Universitat de les Illes Balears

escola politècnica superior

Treball Final de Grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Introducción al análisis convexo y los problemas variacionales

ALEJANDRO MUS MEJÍAS

Tutor
Manuel González Hidalgo

Escola Politècnica Superior
Universitat de les Illes Balears
Palma, 22 de mayo de 2017

Ante todo quisiera expresar mi más sincera gratitud a mi tutor el Dr. Manuel González por su ayuda, paciencia, motivación, entusiasmo e infinitud de correcciones y sugerencias. No puedo imaginar un mejor tutor y mentor para este trabajo. Agradezco también a mi familia el que siempre estén a mi lado y su apoyo incondicional a lo largo de la carrera y a María Modol y a la fundación DASYC por su ayuda en la impresión y presentación de este trabajo.

ÍNDICE GENERAL

Índice general iii

Prefacio v

1 Introducción 1

2 Funciones convexas 3
- 2.1 Orientación . . . 3
- 2.2 Funciones convexas . . . 3
  - 2.2.1 Definiciones y caracterizaciones . . . 3
  - 2.2.2 Funciones semicontinuas inferiormente . . . 7
  - 2.2.3 Continuidad de las funciones convexas . . . 11
- 2.3 Supremo puntual de una función afín continua . . . 16
  - 2.3.1 Definición de $\Gamma(V)$ . . . 16
  - 2.3.2 Γ-regularización . . . 18
- 2.4 Función polar . . . 21
  - 2.4.1 Definición de la función polar . . . 21
  - 2.4.2 Interpretación geométrica . . . 22
  - 2.4.3 Algunas propiedades . . . 23
  - 2.4.4 Función Bipolar . . . 24
- 2.5 Subdiferenciabilidad . . . 26
  - 2.5.1 Cálculo de la polar de F a partir de la subdiferencial . . . 29
- 2.6 Gâteaux diferenciabilidad . . . 32

3 Minimización de Funciones convexas y desigualdades variacionales 37
- 3.1 Orientación . . . 37
- 3.2 Un resultado sobre la existencia . . . 37
- 3.3 Caracterización de las soluciones . . . 40
- 3.4 Estudio de algunas desigualdades variacionales . . . 43
  - 3.4.1 Demostración del teorema de existencia de soluciones . . . 43

4 Dualidad en la optimización convexa 51
- 4.1 Orientación . . . 51
- 4.2 El problema primario y el problema dual . . . 51

4.2.1 Problemas con perturbaciones 52
4.2.2 El problema dual respecto a las perturbaciones dadas 53
4.2.3 Reiteración de la dualidad 54
4.3 Problemas normales y problemas estables 55
4.4 Lagrangianos y puntos de silla 60

5 Aplicaciones de la dualidad al cálculo de variaciones 65
5.1 Orientación 65
5.2 El problema de Dirichlet 65
5.3 El problema de la torsión elasto-plástico 68

A Conceptos necesarios de topología y de espacios duales 71

B Casos Imporantes de la dualidad en la optimización convexa I 77

C Casos Imporantes de la dualidad en la optimización convexa II: Teorema de Kuhn-Tucker 81

D Espacios Sobolev 89

E Conjugada de una función par 91

F Ejemplo de un problema de programación lineal y no lineal usando Python 93

G Errores encontrados 101

Bibliografía 103

Índice alfabético 105

PREFACIO

En los últimos años el concepto de convexidad ha adquirido gran importancia para el estudio de los máximos y mínimos de funciones en la mayoría de las áreas de la matemática aplicada. El objeto de este trabajo es presentar algunos resultados del análisis convexo enfocados a la optimización de funcionales. Además se culminará dicho trabajo con algunos ejemplos de la aplicación de la teoría vista previamente.

La memoria se divide en cuatro capítulos:

(1.) El primer capítulo es una pequeña introducción y motivación del resto del trabajo.

(2.) El segundo es la base del análisis convexo. Se estudian las propiedades topológicas de las funciones convexas, empezando por la definición de las mismas hasta su Gâteaux diferenciabilidad, pasando por la función polar, la Γ-regularización y el concepto de función semicontinua inferiormente.
La bibliografía principal utilizada a lo largo de este primer capítulo ha sido [1], [2], [3], [4], [5], [6] y [7].

(3.) El tercero capítulo trata sobre la minimización de funciones convexas. Cuándo existe solución al problema de minimización de una función convexa y bajo qué hipótesis este mínimo es único. Además, con la teoría dada, resolveremos algunas desigualdades variacionales.
Para hacer dicho capítulo se han seguido los libros [1] y [8].

(4.) El cuarto trata sobre el problema dual. Se define dicho problema y se estudia las relación entre las soluciones del problema primario y su dual. También se introducirá el concepto de función de Lagrange o Lagrangiano y los puntos de silla.
Para este se han consultado [1], [9], [10], [11], [5], [12] y [7].

(5.) Finalmente, en el último capítulo utilizaremos la teoría anterior para resolver los problemas de Dirichlet y de la torsión elasto-plástica utilizando el análisis convexo y la optimización.
La bibliografía ha sido [1], [13], [14], [15] y [7].

Como se observa en la bibliografía[1] dada, para la realización de este trabajo se ha seguido el esquema del libro [1]. No obstante, previamente a la lectura de dicho libro se ha estudiado

[1] La bibliografía especificada ha sido la principal, no obstante se ha seguido más que aparecerá citada donde corresponda.

la teoría de análisis funcional utilizando complementariamente [16], [17], [18], [19].

Mi aventura en el análisis convexo empezó en verano del 2016. Como se verá a a lo largo de la memoria, se necesita una base muy fuerte y muy sólida de conceptos de análisis funcional, materia que no se ve en el grado. Por ello debí leer, estudiar y entender análisis funcional antes de poder empezar a trabajar en el libro. Mis fuentes de aprendizaje fueron, en primer lugar, [19], y complementariamente [16], [18] y [17].

Una vez adquirí una base, la suficiente al menos, comencé a leer [1]. Este libro era muy avanzado y daba por supuestos muchos conceptos (de cálculo variacional o análisis no diferenciable por ejemplo) que necesité complementar con otras lecturas tales como [2], [3] y [4] entre otros, que irán apareciendo citados allí donde los necesité.

Cuando los conceptos ya no me bailaban tanto (o eso creía) me dediqué a escribir las demostraciones que en esta memoria aparecen. Mi trabajo sobre ellas ha sido hacer las demostraciones que los autores dejaban por triviales, obvias o sencillas (y no lo eran en absoluto) y a descomprimir las que sí hacían. Todas las demostraciones de esta memoria están descomprimidas, no hay ninguna que sea literalmente la misma que uno puede encontrar en los libros de la bibliografía, pues siempre he especificado todos los cálculos que no estaban hechos, he justificado con teoremas las implicaciones que no lo estaban, he corregido las incorrecciones que he encontrado en ellas (ver apéndice G) y las he completado usando otros libros y artículos (que en tal caso, estarán citados). También, por temas de comprensión, he utilizado definiciones diferentes a las que el libro utiliza y con teoremas de equivalencias he dado finalmente la que aparecen en el libro. Además he añadido ejemplos, tantos inventados por mí como de ejercicios propuestos que he encontrado en otros libros y los he resuelto. También he incluido gráficas (que el libro no tiene ninguna) bien hechas por un *script* mio, que puede encontrarse en el apéndice F, o bien de otros libros (y teniendo que adaptar la notación que utilizan a aquella que utilizo yo).

Otro punto en mi trabajo ha sido homogeneizar las notaciones de las diferentes referencias utilizadas. El libro seguido de guía es antiguo y en consecuencia tiene notación ya en desuso. Se ha tenido que revisar y actualizar dicha notación.
Finalmente, basándome en los conocimientos adquiridos en la asignatura de Métodos Numéricos II, he tenido que implementar un método (diferencias centradas) para resolver mediante un algoritmo problemas de optimización no lineal (ver apéndice F).

Como ya he comentado antes, adquirir la base de análisis funcional no ha sido sencillo en absoluto. Los espacios Banach, Hilbert, L^p y Sobolev al igual que sus duales, la topología débil, débil-* y los cuatro pilares básicos del análisis funcional -teorema de Hanh-Banach, Teorema de la categoria de Baire, Teorema de Banach-Steinhaus y el Teorema de la aplicación abierta- no se ven durante el grado y tener que estudiarlos me resultó difícil (imposible si no hubiera sido por la inestimable ayuda de mi tutor). Pero eso sólo fue el principio, las herramientas básicas. Más tarde aparecieron los conceptos de función semicontinua inferiormente, diferencial Gâteaux, subdiferencial... que complicaron más el TFG y me costó días incluso semanas poder entenderlos bien.

En cuanto al cálculo variacional también me resultó difícil, pues todo, absolutamente todo,

fue nuevo.

Otro punto complicado ha sido saber cómo plasmar en papel lo que he entendido intuitivamente o geométricamente. A veces he pecado de saltarme pasos de demostraciones creyendo que eran evidentes (y lo son después de trabajar la misma demostración durante varios días) pero redactarlos de forma que el lector lo entienda linealmente ha sido muy difícil.

En resumen, casi todos los conceptos que se han trabajado han sido nuevos y he tenido que adquirir una base previa bastante ardua para poder entenderlos.

Este trabajo me ha sido muy útil. He encontrado mi pasión y mi motivación en las matemáticas.

He aprendido análisis funcional, a ser autodidacta y saber encontrar las respuestas que uno busca. Sobre todo he aprendido lo difícil que es escribir un trabajo como este, lo riguroso que se ha de ser en la notación que debe ser coherente desde la primera página del resumen hasta la última página del último apéndice. Agradezco a mi tutor su ayuda y sus enseñanzas en el arte de escribir correctamente un texto matemático de nivel elevado.

A la hora de hacer una valoración personal sobre el interés que me ha suscitado el trabajo, tengo que decir que me ha gustado todo, pero especialmente el tema cuarto: **Dualidad en la optimización convexa**. Destaco sobretodo su utilidad en muchas aplicaciones y sus resultados de enunciados claros y sencillos pero de consecuencias muy relevantes. Creo que la frase del matemático **G.Pólya**[2] describe perfectamente este capítulo:

"La elegancia de los teoremas es directamente proporcional al número de ideas que en ellos vemos, e inversamente proporcional al esfuerzo requerido para comprenderlas."

[2] Extraída de http://www.uv.es/~teamar3/citas.htm.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas más importantes de la vida real es maximizar o minimizar funciones sujetas a ciertas restricciones. Por ejemplo, a partir de 1990 se han descubierto muchísimas aplicaciones donde la necesidad de encontrar máximos y mínimos, bien relativos o bien absolutos, ha hecho que la optimización sea aplicada a áreas tan diferentes como puedan ser sistemas de control, resolución de EDP's (ver capítulo 5), procesamiento de señales, teoría de juegos, redes, análisis de datos y "big data", estadística, finanzas, entre otras.

Matemáticamente el problema es el siguiente:

Dados V un espacio vectorial topológico, $\mathscr{A}$ subconjunto suyo y $F : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ buscamos encontrar una solución al problema

$$(\mathscr{P}) \qquad \inf_{u \in \mathscr{A}} \quad F(u). \tag{1.1}$$

Sea $\bar{u}$ una solución local a dicho problema. Sabemos que si $\bar{u} \in \mathring{\mathscr{A}}$ y F es diferenciable en $\bar{u}$ -en algún sentido de diferenciabilidad-, entonces $\bar{u}$ satisface la *regla de Fermat*,

$$F'(\bar{u}) = \vec{0},$$

la cual es una condición necesaria de optimalidad. En el caso que $\bar{u} \notin \mathring{\mathscr{A}}$ pero F sigue siendo diferenciable en $\bar{u}$, entonces una condición necesaria de optimalidad, siendo $\mathscr{A}$ convexo, se sigue satisfaciendo y es conocida como *desigualdad variacional* (que es otro de los objetivos de este trabajo (ver capítulo 3)) que viene dada por

$$\left\langle u - \bar{u}, F'(\bar{u}) \right\rangle \geq 0, \text{ para algún } u \in \mathscr{A}.$$

Sin embargo, la condición de diferenciabilidad de F en $\bar{u}$ no es intrínseca del problema de minimización $\mathscr{P}$.

Por ejemplo, supongamos que $V = \mathscr{C}([a,b])$ y $G : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Sea

$$F(G) = \left\| G - H \right\|_\infty,$$

para una función $H \in \mathscr{C}([a,b]) \setminus \mathscr{A}$ fijada. En este caso, el funcional no es Gâteaux diferenciable (ver sección correspondiente del capítulo 2) en "muchos" puntos, en consecuencia no podemos aplicar la regla de Fermat para encontrar un mínimo de F [1].
No obstante, si F es convexa y no diferenciable, un substituto adecuado para el concepto de diferenciabilidad es un *subgradiente*, que definiremos al final del primer capítulo. Pero podemos adelantar aquí que un subgradiente de F en $\bar{u}$ es un funcional lineal continuo $u^* \in V'$ que satisface

$$\left\langle v - \bar{u}, u^* \right\rangle \leq F(v) - F(\bar{u}), \ \forall v \in V.$$

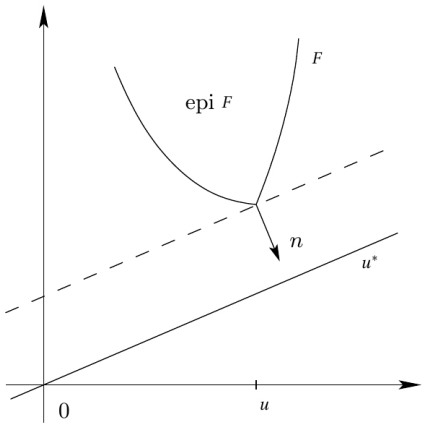

Figura 1.1: Imágen extraída de [2]. Ejemplo de un subgradiente de una función F en un punto u.

Geométricamente significa que la función afín "paralela" $g(u) = \langle v - \bar{u}, u^* \rangle + F(\bar{u})$ satisface que $g(v) \leq F(v)$ para cualquier $v \in V$ y $g(\bar{u}) = F(\bar{u})$. Normalmente una función admite varios subgradiente (si es que admite alguno) en los puntos de no diferenciabilidad. El conjuntos de los subgradientes de F en un punto $\bar{u}$ se llama el *subdiferencial* y se denota por $\partial F(\bar{u})$.

Rockafellar [3] y Moreau [12] desarrollaron el estudio formal de la teoría de conjuntos convexos y funciones convexas, incluyendo las condiciones de optimalidad a partir de subdiferenciales. Esta teoría es conocida como *análisis convexo*. Introduciremos también, en el capítulo 4, el problema dual de $\mathscr{P}$ que está íntimamente relacionado con la *función polar*. Saber qué relación hay entre la solución del problema primario y el dual es inherente al análisis convexo.

Los problemas de optimización no convexa no serán estudiados en este trabajo, puesto que su dificultad es considerablemente mayor.

