ^{n-j} són isomorfes, ja que tenen el mateix caràcter:

$$\chi_j\left(r^k\right) = w^{-jk} + w^{jk} = w^{-(n-j)k} + w^{(n-j)k} = \chi_{n-j}\left(r^k\right)$$

$$\chi_j\left(sr^k\right) = 0 = \chi_{n-j}\left(sr^k\right)$$

Aquest fet ens permet limitar-nos a les representacions ρ^j amb $j \in \{0, 1, \ldots, n/2\}$.

Si ens fixam en els casos extrems, $j = 0$ i $j = n/2$, són representacions reductibles, ja que mirant les traces de les matrius que determinen ρ^j veiem que el seus caràcters són iguals als caràcters $\psi_1 + \psi_2$ i $\psi_3 + \psi_4$ respectivament.
Una vegada vists els casos extrems, vegem la resta de casos, sigui $0 < j < n/2$ llavors ρ^j és una representació irreductible, ja que no té subespais estables exceptuant el trivial i el total. Per veure-ho, basta fixar-se en que $w^j \neq w^{-j}$, i per tant les úniques línies estables sota $\rho^j(r)$ són els eixos de coordenades. Però aquests no són estables sota $\rho^j(s)$, per tant, no hi ha subespais estables apart del 0 i el total, d'on deduïm que ρ^j és irreductible.

Els caràcters d'aquestes representacions ρ^j els denotarem per χ_j i si feim els càlculs tenim que:

$$\chi_j\left(r^k\right) = w^{jk} + w^{-jk} = 2\cos\left(\frac{2\pi jk}{n}\right) \qquad \chi_j\left(sr^k\right) = 0$$

D'aquesta manera, podem considerar $j, j' \in \{1, 2, \ldots, n/2 - 1\}$ amb $j \neq j'$, llavors els caràcters χ_j i $\chi_{j'}$ seran diferents. Aquest fet implica que ρ^j i $\rho^{j'}$ no seran representacions isomorfes. Així, per a cada $j \in \{1, 2, \ldots, n/2 - 1\}$ tendrem un caràcter irreductible diferent i per tant, tendrem $n/2 - 1$ representacions irreductibles diferents de grau 2.

Si feim recompte hem construït 4 representacions irreductibles de grau 1 i $n/2 - 1$ de grau 2. Aleshores, si sumam els quadrats dels graus de totes aquestes representacions irreductibles, obtenim

$$4 \cdot 1^2 + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot 2^2 = 2n,$$

que correspon amb l'ordre de D_n. Finalment, aplicant el corol·lari 7 de la proposició 6, podem concloure que D_n no té més representacions irreductibles llevat d'isomorfismes.

6.3.3. Representacions irreductibles del grup D_n amb n senar

En primer lloc, vegem quines són les possibles representacions de grau 1 (i per tant irreductibles) que venen donades per totes les possibles formes d'enviar r i s a 1 o -1. Si n és senar, com que $r^n = r^0 = 1$ aleshores no podem enviar r^k a -1, i per tant les nostres representacions de grau 1 enviaran r^k a 1 i s a 1 o -1. Aquestes dues representacions que obtenim tendran el caràcters representats a la taula següent:

	r^k	sr^k
ψ_1	1	1
ψ_2	1	-1

D'altra banda, notem que les representacions ρ^j de grau 2 descrites en el cas de n parell segueixen essent irreductibles per a $0 < j < n/2$. Com que són les mateixes representacions, tenen el mateix caràcter i per tant segueixen essent no isomorfes entre elles. Ara bé, si n és senar el conjunt de possibles j és $\left\{1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}\right\}$. D'on que obtenim un total de $(n-1)/2$ representacions irreductibles de grau 2.

Novament, si feim recompte hem construït 2 representacions irreductibles de grau 1 i $(n-1)/2$ de grau 2. Aleshores, si sumam els quadrats dels graus de totes aquestes representacions irreductibles, obtenim

$$2 \cdot 1^2 + \left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot 2^2 = 2n,$$

que correspon amb l'ordre de D_n. Novament, aplicant el corol·lari 7 de la proposició 6, concloem que D_n no té més representacions irreductibles llevat d'isomorfismes.

6.4. Grup D_{nh}

Considerem I el grup d'ordre 2 format pels elements $\{1, i\}$ amb $i^2 = 1$. Així, el grup D_{nh} ve donat per el producte $D_n \times I$. La forma de realitzar D_{nh}, s'hereta completament de la realització usual de D_n. Si realitzam D_n com un grup de rotacions i simetries en un espai tridimensional com hem vist en l'apartat (i) de les realitzacions d'aquest, llavors podem realitzar D_{nh} com un grup generat per aquestes rotacions i simetries de D_n i la simetria i respecte l'origen.

Per trobar les representacions irreductibles de D_{nh}, farem us del teorema 10, que ens diu que les representacions irreductibles d'aquest grup seran productes tensorials de representacions irreductibles de D_n i I respectivament. Aleshores, per determinar aquestes representacions, necessitam les representacions irreductibles d'aquests dos grups. Les de D_n les hem calculat en l'exemple anterior (5.3), vegem doncs quines són les representacions irreductibles del grup I.

Notem que existeixen dues representacions irreductibles de grau 1 de I. Aquestes venen donades per $\rho_g(i) = 1$ i $\rho_u(i) = -1$. És directe veure que no són isomorfes, i per tant, pel corol·lari 7 de la proposició 6, sabem que no hi ha més representacions irreductibles. Podem veure com venen donats els caràcters d'aquestes dues representacions en la taula següent:

	1	i
g	1	1
u	1	-1

D'aquesta manera, com que I té dues representacions irreductibles, D_{nh} tendrà el doble de representacions irreductibles que D_n. En particular, per a cada caràcter irreductible χ de D_n obtindrem dos caràcters irreductibles de D_{nh} donats per χ_g i χ_u de la manera següent:

	x	ix
χ_g	$\chi(x)$	$\chi(x)$
χ_u	$\chi(x)$	$-\chi(x)$

on $x \in D_n$

Més concretament, les representacions irreductibles de D_{nh} vendran determinades per

$$\rho_g^j(r^k) = \rho_u^j(r^k) = \begin{pmatrix} w^{jk} & 0 \\ 0 & w^{-jk} \end{pmatrix} \qquad \rho_g^j(sr^k) = \rho_u^j(sr^k) = \begin{pmatrix} 0 & w^{-jk} \\ w^{jk} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho_g^j(ir^k) = \begin{pmatrix} w^{jk} & 0 \\ 0 & w^{-jk} \end{pmatrix} \qquad \rho_u^j(ir^k) = \begin{pmatrix} -w^{jk} & 0 \\ 0 & -w^{-jk} \end{pmatrix}$$

$$\rho_g^j(isr^k) = \begin{pmatrix} 0 & w^{-jk} \\ w^{jk} & 0 \end{pmatrix} \qquad \rho_u^j(isr^k) = \begin{pmatrix} 0 & -w^{-jk} \\ -w^{jk} & 0 \end{pmatrix}.$$

Així, per exemple, un caràcter χ_j de D_n, com els vists a l'exemple anterior, ens donarà dos caràcters χ_{j_g} i χ_{j_u} de D_{nh} com es mostra en la taula següent:

	r^k	sr^k	ir^k	isr^k
χ_{j_g}	$2\cos\left(\frac{2\pi jk}{n}\right)$	0	$2\cos\left(\frac{2\pi jk}{n}\right)$	0
χ_{j_u}	$2\cos\left(\frac{2\pi jk}{n}\right)$	0	$-2\cos\left(\frac{2\pi jk}{n}\right)$	0

I així amb cada un dels caràcters de D_n.

6.5. Grup D_∞

El grup D_∞, és el grup de rotacions i simetries en el pla que preserven l'origen. Aquest grup està format per infinites rotacions, r_α, que formen un subgrup infinit isomorf a C_∞, i infinites simetries. Si consideram s una simetria arbitraria, aleshores es compleixen les propietats

$$s^2 = 1 \qquad \text{i} \qquad sr_\alpha s^{-1} = r_\alpha^{-1} = r_{-\alpha}.$$

D'altra banda, cada element x de D_∞ es pot escriure de manera única com r_α, si x és una rotació, és a dir, si pertany a C_∞, o com $sr\alpha$, si x no és una rotació, és a dir, si no pertany a C_∞. La mesura de Haar de D_∞ és $d\alpha/4\pi$. En particular, la funció mitjana de la funció f, $\int_G f(t)dt$, l'escriurem en dues parts de la manera següent:

$$\int_G f(t)dt = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(r_\alpha)d\alpha + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(sr_\alpha)d\alpha$$

6.5.1. Realitzacions de D_∞ com un grup de moviments rígids en un espai tridimensional

Hi ha dues realitzacions de D_∞:

(a) La realització usual. Es prenen les rotacions, com rotacions al voltant de l'eix Oz, i les simetries, com simetries respecte línies del pla Oxy que passen per O (l'origen).

(b) La mateixa realització per les rotacions, però en lloc de considerar les simetries respecte de línies del pla Oxy, es consideren respecte de plans que contenen l'eix Oz.

A continuació, vegem quines són les diferents representacions irreductibles d'aquest grup.

6.5.2. Representacions irreductibles del grup D_∞

Construirem les representacions irreductibles de D_∞ de forma molt similar a com ho hem fet a l'exemple 5.3. En primer lloc, com passava amb D_n, tenim 2 representacions irreductibles de grau 1, els seus caràcters, ψ_1 i ψ_2, venen donats per la taula següent:

	r_α	sr_α
ψ_1	1	1
ψ_2	1	-1

D'altra banda, hi ha una sèrie de representacions irreductibles de grau 2, ρ^j amb $j \in \{1,2,3,\ldots\}$ definides per

$$\rho^j(r_\alpha) = \begin{pmatrix} e^{ij\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-ij\alpha} \end{pmatrix}, \qquad \rho^j(sr_\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-ij\alpha} \\ e^{ij\alpha} & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, el caràcter χ_j corresponent a la representació ρ^j per a cada $j \in \{1,2,\ldots\}$ ve donat per:

$$\chi_j(r_\alpha) = 2\cos(j\alpha) \qquad \chi_j(sr_\alpha) = 0.$$

Es pot demostrar que aquests són tots els caràcters irreductibles de D_∞, però no s'inclou en aquest treball ja que queda fora dels coneixements a assolir en aquest.

6.6. Grup $D_{\infty h}$

Aquest grup, així com $D_{nh} = D_n \times I$, $D_{\infty h} = D_\infty \times I$ i pot ser realitzat com el grup generat per D_∞ i la simetria i a través de l'origen. D'aquesta manera, tots els seus elements es poden escriure de manera única mitjançant una de les 4 expressions següents:

$$r_\alpha, \quad sr_\alpha, \quad ir_\alpha, \quad isr_\alpha,$$

La mesura de Haar de $D_\infty h$ és $(1/8\pi)d\alpha$. Això, com passava a l'exemple anterior, vol dir que la funció mitjana de la funció f, $\int_G f(t)dt$, l'escriurem en 4 parts de la manera següent:

$$\int_G f(t)dt = \frac{1}{8\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(r_\alpha)d\alpha + \int_0^{2\pi} f(sr_\alpha)d\alpha + \int_0^{2\pi} f(ir_\alpha)d\alpha + \int_0^{2\pi} f(isr_\alpha)d\alpha\right)$$

Per trobar les representacions irreductibles de $D_{\infty h}$, farem us del teorema 10, com hem fet amb l'exemple 5.4. Així, sabem que les representacions irreductibles d'aquest grup seran productes tensorials de representacions irreductibles de D_∞ i I respectivament. Per determinar aquestes representacions, necessitam les representacions irreductibles d'aquests dos grups. Les de D_∞ les hem calculat en l'exemple anterior (5.5), i les de I en l'exemple 5.4.

Com que I té dues representacions irreductibles, g i u, $D_{\infty h}$ tendrà el doble de representacions irreductibles que D_∞. En particular, per a cada caràcter irreductible χ de D_∞ obtindrem dos caràcters irreductibles de $D_{\infty h}$ donats per χ_g i χ_u de la mateixa manera que en l'exemple 5.4.

Per exemple, un caràcter χ_j de D_n com els vists a l'exemple anterior ens donarà dos caràcters χ_{j_g} i χ_{j_u} de D_{nh} com es mostra en la taula següent:

	r_α	sr_α	ir_α	isr_α
χ_{j_g}	$2\cos(j\alpha)$	0	$2\cos(j\alpha)$	0
χ_{j_u}	$2\cos(j\alpha)$	0	$-2\cos(j\alpha)$	0

I així amb cada un dels caràcters de D_∞.

6.7. Grup simètric $\mathfrak{S}_3$

Recordem que $\mathfrak{S}_3$ és el grup de permutacions de 3 elements. Recordem també, que consta de 6 elements repartits en tres classes de conjugació diferents. Els elements són:

- 1 element neutre que serà la identitat (1).
- 3 transposicions.
- 2 cicles de tres elements.

Considerem t una transposició qualsevol y c un del 3-cicles. Llavors es compleixen les propietats següents:

$$t^2 = 1 \qquad c^3 = 1, \qquad tc = c^2 t$$

Podem veure que t té ordre parell mentre que c té ordre senar, per tant, només existeixen 2 caràcters de grau 1, el caràcter unitat χ_1, que envia tot a 1, i el caràcter χ_2 que envia t a -1 i c a 1. Llavors, pel teorema 7, sabem que existeix un caràcter irreductible més. Sigui θ aquest caràcter i n el seu grau, llavors pel corol·lari 7 de la proposició 6 sabem que $1+1+n^2 = 6$, pel que $n = 2$. Finalment, podem deduir els valors de θ per a cada element de $\mathfrak{S}_3$ utilitzant novament el corol·lari 7 de la proposició 6 que ens diu que $\chi_1(\sigma)+\chi_2(\sigma)+2\theta(\sigma) = 0$ per a tot $\sigma \in \mathfrak{S}_3$.

$$\chi_1(t)+\chi_2(t)+2\theta(t) = 0 \Longrightarrow 1-1+2\theta(t) = 0 \Longrightarrow \theta(t) = 0$$

$$\chi_1(c)+\chi_2(c)+2\theta(c)=0 \Longrightarrow 1+1+2\theta(c)=0 \Longrightarrow \theta(c)=-1$$

D'aquesta manera, recordant que $\theta(1)$ és el grau de θ, obtenim la taula de caràcters següent:

	1	t	c
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
θ	2	0	-1

6.8. Grup alternat $\mathfrak{A}_4$

Recordem que el grup $\mathfrak{A}_4$ és el grup de les permutacions parelles d'un conjunt de quatre elements, per exemple $\{a,b,c,d\}$. Una curiositat és que aquest grup és isomorf al grup de rotacions en R^3 que deixen estable un tetraedre amb el baricentre a l'origen. El grup consta de 12 elements de diferents tipus[2]:

- 1 element neutre que serà la identitat (1).
- 3 productes de dues transposicions, elements d'ordre 2. (Aquests elements, corrspon a les simetries del tetraedre respecte les línies que ajunten els punts mitjans de les arestes oposades.) Les denotarem per:

$$x=(a,b)(c,d) \qquad y=(a,c)(b,d) \qquad z=(a,d)(b,c)$$

- 8 3-cicles, elements d'ordre 3: $(a,b,c),(a,c,b),(a,b,d),\dots,(b,d,c)$. (Aquests elements, corresponen a les rotacions de $\pm120°$ respecte les línies que ajunten un vèrtex amb el baricentre de la cara oposada.)

Sigui $t=(a,b,c)$, llavors $K=\{1,t,t^2\}$ és un subgrup de $\mathfrak{A}_4$. De la mateixa manera, $H=\{1,x,y,z\}$ també és un subgrup, de fet, aquest és coneix com grup de Klein i es denota per V_4 i és un subgrup normal de $\mathfrak{A}_4$ ja que:

$$txt^{-1}=z, \qquad tyt^{-1}=x, \qquad tzt^{-1}=y,$$

i si consideram t un altre 3-cicle qualsevol podrem comparar cada una de les seves conjugacions amb alguna de les tres anteriors, i per tant també seran un element de H. Si consideram HK, podem veure que $HK=\mathfrak{A}_4$:

$$H1=\{1,x,y,z\}$$

$$Ht=\{(a,b,c),(b,d,c),(a,d,b),(a,c,d)\}$$

$$Ht^2=\{(a,c,b),(a,d,c),(b,c,d),(a,b,d)\}$$

[2]Denotarem per:

- $(a,b$ la transposició: $a\mapsto b, \quad b\mapsto a$
- (a,b,c) la permutació cíclica: $a\mapsto b, \quad b\mapsto c, \quad c\mapsto a$
- $(a,b)(c,d)$ el producte de transposicions: $a\mapsto b, \quad b\mapsto a, \quad c\mapsto d, \quad d\mapsto c$

Notem a més, que $H \cap K = 1$. Si K fos un subgrup normal de $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{A}_4$ seria el producte directe de H i K, però com que no ho és, relaxant la condició de normalitat de que ambdós subgrups siguin normals a que ho sigui únicament un d'ells, obtenim que $\mathfrak{A}_4$ és el que s'anomena producte semidirecte[3] del subgrup K i el subgrup normal H, denotat per $\mathfrak{A}_4 = K \rtimes H$, i això implica com hem pogut veure que cada element de $\mathfrak{A}_4$ es pot escriure de manera única com un producte $h \cdot k$ on $h \in H$ i $k \in K$.