[1] A este problema se le conoce como *Problema de aproximación de Chebyshev*.

CAPÍTULO 2

FUNCIONES CONVEXAS

2.1 Orientación

En este primer capítulo nos centraremos en las herramientas básicas del análisis convexo. Estudiaremos las funciones convexas y algunas de sus caracterizaciones, las funciones semicontinuas inferiormente, la función polar (pilar esencial para el problema dual) y la subdiferenciabilidad de funciones convexas.
Se supone conocimientos de análisis funcional y de espacios vectoriales topológicos. Todos los espacios vectoriales considerados son reales.

2.2 Funciones convexas

2.2.1 Definiciones y caracterizaciones

Durante esta sección nos referiremos a V como un espacio vectorial topológico.

El espacio vectorial V' definido como el conjunto de funciones continuas cuyo dominio es V y codominio es $\mathbb{R}$ es el llamado *dual topológico* de V, o sencillamente, el dual de V. Los elementos de V' se denotarán por u^*, $v^*, \cdots$ y serán llamados *funcionales*. La aplicación $(u, u^*) \to \langle u, u^* \rangle$ es una forma bilineal sobre $V \times V'$ que puede ser considerada tanto como $u(u^*)$ como $u^*(u)$. Además, el vector u^* de V' esta identificado por la función $u \to \langle u, u^* \rangle$, así como el elemento $u \in V$ queda identificado por la aplicación $u^* \to \langle u, u^* \rangle$. Podemos introducir en V' (respectivamente en V) la topología de convergencia débil sobre V (respectivamente V'). Esta topología se le llamará *topología débil* de V' (respectivamente de V) asociada a la dualidad entre V y V' y será denotada por $\sigma\left(V', V\right)$ (respectivamente $\sigma\left(V, V'\right)$). Para más detalles ver el apéndice A.

Definición 2.1 (Función convexa)**.** *Sea $\mathscr{A}$ un subespacio convexo de V y $F:\mathscr{A}\to\overline{\mathbb{R}}$ una función. Se dice que F es una función convexa si, y sólo si,*

$$F(\lambda u+(1-\lambda)v)\leq \lambda F(u)+(1-\lambda)F(v),\ \forall u,v\in\mathscr{A},\ \lambda\in[0,1], \tag{2.1}$$

siempre y cuando el término de la derecha esté bien definido. Además, diremos que una función F es cóncava si $-F$ es una función convexa.

Observación 1.

- La desigualdad (2.1) debe ser valida siempre a menos que $F(u)=-F(v)=+\infty$ o $-\infty$.
- Para una familia finita de puntos pertenecientes a V , la definición de convexidad se generaliza como
$$F\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i F(u_i),$$
siempre que $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$.
- Toda transformación afín continua (y en consecuencia, toda función lineal) es siempre convexa y cóncava, dado que (2.1) es una igualdad. Además, toda función convexa y cóncava a la vez, es una transformación afín continua.

Es natural preguntarnos por qué F tiene por codominio $\overline{\mathbb{R}}$. Veamos unos ejemplos de la utilidad de esta suposición.

1. Sea $F:\mathscr{A}\to\overline{\mathbb{R}}$; podemos extender F mediante la función
$$\tilde{F}(u)=\begin{cases}F(u), & u\in\mathscr{A},\\ +\infty, & u\notin\mathscr{A}.\end{cases} \tag{2.2}$$
Inmediatamente se deduce que $\tilde{F}$ es convexa si, y sólo si, $\mathscr{A}$ es convexo y F es función convexa.
2. En análisis convexo, la función indicatriz $\mathscr{I}$ de un conjunto $\mathscr{A}$ se define como
$$\mathscr{I}_{\mathscr{A}}(u)=\begin{cases}0, & u\in\mathscr{A},\\ +\infty, & u\notin\mathscr{A}.\end{cases} \tag{2.3}$$
Evidentemente $\mathscr{A}$ es convexo sii $\mathscr{I}_{\mathscr{A}}$ es función convexa.

Presentemos algunas funciones convexas y cóncavas.

Ejemplo 2.2.1. *1. La función log-sum-exp, definida como*

$$\begin{aligned}F:\ \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}\\ u &\longrightarrow \log\left(e^{u_1}+\ldots+e^{u_n}\right).\end{aligned}$$

es convexa.

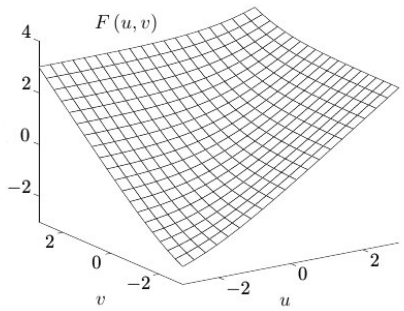

Figura 2.1: Imágen extraída de [6]. Ejemplo de la función log-sum-exp en $\mathbb{R}^3$.

2. *Cualquier norma en* $\mathbb{R}^n$ *es convexa.*

3. *La media geométrica,*

$$F:\ \mathbb{R}^n_{++} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \longrightarrow \left(\prod_{i=1}^{n} u_i\right)^{1/n},$$

es función cóncava.

La demostración de la convexidad de estas funciones y más ejemplos pueden encontrarse en [6].

De forma natural, a través de (2.2) tenemos siguiente definición.

Definición 2.2 (Dominio efectivo)**.** *Dada una función* $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *el conjunto*

$$Dom\ F = \{u |\ F(u) < +\infty\},$$

recibe el nombre de dominio efectivo de F[1].

Otro elemento fundamental en el análisis convexo es el *epígrafo* de una función. Gracias a él, podremos obtener una caracterización de las funciones convexas.

Definición 2.3 (Epígrafo de una función)**.** *Dada una función* $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ *. Al conjunto*

$$epi\ F = \{(u, a) \in V \times \mathbb{R} :\ F(u) \leq a\},$$

se le llama el epígrafo de F*.*

Observación 2. Es conveniente tener en cuenta que:

- epi F es un subconjunto de $V \times \mathbb{R}$ y no de $V \times \overline{\mathbb{R}}$.

[1] Obviamente si F es convexa, Dom F es un conjunto convexo.

- La proyección de epi F sobre V no es más que Dom F.

Proposición 2.4. *Una función $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ es convexa si, y sólo si, epi F es convexo.*

Demostración. ($\Longrightarrow$): Consideremos los elementos $(u,a),(v,b)$ pertenecientes al epi F y $\lambda \in [0,1]$.
Queremos demostrar que $\lambda(u,a)+(1-\lambda)(v,b) \in$ epi F . En efecto,

$$\lambda(u,a)+(1-\lambda)(v,b) = (\lambda u+(1-\lambda)v, \lambda a+(1-\lambda)b),$$

entonces,

$$F(\lambda u+(1-\lambda)v) \overset{\text{F convexa}}{\leq} \lambda F(u)+(1-\lambda)F(v) \leq \lambda a+(1-\lambda)b.$$

En consecuencia $(\lambda u+(1-\lambda)v, \lambda a+(1-\lambda)b) \in$ epi F.
($\Longleftarrow$):

- Sean $u, v \in$ Dom F ; entonces existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $F(u) \leq a$ y $F(v) \leq b$; de forma que $(u,a),(v,b)$ son claramente de epi F . Consideremos $\lambda \in [0,1]$. Como el epígrafo es convexo, $\lambda(u,a)+(1-\lambda)(v,b) \in$ epi F , dicho de otra manera, $(\lambda u+(1-\lambda)v, \lambda a+(1-\lambda)b) \in$ epi F . Por tanto,

  $$F(\lambda u+(1-\lambda)v) \leq \lambda a+(1-\lambda)b.$$

  Si $F(u)$ y $F(v)$ son finitos basta tomar $a = F(u)$ y $b = F(v)$.
  Supongamos que $F(u) = -\infty$ y $F(v) \in \mathbb{R}$. Entonces, $(u,a) \in$ epi F $\forall a \in \mathbb{R}$ y existe un $b \in \mathbb{R}$ tal que $F(v) = b$ y por tanto $(u,b) \in$ epi F.
  Como epi F es un convexo

  $$(\lambda u+(1-\lambda)v, \lambda a+(1-\lambda)b) \in \text{epi } F,\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

  De donde,

  $$F(\lambda u+(1-\lambda)v) \leq \lambda a+(1-\lambda)b,\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

  Haciendo tender $a \to -\infty$ deducimos que,

  $$F(\lambda u+(1-\lambda)v) = -\infty.$$

- Si u o $v \notin$ Dom F entonces $F(u)$ o $F(v)$ es $+\infty$ y la desigualdad es inmediata.

En definitiva, F es convexa. □

Como caso particular de este teorema tenemos que si F es una función convexa, su dominio efectivo es un conjunto convexo.

Para finalizar esta subsección definiremos un último concepto.

Definición 2.5 (Función estrictamente convexa)**.** *Sea $\mathscr{A} \subseteq V$ un subespacio convexo y $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$.*
F es una función estrictamente convexa siempre y cuando la desigualdad (2.1) sea estricta y se cumpla $\forall u, v \in V,\ u \neq v,\ \lambda \in (0,1)$. Además, diremos que F es estrictamente cóncava, si $-F$ es estrictamente convexa.

Además, observemos que no toda función convexa es continua, por ejemplo la función $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(u) = \begin{cases} 0, & u \in (0,1), \\ 1, & u = 0, 1, \end{cases}$$

es convexa pero no es continua en $0, 1$.

Un aspecto importante del análisis convexo es estudiar bajo qué condiciones una función convexa es continua. Esta relación es la motivación para introducir las funciones semicontinuas inferiormente, que tienen una importancia fundamental en el análisis convexo.

2.2.2 Funciones semicontinuas inferiormente

Hasta que se indique lo contrario, V será ahora un espacio vectorial topológico real y localmente convexo -en adelante, V un lcs.

Definición 2.6 (Límite inferior de un funcional[2] y límite superior)**.** *Sea (V, τ) un espacio vectorial topológico y u vector de V y $\mathscr{N}_u(\tau)$ la base de entornos de u con respecto a τ.*
*Dada $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$; se define el **límite inferior de** F **en** u como,*

$$\liminf_{v \to u} F(v) = \sup_{N \in \mathscr{N}_u(\tau)} \inf_{v \in N} F(v).$$

*Análogamente, dada $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$; se define el **límite superior de** F **en** u como,*

$$\limsup_{v \to u} F(v) = \inf_{N \in \mathscr{N}_u(\tau)} \sup_{v \in N} F(v).$$

Con la noción de límite inferior en un espacio vectorial cualquiera -no necesariamente métrico o metrizable- estamos en condiciones de dar la siguiente definición.

Definición 2.7 (Función semicontinua inferiormente)**.** *Sea V un lcs. Diremos que $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ es **semicontinua inferiormente** (y lo denotaremos por lsc, debido a "lower semicontinuous function") **en** u si,*

$$\forall c < F(u),\ \exists N_c \in \mathscr{N}_u(\tau) :\ \forall v \in N_c,\ F(v) > c.$$

Si para todo punto de Dom F la función es lsc, entonces llamaremos a F función semicontinua inferiormente.

[2] La siguiente definición se puede encontrar en [7]

Observación 3. Por convenio diremos que la función $F(u) = -\infty,\ \forall u \in V$ (o más abreviadamente, $F \equiv -\infty$) es también lsc.

La propiedad de ser función semicontinua es más débil, menos restrictiva, que la condición de continuidad de una función.

El siguiente resultado junto a su demostración ha sido extraída de [7].

Teorema 2.8. *Dada $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1.) *F es lsc en V.*

(2.) *epi F es cerrado en $V \times \mathbb{R}$.*

(3.) *$\forall c \in \mathbb{R}$, el conjunto de subnivel c de F, $S_c^F = \{u \in V :\ F(u) \leq c\}$ es un cerrado.*

(4.) *$\forall c \in \mathbb{R}, V \setminus S_c^F$ es un abierto.*

(5.) *$\forall u \in V, F(u) \leq \liminf_{v \to u} F(v)$.*

Demostración.

- (1.) $\Rightarrow$ (2.): Sea $(u,a) \notin$ epi F. Tomemos $a < \gamma < F(u)$.
  Por (1.), existe $N_\gamma \in \mathscr{N}_u$ de manera que, $\forall v \in N_\gamma, F(v) > \gamma$, i.e., que para cualquier v de N_γ, el par (v,γ) no es del epígrafo de F. Por tanto, el abierto $N_\gamma \times (-\infty,\gamma)$ satisface que
  $$[N_\gamma \times (-\infty,\gamma)] \cap \text{epi } F = \emptyset.$$
  Como $N_\gamma \times (-\infty,\gamma) \in \mathscr{N}_{(u,a)}$, hemos encontrado un abierto que se interpone y por tanto $\mathbb{R} \setminus$ epi F es abierto, con lo que epi F es cerrado.

- (2.) $\Rightarrow$ (3.): En primer lugar notemos que
  $$S_c^F \times \{c\} = \text{epi } F \cap (V \times \{c\}).$$
  Efectivamente; sea $(u,c) \in S_c^F \times \{c\}$ entonces $(u,c) \in$ epi F porque $F(u) \leq c$ y claramente $(u,c) \in V \times \{c\}$. Por otro lado, si $(u,c) \in$ epi $F \cap (V \times \{c\})$ tenemos que:

  1. $(u,c) \in$ epi F en consecuencia $F(u) \leq c$.
  2. $(u,c) \in V \times \{c\}$,

  de manera que $(u,c) \in S_c^F \times \{c\}$. Demostrado esto, podemos deducir que $S_c^F \times \{c\}$ es cerrado en $V \times \mathbb{R}$, dado que es intersección de dos cerrados (el epi F es cerrado por (2.)). De manera que S_c^F es un cerrado en V.

- (3.) $\Rightarrow$ (4.): Evidente.

- (4.) $\Rightarrow$ (5.): Sea $u \in V$. Dado $\gamma < F(u)$ tenemos que $V \setminus S_\gamma^F \in \mathscr{N}_u$ por ser un abierto que contiene a u (de (4.)). De este modo, $\gamma \leq \inf_{v \in N} F(v)$, en particular $\gamma \leq \sup_{N \in \mathscr{N}_u} \inf_{v \in N} F(v)$ y como se cumple para cualquier v, tenemos probado el resultado.

- (5.) $\Rightarrow$ (1.): Sea $\gamma < F(u)$. Como $\gamma < \sup_{N\in\mathcal{N}_u} \inf_{v\in N} F(v)$, existe $N \in \mathcal{N}_u$ de manera que $\gamma < \inf_{v\in N} F(v)$ y por tanto $\gamma < F(v)$ para todo $v \in N$. Así podemos asegurar pues que F es lsc.

□

Observación 4. En particular, si (V,τ) es un espacio metrizable, podemos caracterizar las funciones lsc como

$$\forall u \in V,\ u_n \to u,\ F(u) \le \liminf_{n\to\infty} F(u_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\ge n} F(u_k).$$

Proposición 2.9. *Si $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ es continua, F es lsc.*

Demostración. Si F es continua,

$$F(u) = \lim_{v\to u} F(u) = \liminf_{v\to u} F(u) = \limsup_{v\to u} F(u),$$

y por tanto es lsc. □

El siguiente lema (ver [1]) será de utilidad en lo que sigue.

Lema 2.10. *Si F es una función y epi F su epígrafo, entonces $\overline{\text{epi } F}$ es también un epígrafo.*

Demostración. Si $(u,a) \in \overline{\text{epi } F}$, existe un filtro $(u_\alpha, a_\alpha) \in \text{epi } F$ que converge a (u,a).
Si $b > a$ entonces para algún α , $a_\alpha \le b$ y como $F(u_\alpha) \le a_\alpha$ por ser del epígrafo, se sigue que (u_α, b) también pertenece a epi F, y en límite (cuando $u_\alpha \to u$) se cumple $(u,b) \in \text{epi } F$.
Ahora bien, notemos que si intersecamos epi F con la vertical $\{u\} \times \mathbb{R}$, el resultado es o bien el conjunto vacío o bien un intervalo de la forma $[a, +\infty)$ (claramente,o bien la recta pasa por una discontinuidad de F que no tendrá epígrafo en dicha discontinuidad, o bien se cortan en al menos un punto y la intersección ya no es vacía); consideremos $G(u) = +\infty$, si la intersección es vacía y $G(u) = a$ en caso contrario. Por tanto, se tiene que $\overline{\text{epi } F} = \text{epi } G$. □

Es importante observar que el supremo puntual de funciones semicontinuas inferiormente, es también una función semicontinua inferiormente. En efecto, consideremos $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Omega}$ una familia de funciones lsc.
Sea $F(u) = \sup_{\lambda\in\Omega} F_\lambda(u)$. Queremos demostrar que también lsc.
Por el teorema 2.8 sabemos que

$$\forall u \in V,\ F_\lambda(u) \le \liminf_{v\to u} F_\lambda(v).$$

Entonces, aplicando supremos a cada miembro de la desigualdad se tiene

$$F(u) = \sup F_\lambda(u) \le \sup \liminf_{v\to u} F_\lambda(v) = \liminf_{v\to u} \sup F_\lambda(v).$$

Este hecho motiva la siguiente definición.

Definición 2.11 (lsc-regularización)**.** *Para cada función $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ llamaremos lsc-regularización de F, y la denotaremos por $\overline{F}$, a la función*

$$\overline{F}(u) = \sup_{\lambda \in \Lambda} \{F_\lambda(u) : \ F_\lambda \text{ es lsc y } F_\lambda \leq F\}.$$

Observación 5. Otra manera de expresar $\overline{F}$ es como la más grande de las funciones lsc minorantes[3] de F.

Proposición 2.12. *Sea $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ y $\overline{F}$ su lsc-regularización; entonces*

$$epi\, \overline{F} = \overline{epi\, F}. \tag{2.4}$$

Demostración. Dado que $\overline{F}$ es menor que F por definición de lsc-regularización, epi $\overline{F}$ es un cerrado ($\overline{F}$ es lsc y aplicamos el teorema 2.8) que contiene a epi F y por tanto, contiene a $\overline{\text{epi } F}$. Dicho de otro modo, $\overline{\text{epi } F} \subseteq \text{epi } \overline{F}$.

Para la otra inclusión, sea G función tal que epi $G = \overline{\text{epi } F}$. Podemos asegurar la existencia de G debido al lema 2.10 , que nos asegura que $\overline{\text{epi } F}$ es el epígrafo de alguna función.
Por el teorema 2.8 G es una función lsc, dado que $\overline{\text{epi } F}$ es un epígrafo y además es cerrado.
Por otra parte, como epi $G = \overline{\text{epi } F}$ entonces epi $F \subseteq$ epi G , luego $G \leq F$[4] Por ello, $G \leq \overline{F}$ y en consecuencia, epi $F \subseteq$ epi $\overline{F} \subseteq$ epi $\overline{F} \subseteq \overline{\text{epi } F} =$ epi G.
Observemos que $\overline{\text{epi } \overline{F}} \subseteq \overline{\text{epi } F}$ es cierto. Basta hacer clausuras en la inclusión epi $\overline{F} \subseteq \overline{\text{epi } F}$, por ser la clausura de $\overline{\text{epi } F}$ este mismo conjunto. □

El caso de las funciones convexas tiene un especial interés, pues la propiedad de ser semicontinua inferiormente se conserva aunque la topología de V sea su topología débil. Ello se resume en el siguiente resultado.

Teorema 2.13. *Toda función, $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$, convexa y lsc continúa siendo lsc cuando la topología de V es su topología débil $\sigma(V, V')$.*

Demostración. La demostración es inmediata a partir del teorema de Hahn-Banach, puesto que cualquier fuertemente cerrado en $V \times \mathbb{R}$ convexo, es también débilmente cerrado. Por tanto, como el epígrafo de una lsc es cerrado y además es convexo por ser F convexa, en la topología débil también lo es y se mantiene dicha propiedad. □

[3] Dadas F, G funciones, se define G minorante de F si los valores de G no son mayores que los de F.
[4]

Proposición. $F \leq G \iff epi\, G \subseteq epi\, F$.

Demostración. ($\Longrightarrow$): Sea $(u, a) \in$ epi G. Entonces $G(u) \leq a$, pero, como $F \leq G$ se tiene que $F(u) \leq G(u) \leq a$ de donde $(u, a) \in$ epi G.
($\Longleftarrow$): Si $F(u) = -\infty$ es inmediato que $F(u) \leq G(u)$. Si $F(u) \in \mathbb{R}$ entonces $(u, F(u)) \in$ epi $F \Rightarrow (u, F(u)) \in$ epi G de donde, $G(u) \leq F(u)$. □

El caso de las funciones que toman el valor $-\infty$ es más especial.

Teorema 2.14. *Si $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función lsc y convexa de manera que para algún punto de su dominio se alcanza el valor $-\infty$, entonces F no puede tomar ningún valor finito.*

Demostración. Supongamos que $\exists \bar{u} \in V$ de tal manera que $F(\bar{u})$ es finito.
Consideremos $\bar{a} \in \mathbb{R}$ de forma que $\bar{a} < F(\bar{u})$ (notemos que $\bar{a}$ siempre existe, pues en caso contrario $F(\bar{u})$ sería $-\infty$).
Por el teorema de separación (versión geométrica) de Hahn-Banach, podemos separar estrictamente el conjunto $A = \{(\bar{u}, \bar{a}) : \ \bar{a} < F(\bar{u})\}$ de epi F que será cerrado y convexo por ser F lsc y convexa. Dicho de otro modo,

$$A \cap \text{epi } F = \emptyset.$$

Entonces existe un funcional lineal l y un $\alpha \in \mathbb{R}$ de manera que,

$$l(\bar{u}) + \alpha \bar{a} < l(u) + \alpha a, \ \forall (u, a) \in \text{epi } F. \tag{2.5}$$

Escogiendo $u = \bar{u}$ y $a = F(\bar{u})$ se tiene que, $(u, a) = (\bar{u}, \bar{a}) \in \text{epi } F$ $(F(\bar{u}) \leq F(\bar{u}))$ y

$$l(\bar{u}) + \alpha \bar{a} < l(u) + \alpha a = l(u) + \alpha F(\bar{u}) = l(\bar{u}) + \alpha F(\bar{u}).$$

Y por ende, $0 < \alpha [F(\bar{u}) - \bar{a}]$ con ello, $\alpha > 0$ $(F(\bar{u}) - \bar{a} > 0$ por ser de $A)$. Entonces, aplicando la linealidad de l y dividiendo por α la desigualdad (2.5) obtenemos,

$$\frac{1}{\alpha} l(\bar{u} - u) + \bar{a} < F(\bar{u}) = F(u),$$

que es imposible, porque el miembro de la izquierda es siempre finito mientras que el de la derecha tiene, al menos, un punto, cuyo valor es $-\infty$. □

2.2.3 Continuidad de las funciones convexas

Recordemos que una función convexa no tiene por que ser continua, pero la pregunta que intentaremos responder en esta subsección es bajo qué condiciones la convexidad de una función implica su continuidad.
La relación entre continuidad y convexidad está basada en el siguiente lema.

Lema 2.15. *Si $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ convexa está acotada superiormente por una constante finita en un entorno de un punto $u \in V$, entonces F es continua en u.*

Demostración. Observemos que podemos reducir el problema al caso $u = 0$, y $F(u) = 0$ dado que podemos aplicar una translación del vector al orígen.

Tenemos que demostrar que F es continua en el 0. Luego, dado $\varepsilon > 0$, trataremos de determinar un entorno de 0, tal que, para todo v de dicho entorno, se tiene que $|F(v) - F(0)| \leq \varepsilon$.
Consideremos $\mathscr{U}$ un entorno del origen. Sabemos que $\forall v \in \mathscr{U}$ la función está acotada por $a < +\infty$.

Definamos $\mathscr{V} = \mathscr{U} \cap -\mathscr{U}$. Observemos que $\mathscr{V}$ es un entorno simétrico[5] del origen.
Sea $\varepsilon \in (0,1)$. Si $v \in \varepsilon\mathscr{V}$; sabemos que $\dfrac{v}{\varepsilon} \in \mathscr{U}$, entonces $\varepsilon\dfrac{v}{\varepsilon} + (1-\varepsilon)\,0 \in \mathscr{U}$ y por ser F convexa.

$$F(v) \leq \varepsilon F(v/\varepsilon) + (1-\varepsilon)\,F(0) \overset{F(v)\leq a}{\leq} \varepsilon a.$$

Del mismo modo, $-\dfrac{v}{\varepsilon} \in \mathscr{U}$ y razonando de manera simétrica obtenemos,

$$F(v) \geq -\varepsilon F(-v/\varepsilon) + (1+\varepsilon)\,F(0) \overset{F(v)\leq a}{\geq} -\varepsilon a.$$

Entonces,

$$-\varepsilon a \leq F(v) \leq \varepsilon a \Longrightarrow \left|F(v)\right| \leq \varepsilon a,$$

para todo $v \in \varepsilon\mathscr{V}$ y con ello tenemos la continuidad. □

Presentemos el teorema más importante de esta sección, el que nos contestará a la pregunta realizada al inicio de la misma. Luego, a base de corolarios iremos estudiando diferentes e interesantes casos.

Teorema 2.16 (Continuidad de funciones convexas)**.** *Sea $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(1.) Existe un abierto $\mathscr{O} \neq \emptyset$ tal que $\exists u \in \mathscr{O}$: $F(u) \neq -\infty$ y está acotada superiormente por un número real finito a en $\mathscr{O}$.

(2.) F es una función propia[6] continua en el interior de su dominio efectivo, el cual no es vacío.

Demostración. (2.) ⇒ (1.): Consideremos $u \in \overbrace{\operatorname{Dom} F}$ arbitrario pero fijado (existe por ser $\operatorname{Dom} F \neq \emptyset$).
Como F es continua en el interior de su dominio, en particular F es continua en u. Esto quiere decir que existe una constante real finita a y un abierto $\mathscr{O}_a$ tal que $F(u) \neq -\infty$ (F propia) y que $\forall v \in \mathscr{O}_a$, $|F(u) - F(v)| \leq a$.
(1.) ⇒ (2.): Si se cumple (1.), entonces $\mathscr{O} \subseteq \operatorname{Dom} F$. Sea $u \in \mathscr{O}$ tal que $F(u) > -\infty$, que sabemos que existe porque (1.) nos lo asegura. Por el lema 2.15 y por la existencia de a que asegura la primera afirmación, F es continua en u por lo que deducimos que F es finita en un entorno de dicho punto, en consecuencia F es función propia.
Sea $v \in \overbrace{\operatorname{Dom} F}$, entonces $\exists \rho > 1$ tal que $w = u + \rho\,(v-u) \in \overbrace{\operatorname{Dom} F}$ y sea $k = 1 - \dfrac{1}{\rho}$.
Consideramos la homotecia[7] $h_{w,k}$ que transforma u en v y $\mathscr{O}$ en el abierto $h(\mathscr{O})$ que contiene

[5] Se dice que un entorno $\mathscr{U}$ es simétrico si $\forall a \in \mathscr{U}$, $-a \in \mathscr{U}$.
[6] Recordemos que una función es propia si $\operatorname{Dom} F \neq \emptyset$ y $F(u) > -\infty$ para todo $u \in \operatorname{Dom} F$
[7] Definimos una homotecia de centro C y razón k denotada como $h_{C,k}$ como la transformación afín $h_{C,k}(u) = ku + (1-k)\,C$

a v . Efectivamente,

$$h_{w,k}(u) = \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) u + \left(1 - 1 + \frac{1}{\rho}\right) w = u - \frac{u}{\rho} + \frac{w}{\rho} = v.$$

donde la última igualdad se deduce de la definición de w . Además $h(\mathscr{O})$ es abierto que contiene a v por ser h aplicación afín (y entonces abierta).
Para cada $v' \in h(\mathscr{O})$ tenemos por convexidad,

$$F(v') \leq \frac{\rho - 1}{\rho} \cdot F \circ h^{-1}(v') + \frac{1}{\rho} \cdot F(w) \leq \frac{\rho - 1}{\rho} \cdot a + \frac{1}{\rho} \cdot F(w).$$

Notemos que $h^{-1}(v') \in \mathscr{O}$, con lo que $F \circ h^{-1}(v') \leq a$ por estar F acotada en $\mathscr{O}$.
En resumen, cada $v \in \overset{\circ}{\overbrace{\text{Dom } F}}$ posee un entorno $h(\mathscr{O})$ donde F está acotada superiormente por una constante finita. Por el lema 2.15 nuevamente, F es continua en todo v , de donde F es continua en su dominio efectivo. □

Este resultado nos permite estudiar la continuidad de las funciones convexas en diferentes espacios vectoriales, tales como en espacios normados, espacios Banach o espacios de dimensión finita. En este sentido presentemos un corolario para espacios de dimensión finita.

Corolario 2.17. *Toda función propia convexa en un espacio de dimensión finita, es continua en el interior de su dominio efectivo.*

Demostración. Sea V espacio de dimensión n finita generado por los vectores linealmente independientes $\{u_1, \ldots, u_n\}$. Suponemos que $\overset{\circ}{\overbrace{\text{Dom } F}} \neq \emptyset$.
Sea $\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} F(u_i)$. Usando la definición de convexidad extendida a n puntos,

$$F\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F(u_i) \leq \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \alpha.$$

En consecuencia, F está acotada por una constante finita.
Consideremos el abierto en $\overset{\circ}{\overbrace{\text{Dom } F}}$,

$$\mathscr{O} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \mid \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \wedge \lambda_i > 0, \ \forall i = 1, \ldots n \right\}.$$

Por tanto, hemos encontrado un abierto, donde F no vale $-\infty$ por todo (F es propia) y está acotada superiormente por una constante finita. Aplicando el teorema 2.16 sobre $\mathscr{O}$, se deduce directamente el resultado. □

Consecuencia directa de este resultado es,

"Toda función convexa definida en $\mathbb{R}^n$ o en $\mathbb{C}^n$, es continua en el interior de su dominio efectivo".