$\mathfrak{A}_4$ té 4 classes de conjugació: $\{1\}$, $\{x, y, z\}$, $\{t, tx, ty, tz\}$ i $\{t^2, t^2x, t^2y, t^2z\}$, llavors, pel teorema 7, $\mathfrak{A}_4$ té 4 caràcters irreductibles. Notem que $K \cong C_3$ on C_3 denota el grup cíclic de 3 elements que hem estudiat de forma general a l'exemple 5.1. Llavors, com que C_3 té 3 caràcters de grau 1 (χ_0, χ_1, χ_2), els podem estendre a $\mathfrak{A}_4$ prenent $\chi_i(hk) = \chi_i(k)$ per a cada $h \in H$ i cada $k \in K$. Finalment, el darrer caràcter ψ el podem determinar a partir del corol·lari 7 de la proposició 6.

- $|\mathfrak{A}_4| = 12\chi_0(1)^2 + \chi_1(1)^2 + \chi_2(1)^2 + \psi(1)^2$
  $1 + 1 + 1 + \psi(1)^2 = 12 \Longrightarrow \psi(1) = 3.$
- $\chi_0(h) + \chi_1(h) + \chi_2(h) + 3\psi(h) = 01 + 1 + 1 + 3\psi(h) = 0\ \psi(h) = -1$ per a tot $h \in H$.
- $\chi_0(t) + \chi_1(t) + \chi_2(t) + 3\psi(t) = 0 \Longrightarrow 1 + w + w^2 + 3\psi(t) = 0 \Longrightarrow \psi(t) = 0$, i per tant , $\psi(t^2) = \psi(t)\psi(t) = 0$.

Llavors obtenim la taula de caràcters següent:

	1	h	t	t^2
χ_0	1	1	1	1
χ_1	1	1	w	w^2
χ_2	1	1	w^2	w
ψ	3	-1	0	0

On $h \in H$ i

$$w = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Una vegada tenim tots els caràcters irreductibles, com que les tres primeres representacions irreductibles són de grau 1 vendran determinades pel seu caràcter, el qual queda determinat per la taula anterior. En canvi, la representació irreductible corresponent al caràcter ψ, és de grau 3, pel que no vendrà determinada pel seu caràcter. Per determinar-la, considerarem el grup $\mathfrak{A}_4$ com el grup de les rotacions en $\mathbb{R}^3$ que deixen estables un tetraedre amb baricentre a l'origen. Així doncs, podem determinar la representació irreductible, diem-li ρ, corresponent al caràcter ψ mitjançant el procediment següent.

Considerem un tetraedre regular amb baricentre a l'origen, per exemple el tetraedre de vèrtexs:

- $A = (1, 1, 1)$
- $B = (1, -1, -1)$
- $C = (-1, 1, -1)$

[3] La diferència entre un producte directe i un producte semidirecte, és que la condició de producte semidirecte és més suau, ja que basta que un dels 2 subgrups del producte sigui normal.

- $D = (-1, -1, 1)$.

Notem que és un tetraedre regular, ja que:

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{CD}| = 2.$$

Una vegada fixats els vèrtexs del nostre tetraedre, la representació vendrà donada de manera que la imatge de cada permutació del grup serà aquell isomorfisme que permuta els vèrtexs corresponents a la permutació. Per exemple, la imatge de (a, b, c) serà l'isomorfisme que envia el vèrtex A a B, el vèrtex B a C i el vèrtex C a A.

Per determinar la representació, basta amb determinar les imatges dels elements generadors del grup. En el nostre cas, sabem que el grup $\mathfrak{A}_4$ ve generat pels 3-cicles, en particular, com que donat $t = (a, b, c)$ sabem que $t^2 = (a, c, b)$, podem generar $\mathfrak{A}_4$ a partir dels elements:

- $\sigma_1 = (a, b, c)$
- $\sigma_2 = (a, b, d)$
- $\sigma_3 = (a, c, d)$
- $\sigma_4 = (b, c, d)$.

Per determinar les imatges de ρ d'aquests 4 generadors, ens basta determinar les imatges dels elements de la base de $\mathbb{R}^3$. Fixem-nos que la base canònica de $\mathbb{R}^3$ ve donada en funció dels vèrtexs del nostres tetraedre com:

- $\vec{e_1} = (1, 0, 0) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$
- $\vec{e_1} = (0, 1, 0) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right)$
- $\vec{e_1} = (0, 0, 1) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}\right)$

Així, les imatges de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ i σ_4 vendran determinades per les imatges d'aquests 3 vectors. Calculem-les:

- Calculem ρ_{σ_1}:

  Com que $\sigma_1 = (a, b, c)$ les imatges de la base canònica venen donades per:

  - $\rho_{\sigma_1}(e_1) = \frac{1}{2}\rho_{\sigma_1}(\overrightarrow{OA}) + \rho_{\sigma_1}(\overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}(0, 0, -2) = -1e_3$
  - $\rho_{\sigma_1}(e_2) = \frac{1}{2}\rho_{\sigma_1}(\overrightarrow{OA}) + \rho_{\sigma_1}(\overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}\right) = \frac{1}{2}(2, 0, 0) = 1e_1$
  - $\rho_{\sigma_1}(e_3) = \frac{1}{2}\rho_{\sigma_1}(\overrightarrow{OA}) + \rho_{\sigma_1}(\overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right) = \frac{1}{2}(0, -2, 0) = -1e_2$

  Aleshores ρ_{σ_1} vendrà donada en forma matricial per:

$$R_{\sigma_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Calculem ρ_{σ_2}:

  Com que $\sigma_2 = (a,b,d)$ les imatges de la base canònica venen donades per:

  - $\rho_{\sigma_2}(e_1) = \frac{1}{2}\rho_{\sigma_2}(\overrightarrow{OA}) + \rho_{\sigma_2}(\overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right) = \frac{1}{2}(0,-2,0) = -1e_2$
  - $\rho_{\sigma_2}(e_2) = \frac{1}{2}\rho_{\sigma_2}(\overrightarrow{OA}) + \rho_{\sigma_2}(\overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}(0,0,-2) = -1e_3$
  - $\rho_{\sigma_2}(e_3) = \frac{1}{2}\rho_{\sigma_2}(\overrightarrow{OA}) + \rho_{\sigma_2}(\overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}\right) = \frac{1}{2}(2,0,0) = 1e_1$

  Aleshores ρ_{σ_1} vendrà donada en forma matricial per:

$$R_{\sigma_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Calculem ρ_{σ_3}:

  Com que $\sigma_3 = (a,c,d)$ les imatges de la base canònica venen donades per:

  - $\rho_{\sigma_3}(e_1) = \frac{1}{2}\rho_{\sigma_3}(\overrightarrow{OA}) + \rho_{\sigma_3}(\overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2}(0,-2,0) = -1e_3$
  - $\rho_{\sigma_3}(e_2) = \frac{1}{2}\rho_{\sigma_3}(\overrightarrow{OA}) + \rho_{\sigma_3}(\overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) = \frac{1}{2}(0,0,-2) = -1e_1$
  - $\rho_{\sigma_3}(e_3) = \frac{1}{2}\rho_{\sigma_3}(\overrightarrow{OA}) + \rho_{\sigma_3}(\overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}\right) = \frac{1}{2}(2,0,0) = 1e_2$

  Aleshores ρ_{σ_1} vendrà donada en forma matricial per:

$$R_{\sigma_3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Calculem ρ_{σ_4}:

  Com que $\sigma_4 = (b,c,d)$ les imatges de la base canònica venen donades per:

  - $\rho_{\sigma_4}(e_1) = \frac{1}{2}\rho_{\sigma_4}(\overrightarrow{OA}) + \rho_{\sigma_4}(\overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}(0,-2,0) = 1e_2$
  - $\rho_{\sigma_4}(e_2) = \frac{1}{2}\rho_{\sigma_4}(\overrightarrow{OA}) + \rho_{\sigma_4}(\overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}\right) = \frac{1}{2}(0,0,-2) = 1e_3$
  - $\rho_{\sigma_4}(e_3) = \frac{1}{2}\rho_{\sigma_4}(\overrightarrow{OA}) + \rho_{\sigma_4}(\overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2}(2,0,0) = 1e_1$

  Aleshores ρ_{σ_4} vendrà donada en forma matricial per:

$$R_{\sigma_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Així, queda determinada la representació ρ, corresponent al caràcter ψ, sobre $\mathbb{R}^3$ que s'estén per linealitat sobre $\mathbb{C}^3$. És fàcil comprovar, que el caràcter de ρ sobre els 3-cicles és 0, ja que $R^2_{\sigma_i}$ té zeros a la diagonal per a tot $i \in \{1,2,3,4\}$. D'altra banda, construint $x, y, z \in H$ com productes de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ i σ_4, obtenim:

$$R_x = R_{\sigma_1\sigma_4} = R_{\sigma_1}R_{\sigma_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$R_y = R_{\sigma_1\sigma_2} = R_{\sigma_1}R_{\sigma_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$R_z = R_{\sigma_2\sigma_1} = R_{\sigma_2}R_{\sigma_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On podem observar que el caràcter de ρ sobre els elements del grup de Klein és -1 com indica la taula de caràcters.

6.9. Grup simètric $\mathfrak{S}_4$

Estudiem ara les representacions irreductibles del grup $\mathfrak{S}_4$, que recordem que és el grup de totes les permutacions d'un conjunt de quatre elements, per exemple $\{a, b, c, d\}$. Recordem, d'altra banda, que aquest grup és isomorf al grup de tots els moviments rígids que deixen estable un tetraedre regular. Té 24 elements, repartits en 5 classes de conjugació. Els elements són:

- 1 element neutre que serà la identitat (1).
- 6 transposicions: $(a,b), (a,c), (a,d), (b,c), (b,d), (c,d)$.
- 3 productes de dues transposicions, que són els elements d'ordre 2 de $\mathfrak{A}_4$:

$$x = (a,b)(c,d) \qquad y = (a,c)(b,d) \qquad z = (a,d)(b,c)$$

- 8 elements d'ordre 3, els 3-cicles: $(a,b,c), (a,c,b), (a,b,d), \ldots, (b,d,c)$.
- 6 elements d'ordre 4, els 4-cicles:

$$(a,b,c,d), (a,b,d,c), (a,c,b,d), (a,c,d,b), (a,d,b,c), (a,d,c,b).$$

Considerem $H = \{1, x, y, z\}$ i L el subgrup de permutacions que deixen d fix, és a dir $\mathfrak{S}_3$:

$$L = \mathfrak{S}_3 = \{1, (a,b), (a,c), (b,c), (a,b,c), (a,c,b)\}.$$

Com passava en l'exemple anterior, $\mathfrak{S}_4$ és el producte semidirecte del subgrup L i el subgrup normal H, ja que $H \cap L = 1$ i $HL = \mathfrak{S}_4$ com podem veure a continuació:

$$H1 = \{1, x, y, z\} = \{1, (a,b)(c,d), (a,c)(b,d), (a,d)(b,c)\}$$

$$H(a,b) = \{(a,b),(c,d),(a,d,b,c),(a,c,b,d)\}$$

$$H(a,c) = \{(a,c),(a,d,c,b),(b,d),(a,b,c,d)\}$$

$$H(b,c) = \{(b,c),(a,b,d,c),(a,c,d,b),(a,d)\}$$

$$H(a,b,c) = \{(a,b,c),(b,d,c),(a,d,b),(a,c,d)\}$$

$$H(a,c,b) = \{(a,c,b),(a,d,c),(b,c,d),(a,b,d)\}$$

D'aquesta manera, cada representació de L és estesa a una representació de $\mathfrak{S}_4$ mitjançant la expressió: $\rho(h \cdot l) = \rho(l)$ per a cada $h \in H$ i cada $l \in L$. Ara bé, L és isomorf al grup $\mathfrak{S}_3$ estudiat en l'exemple 5.7, i per tant, té 3 representacions irreductibles de graus 1,1 i 2 que s'estenen a $\mathfrak{S}_4$.

D'altra banda, $\mathfrak{A}_4$ és un subgrup normal d'índex 2 en $\mathfrak{S}_4$, pel que $\mathfrak{S}_4/\mathfrak{A}_4$ té dues classes, $\mathfrak{A}_4$ i $\mathfrak{S}_4 \setminus \mathfrak{A}_4$. Aleshores, podem estendre la representació irreductible ρ' de caràcter ψ de $\mathfrak{A}_4$ a $\mathfrak{S}_4$ de manera que la representació sigui la representació trivial per als elements de $\mathfrak{S}_4 \setminus \mathfrak{A}_4$. És a dir, que sigui $\widehat{\rho}$ la extensió de ρ' a $\mathfrak{S}_4$, vendrà donada per:

$$\widehat{\rho}(\sigma) = \begin{cases} \rho'(\sigma) & \text{si } \sigma \in \mathfrak{A}_4, \\ 1 & \text{si } \sigma \notin \mathfrak{A}_4. \end{cases}$$

A més, la representació $\widehat{\rho}$ serà irreductible sobre $\mathfrak{S}_4$, ja que ρ' ho és sobre $\mathfrak{A}_4$. El caràcter de $\widehat{\rho}$ també el denotarem per ψ.

Per veure com són els caràcters d'aquestes representacions, considerarem $R = \{1,(a,b),(a,b)(c,d),(a,b,c),(a,b,c,d)\}$ un sistema de representants de cada una de les classes de conjugació, i calcularem els caràcters en cada una de les classes. Per fer els càlculs més simples, escriurem aquests 5 representants de la forma $h \cdot l$ amb $h \in H$ i $l \in L$. Clarament, $1 = 1 \cdot 1$ amb $1 \in H$ i $1 \in L$ i el seu caràcter ve determinat pel grau de la representació, vegem la resta:

- $(a,b) = 1 \cdot (a,b)$ on $1 \in H$ i $(a,b) \in L$.
- $(a,b)(c,d) = (a,b)(c,d) \cdot 1$ on $(a,b)(c,d) \in H$ i $1 \in L$.
- $(a,b,c) = 1 \cdot (a,b,c)$ on $1 \in H$ i $(a,b,c) \in L$.
- $(a,b,c,d) = (a,d)(b,c) \cdot (a,c)$ on $v \in H$ i $(a,c) \in L$.

Utilitzant aquestes descomposicions i les taules de caràcters corresponents dels exemples 5.7 i 5.8 obtenim:

- χ_1
  Aquesta és la representació trivial, i per tant el seu caràcter és 1 per a tot element de $\mathfrak{S}_3$.

- χ_2
  Recordem que $\chi_2(h \cdot l) = \chi_2(l)$ amb $h \in H$ i $l \in L$. Per tant, mirant la taula del exemple 5.7 tenim que:
  - $\chi_2(1) = 2$, que és el grau de la representació.
  - $\chi_2((a,b)) = -1$.

- $\chi_2((a,b)(c,d)) = \chi_2(1) = 1$.
- $\chi_2((a,b,c)) = 1$.
- $\chi_2((a,b,c,d)) = \chi_2((a,c)) = -1$.

- θ
  Recordem que $\theta(h \cdot l) = \theta(l)$ amb $h \in H$ i $l \in L$. Per tant, mirant la taula de l'exemple 5.7 tenim que:
  - $\theta(1) = 2$, que és el grau de la representació.
  - $\theta((a,b)) = 0$.
  - $\theta((a,b)(c,d)) = \theta(1) = 2$.
  - $\theta((a,b,c)) = -1$.
  - $\theta((a,b,c,d)) = \theta((a,c)) = 0$.