Como ejemplo recordemos la función,

$$F : [0,1] \to \mathbb{R},$$

definida por

$$F(u) = \begin{cases} 0, & u \in (0,1), \\ 1, & u = 0,1. \end{cases}$$

En su momento ya observamos que es convexa pero no continua. Sin embargo, por el corolario anterior podemos asegurar que es continua en el interior de su dominio. Efectivamente, las discontinuidades de dicha función están en los puntos 0,1 que son de la frontera del dicho dominio.

Estudiemos ahora que pasa cuando el espacio vectorial es normado.

Corolario 2.18. *Sea V un espacio normado y $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa propia. Las siguiente afirmaciones son equivalentes.*

1. *$\exists \mathscr{O} \neq \emptyset$ abierto sobre el cual F está acotada superiormente.*
2. *$\overbrace{Dom\, F}^{\circ} \neq \emptyset$ y F es localmente Lipschitz en $\overbrace{Dom\, F}^{\circ}$.*

Demostración. (2.) $\Rightarrow$ (1.) Sea $\|\cdot\|$ la norma asociada a V. Queremos demostrar que si F es localmente Lipschitz, i.e., si

$$\forall u \in V, \exists \mathscr{O} \subseteq \overbrace{\mathrm{Dom}\, F}^{\circ} \text{ entorno de } u : \ F|_{\mathscr{O}} \text{ es Lipschitz.}$$

entonces, existe un abierto sobre el cual F está acotada superiormente.
Sea $u \in \overbrace{\mathrm{Dom}\, F}^{\circ}$ fiado. Como F es localmente Lipschitz, en un entorno $\mathscr{O}$ de u se verifica que existe una constante $K_u > 0$ tal que,

$$\|F(v_1) - F(v_2)\| \leq K_u \|v_1 - v_2\|, \ \forall v_1, v_2 \in \mathscr{O}.$$

Por tanto, en $\mathscr{O}$ F está acotada superiormente.

(1.) $\Rightarrow$ (2.): Si (1.) es cierto F está acotada superiormente en un abierto $\mathscr{O}$. Por ser F función convexa propia, el teorema 2.16 nos asegura que F es continua en $\overbrace{\mathrm{Dom}\, F}^{\circ}$.
Sea $u \in \overbrace{\mathrm{Dom}\, F}^{\circ}$, queremos demostrar que F es localmente Lipschitz en u, i.e., que

$$\exists \mathscr{O}_u \subseteq \overbrace{\mathrm{Dom}\, F}^{\circ} \text{ entorno de } u \wedge K_u > 0 : \|F(v_1) - F(v_2)\| \leq K_u \|v_1 - v_2\|, \ \forall v_1, v_2 \in \mathscr{O}.$$

Para cada $r > 0$ consideramos

$$\mathscr{B}(u, r) = \{v \mid \|v - u\| \leq r\}.$$

Ya hemos justificado que F es continua en $\overbrace{\text{Dom } F}^{\circ}$ de modo que, lo es en u, con lo que, $\exists r_0 > 0$ tal que

$$\forall v \in \mathscr{B}(u, r_0)\,,\ -\infty < m \leq F(v) \leq M < +\infty.$$

En efecto, el mismo teorema 2.16 nos asegura que si F es convexa y continua en $\overbrace{\text{Dom } F}^{\circ}$, entonces existe un entorno donde F está acotada por una constante $M < +\infty$. Además, por ser F propia, existirá una constante $m \in \mathbb{R}$ tal que $-\infty < m < F(v)$ para todo v del entorno.
Supongamos que $r < r_0$ y consideremos un $v_1 \in \mathscr{B}(u; r)$.
Definamos la función

$$G(w) = F(w + v_1) - F(v_1)\,.$$

Observemos que $G(0) = 0$ y que en $\mathscr{W} = \{w \mid \|w\| \leq r_0 - r\}$ G está acotada superiormente por $M - m$. Justifiquémoslo:
Sea $w \in W$, entonces $G(w) = F(w + v_1) - F(v_1)$ con $v_1 \in \mathscr{B}(u; r)$. Además

$$\|w + v_1\| \leq \|w\| + \|v_1\| \leq r_0 - r + r = r_0$$

de donde, $w + v_1 \in \mathscr{B}(u, r_0)$. Por tanto,

$$m \leq F(w + v_1) \leq M \Longrightarrow F(w + v_1) \leq M,$$
$$m \leq F(v_1) \leq M \Longrightarrow -F(v_1) \leq m.$$

Por ello,

$$G(w) = F(w + v_1) - F(v_1) \leq M - m.$$

Al ser G convexa (F es convexa), por la demostración del lema 2.15 sabemos que, $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ se tiene que,

$$\forall w \in \varepsilon\mathscr{W}\,,\ \left|G(w)\right| \leq \varepsilon\,(M - m)\,.$$

Ahora bien, si $\left\|v - v_1\right\| \leq r_0 - r$, podemos decir que $w = v - v_1 \in \varepsilon\mathscr{W}$ con $\varepsilon = \dfrac{\left\|v - v_1\right\|}{r_0 - r}$ (por la propia definición del conjunto $\mathscr{W}$) y substituyendo en la desigualdad anterior,

$$\left|G(w)\right| \leq \left|F(v) - F(v_1)\right| \leq \frac{M - m}{r_0 - r} \cdot \left\|v - v_1\right\|,\ \ \forall v \in \mathscr{B}(v_1, r_0 - r)$$

Sea $v_2 \in \mathscr{B}(u; r)$, si cumple que $|F(v_1) - F(v_2)| \leq (n-1)\dfrac{M - m}{r_0 - r} \cdot \left\|v_1 - v_2\right\|$ habremos terminado.
Consideremos el conjunto de puntos equidistantes $v_1 = u_1, u_2, \ldots, u_n = v_2$ del segmento $[v_1, v_2] \in \mathscr{B}(u, r)$ con n suficientemente grande de manera que $\left\|u_k - u_{k+1}\right\| \leq r_0 - r$ variando k de 1 a $n - 1$, obtenemos,

$$\left|F(u_k) - F(u_{k+1})\right| \leq \frac{M - m}{r_0 - r} \cdot \left\|u_k - u_{k+1}\right\|,\ 1 \leq k \leq n - 1.$$

Sumando cada miembro, obtenemos la condición local de Lipschitz,

$$v_1, v_2 \in \mathscr{B} = (v, r)\,,\ \left|F(v_1) - F(v_2)\right| \leq (n-1)\frac{M - m}{r_0 - r} \cdot \left\|v_1 - v_2\right\|.$$

□

Observación 6. La demostración anterior nos da una construcción de la constante de Lipschitz para (2.).

Por tanto, en un espacio vectorial normado, no sólo podemos asegurar que sea continua, sino que podemos ser un poco más restrictivos y afirmar que cumple la condición de Lipschitz de manera local. También, gracias a este último corolario, podemos deducir rápidamente que pasa con la continuidad de una función convexa en un espacio Banach (y en particular, en un Hilbert).

Corolario 2.19. *Toda función lsc convexa sobre un espacio Banach es localmente Lipschitz en el interior de su dominio efectivo.*

Demostración. Cualquier espacio Banach es espacio normado, aplicando el corolario anterior, tenemos el resultado. □

2.3 Supremo puntual de una función afín continua

El objetivo de esta sección es presentar uno de los conjuntos que forman parte de los pilares del análisis convexo, Γ.
Al igual que anteriormente, V será un espacio real localmente convexo

2.3.1 Definición de $\Gamma(V)$

Las funciones afines continuas sobre V son de la forma $g(v) = \ell(v) + \alpha$ donde ℓ es un funcional lineal continuo que pertenece V' y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definición 2.20. *El conjunto de funciones $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ que son el supremo puntual de alguna familia de funciones afines continuas se denota por $\Gamma(V)$. Es decir, si $F \in \Gamma(V)$, entonces existe una familia $\mathscr{F}_F = \{g : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} : g \text{ afín y continua}\}$ tal que $F(u) = \sup_{g \in \mathscr{F}_F} g(u)$. Por tanto,*

$$\Gamma(V) = \left\{ F \mid F(u) = \sup_{g \in \mathscr{F}_F} g(u),\ \mathscr{F}_F \text{ es una familia de funciones afines continuas} \right\}.$$

Por $\Gamma_0(V)$ denotamos el subconjunto de $\Gamma(V)$

$$\Gamma_0(V) = \{F \in \Gamma(V) \mid F \not\equiv -\infty,\ F \not\equiv +\infty\}.$$

Evidentemente, todas las funciones de $\Gamma(V)$ son convexas y lsc (ya dedujimos que el supremo puntual respeta estas propiedades). Recíprocamente tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.21. *Sea $F : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Entonces $F \in \Gamma(V)$ si, y sólo si, F es una función convexa, lsc y si $\exists u \in V : F(u) = -\infty$, entonces $F \equiv -\infty$.*

Demostración. ($\Longrightarrow$): Si $F \in \Gamma(V)$ ya sabemos que F es lsc y convexa. Además si $F(u) = -\infty$ para algún u, esto quiere decir que $-\infty$ es el supremo puntual de alguna familia, dicha familia sólo puede ser la vacía. Por tanto, si $\Gamma(V)$ no es vacío, F no puede valer $-\infty$.

($\Longleftarrow$): Supongamos ahora que $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función convexa, lsc y que no vale $-\infty$. Si $F \equiv +\infty$ entonces es el supremo puntual de todas las familia de funciones afines y continuas definidas de V en $\overline{\mathbb{R}}$, y trivialmente $F \in \Gamma(V)$.

Consideremos que $F \not\equiv +\infty$. Demostrando que si $F \in \Gamma_0(V)$, y $\forall\, (\bar{u}, \bar{a}) \in V \times \mathbb{R} :\ \bar{a} < F(\bar{u})$ existe una función afín de V a $\mathbb{R}$ cuyo valor en u está entre $\bar{a}$ y $F(\bar{u})$ habremos demostrado el resultado.
Como F es convexa, epi F es un convexo cerrado que no contiene al punto $(\bar{u}, \bar{a})$. Por el teorema de Hahn-Banach, versión geométrica, podemos separar estrictamente epi F del punto a mediante el hiperplano afín cerrado

$$\mathscr{H} = \left\{(u, a) \in V \times \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} :\ g(u, a) = \beta\right\},$$

donde $\phi(u, a)$ es una función afín y continua definida como,

$$g(u, a) = \ell(u) + \alpha a,$$

con $\ell \in V'$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

El propio teorema de separación nos asegura que,

$$g(\bar{u}, \bar{a}) = \ell(\bar{u}) + \alpha \bar{a} < \beta, \tag{2.6}$$

y que

$$g(u, a) = \ell(u) + \alpha a > \beta,\ \forall\ (u, a) \in \text{epi } F. \tag{2.7}$$

Diferenciemos dos casos.

1. $F(\bar{u}) < +\infty$, podemos coger $u = \bar{u}$ y $a = F(\bar{u})$. Restando

   $$g(\bar{u}, a) - g(u, a),$$

   obtenemos $\alpha\,[F(\bar{u}) - \bar{a}] > 0$ de donde $\alpha > 0$.
   Consideramos la aplicación afín y continua

   $$h(u) = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\ell(u)}{\alpha}.$$

   Si substituimos h por ℓ en 2.6 y 2.7 deducimos que,

   $$\bar{a} < h(\bar{u}) < F(\bar{u}).$$

   De donde tenemos que para cualquier $(\bar{u}, \bar{a})$ con $\bar{a} < F(\bar{u})$, existe una aplicación lineal entre ellos y por tanto, $F \in \Gamma(V)$.

2. $F(\bar{u}) = +\infty$. Si $\alpha \neq 0$ estamos en el caso anterior.
   Si $\alpha = 0$, consideremos $g(\cdot) = \beta - \ell(\cdot)$ entonces tenemos,

$$0 < \beta - \ell(\bar{u}) = g(\bar{u}), \tag{2.8}$$

$$g(u) = \beta - \ell(u) < 0,\ u \in \text{Dom } F. \tag{2.9}$$

   Por tanto, existen $m \in V'$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que para $\tilde{g}(\cdot) = \gamma - m(\cdot)$ se tiene,

$$\tilde{g}(u) < F(u),\ \forall u \in V.$$

   Entonces, para cada $k > 0$ se tiene que

$$\tilde{g}_k(u) = \tilde{g}(u) + k\left[\beta - l(u)\right] < F(u),\ \forall u \in V,$$

   siendo $\tilde{g}_k$ una función afín continua.

   Considerando k lo suficientemente grande para que

$$\bar{a} < \tilde{g}_k,$$

   de manera que

$$\bar{a} < \tilde{g}_k(\bar{u}) < F(\bar{u}),$$

   como queríamos demostrar.

□

2.3.2 Γ-regularización

Con la misma filosofía de la definición de una lsc-regularización podemos preguntarnos, dada una función, cuál es su función minorante más grande perteneciente a $\Gamma(V)$. Esta pregunta motiva la siguiente definición, que presentaremos como una equivalencia.

Proposición 2.22. *Sean $F, G : V \to \overline{\mathbb{R}}$ dos funciones. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1.) G es el supremo puntual de las funciones afines continuas minorantes de F.

(2.) G es la mayor función minorante de F en $\Gamma(V)$. Dicha función recibe el nombre de Γ-regularización de F y la denotaremos por F^{Γ}.

En otros términos, si

$$\mathscr{A}(F) = \left\{g : V \to \mathbb{R} \mid g \text{ es continua y afín, } g \leq F\right\},$$

entonces,

$$F^{\Gamma}(u) = \sup\left\{g(u) :\ g \in \mathscr{A}\right\}.$$

Demostración. (1.) ⇒ (2.): Sea $\tilde{G} \in \Gamma(V)$ con $\tilde{G} \leq F$ arbitraria pero fijada. Debemos demostrar que $\tilde{G} \leq G$.
Sabemos que,

$$\tilde{G}(u) = \left\{ \sup_{g \in \mathscr{F}_{\tilde{G}}} g(u) : \ \mathscr{F}_{\tilde{G}} \text{ familia de funciones afines y continuas} \right\}.$$

Como $\tilde{G} \leq F$, $g \leq F$, $\forall g \in \mathscr{F}_{\tilde{G}}$ y G es el supremo puntual de las todas funciones afines continuas minorantes de F -en particular lo es de las funciones afines de $\mathscr{F}_{\tilde{G}}$-tenemos que $\tilde{G} \leq G$.
(2.) ⇒ (1.): Sea G la mayor función minorante de F en $\Gamma(V)$. Esto quiere decir que, para cualquier $\tilde{G} \leq F$, $\tilde{G} \in \Gamma(V)$, se tiene que $\tilde{G} \leq G$.
Supongamos que existe una $h : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ función afín y continua tal que,

$$\tilde{G} \leq h \leq G.$$

Entonces, podemos construir una $\tilde{G}_2 \in \Gamma(V)$ con $\tilde{G}_2$, $h \leq \tilde{G}_2 \leq G$ cuyo soporte sea el mismo que el de $\tilde{G}$ además de h. Por tanto, $\tilde{G}_2$ y G tienen el mismo conjunto de funciones afines y continuas minorantes de F, y por ser por ser ambas de $\Gamma(V)$, se tiene que $G = \tilde{G}_2$. □

Como caso particular tenemos que si $F \in \Gamma(V)$, F coincide con su Γ-regularización. Un ejemplo de ello es la figura 2.2, donde para cada punto de F, existe una función afín, continua y minorante suya que pasa por ese punto. Es decir, g_2 es tangente a F en un punto, y $g_2(u) = F^{\Gamma}(u)$, si u es el punto de tangencia. Lo mismo pasa con g_1 y con cada uno de los puntos de F.

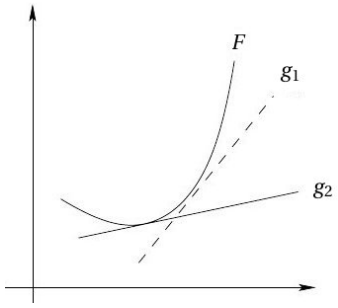

Figura 2.2: Imágen extraída de [2]. Ejemplo de una función convexa que coincide con su Γ-regularización.

Además, el siguiente resultando nos dice que, dada una función F cualquiera, podemos construir el epígrafo de su Γ-regularización como la envolura convexa del epígrafo de F. Recordemos que como $F^{\Gamma} \in \Gamma(V)$, F^{Γ} es convexa y lsc, por tanto su epígrafo será convexo y cerrado. Entonces, si $F \in \Gamma(V)$, los epígrafos coincidirán y así también las funciones.

Proposición 2.23. *Sean $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$ y F^Γ su Γ-regularización. Si existe una función afín continua ϕ tal que $\phi \leq F$, entonces,*

$$epi\, F^\Gamma = \overline{conv}\ epi\, F.$$

Demostración. La idea es construir una función G tal que su epi coincida con $\overline{\text{conv}}$ epi F. Después argumentaremos que G no es otra que F^Γ.

Sea $\phi \in \mathscr{A}(F)$. Por el lema 2.10 sabemos que $\overline{\text{epi}\, F}$ es un epígrafo para alguna función. De hecho, $\overline{\text{conv}}$ epi F también es el epígrafo de una función lsc y convexa[8], pues este conjunto es convexo (y la función así lo debe ser) y cerrado (el epi es cerrado sii la función es lsc). Sea G la función tal que epi $G = \overline{\text{conv}}$ epi F. Además se tiene que,

$$\text{epi}\, F \subseteq \overline{\text{conv}}\, \text{epi}\, F \subseteq \text{epi}\, \phi. \tag{2.10}$$

En efecto, la primera inclusión se tiene, ya que F en general no es convexa, epi $F \subseteq \overline{\text{conv}}$ epi F.
Para la segunda, como $\phi \in \mathscr{A}(F)$, ϕ también es convexa y lsc, por tanto su epígrafo es cerrado y convexo (y no tiene porqué ser el menor de ellos). De donde, se concluye que $\overline{\text{conv}}$ epi $F \subseteq$ epi ϕ.

Deducimos pues de (2.10) que $\phi \leq G \leq F$, y por ello $G \in \Gamma(V)$.
Sea $H \in \mathscr{A}(F)$ arbitraria pero fijada, entonces $H \leq F$ y epi $F \subseteq$ epi H, donde epi H es un convexo y cerrado (H lsc y convexa), por tanto, epi H también contiene al menor convexo cerrado que contiene a epi F, es decir, epi $G = \overline{\text{conv}}$ epi $F \subseteq$ epi H, lo que implica que $H \leq G$. Como este hecho se da para cualquier $H \in \mathscr{A}(F)$, G debe ser la más grande de ellas en Γ, o equivalentemente $G = F^\Gamma$. □

Observación 7. La envoltura convexa no tiene porque ser cerrada. como ejemplo[9] sea,

$$A = \left\{\left(x, e^{-x}\right)\right\}_{x\geq 0} \cup \left\{\left(x, -e^{-x}\right)\right\}_{x\geq 0}.$$

Es fácilmente comprobable que

$$\text{conv}\, A = (\{0\} \times [-1,1]) \cup ((0,+\infty) \times (-1,1)),$$

que no es cerrada, basta considerar la sucesión,

$$\left(x_n, y_n\right) = \left(1, 1 - \frac{1}{n}\right).$$

Ejemplo 2.3.1. *Si $\mathscr{A} \subseteq V$, calculemos la Γ-regularización de $\mathscr{I}_\mathscr{A}$ (la función indicatriz).*
Recordemos que $\mathscr{I}_\mathscr{A}$ es convexa si, y sólo si, $\mathscr{A}$ es convexo y también que $\mathscr{I}_\mathscr{A}$ es convexa si, y sólo si su epi es convexo.
Consideremos $\phi \equiv 0$. ϕ es una minorante de $\mathscr{I}_\mathscr{A}$ afín y continua. Por el resultado anterior,

$$epi\, \mathscr{I}_\mathscr{A}^\Gamma = \overline{conv}\ epi\, \mathscr{I}_\mathscr{A}.$$

De donde, $\mathscr{I}_\mathscr{A}^\Gamma$ debe ser convexa y lsc (su epígrafo es convexo y cerrado). Por tanto, $\mathscr{I}_\mathscr{A}^\Gamma = \mathscr{I}_{\overline{conv}\,\mathscr{A}}^\Gamma$.

[8] En efecto, como mínimo es el epígrafo de la extensión convexa, $\tilde{F}$, de F

[9] Ver http://math.stackexchange.com/questions/229781/closure-convex-hull-and-closed-convex-hull.

La pregunta natural que nos hacemos es si dada una función $F : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, ¿existe relación entre la F^{Γ} y su lsc regularización, $\overline{F}$? La respuesta es afirmativa, y la presentamos con este último resultado de la sección.

Proposición 2.24. *Sea $F : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Entonces,*

(1.) $F^{\Gamma} \leq \overline{F} \leq F$.

(2.) Si F es convexa y existe $g : V \longrightarrow \mathbb{R}$ una función afín continua tal que $g \leq F$, entonces $\overline{F} = F^{\Gamma}$.

Demostración.

(1.) Tanto F^{Γ} como $\overline{F}$ son menores que F. Además, $\overline{\text{epi } \overline{F}} \subseteq \overline{\text{conv}}$ epi F porque el epi no tiene por que ser convexo. Por el resultado anterior, epi $\overline{F} = \overline{\text{epi } \overline{F}} \subseteq \overline{\text{conv}}$ epi $F =$ epi F^{Γ}, de donde obtenemos la desigualdad deseada.

(2.) Si F es convexa, $\overline{\text{conv}}$ epi $F = \overline{\text{epi } F}$. Que exista $g : V \longrightarrow \mathbb{R}$ función afín continua tal que $g \leq F$ implica que $F^{\Gamma} \not\equiv -\infty$, de modo que, por el teorema anterior, $\overline{\text{conv}}$ epi $F =$ epi F^{Γ} y por tanto, epi $\overline{F} = \overline{\text{conv}}$ epi $F = \overline{\text{epi } F} =$ epi F^{Γ} y entonces, $F^{\Gamma} = \overline{F}$.

□

2.4 Función polar

2.4.1 Definición de la función polar

El concepto de función polar, cuyos orígenes radican en el concepto de transformada de *Legendre* del cálculo variacional[10], será crucial en el desarrollo de la teoría de la dualidad en la optimización convexa que estudiaremos más adelante.

Definición 2.25. *Sea $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$. La función $F^* : V' \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida por*

$$F^*(u^*) = \sup_{u \in V} \{\langle u, u^* \rangle - F(u)\}, \tag{2.11}$$

se le llama función polar de F, conjugada de Fenchel o, más brevemente, conjugada de F.

Es obvio que podemos restringir (2.11) a $u \in \text{Dom } F$, en lugar de a todos los vectores de V. Esto nos dice que F^* es el supremo puntual de una familia de funciones afines continuas

[10] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa. La transformada de *Legendre* de f se define como

$$g(p) = (Lf)\, p = \sup_x \{xp - f(x)\}.$$

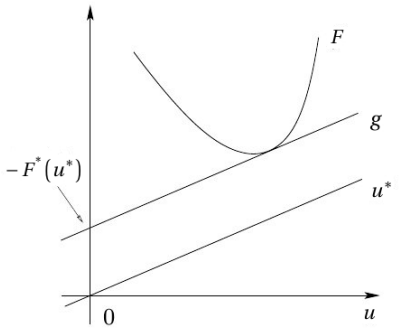

Figura 2.3: Imágen extraída de [2]. Representación geométrica de la función polar si $V = \mathbb{R}$.

$\langle u, \cdot \rangle - F(u)$. Todo ello nos hace concluir que $F^* \in \Gamma\left(V'\right)$, y en particular, podemos asegurar que es una función convexa y lsc. Notemos que si $F \equiv +\infty$ se tiene que Dom $F = \emptyset$, y en consecuencia, $F^* \equiv -\infty$.

Ejemplo 2.4.1. *Sea $\mathscr{A} \subseteq V$ y consideramos $\mathscr{I}_{\mathscr{A}}$ la función indicatriz. Entonces su polar*

$$\mathscr{I}^*_{\mathscr{A}}\left(u^*\right) = \sup_{u \in V}\left\{\left\langle u, u^*\right\rangle - \mathscr{I}_{\mathscr{A}}(u)\right\} = \sup_{u \in Dom\, \mathscr{I}_{\mathscr{A}}}\left\{\left\langle u, u^*\right\rangle - \mathscr{I}_{\mathscr{A}}(u)\right\} = \sup_{u \in \mathscr{A}}\left\langle u, u^*\right\rangle.$$

2.4.2 Interpretación geométrica

Si la función es propia, por definición de F^* resulta,

$$\left\langle u, u^*\right\rangle \leq F(u) + F^*\left(u^*\right),\ \forall u \in V,\ u^* \in V',$$

desigualdad que recibe el nombre de desigualdad de Young.

Sea $u^* \in V'$ tal que $F^*(u^*) \in \mathbb{R}$. Entonces, la función $g : V \to \mathbb{R}$, definida por

$$g(u) = \left\langle u, u^*\right\rangle - F^*\left(u^*\right),\ u \in V,$$

pertenece a $\mathscr{A}(F)$. Para cada $\varepsilon > 0$, existe un $u_\varepsilon \in V$ de manera que se satisface $\langle u_\varepsilon, u^*\rangle - F(u_\varepsilon) > F^*(u^*) - \varepsilon$ y por tanto, si $V = \mathbb{R}$, g puede ser interpretada como la tangente a F, y se tiene $a\left(\vec{0}\right) = -F^*(u^*)$.

La figura 2.3 es un ejemplo de lo explicado.

Ejemplo 2.4.2. *(Ejemplo extraído de [2]) Sea $p \in (1, +\infty)$. Consideremos $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(u) = \dfrac{|u|^p}{p}$. Calculemos F^*. Recordemos que , $\mathbb{R}' \approx \mathbb{R}$, de manera que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ no es más que el producto de dos elementos de $\mathbb{R}$.*
Por definición,

$$F^*\left(u^*\right) = \sup_{u \in \mathbb{R}}\left\{u u^* - \frac{|u|^p}{p}\right\}.$$

Sea $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $\phi(u) = uu^* - \dfrac{|u|^p}{p}$. ϕ *es diferenciable. Además,* ϕ *es cóncava. En efecto,* $\dfrac{|u|^p}{p}$ *es una función convexa, entonces,* $-\dfrac{|u|^p}{p}$ *es cóncava, y como* uu^* *es afín, es cóncava en particular. La diferencia entre dos funciones cóncavas es una función cóncava. De manera que* ϕ *tiene un único máximo* u_0 *que satisface* $\phi'(u_0) = 0$, *es decir,* $u^* - sgn(u_0)\,|u_0|^{p-1} = 0$, *por tanto,* $u_0 = |u^*|^{\frac{1}{p-1}}\, sgn(u_0)$.
Entonces,

$$F^*\left(u^*\right) = \sup_{u\in\mathbb{R}}\left\{\phi(u)\right\} = \phi(u_0)$$

$$F^*\left(u^*\right) = |u^*|^{\frac{1}{p-1}}\, sgn(u_0)\, u^* - \frac{1}{p}|u^*|^{\frac{1}{p-1}}\, sgn(u_0) = \left(1-\frac{1}{p}\right)|u^*|^{\frac{p}{p-1}}\, sgn(u_0)\,.$$

Si substituimos $\frac{1}{p}$ *por* $1-\frac{1}{q}$ *con* $q \in (1,+\infty)$ *resulta,*

$$F^*\left(u^*\right) = \phi(u_0) = \frac{|u^*|^q}{q}, \textit{donde}\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1.$$

En este caso la desigualdad de Young coincide con la clásica desigualdad de Young para números reales:

$$uu^* \le \frac{|u^*|^p}{p} + \frac{|u^*|^q}{q}.$$

2.4.3 Algunas propiedades

Para finalizar esta sección, presentaremos una lista de propiedades inmediatas que se deducen de la función polar. Se demostrarán las dos primeras propiedades, el resto de las demostraciones se pueden encontrar en [14] o en [4].

Propiedades 2.4.1.

1. $F^*(0) = -\inf_{u\in V} F(u)$.
2. *Si* $F \le G$, *entonces* $F^* \ge G^*$.
3. $\left(\inf_{i\in I} F_i\right)^* = \sup_{i\in I} F_i^*$.
4. $\left(\sup_{i\in I} F_i\right)^* \le \inf_{i\in I} F_i^*$.
5. $(\lambda F)^*(u^*) = \lambda F^*\left(\frac{u^*}{\lambda}\right)$ *para todo real* $\lambda > 0$.
6. $(F+\alpha)^* = F^* - \alpha$, *para cualquier* $\alpha \in \mathbb{R}$.

7. *Dado $u \in V$ denotamos por F_u la función trasladada de F, i.e., $F_u(v) = F(v-u)$. Entonces*

$$(F_a)^*\left(u^*\right) = F^*\left(u^*\right) + \left\langle a, u^*\right\rangle.$$

Demostración.

1. $F^*(0) = \sup_{u\in V}\left\{\langle 0, u^*\rangle - F(u)\right\} = \sup_{u\in V}\{0 - F(u)\} = -\inf_{u\in V} F(u)$.
2. $F(u) \le G(u),\ \forall u \in V \iff -F(u) \ge -G(u),\ \forall u \in V \iff \langle u, u^*\rangle - F(u) \ge \langle u, u^*\rangle - G(u),\ \forall u \in V, u^* \in V' \Longrightarrow \sup_{u\in V}\left\{\langle u, u^*\rangle - F(u)\right\} \ge \sup_{u\in V}\left\{\langle u, u^*\rangle - G(u)\right\},\ \forall u \in V, u^* \in V'$, por tanto $F^* \ge G^*$.