- ψ
  Per calcular el caràcter ψ, notem que $\psi(\sigma) = 1$ si $\sigma \notin \mathfrak{A}_4$, en cas contrari tenim el caràcter calculat en l'exemple anterior. Per tant, mirant la taula de l'exemple 5.8 tenim que:
  - $\psi(1) = 3$, que és el grau de la representació.
  - $\psi((a,b)) = 1$, ja que $(a,b) \notin \mathfrak{A}_4$.
  - $\psi((a,b)(c,d)) = -1$.
  - $\psi((a,b,c)) = 0$.
  - $\psi((a,b,c,d)) = 1$, ja que $(a,b,c,d) \notin \mathfrak{A}_4$.

Finalment, el producte tensorial de la representació no trivial de grau 1 de caràcter χ_2 i la representació $\widehat{\rho}$ de grau 3 de caràcter ψ també serà una representació irreductible pel teorema 10. El caràcter d'aquesta representació, vendrà donat per:

- $\chi_2\psi(1) = \chi_2(1) \cdot \chi_2\psi(1) = 1 \cdot 3 = 3$.
- $\chi_2\psi((a,b)) = \chi_2((a,b)) \cdot \psi((a,b)) = (-1) \cdot 1 = 1$.
- $\chi_2\psi((a,b)(c,d)) = \chi_2((a,b)(c,d)) \cdot \psi((a,b)(c,d)) = 1 \cdot (-1) = -1$.
- $\chi_2\psi((a,b,c)) = \chi_2((a,b,c)) \cdot \psi((a,b,c)) = 1 \cdot 0 = 0$.
- $\chi_2\psi((a,b,c,d)) = \chi_2((a,b,c,d)) \cdot \psi((a,b,c,d)) = 1 \cdot (-1) = -1$.

I com que tenim 5 caràcters irreductibles i $\mathfrak{S}_4$ té 5 classes de conjugació, sabem que no n'hi ha més. Podem representar tots els caràcters irreductibles a la taula següent:

	1	(a,b)	$(a,b)(c,d)$	(a,b,c)	(a,b,c,d)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
θ	2	0	2	-1	0
ψ	3	1	-1	0	1
$\chi_2\psi$	3	-1	-1	0	-1

Notem que els valors dels caràcters irreductibles de $\mathfrak{S}_3$ i $\mathfrak{S}_4$ són enters. Aquesta propietat, és una propietat general de les representacions dels grup simètrics.

6.10. Grup del cub

Sigui C el cub de vèrtexs (x, y, z) on $x, y, z \in \{-1, +1\}$ en $\mathbb{R}^3$, definim el grup G del cub com el grup d'isomorfismes de $\mathbb{R}^3$ en ell mateix que deixen el cub C estable. És a dir, aquells isomorfismes que permuten els seus 8 vèrtexs.

Notem que per un vèrtex fixat, v pot anar a parar a 8 vèrtexs diferents. Llavors, com que són moviments que deixen C estable, els seus tres vèrtexs adjacents han de seguir essent els mateixos, pel que tenim 3 vèrtexs adjacents a v en C i 3 vèrtexs adjacents a v en la imatge de C, pel que tenim 6 maneres diferents de col·locar aquests 3 vèrtexs. Per tant, deduïm d'aquest raonament que el grup del cub ens permet definir $6 \cdot 8$ moviments diferents possibles. $|G| = 48$.

Aquest grup es pot construir de diverses maneres:

(i) El grup G conté el grup $\mathfrak{S}_3$ de permutacions de $\{x, y, z\}$, és a dir, la permutació dels eixos, ja que la imatge del conjunt de vèrtexs serien els propis vèrtexs. De la mateixa manera, i per la mateixa raó, G també conté el grup M d'ordre 8 que consisteix en les transformacions:

$$(x, y, z) \mapsto (\mp x, \mp y, \mp z).$$

que vendria a ser el grup generat per les simetries de cada un dels eixos de coordenades respecte l'origen.

En conseqüència, $M\mathfrak{S}_3 \subseteq G$, i com que $|M\mathfrak{S}_3| = 8 \cdot 6 = |G|$, $G = M\mathfrak{S}_3$. Aleshores, com que M és un subgrup normal de G però $\mathfrak{S}_3$ no ho és, G és el producte semidirecte del grup $\mathfrak{S}_3$ i el subgrup normal M, ja que els elements de M i $\mathfrak{S}_3$ no commuten. És a dir que $G = M \rtimes \mathfrak{S}_3$.

(ii) Considerem T el tetraedre en $\mathbb{R}^3$ amb vèrtexs $(1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$, $(-1, -1, 1)$. D'altra banda, sigui i la simetria respecte l'origen, és a dir: $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$, considerem $T' = iT$. D'aquesta manera, cada vèrtex de C coincideix o bé un vèrtex de T o bé un vèrtex de T'.
Sigui $S(T)$ el grup d'isomorfismes de $\mathbb{R}^3$ en ell mateix que deixen T estable, llavors per a cada $s \in S(T)$ es satisfan les igualtats $sT' = siT = T'$, el que demostra que s també deixa estable el conjunt de vèrtexs de T'. Com que deixa estables els vèrtexs de T i T', deixarà estables tots els vèrtexs del cub C, i per tant $S(t) \subseteq G$.

Notem, que com que $S(T) \subseteq G$ i $\{1, i\} = I \subseteq G$, llavors $S(T) \times I \subseteq G$. Ara bé, per l'exemple 5.7, sabem que $S(T) = \mathfrak{S}_4$, i per tant, $S(T)$ té 24 elements i $S(T)I$ en tendrà 48. A més, $S(T) \cap I = \{1\}$, i com que ambdós subgrups són normals, tenim que G és el producte directe del grup $S(T)$ i el grup I, $G = S(T) \times I$. Així, pel teorema 10, sabem que les representacions irreductibles d'aquest grup seran productes tensorials de representacions irreductibles de $S(T)$ i I respectivament. Aleshores, per determinar aquestes representacions, necessitam les representacions irreductibles d'aquests dos grups.

Finalment, com que $S(T) = \mathfrak{S}_4$, els caràcters irreductibles de $S(T)$ són els 5 estudiats en l'exemple anterior. De la mateixa manera, els caràcters irreductibles de I els hem estudiat en l'exemple 5.4 i hem vist que eren u i g. Així, pel teorema 10, podem calcular els 10 caràcters irreductibles de G resultants dels possibles productes d'un caràcter irreductible de $S(T)$ amb un caràcter irreductible de I. Cal notar, que com que u i g són caràcters irreductibles de representacions de grau 1, els productes tensorials obtinguts tendran el grau donat per la representació de $\mathfrak{S}_4$. D'on deduïm que G tendrà 4 caràcters irreductibles de grau 1, 2 de grau 2 i 4 de grau 3.

Aquests caràcters vendran donats de la forma següent:

Com que els caràcters u i g satisfan $u(1) = g(1) = 1$, aleshores els 10 caràcters de G actuen sobre $\mathfrak{S}_4 \times \{1\}$ com es veu a la taula següent:

	1	(a,b)	$(a,b)(c,d)$	(a,b,c)	(a,b,c,d)
$(\chi_1)_g$	1	1	1	1	1
$(\chi_2)_g$	1	-1	1	1	-1
θ_g	2	0	2	-1	0
ψ_g	3	1	-1	0	1
$(\chi_2\psi)_g$	3	-1	-1	0	-1
$(\chi_1)_u$	1	1	1	1	1
$(\chi_2)_u$	1	-1	1	1	-1
θ_u	2	0	2	-1	0
ψ_u	3	1	-1	0	1
$(\chi_2\psi)_u$	3	-1	-1	0	-1

Seguidament, com que sabem que el caràcter g és el caràcter de la representació trivial de I, també satisfà que $g(i) = 1$. Aleshores, els caràcters irreductibles obtinguts com productes d'un caràcter de $\mathfrak{S}_4$ i g actuen sobre $\mathfrak{S}_4 \times \{i\}$ com es veu a la taula següent:

	i	$(a,b)i$	$(a,b)(c,d)i$	$(a,b,c)i$	$(a,b,c,d)i$
$(\chi_1)_g$	1	1	1	1	1
$(\chi_2)_g$	1	-1	1	1	-1
θ_g	2	0	2	-1	0
ψ_g	3	1	-1	0	1
$(\chi_2\psi)_g$	3	-1	-1	0	-1