□

El siguiente teorema se puede encontrar demostrado en [2]

Teorema 2.26. *Sea $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ y F^* su polar. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1.) F^* es convexa y lsc.

(2.) Si Dom $F \neq \emptyset$, entonces $F^* > +\infty$ para todo $u^* \in V$.

(3.) Si F es convexa, propia y lsc, entonces F^* es convexa, propia y lsc también.

2.4.4 Función Bipolar

Podemos repetir el proceso de conjugación con F^* y obtenemos una función que denotaremos por $F^{**} : V' \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, definida como,

$$F^{**}(u) = \sup_{u^*\in V'}\left\{\left\langle u, u^*\right\rangle - F^*\left(u^*\right)\right\},$$

y recibe el nombre de *biconjugada* de F o *bipolar* de F.

Por propia definición, $F^{**} \in \Gamma(V)$. Además, podemos comparar F con F^{**} utilizando el siguiente resultado.

Teorema 2.27. *Consideremos $F : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Siempre se tiene que $F^{**} = F^{\Gamma}$. En particular, si $F \in \Gamma(V)$, se tiene que $F^{**} = F$.*

Demostración. La demostración esta inspirada en la demostración del teorema 2.2.4 de [2].

Demostremos en primer lugar que $F^{**} = F^{\Gamma}$.
Dados $u^* \in V', \alpha \in \mathbb{R}$, $\langle ., u^*\rangle + \alpha$ es una función afín continua tal que

$$\forall u \in V\ \left\langle u, u^*\right\rangle + \alpha \le F(u) \iff F^*(u^*) = \sup_{u\in V}\left\{\left\langle u, u^*\right\rangle - F(u)\right\} \le -\alpha.$$

Por tanto podemos poner

$$F^{\Gamma}(u) = \sup_{u \in V} \left\{ \langle u, u^* \rangle + \alpha \mid u^* \in V', \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \leq -F^*(u^*) \right\}.$$

De donde, si $F^*(u^*) > -\infty,\ \forall u^* \in V'$, entonces

$$F^{\Gamma}(u) = \sup_{u \in V} \left\{ \langle u, u^* \rangle - F^*(u^*) \mid u^* \in V' \right\} = F^{**}.$$

Si $F^*(u^*) > -\infty$ para algún $u^* \in V'$, entonces $F^{\Gamma}(u) = +\infty = F^{**}(u),\ \forall u \in V$.

En particular, si $F \in \Gamma(V)$, sabemos que $F^{\Gamma} = F$ y por lo acabado de demostrar, $F^{**} = F$, con lo que concluimos el resultado □

Este último teorema nos dice que geométricamente, F^{**} puede ser interpretada como la convexificación de F desde "abajo" de F (ver figura 2.4).

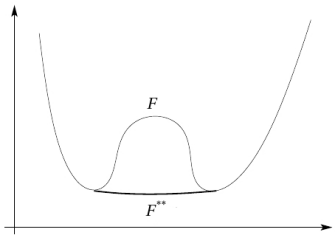

Figura 2.4: Imagen extraída de [2]. Representación geométrica de la función bipolar de F si $V = \mathbb{R}$.

No obstante, la repetición del proceso de polarización de una función es limitado. Dicho de otro modo

Corolario 2.28. *Para toda función $F : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, se tiene que $F^* = F^{***}$.*

Demostración. Por una parte, sabemos del resultado anterior que $F^{**} = F^{\Gamma}$ y entonces, $F^{**} \leq F$. Además, de la segunda propiedad de las funciones polares,

$$F^{***} \geq F^*.$$

Por la otra, la definición natural de F^{***} es,

$$F^{***} = \sup_{u^* \in V'} \left\{ \langle u, u^* \rangle - F^{**}(u) \right\}.$$

De la definición de la función bipolar deducimos que para todo $u \in V$

$$F^*(u^*) \geq \langle u, u^* \rangle - F^{**}(u),$$

Como la desigualdad anterior es para todo elemento del espacio, también se cumple para el supremo, con lo que obtenemos,

$$F^{***} \leq F^*.$$

□

Este hecho y de $F = F^{**}$ cuando $F \in \Gamma(V)$ nos lleva a la siguiente definición.

Definición 2.29. *La polaridad establece la siguiente biyección entre* $\Gamma(V)$ *y* $\Gamma\left(V'\right)$,

$$\begin{aligned} \Gamma(V) &\longrightarrow \Gamma\left(V'\right) \\ F &\longrightarrow F^*. \end{aligned}$$

Dadas dos funciones, $F \in \Gamma(V)$, $H \in \Gamma\left(V'\right)$ *diremos que están en dualidad si se satisface que*

$$F = G^* \text{ y } F^* = G.$$

Las constantes $+\infty$ *y* $-\infty$ *de* V *y las constantes* $+\infty$ *y* $-\infty$ *de* V' *están en dualidad. De esta manera,* $F \in \Gamma_0(V)$ *si, y solo si,* $F^* \in \Gamma_0\left(V'\right)$*; la polaridad establece una biyección entre* $\Gamma\left(V'\right)$ *y* $\Gamma_0\left(V'\right)$.

Más ejemplos de funciones polares se pueden encontrar en la página 19 de [1] y en la página 32 de [2].

2.5 Subdiferenciabilidad

En análisis, la herramienta fundamental para obtener condiciones necesarias de optimalidad es la regla de Fermat, que en el caso diferenciable, dice que la derivada se anula en un punto de mínimo o de máximo local. Esto significa que la recta tangente a la gráfica de la función diferenciable $F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que pasa por $(u_0, F(u_0)$ tiene pendiente 0 si u_0 es un extremo relativo de la función (mínimo o máximo local). Generalizada apropiadamente, esta regla es válida en diversos contextos, que van desde la optimización, cálculo de variaciones (Ecuación de Euler-Lagrange) hasta control óptimo. Daremos una versión de esta regla en el caso convexo sin hipótesis de diferenciabilidad (en muchas aplicaciones, la función objetivo no es diferenciable).
Por otra parte, el cálculo diferencial es una herramienta muy flexible en análisis, que necesita de la noción de derivada (o, más generalmente, de gradiente). Cuando la diferenciabilidad en el sentido clásico falla, es natural preguntarse si es posible extender la noción de derivada de modo de recuperar al menos algunas de sus propiedades.
Todo lo anterior nos motiva a estudiar la subdiferenciabilidad, una noción de diferenciación en el caso convexo orientada a la resolución de problemas de minimización[11].

Definición 2.30 (Subdiferencial y subgradiente)**.** *Sea* $F: V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *función propia y* $u \in Dom\, F$. *El conjunto*

$$\partial F(u) = \left\{u^* \in V' \mid \left\langle v - u, u^* \right\rangle \leq F(v) - F(u),\ \forall v \in V\right\},$$

se llama ***subdiferencial*** *de* F *en* u. *Nos referiremos a cada* u^* *de* $\partial F(u)$ *como* ***subgradiente*** *de* F *en* u.

[11] Texto extraído de [7].

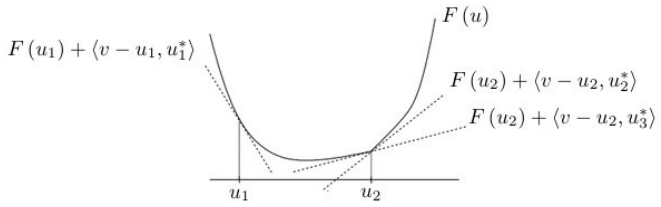

Figura 2.5: Imágen extraída de [6]. Ejemplos de subgradientes en u_1 y u_2 para cierta F.

Observación 8. El objetivo de la subdiferenciabilidad es detectar puntos mínimos. Si $F : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es convexa y $u \in \text{Dom } F$ se tiene que,

$$F(u) = \min_{v \in V} F(v) \iff 0 \leq F(v) - F(u)\,,\ \forall v \in V \iff 0 \in \partial F(u)\ [12].$$

Observemos que la condición $0 \in \partial F(u)$ va a ser similiar a la condición de optimilidad $F'(u) = 0$ en el caso diferenciable.

Lo primero que vamos a enunciar es un criterio de subdiferenciabilidad.

Proposición 2.31. *Sea $F : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ convexa, finita y continua en $u \in V$. Entonces $\partial F(v) \neq \emptyset$, $\forall v \in \overbrace{Dom\, F}^{\circ}$ y en particular $\partial F(u) \neq \emptyset$.*

Demostración. Este teorema no se va a demostrar en este trabajo debido a su longitud. Esta se puede encontrar en [1]. □

El concepto de subdiferencial y de función polar está estrechamente ligado, tanto es así que tenemos la siguiente caracterización.

Proposición 2.32. *Sea $F : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ y F^* su polar. Entonces $u^* \in \partial F(u)$ si, y sólo si,*

$$F(u) + F^*(u^*) = \langle u, u^* \rangle .$$

Demostración. ($\Longrightarrow$): Consideremos la función afín continua

$$l(v) = \langle v - u, u^* \rangle + F(u)\,,$$

con $u \in V$ y $u^* \in \partial F(u)$.
Por la linealidad de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tenemos que,

$$l(v) = \langle v, u^* \rangle - \langle u, u^* \rangle + F(u)\,.$$

Ahora bien, como $u^* \in \partial F(u)$ se tiene que,

- $l(v) = \langle v - u, u^* \rangle + F(u) \leq F(v) - F(u) + F(u) = F(v),\ \forall v \in V,$

[12] 0 representa en este contexto la aplicación idénticamente nula.

- $l(u) = \langle u, u^* \rangle - \langle u, u^* \rangle + F(u) = F(u)$,

entonces l debe ser maximal (si es menor que F por todo y $F(u) = l(u)$, no puede haber otra función mayor que l minorante de F), i.e., su término constante respecto a v debe ser el supremo de todos los $u \in V$ (para el u^* fijado), por tanto,

$$F(u) - \langle u, u^* \rangle = -F^*(u^*).$$

($\Longleftarrow$): Sabemos que,

$$F(u) + F^*(u^*) = \langle u, u^* \rangle.$$

Por definición de F^* podemos escribir la igualdad anterior como,

$$F(u) + \langle v, u^* \rangle - F(v) \leq F(u) + F^*(u^*) = \langle u, u^* \rangle, \ \forall v \in V,$$

de donde resulta que,

$$\langle v - u, u^* \rangle \leq F(v) - F(u), \ \forall v \in V,$$

y por tanto,

$$u^* \in \partial F(u).$$

□

Observación 9. Con este teorema y teniendo en cuenta la observación 8, en el caso de ser F convexa, podemos encontrar una caracterización para el mínimo global de F:

$$F(u) = \min_{v \in V} F(v) \iff 0 \in \partial F(u) \iff F(u) = -F^*(u^*).$$

Es decir, $-F^*(u^*)$ es el mínimo global de F.

Corolario 2.33. *El conjunto $\partial F(u)$ (puede ser $\emptyset$) es un convexo y es $\sigma(V', V)$ cerrado.*

Demostración. Si $\partial F(u)$ es vacío, ambas afirmaciones son inmediatas. Supongamos que $\partial F(u) \neq \emptyset$.
Sea $u^* \in \partial F(u)$. Por la definición de la función polar F^* sabemos que

$$F^*(u^*) - \langle u, u^* \rangle \geq -F(u), \ \ \forall u \in V,$$

por la proposición anterior

$$F(u) + F^*(u^*) = \langle u, u^* \rangle,$$

entonces podemos escribir

$$\partial F(u) = \{u^* \in V' : \ F^*(u^*) - \langle u, u^* \rangle \leq -F(u)\}.$$

Comprobemos que es $\sigma(V', V)$ cerrado: Sea $\{u_n^*\}_{n \in \mathbb{Z}}$ una sucesión en $\partial F(u)$, con $u_n^* \in \partial F(u) \ \forall n$ tal que $u_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} u^*$[13]. Entonces $\langle u, u_n^* \rangle \to \langle u, u^* \rangle$, y $F^*(u_n^*) \to F^*(u)$, ya que $F^* \in \Gamma(V')$. Tomando límites en

$$F^*(u_n^*) - \langle u, u_n^* \rangle \geq -F(u),$$

[13] $u_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} u^*$ significa que la sucesión $\{u_n^*\}$ converge débilmente (en la topología $\sigma(V', V)$) hacia u^*.

resulta,

$$F^*(u^*) - \langle u, u^* \rangle \geq -F(u),$$

con lo que $u^* \in \partial F(u)$ y por tanto es cerrado. La convexidad es inmediata.

□

2.5.1 Cálculo de la polar de F a partir de la subdiferencial

Esta sección está basada en [14].
Con el resultado anterior hemos visto la relación entre F^* y el subgradiente. El objetivo de esta subsección es, conociendo la gráfica de la función ∂F, poder representar F^*. Para ello previamente debemos dar algunos resultados.

Proposición 2.34. *Sean $F : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ propia y $u \in V$. Si $\partial F(u) \neq \emptyset$, entonces $F(u) = F^{**}(u)$. Si $F(u) = F^{**}(u)$, se tiene que $\partial F(u) = \partial F^{**}(u)$.*

Demostración. Por un lado, sabemos de la desigualdad de Young que,

$$\langle u, u^* \rangle \leq F^{**}(u) + F^*(u^*), \forall u \in V, u^* \in V'.$$

Por otro, por la proposición 2.32 tenemos que si $u^* \in \partial F(u)$ $(\partial F(u) \neq \emptyset)$,

$$\langle u, u^* \rangle = F(u) + F^*(u^*) \Longrightarrow \langle u, u^* \rangle - F^*(u^*) = F(u).$$

Concluimos inmediatamente que $F^{**} \geq F$. Además, sabemos que $F^{**} \leq F$ en general, y por tanto deducimos la igualdad.
Supongamos que $F(u) = F^{**}(u)$. Teniendo en cuenta que $F^* = (F^{**})^*$ deducimos

$$u^* \in \partial F(u) \iff \langle u, u^* \rangle = F(u) + F^*(u^*) = F^{**}(u) + F^{***}(u^*) \iff u^* \in \partial F^{**}(u).$$

□

Entonces ya podemos presentar el resultado importante de esta subsección,

Corolario 2.35. *Sea $F : V \to \overline{\mathbb{R}}$. Entonces*

$$u^* \in \partial F(u) \Rightarrow u \in \partial F^*(u^*).$$

Si además $F = F^{**}$,

$$u^* \in \partial F(u) \iff u \in \partial F^*(u^*).$$

Demostración. Si $u^* \in \partial F(u^*)$ entonces $\langle u, u^* \rangle = F(u) + F^*(u^*)$ con lo que $u^* \in \text{Dom } F^*$. Usando la desigualdad de Young (en la dualidad) sobre la aplicación lineal $\langle u, v^* - u^* \rangle$ para todo $v^* \in V'$ obtenemos

$$\langle u, v^* - u^* \rangle = \langle u, v^* \rangle - \langle u, u^* \rangle \leq F^*(v^*) + F(u) - F^*(u^*) - F(u) = F^*(v^*) - F^*(u^*),$$

de donde $u \in \partial F^*(u^*)$.
Si $F^{**}(u) = F(u)$ entonces,

$$u^* \in \partial F(u) \iff \langle u, u^* \rangle = F(u) + F^*(u^*) = F^{**}(u) + F^*(u) \iff u \in \partial F^*(u^*).$$

□

Este resultado nos sugiere como dibujar F^* a partir de ∂F que era nuestro objetivo. Veamos un ejemplo

Ejemplo 2.5.1. *Sea $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función valor absoluto, $F(u) = |u|$. Demostremos que.*

$$\partial F(u) = \begin{cases} -1, & u < 0, \\ [-1,1], & u = 0, \\ 1, & u > 0. \end{cases}$$

Demostración.