Finalment, com que $u(i) = -1$ els caràcters irreductibles obtinguts com productes d'un caràcter de $\mathfrak{S}_4$ i u actuen sobre $\mathfrak{S}_4 \times \{i\}$ com es veu a la taula següent:

	i	$(a,b)i$	$(a,b)(c,d)i$	$(a,b,c)i$	$(a,b,c,d)i$
$(\chi_1)_u$	-1	-1	-1	-1	-1
$(\chi_2)_u$	-1	1	-1	-1	1
θ_u	-2	0	-2	1	0
ψ_u	-3	-1	1	0	-1
$(\chi_2\psi)_u$	-3	1	1	0	1

6.11. Exercicis

Exercici 14. *Demostrar que en D_n, amb n parell (resp. senar), les simetries formen dues (resp. una) classes de conjugació, i que els elements de C_n, les rotacions, formen $(n/2)+1$ (resp. $(n+1)/2)$) classes. Obtenir així el nombre de classes de D_n i comprovar que coincideix amb el nombre de caràcters irreductibles.*

Demostració. Sabem que cada element x de D_n es pot escriure de manera única com r^k, amb $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$, si x és una rotació (és a dir si pertany a C_n), o com sr^k, amb $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$, si x no és una rotació (és a dir si no pertany a C_n). A més, sabem que $s^{-1} = s$ i $sr^k = r^{-k}s = \left(sr^k\right)^{-1}$. Considerem una simetria qualsevol sr^j, aleshores els elements de la seva classe de conjugació seran de la forma:

$$sr^i sr^j sr^i = sr^{2i-j} \qquad\qquad r^i sr^j r^{-i} = sr^{j-2i}$$

amb $i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$. Fixem-nos que $sr^{2i-j} = \left(sr^{j-2i}\right)^{-1}$, a més, podem veure que tots els elements de la classe són simetries.

- Si n és parell, llavors $2i-j$ tendrà mantindrà la paritat de j per a tot i enter, per tant, tendrem dues classes de conjugació, una amb les simetries sr^k amb k parell, i un altre amb les simetries sr^k amb k senar. Les dues classes de conjugació són les següents:

$$\left\{s, sr^2, sr^4, \ldots, sr^{(n-2)}\right\}, \qquad\qquad \left\{sr, sr^3, sr^5, \ldots, sr^{(n-1)}\right\}.$$

- En canvi, si n és senar, la classe de conjugació de s vendrà donada pels elements de la forma sr^{2i} i per tant contindrà totes les simetries sr^k amb k parell, i a més, com que per $i \geq (n+1)/2$, l'exponent $2i$ mòdul n serà senar, totes les simetries sr^k amb k senar també estaran contingudes dins la classe de s. Així, tendrem una única classe de conjugació que englobarà totes les simetries, és a dir que vendrà donada per:

$$\left\{s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\right\}.$$

Considerem ara una rotació qualsevol r^j, aleshores els elements de la seva classe de conjugació seran de la forma:

$$sr^i r^j sr^i = r^{-j} \qquad\qquad r^i r^j r^{-i} = r^j.$$

Fixem-nos que tots els elements de la classe són rotacions, de fet la classe únicament conté l'element r^j i l'element r^{-j}.

- Si n és parell, tendrem $(n/2)-1$ classes de dos elements

$$\left\{r^j, r^{-j}\right\} \qquad \text{amb } j \in \{1,2,\ldots,(n/2)-1\}$$

  i dues classes d'un únic element: $\{r^{(n/2)}\}$ i $\{1\}$, ja que satisfan que $r^j = r^{-j}$.

  Així obtenim un total de $(n/2)-1+2 = (n/2)+1$ classes de conjugació formades per rotacions.

- Si n és senar, tendrem $(n-1)/2$ classes de dos elements

$$\left\{r^j, r^{-j}\right\} \qquad \text{amb } j \in \{1, 2, \ldots, (n-1)/2\}$$

  i la classe $\{1\}$ d'un únic element.

  Així obtenim un total de $(n-1)/2+1$ classes de conjugació formades per rotacions.

Finalment, sumant les classes formades per rotacions i per simetries en cada cas, obtenim:

- En el cas n parell, tenim un total de $(n/2)+3$ classes de conjugació, que coincideix amb el nombre de representacions irreductibles per n parell que hem trobat, $(n/2)-1$ de grau 2 i 4 de grau 1.
- En el cas n senar, tenim un total de $(n-1)/2+2$ classes de conjugació, que també coincideix amb el nombre de representacions irreductibles per n senar trobades, $(n-1)/2$ de grau 2 i 2 de grau 1.

□

Exercici 15. *Siguin ρ^j les representacions irreductibles de grau 2 del grup D_n, demostrar que $\chi_j \cdot \chi_{j'} = \chi_{j+j'} + \chi_{j-j'}$. En particular, veure que*

$$\chi_j \cdot \chi_j = \chi_{2j} + \chi_0 = \chi_{2j} + \psi_1 + \psi_2.$$

Demostrar que ψ_2 és el caràcter del quadrat alternat de ρ^j, i que $\chi_{2j} + \psi_1$ és el caràcter del simètric alternat ρ^j.

Demostració. Recordem de la secció 6.3, que el caràcter de la representació $\left(V, \rho^j\right)$ del grup D_n ve donat per:

$$\chi_j\left(r^k\right) = w^{-ij} + w^{ij} \qquad\qquad \chi_j\left(sr^k\right) = 0$$

on $w = e^{2\pi i/n}$. Així doncs, és fàcil veure que

$$\begin{aligned}
\chi_j\left(r^k\right) \cdot \chi_{j'}\left(r^k\right) &= \left(w^{-kj} + w^{kj}\right)\left(w^{-kj'} + w^{kj'}\right) \\
&= w^{k(j+j')} + w^{-k(j+j')} + w^{k(j-j')} + w^{-k(j-j')} \\
&= \chi_{j+j'}\left(r^k\right) + \chi_{j-j'}\left(r^k\right).
\end{aligned}$$

A més, com que $\chi_j\left(sr^k\right)$ és 0, es satisfà la igualtat $= \chi_j \cdot \chi_{j'}\left(sr^k\right) = \chi_{j+j'} + \chi_{j-j'}\left(sr^k\right)$. Per tant, es compleix com volíem demostrar, que $\chi_j \cdot \chi_{j'} = \chi_{j+j'} + \chi_{j-j'}$.

Aplicant aquesta igualtat sobre $\chi_j \cdot \chi_j$ obtenim que $\chi_j \cdot \chi_j = \chi_{2j} + \chi_0$. Recordem els caràcters irreductibles ψ_1 i ψ_2 de D_n. Podem observar-los donats juntament amb χ_0 en la taula següent:

	1	r^k	sr^k
ψ_1	1	1	1
ψ_2	1	1	-1
χ_0	2	2	0

Podem veure que $\chi_0 = \psi_1 + \psi_2$, i per tant

$$\chi_j \cdot \chi_j = \chi_{2j} + \chi_0 = \chi_{2j} + \psi_1 + \psi_2.$$

Per la proposició 3 del capítol 3, sabem que $\chi_j \cdot \chi_j$ és el caràcter del producte tensorial $\rho^j \otimes \rho^j$. Considerem la representació ρ^j en forma matricial determinada, com mostra la secció 6.3, per:

$$\rho^j(r^k) = \begin{pmatrix} w^{jk} & 0 \\ 0 & w^{-jk} \end{pmatrix} \qquad \rho^j(sr^k) = \begin{pmatrix} 0 & w^{-jk} \\ w^{jk} & 0 \end{pmatrix}$$

Llavors, si calculem la forma matricial de la representació $\rho^j \otimes \rho^j$, de la forma vista en la demostració de la proposició 3, ve determinada per:

$$\rho^j(r^k) = \begin{pmatrix} w^{jk} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w^{-jk} \end{pmatrix} \qquad \rho^j(sr^k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & w^{-jk} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ w^{jk} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'altra banda, per la secció 2.6 sabem que la representació producte tensorial és suma directa de les subrepresentacions quadrada simètrica, $Sym^2(V)$, i quadrada alternada, $Alt^2(V)$. A més, donada una base e_i de V, sabem que les bases d'aquestes subrepresentacions venen donades per:

- $Sym^2(V)$: Generat per la base: $(e_i \cdot e_j + e_j \cdot e_i)_{i \leq j}$
- $Alt^2(V)$: Generat per la base: $(e_i \cdot e_j - e_j \cdot e_i)_{i<j}$.