- Si $u < 0$, $F^*(u^*) = \sup_{u \in \mathbb{R}^-} \{uu^* - u\}$.
  Sea $l(u) = uu^* - u$ función lineal decreciente. Como $u \in (-\infty, 0)$, tenemos que $\sup_{u \in \mathbb{R}^-} l(u) = l(0) = 0$, $\forall u^* \in \mathbb{R}$ y entonces $F^* \equiv 0$ cuando $u < 0$. Por tanto, por la proposición 2.32,

  $$F(u) + 0 = uu^* \iff -u = uu^* \iff u^* = -1.$$

  Por tanto, $\partial F(u) = \{-1\}$ siempre que $u < 0$.

- Si $u = 0$, por definición de subgradiente tenemos,

  $$\partial F(0) = \{u^* \in \mathbb{R} \mid \langle v, u^* \rangle \leq F(v) - F(0),\ \forall v \in \mathbb{R}\} \underset{F(0)=0}{=} \{u^* \in \mathbb{R} \mid vu^* \leq |v|,\ \forall v \in \mathbb{R}\}.$$

  En consecuencia, $u^* \in \partial F(0)$ si, para $v \neq 0$,

  $$vu^* \leq |v| \iff -v \leq vu^* \leq v \underset{v \neq 0}{\iff} -1 \leq u^* \leq 1.$$

  Observemos que para $v = 0$ la definición se cumple trivialmente, de manera que 0 también pertenece al subgradiente de $F(0)$.
  Por todo ello deducimos que $\partial F(0) = [-1, 1]$ con $u = 0$.

- Si $u > 0$. Diferenciemos dos casos:

  1. Para todo $v \in \mathbb{R}^+$, se tiene que,

     $$(v - u)u^* \leq F(v) - F(u) = v - u \iff u^* \leq 1.$$

  2. Para todo $v \in \mathbb{R}^-$, se tiene que,

     $$(-v - u)u^* \leq F(v) - F(u) = -v - u \iff u^* \geq 1.$$

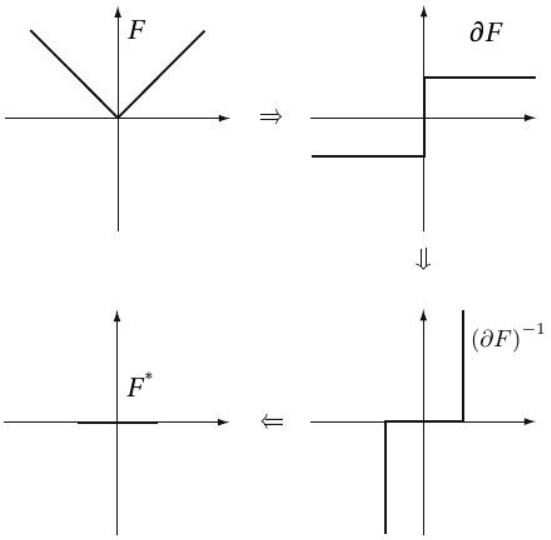

Figura 2.6: Imágen extraída de [2]. Ejemplo de la representación de $|u|^*$.

Es decir, $\partial F(u) = \{1\}$ siempre que $u > 0$.

□

Ejemplo 2.5.2. *Sea* $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $F(u) = \dfrac{u^2}{2}$. *Calculemos* ∂F.
Sabemos que,

$$F^*(u^*) = \sup_{u \in \mathbb{R}} \left\{ uu^* - \frac{u^2}{2} \right\}.$$

Consideremos la función

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longrightarrow uu^* - \frac{u^2}{2}. \end{aligned}$$

Es sencillo deducir que ϕ *es cóncava (diferencia de dos cóncavas) y por tanto tiene un único máximo* u_0 *que satisface que* $\phi'(u_0) = 0$, *o equivalentemente,* $u^* - u_0 = 0$.
Entonces,

$$\phi(u_0) = u^* u_0 - \frac{u_0^2}{2} = u_0 \left(u^* - \frac{u_0}{2} \right) = u_0 \left(u^* - \frac{u_0}{2} + \frac{u_0}{2} - \frac{u_0}{2} \right) = u_0 \left(u^* - u_0 + \frac{u_0}{2} \right) = u_0 \frac{u_0}{2} = \frac{u_0^2}{2} = \frac{(u^*)^2}{2},$$

y en consecuencia,

$$F^*(u^*) = \phi(u_0) = \frac{(u^*)^2}{2}.$$

Por la proposición 2.32, $u^* \in \partial F(u)$ si, y solo si,

$$u^* u = F^*(u^*) + F(u) = \frac{(u^*)^2}{2} + \frac{u^2}{2}.$$

De modo que,

$$2u^* u = (u^*)^2 + u^2 \iff (u^* - u)^2 = 0 \iff u^* = u.$$

Por tanto, podemos concluir que,

$$\partial F(u) = u.$$

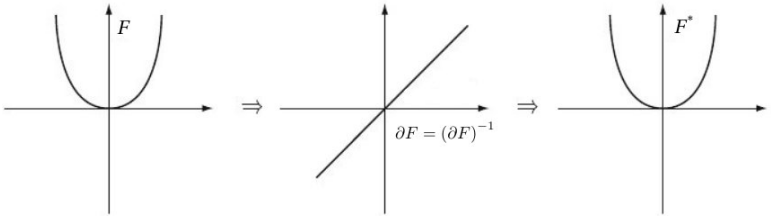

Figura 2.7: Imágen extraída de [2]. Ejemplo de la representación de $\left(\frac{u^2}{2}\right)^*$.

Observemos que dada F, podemos representar F^* de la siguiente manera:

- En primer lugar, calculamos su subdiferencial en todo los puntos del dominio de F y la representamos.
- En segundo lugar, "invertimos" la gráfica de la subdiferencial.
- Por último, "integramos" la gráfica del paso anterior y obtenemos F^*.

2.6 Gâteaux diferenciabilidad

Para acabar este tema, introduciremos el concepto de Gâteaux diferenciabilidad en espacios localmente convexos.[14]

[14] En general, sea $F : V \longrightarrow W$ es una función definida entre dos espacios Banach con normas $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_W$ respectivamente.

Definición. *Una función F se dice que es Gâteaux diferenciable en $u \in V$ si existe un operador lineal acotado $T_u \in \mathscr{B}(V,W)$ tal que,*

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{F(u+\lambda v) - F(u)}{\lambda} = T_u v, \ \forall v \in V.$$

Nos referiremos al operador T_u como la derivada Gâteaux de F en u.

Observación. En términos $\varepsilon - \delta$, la noción de Gâteaux diferenciable en u puede expresarse como:

$$\forall (\varepsilon > 0, v \neq 0), \ \exists \delta(\varepsilon, v) > 0 : \ |\lambda| < \delta \Longrightarrow \left\| \frac{F(u+\lambda v) - F(u)}{\lambda} - T_u v \right\|_W < \varepsilon.$$

La definición se ha extraído de [16], mientras que la observación es del artículo [20].

Definición 2.36. *Una función $F : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ se dice que es Gâteaux diferenciable en $u \in V$ si existe una aplicación lineal acotada $u^* \in V'$ tal que,*

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{F(u+\lambda v) - F(u)}{\lambda} = \langle v, u^* \rangle, \ \forall v \in V, \tag{2.12}$$

Nos referiremos a la función lineal u^* como la derivada Gâteaux de F en u y la denotaremos por $F'(u)$.

Si para un v fijado el límite

$$F'(u;v) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{F(u+\lambda v) - F(u)}{\lambda},$$

existe, entonces se dice que F tiene derivada en u en la dirección v. En consecuencia, F es Gâteaux diferenciable en u si, y sólo si, todas las derivadas direccionales $F'(u;v)$ existen. El caso de las funciones convexas es particularmente interesante, dado que

$$\frac{F(u+\lambda v) - F(u)}{\lambda},$$

es una función creciente en λ. En efecto[15],

Demostración. Sea $h(\lambda) = \dfrac{F(u+\lambda v) - F(u)}{\lambda}$. Supongamos $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$ y demostremos que $h(\lambda_1) \leq h(\lambda_2)$.
Observemos que

$$u + \lambda_1 v = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(u + \lambda_2 v) + \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) u,$$

así pues, como F es convexa

$$F(u+\lambda_1 v) \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_2} F(u+\lambda_2 v) + \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) F(u),$$

y de menara inmediata obtenemos

$$h(\lambda_1) = \frac{F(u+\lambda_1 v) - F(u)}{t} \leq \frac{F(u+\lambda_2 v) - F(u)}{\lambda_2} = h(\lambda_2).$$

□

Por tanto, cuando $\lambda \to 0^+$ el límite 2.12 siempre existe, aunque sea $+\infty$ o $-\infty$. Esencialmente, en caso de que la función sea convexa, la diferenciabilidad Gâteaux es prácticamente equivalente a la unicidad del subgradiente.

Teorema 2.37. *Sea $F : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa y $u \in V$. Si F es Gâteaux diferenciable en u, entonces F es subdiferenciable en u y $\partial F(u) = \{F'(u)\}$. Recíprocamente, si en u, F es continua, finita y tiene un único subgradiente, podemos asegurar que F es Gâteaux diferenciable en u y que $\partial F(u) = \{F'(u)\}$.*

[15] Demostración extraída de [7].

Demostración. Si F es Gâteaux diferenciable en u, $F'(u) \in \partial F(u)$. En efecto, dados $u, v \in V$

$$F'(u; v-u) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{F(u+\lambda(v-u)) - F(u)}{\lambda} \underset{\text{f.crec.}}{\leq} \frac{F(u+(v-u)) - F(u)}{1}$$

Entonces,

$$F'(u; v-u) = \langle v-u, F'(u) \rangle \leq F(v) - F(u).$$

Como es para cualquier v arbitrario tenemos que

$$F'(u) \in \partial F(u).$$

Comprobemos que si $u^* \in \partial F(u)$, entonces $u^* = F'(u)$ y tendremos, junto con lo anterior, demostrada la desigualdad.

Consideremos $\lambda w = v - u$ con $\lambda > 0$. Como $u^* \in \partial F(u)$ se tiene que,

$$\langle v-u, u^* \rangle \leq F(v) - F(u) \iff \lambda \langle w, u^* \rangle \leq F(v) - F(u) = F(\lambda w + u) - F(u), \ \forall v \in V.$$

Dividiendo entre λ y haciendo $\lambda \to 0^+$, se deduce que,

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{F(\lambda w + u) - F(u)}{\lambda} \underset{\text{G.dif.}}{=} \langle w, F'(u) \rangle \geq \langle w, u^* \rangle,$$

En consecuencia,

$$\langle w, F'(u) - u^* \rangle \geq 0,$$

y como w es arbitrario, se debe tener que $u^* = F'(u)$.

Demostremos la otra parte del teorema.
Supongamos que F es convexa, continua y tiene un único subgradiente en V.
Como $\dfrac{1}{\lambda}[F(u+\lambda v) - F(u)]$ es función creciente, $\forall \lambda > 0$,

$$\frac{F(u+\lambda v) - F(u)}{\lambda} \geq \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{F(u+\lambda v) - F(u)}{\lambda} = F'(u; v)$$

$$F(u+\lambda v) - F(u) \geq \lambda F'(u; v)$$

$$F(u+\lambda v) \geq F(u) + \lambda F'(u; v),$$

Lo que quiere decir que el conjunto,

$$\mathscr{L} = \{(u+\lambda v, F(u) + \lambda F'(u; v))\},$$

no interseca el interior del epígrafo de F. Pero, como F es convexa, continua y finita, $\overbrace{\text{epi } F}^{\circ}$ es convexo y no vacío. Por el teorema de separación de Hahn-Banach (versión geométrica), existe un hiperplano $\mathscr{H}$ de manera que $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{H}$ y $\mathscr{H} \cap \overbrace{\text{epi } F}^{\circ} \neq \emptyset$. Se puede comprobar que $\mathscr{H}$ es el grafo de una función afín continua minorante de F y que su imagen en u coincide con $F(u)$. Como el subgradiente de F es único, la pendiente de $\mathscr{H}$ tiene que ser u^* y como $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{H}$,

$$F'(u; v) = \langle v, u^* \rangle,$$

lo que demuestra que F es Gâteaux diferenciable y su derivada Gâteaux es u^*. □

Podemos caracterizar la convexidad de una función Gâteaux diferenciable a partir del siguiente resultado.

Proposición 2.38. *Sea $F : \mathscr{A} \subseteq V \longrightarrow \mathbb{R}$ siendo F una función Gâteaux diferenciable en $\mathscr{A}$ y $\mathscr{A}$ convexo. Se tiene la siguiente equivalencia*

(1.) F es convexa sobre $\mathscr{A}$,

(2.) $F(v) \geq F(u) + \langle v-u, F'(u)\rangle \ \forall u, v \in \mathscr{A}$.

Similarmente, para la convexidad estricta se tiene que,

(1.) F es estrictamente convexa sobre $\mathscr{A}$,

(2.) $F(v) > F(u) + \langle v-u, F'(u)\rangle \ \forall u, v \in \mathscr{A}, u \neq v$.

Demostración. Demostraremos el caso F convexa, para la convexidad estricta el razonamiento es simétrico teniendo en cuenta que si $u \neq v$ las igualdades son estrictas.
(1.) $\Rightarrow$ (2.): Se sigue directamente de la proposición anterior, substituyendo u^* por $F'(u)$ en la definición de subdiferenciabilidad y sabiendo que u^* es único.
(2.) $\Rightarrow$ (1.): Si escribimos (2.) con $v = u$ y $u = \lambda v + (1-\lambda)u$, con $u, \in \mathscr{A}$, $\lambda \in (0,1)$,

$$F(u) \geq F(\lambda v + (1-\lambda)u) + \lambda \langle u - v, F'(\lambda v + (1-\lambda)u)\rangle, \tag{2.13}$$

y si $v = v$ y $u = \lambda u + (1-\lambda)v$,

$$F(v) \geq F(\lambda u + (1-\lambda)v) + (1-\lambda)\langle v - u, F'(\lambda u + (1-\lambda)v)\rangle, \tag{2.14}$$

para cualquier $\lambda \in (0,1)$, $u, v \in \mathscr{A}$.
Multiplicando (2.13) por $(1-\lambda)$,(2.14) por λ y sumando los resultados,

$$F(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda F(u) + (1-\lambda)F(v),$$

por tanto, F es convexa. □

Finalmente, expresaremos la convexidad de una función a través de la monotonicidad de su derivada Gâteaux.