En el nostre cas, $\dim(V) = 2$ i per tant la base de $Alt^2(V)$ ve donada únicament per el vector $(e_1 \cdot e_2 - e_2 \cdot e_1)$. Vegem quina és la representació de G sobre $V \otimes V$. Per fer-ho, sabem que

$$\left(\rho^j \otimes \rho^j\right)(e_1 \cdot e_2 - e_2 \cdot e_1) = \left(\rho^j \otimes \rho^j\right)(e_1 \cdot e_2) - \left(\rho^j \otimes \rho^j\right)(e_2 \cdot e_1),$$

i per tant, a partir de la matriu de la representació calculada tendrem que

$$\begin{aligned} \left(\rho^j_{r^k} \otimes \rho^j_{r^k}\right)(e_1 \cdot e_2 - e_2 \cdot e_1) &= 1 \cdot (e_1 \cdot e_2) - 1 \cdot (e_2 \cdot e_1) = 1 \cdot (e_1 \cdot e_2 - e_2 \cdot e_1) \\ \left(\rho^j_{sr^k} \otimes \rho^j_{sr^k}\right)(e_1 \cdot e_2 - e_2 \cdot e_1) &= 1 \cdot (e_2 \cdot e_1) - 1 \cdot (e_1 \cdot e_2) = -1 \cdot (e_1 \cdot e_2 - e_2 \cdot e_1). \end{aligned}$$

Aleshores, el caràcter de la representació $Alt^2(V)$ ve donada per

$$\chi_{Alt}(1) = 1 \qquad \chi_{Alt}\left(r^k\right) = 1 \qquad \chi_{Alt}\left(sr^k\right) = -1,$$

que és exactament el caràcter de ψ_2.

Finalment, utilitzant de nou la proposició 3, sabem que

$$\chi_{Alt} + \chi_{Sym} = \chi_j \cdot \chi_j = \chi_{2j} + \psi_1 + \psi_2,$$

si $\chi_{Alt} = \psi_2$, el caràcter del quadrat simètric vendrà donat per $\chi_{Sym} = \chi_{2j} + \psi_1$. □

Exercici 16. *Sigui V_4 el subgrup de Klein donat a la secció 6.8, considerem (W,θ) la representació de V_4 de grau 1 donada per $\theta(1) = \theta(x) = 1$ i $\theta(y) = \theta(z) = -1$.Demostrar que la representació de grau 3 de $\mathfrak{A}_4$ induïda per θ és irreductible i el seu caràcter és el caràcter irreductible ψ de $\mathfrak{A}_4$.*

Demostració. Vegem en primer lloc que θ és una representació, és a dir que $\theta_s\theta_t = \theta_{st}$ per a tot $s,t \in V_4$. Com que V_4 és un grup commutatiu basta provar que:

$$\begin{aligned}
&\theta_1 \cdot \theta_t = 1 \cdot \theta_t = \theta_t = \theta_{1\cdot t} \qquad \forall t \in V_4\\
&\theta_x \cdot \theta_y = -1 = \theta_z = \theta_{xy}\\
&\theta_x \cdot \theta_z = -1 = \theta_y = \theta_{xz}\\
&\theta_y \cdot \theta_z = 1 = \theta_x = \theta_{yz}
\end{aligned}$$

Una vegada vist que θ és una representació de V_4 vegem que la representació de $\mathfrak{A}_4$ induïda per θ és de grau 3. Sabem que V_4 és un subgrup normal de $\mathfrak{A}_4$ d'índex 3 (vist a la secció 6.8). Considerem R el sistema de representants de cada una de les tres classes donat per $R = \{1,(a,b,c),(a,c,b)\}$. Llavors, podem escriure qualsevol element $\sigma \in \mathfrak{A}_4$ de manera única com $\sigma = tr$ amb $t \in V_4$ i $r \in R$. D'aquesta manera, podem estendre θ a $\rho : \mathfrak{A}_4 \longrightarrow V$ de manera que:

$$V = W \oplus \rho_{(a,b,c)} W \oplus \rho_{(a,c,b)} W$$

Així, com que W té dimensió 1, la dimensió de V vendrà donada, com hem vist a la secció 4.3, per

$$\dim(V) = [G:H] \cdot \dim(W) = 3 \cdot 1 = 3.$$

Finalment, pel teorema 12 sabem que el caràcter de ρ vendrà donat per

$$\chi_\rho(s) = \sum_{\substack{r\in R\\ r^{-1}sr\in V_4}} \chi_\theta(r^{-1}sr)$$

Ara bé, sabem que tots els elements d'una mateixa classe de conjugació tenen el mateix caràcter, per tant ens bastarà calcular els caràcters per a cada un dels representants:

$$\begin{aligned}
&\chi_\rho(x) = \sum_{\substack{r\in R\\ r^{-1}sr\in V_4}} \chi_\theta(r^{-1}sr) = \chi_\rho(x) + \chi_\rho(y) + \chi_\rho(z) = -1\\
&\chi_\rho((a,b,c)) = \sum_{\substack{r\in R\\ r^{-1}sr\in V_4}} \chi_\theta(r^{-1}sr) = 0\\
&\chi_\rho((a,c,b)) = \chi_\rho((a,c,b)) \cdot \chi_\rho((a,c,b)) = 0
\end{aligned}$$

Poem veure que aquest caràcter coincideix amb el caràcter irreductible ψ vist en la secció 6.8, per tant la representació ρ serà isomorfa a la representació irreductible corresponent al caràcter ψ, pel que ρ serà irreductible com volíem demostrar. □

Exercici 17. *Demostrar que la realització usual de D_n (notació de Eyring [4]) com a grup del moviments rígids en $\mathbb{R}^3$ és reductible, i el seu caràcter ve donat per $\chi_1 + \psi_2$. Demostrar també, que la realització de D_n que considera les simetries respecte de plans que contenen l'eix Oz, té caràcter $\chi_1 + \psi_1$.*

Demostració. Considerem $\rho : D_n \longrightarrow GL(\mathbb{R}^3)$ la representació usual de D_n.

Com que D_n està generat per una simetria qualsevol s i una rotació qualsevol r, s i r diferent de la identitat, si prenem la base canònica $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, ρ quedarà determinada per ρ_s i ρ_r. Doncs bé, considerem la simetria s com la simetria respecte l'eix Ox i la rotació r la rotació d'angle $\alpha = 2\pi/n$ al voltant de l'eix Oz. Aleshores, ρ quedarà determinat per:

$$\rho(r) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rho(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Podem veure que $W_1 = \langle e_3 \rangle$ és un subespai estable de $\mathbb{R}^3$, i de la mateixa manera, $W_2 = \langle e_1, e_2 \rangle$ també és estable sota ρ. Així, deduïm que ρ és reductible i que es pot escriure com suma directa de les subrepresentacions (W_1, θ_1) i (W_2, θ_2):

$$\rho = \theta_1 \oplus \theta_2$$

Aleshores, si consideram χ_{θ_1} i χ_{θ_2} els caràcters de les representacions θ_1 i θ_2 satisfan la taula següent:

	1	r	s
χ_{θ_1}	1	1	-1
χ_{θ_2}	2	$2\cos\frac{2\pi}{n}$	0

Podem observar, que $\chi_{\theta_1} = \psi_1$ i $\chi_{\theta_2} = \chi_1$. Aleshores per la proposició 2 de la secció 3.1 tendrem que $\chi_\rho(s) = \chi_{\theta_1}(s) + \chi_{\theta_2}(s) = -1$ i que $\chi_\rho(r) = \chi_{\theta_1}(r) + \chi_{\theta_2}(r) = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{n} = 1 + \chi_1$. Aleshores $\chi_\rho = \psi_2 + \chi_1$, com volíem veure.

D'altra banda, si consideram la realització de D_n que pren les simetries respecte de plans que contenen l'eix Oz, podem prendre de nou la base canònica de $\mathbb{R}^3$. La diferència amb la realització anterior serà sobre la simetria, aquesta representació vendrà donada per:

$$\rho(r) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rho(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podem veure de nou que $W_1 = \langle e_3 \rangle$ és un subespai estable de $\mathbb{R}^3$, i de la mateixa manera, $W_2 = \langle e_1, e_2 \rangle$ també és estable sota ρ. Així, deduïm que ρ és reductible i que es pot escriure com suma directa de les subrepresentacions (W_1, θ_1) i (W_2, θ_2). Com en la realització anterior, si consideram χ_{θ_1} i χ_{θ_2} podem representar els caràcters de les representacions θ_1 i θ_2 en la taula següent:

	1	r	s
χ_{θ_1}	1	1	1
χ_{θ_2}	2	$2\cos\frac{2\pi}{n}$	0

Aleshores, observem que $\chi_{\theta_1} = \psi_1$ i $\chi_{\theta_2} = \chi_1$. Aleshores per la proposició 2 de la secció 3.1 tendrem que $\chi_\rho(s) = \chi_{\theta_1}(s) + \chi_{\theta_2}(s) = 1$ i que $\chi_\rho(r) = \chi_{\theta_1}(r) + \chi_{\theta_2}(r) = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{n} = 1 + \chi_1$. Aleshores $\chi_\rho = \psi_1 + \chi_1$, com volíem veure. □

Exercici 18. *Sigui G el grup del cub, considerem G_+ el subgrup de G que consisteix en els elements de determinant 1 (el grup de les rotacions del cub). Demostrar que, si descomponem G en $S(T) \times I$, la projecció $p : G \to S(T)$ defineix un isomorfisme de G_+ a $S(T) = \mathfrak{S}_4$.*

Demostració. Considerem en primer lloc T el tetraedre en $\mathbb{R}^3$ amb vèrtexs $a = (1,1,1)$, $b = (1,-1,-1)$, $c = (-1,1,-1)$, $d = (-1,-1,1)$. Llavors sigui $S(T)$ el grup de les isometries del cub que deixen T estable, sabem que és isomorf a $\mathfrak{S}_4$. Aleshores, tal i com hem fet a l'exemple 6.8, fixats els vèrtexs del nostre tetraedre, la representació vendrà donada de manera que la imatge de cada permutació del grup serà aquell isomorfisme que permuta els vèrtexs corresponents a la permutació. Per exemple, la imatge de (a,b,c) serà l'isomorfisme que envia el vèrtex a a b, el vèrtex b a c i el vèrtex c a a. Aleshores, sabem que $\mathfrak{S}_4$ ve generat per les transposicions de la forma (a, j) amb $j \in \{b,c,d\}$. Calculant les imatges de la representació irreductible ρ, d'ordre 3 d'aquests elements de $\mathfrak{S}_4$ obtenim:

$$\rho_{(a,b)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \rho_{(a,c)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \rho_{(a,d)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podem veure que les transposicions que generen $S(T)$ tenen determinant -1. Així, com que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, sabem que les permutacions que descomponguin un nombre imparell de transposicions tendran determinant -1, són les permutacions senars, i les permutacions que descomponguin un nombre parell de transposicions tendran determinant 1, que són les permutacions senars. Notem que $\mathfrak{S}_4$ té 12 permutacions parells que són les de $\mathfrak{A}_4$ i 12 permutacions senars que són les que no pertanyen a $\mathfrak{A}_4$.

D'altra banda, la representació de $i \in I$ ve donada per:

$$\rho_i = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que té determinant -1. Aleshores I té un element de determinant 1, la identitat, i un element de determinant -1, i.

Considerem $G = S(T) \times I$, és a dir que els elements $g \in G$ és poden escriure de forma única com $g = st$ amb $s \in S(T)$ i $t \in I$. Llavors un element $g \in G$ serà de G_+ si els elements s i t de la descomposició $g = st$ tenen el mateix determinant. És a dir, $g \in G$ serà un element de G_+ si descompon $g = st$ d'una de les maneres següents.

- s i t tenen determinant 1, i per tant $s \in \mathfrak{A}_4$ i $t = 1 \in I$.
- s i t tenen determinant -1, i per tant $s \in \mathfrak{S}_4 \setminus \mathfrak{A}_4$ i $t = i \in I$.

És a dir, $G_+ = \{g \in G \mid g = st \text{ amb } \det(s) = \det(i)\}$ i $|G_+| = |\mathfrak{S}_4|$.

Una vegada determinats els elements de G_+, considerem la projecció p definida per:

$$\begin{array}{rccc} p: & G = S(T) \times I & \longrightarrow & S(T) \\ & st & \longmapsto & s. \end{array}$$

Restringint el domini, podem consideram l'aplicació $p|_{G_+}$ com la restricció de p sobre G_+. Serà un morfisme, ja que al ser una restricció de p és compleix que:

$$p|_{G_+}(gg') = p(gg') = ss' = p(g)p(g')$$

on $g, g' \in G$ amb $g = st$ i $g' = s't'$ les seves descomposicions en $S(T) \times I$. Ara bé, siguin $g, g' \in G_+$ tals que $p|_{G_+}(g) = p|_{G_+}(g')$, llavors si escrivim $g = st$ i $g' = s't$ tenim que $s = s'$. Aleshores, si s té determinant 1, llavors $t = t' = 1$; en cas que s tengui determinant -1, llavors $t = t' = i$, ja que $g, g' \in G_+$ i per tant en ambdós casos si $p|_{G_+}(g) = p|_{G_+}(g')$ llavors $g = g'$, el que demostra que $p|_{G_+}$ és injectiva. Finalment, com que hem vist que $|G_+| = |\mathfrak{S}_4|$ i tenim un morfisme injectiu de G_+ a $\mathfrak{S}_4$, concloem que $p|_{G_+}$ és un isomorfisme de G_+ a $\mathfrak{S}_4$ i per tant $G_+ \cong \mathfrak{S}_4$. $\square$

CAPÍTOL 7

CONCLUSIONS

Al llarg d'aquest treball, hem presentat les representacions lineals de grups juntament amb un recull de resultats de la teoria de caràcters que ens permeten calcular les diferents representacions d'un grup. A més, com dèiem al capítol 1, la introducció, hem vist alguns exemples de calcular aquestes representacions de determinats grups així com alguns resultats extres obtinguts dels exercicis.

Al segon capítol, hem introduït l'idea de representació, juntament amb alguns exemples bàsics d'aquestes. A més, hem vist algunes operacions entre representacions com la suma directa de representacions i el producte tensorial de representacions. Tal vegada el resultat més important és que tota representació és suma directa de representacions irreductibles.

Al tercer capítol, tal vegada el més dens de tots pel nivell d'abstracció que conté, hem introduït la idea de caràcter d'una representació, juntament amb un llarg recull de resultats i propietats de la teoria de caràcters. Aquest capítol ha estat molt important ja que hem vist que el caràcter d'una representació te determina la representació. Hem vist que dues representacions amb el mateix caràcter són isomorfes, i hem donat uns quants de resultats per al calcul de caràcters irreductibles. Per acabar, hem vist com calcular la descomposició canònica i la descomposició explicita d'una representació.

Al quart capítol, hem estudiat petits detalls dels grups abelians, i hem afegit algunes relacions entre representacions de grups finits com les representacions induïdes. On hem demostrat la seva utilitat mitjançant la resolució d'alguns exercicis que hem adjuntat al final del capítol.

Al cinquè capítol, hem fet una petita introducció als grups topològics i com estendre els resultats dels capítols 1,2 i 3 a grups compactes no necessàriament finits. Aquest capítol, ha quedat una mica al marge degut al distanciament amb la resta de capítols i els coneixements previs que feia falt adquirir. En un futur, seria interessant estudiar aquest tipus de representacions més a fons i veure dins a quin punt s'assemblen a les representacions de grups finits estudiades.

Per acabar, al sisè capítol, hem fet alguns exemples dels càlculs de caràcters irreductibles d'alguns grups determinats com $\mathfrak{S}_3$ o $\mathfrak{A}_4$ i d'altres d'una forma més general com el grup C_n o D_n. A més, hem resolt alguns exercicis on hem utilitzat aquestes representacions i caràcters irreductibles per determinar propietats que a primera vista no tenen a veure amb representacions,però en les quals les representacions ens han estat útils. Aquest fet, ens demostra un poc la raó per la que la teoria de caràcters i la teoria de representació es pot trobar en ciències com la física, la química o la química quàntica, etc.

Bibliografia

[1] J.-P. Serre, *Linear Representation of Finite Groups.* Springer-Verlag, 1977. 1

[2] H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics.* Dover Publications, 1931. 1

[3] L. Loomis, *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis.* Van Nostrand, 1953. 1

[4] J. Walter, G. Kimball i H. Eyring, *Quantum Chemistry*. John Wiley and Sons, 1944. 1, 6.3.1, 17