Proposición 2.39. *Sea $F : \mathscr{A} \subseteq V \longrightarrow \mathbb{R}$ una función Gâteaux diferenciable y $\mathscr{A}$ convexo. F será convexa si, y sólo si,*

$$\forall u, v \in V, \ \langle u - v, F'(u) - F'(v)\rangle \geq 0, \tag{2.15}$$

i.e., F' es un funcional monótono de V en V' dado por, $F' : V \longrightarrow V'$, $u \mapsto F'(u)$.

Demostración. Si F es convexa, por la proposición anterior

$$F(v) \geq F(u) + \langle v - u, F'(u)\rangle, \ \forall u, v \in V, \tag{2.16}$$
$$F(u) \geq F(v) + \langle u - v, F'(v)\rangle, \ \forall u, v \in V. \tag{2.17}$$

Sumando ambos términos nos queda,

$$F(u)+F(v) \geq F(u)+F(v)-\langle u-v, F'(u)\rangle-\langle u-v,-F'(v)\rangle = F(u)+F(v)-\langle v-u, F'(u)-F'(v)\rangle$$

$$F(u)+F(v) \geq F(u)+F(v)-\langle v-u, F'(u)-F'(v)\rangle$$

$$0 \geq -\langle v-u, F'(u)-F'(v)\rangle,$$

de donde

$$0 \leq \langle v-u, F'(u)-F'(v)\rangle,$$

como queríamos demostrar.

Recíprocamente, Si F es Gâteaux diferenciable y F' es un funcional monótono para cada $u, v \in V$, la función $\phi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\phi(\lambda) = F(u+\lambda(v-u)),$$

es diferenciable con derivada

$$\phi'(\lambda) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\phi(\lambda+h)-\phi(\lambda)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(u+(\lambda+h)(v-u))-F(u+\lambda(v-u))}{h} =$$

$$F'(u+\lambda(v-u); v-u) = \langle v-u, F'(u+\lambda(v-u))\rangle,$$

Por (2.15), $\phi'(\lambda) = \langle v-u, F'(u+\lambda(v-u))\rangle > 0$ de manera que ϕ es creciente y por tanto convexa en $[0,1]$. Así pues,

$$F(u+\lambda(v-u)) = \phi(\lambda) \leq \lambda\phi(1)+(1-\lambda)\phi(0) = \lambda F(u)+(1-\lambda)F(v), \ \forall \lambda \in [0,1].$$

y por tanto F es convexa. □

CAPÍTULO 3

MINIMIZACIÓN DE FUNCIONES CONVEXAS Y DESIGUALDADES VARIACIONALES

3.1 Orientación

En este capítulo nos centraremos en resultados relacionados con la minimización de funciones convexas, como por ejemplo, existencia de solución, unicidad... Daremos también resultados análogos referentes a las desigualdades variacionales, otro objetivo de este trabajo.

3.2 Un resultado sobre la existencia

Sea $\left(V, \|\cdot\|\right)$ un espacio de Banach reflexivo ($V'' \approx V$) y $\mathscr{C}$ un subconjunto (no vacío) cerrado y convexo de V. Consideremos la función $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ que suponemos

$$\text{convexa, lsc, y propia.} \tag{3.1}$$

Nuestro objeto de estudio es el problema,

$$\inf_{u \in \mathscr{C}} \quad F(u). \tag{3.2}$$

Cada elemento $u \in V$ tal que,

$$F(u) = \inf_{v \in \mathscr{C}} \quad F(v), \tag{3.3}$$

será llamado una *solución* del problema.

En algunos casos es preferible resolver el problema en todo V en lugar de únicamente en $\mathscr{C}$. Entonces, el problema extendido es

$$\inf_{u \in V} \quad \tilde{F}(u). \tag{3.4}$$

Recordemos que $\tilde{F}$ es la función extensión convexa de F definida en el capítulo anterior (2.2) en la página 4 y viene dada por,

$$\tilde{F}(u) = \begin{cases} F(u), & u \in \mathscr{C}, \\ +\infty, & u \notin \mathscr{C}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Es evidente que el conjunto de soluciones del problema (3.2) es el mismo que el de (3.4), con lo que ambos problemas son equivalentes.
Presentemos un resultado relacionado con el conjunto de soluciones respecto a la topología de V.

Proposición 3.1. *El conjunto de soluciones del problema (3.2), que lo denotamos por $\mathscr{S}$, es un subconjunto cerrado y convexo de $\mathscr{C}$ que puede ser vacío.*

Demostración. Sea α un ínfimo de F, es decir, una solución de (3.2). El conjunto $\mathscr{S}$ se caracteriza por,

$$\mathscr{S} = \left\{ u \in \mathscr{C} \mid \tilde{F}(u) \leq \alpha \right\}.$$

Claramente $\mathscr{S}$ es un conjunto de subnivel de $\tilde{F}$, que por ser esta lsc, es un cerrado. Además, es convexo. Efectivamente, sean $u, v \in \mathscr{S}$, se tiene que

$$\tilde{F}(\lambda u + (1-\lambda v)) \leq \lambda \tilde{F}(u) + (1-\lambda)\tilde{F}(v) \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha,$$

de manera que $\lambda u + (1-\lambda v) \in \mathscr{S}$. □

Observación 10. Notemos que, a priori, α puede ser un ínfimo local; por ello puede haber más de un $u \in \mathscr{C}$ tal que $\tilde{F}(u) \leq \alpha$.
También hemos demostrado que si una función es convexa, sus conjuntos de subnivel son conjuntos convexos.

Con el objetivo de dar un criterio para la existencia de soluciones del problema (3.2) necesitamos definir el siguiente concepto.

Definición 3.2 (Función coerciva)**.** *Una función $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ es coerciva si,*

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} F(u) = +\infty,$$

cuando $u \in V$.

Finalmente, el resultado de existencia es el siguiente.

Teorema 3.3 (Existencia y unicidad de soluciones de un problema de optimización convexa)**.** *Asumamos, además de las hipótesis (3.1) que,*

1. *$\mathscr{C}$ es acotado o que,*
2. *F es coerciva sobre $\mathscr{C}$.*

Entonces, el problema (3.2) tiene al menos una solución. Si además F es estrictamente convexa en $\mathscr{C}$, la solución es única.

Demostración. Sea u_n una sucesión minimizante de (3.2), i.e., u_n es una sucesión de $\mathscr{C}$ de manera que,

$$F(u_n) \to \inf_{v\in\mathscr{C}} F(v) = \alpha.$$

Nuestro objetivo es demostrar que $\alpha > -\infty$.
Debemos distinguir dos casos, uno por cada suposición de la **o**:

- Si $\mathscr{C}$ es acotado. Como también es cerrado, u_n converge a un punto $u \in \mathscr{C}$. De manera que u_n está acotada y por tanto $\alpha = F(u) > -\infty$.
- Si F es coerciva, entonces $F(u_n)$ está acotada superiormente y por tanto, existe una subsucesión u_{n_k} que converge débilmente en V a $u \in \mathscr{C}$. Por el teorema 2.13, F sigue siendo lsc en la topología débil, de donde,

  $$F(u) \leq \liminf_{n_k\to\infty} F\left(u_{n_k}\right) = \alpha,$$

  y por tanto u es solución de (3.2) y $\alpha > -\infty$.

Finalmente, si F es estrictamente convexa demostremos que la solución es única.
Sean u, v dos soluciones del problema de minimización de manera que $F(u) = \alpha, F(v) = \beta$. Por la proposición 3.1, $\dfrac{u+v}{2}$ también es solución del problema.
Como F estrictamente convexa en $\mathscr{C}$,

$$F\left(\frac{u+v}{2}\right) < \frac{1}{2}\left[F(u) + F(v)\right] = \frac{\alpha+\beta}{2} \underset{\alpha,\beta \text{ sol.}}{=} \frac{2\alpha}{2} = \alpha,$$

que es una contradicción por ser α ínfimo de F en $\mathscr{C}$. □

Observación 11. Sea $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal continua, coerciva en el sentido de

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2,\ \alpha > 0.$$

Demostremos que la función

$$v \mapsto a(v,v),$$

es estrictamente convexa.
Dados $v, w \in V$ tenemos que

$$a(v-w, v-w) \geq \alpha \|v-w\|^2 \geq 0,$$

entonces,

$$0 \leq \alpha \|v-w\|^2 = \alpha\left(\|v\|^2 - 2\|v-w\| + \|w\|^2\right) \leq a(v,v) - 2a(v,w) + a(w,w),$$

$$\Longrightarrow 2a(v,w) \leq a(v,v) + a(w,w). \tag{3.6}$$

Por tanto, para $\lambda \in (0,1)$,

$$a(\lambda v + (1-\lambda)w, \lambda v + (1-\lambda)w) = \lambda^2 a(v,v) + 2\lambda(1-\lambda)a(v,w) + (1-\lambda)^2 a(w,w);$$

como $\lambda \in (0,1)$, $\lambda^2 < \lambda$. Además, por (3.6) deducimos que

$$a(\lambda v + (1-\lambda)w, \lambda v + (1-\lambda)w) \leq \lambda a(v,v) + (1-\lambda)a(w,w).$$

Finalmente, la igualdad es posible si en (3.6) hay también una igualdad; esto es, si $v = w$.

3.3 Caracterización de las soluciones

Nuestro objetivo será caracterizar las soluciones (o la única solución) del problema (3.2) cuando la función sea diferenciable o suma de diferenciables en el sentido de Gâteaux diferenciabilidad.

Teorema 3.4 (Caracterización de las soluciones de una función Gâteaux diferenciable)**.** *Sea $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ función que además de cumplir (3.1) es Gâteaux diferenciable con derivada continua F'.*
Si $u \in \mathscr{C}$ las tres condiciones son equivalentes:

(1.) u es una solución del problema (3.2).

(2.) $\langle F'(u), v-u\rangle \geq 0, \ \forall v \in \mathscr{C}$.

(3.) $\langle F'(v), v-u\rangle \geq 0, \ \forall v \in \mathscr{C}$.

Demostración. (1.) $\Longrightarrow$ (2.): Si u es ínfimo de F (si u es solución de (3.2)), entonces para cualquier $\lambda \in (0,1)$ y $v \in \mathscr{C}$ se tiene que,

$$F(u) \leq F(\lambda v + (1-\lambda)u),$$

multiplicando por $\dfrac{1}{\lambda}$ en ambos miembros y restando se obtiene,

$$\frac{1}{\lambda}[F(\lambda v + (1-\lambda)u) - F(u)] \geq 0.$$

Haciendo tender λ a 0 el primer término de la desigualdad tiende a

$$\langle F'(u), v-u\rangle \geq 0,$$

y por tanto, queda demostrado.
(2.) $\Longrightarrow$ (1.): Debemos demostrar que para cualquier $v \in \mathscr{C}$, $F(u) \leq F(v)$. Como F satisface que

$$\langle F'(u), v-u\rangle \geq 0,$$

entonces utilizando la proposición 2.38 particularizando en u,

$$F(v) \geq F(u) + \langle F'(u), v-u \rangle, \ \forall v \in V.$$

De manera que,

$$F(v) - F(u) \geq \langle F'(u), v-u \rangle \geq 0, \ \forall v \in V.$$

(2.) $\Longrightarrow$ (3.): Sabemos que F' es un operador monótono, es decir, que

$$\langle F'(v) - F'(u), v-u \rangle \geq 0, \ \forall u, v \in V.$$

Además suponemos que pasa (2.), de manera que sumando (2.) y la desigualdad anterior resulta,

$$\langle F'(v) - F'(u), v-u \rangle + \langle F'(u), v-u \rangle \geq 0 \Longrightarrow \langle F'(v) - F'(u) + F'(u), v-u \rangle \geq 0,$$

$$\Longrightarrow \langle F'(v), v-u \rangle = (3.) \geq 0.$$

(3.) $\Longrightarrow$ (2.): Suponemos ahora que $\langle F'(u), v-u \rangle \geq 0, \ \forall v \in \mathscr{C}$ y queremos demostrar que $\langle F'(v), v-u \rangle \geq 0, \ \forall v \in \mathscr{C}$.

Consideremos $v = \lambda w + (1-\lambda) u$ con $\lambda \in (0,1)$, $w \in V$. Como F cumple (3.) se tiene,

$$\langle F'(v), v-u \rangle \geq 0,$$

substituyendo v,

$$\langle F'(\lambda w + (1-\lambda) u), \lambda w + (1-\lambda) u - u \rangle \geq 0,$$

de donde,

$$\lambda \langle F'(\lambda w + (1-\lambda) u), w-u \rangle \geq 0,$$

y por ser $\lambda \neq 0$,

$$\langle F'(\lambda w + (1-\lambda) u), w-u \rangle \geq 0.$$

Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como,

$$\phi(\lambda) = F(\lambda(w-u) + u)\ [1].$$

Observemos que $\phi'(\lambda)$ es precisamente

$$\langle F'(\lambda w + (1-\lambda) u), w-u \rangle = \langle F'(\lambda(w-u) + u), w-u \rangle.$$

Como ϕ' es función continua (no es más que la derivada Gâteaux de F en el punto $F'(\lambda(w-u)+u)$ con dirección $w-u$ y $F' \in V'$), el límite de ϕ' cuando $\lambda \to 0$ es (2.) para todo $w \in \mathscr{C}$. □

Un teorema más general es que nos asegura la existencia de soluciones para (3.2) siendo F suma de dos funciones una de ellas Gâteaux diferenciable.

[1] Es la misma función considerada en la demostración del teorema 2.39.

Teorema 3.5. *Sea $F = F_1 + F_2$ siendo $F_1, F_2 : \mathscr{C} \to \mathbb{R}$ convexas y lsc y además F_1 Gâteaux diferenciable con derivada F_1'.*
Entonces, si $u \in \mathscr{C}$ estas tres condiciones son equivalentes:

(1.) u es una solución de (3.2).

(2.) $\langle F_1'(u), v-u\rangle + F_2(v) - F_2(u) \geq 0,\ \forall v \in \mathscr{C}$.

(3.) $\langle F_1'(v), v-u\rangle + F_2(u) - F_2(v) \geq 0,\ \forall v \in \mathscr{C}$.

Demostración. (1.) $\Longrightarrow$ (2.): Si u es solución de (3.2), entonces

$$F(u) \leq F(\lambda v + (1-\lambda)u),\ \forall v \in \mathscr{C}, \lambda \in (0,1).$$

Dado que $F = F_1 + F_2$ y ambas son convexas, se obtiene

$$F_1(u) + F_2(u) \leq F_1(\lambda v + (1-\lambda)u) + \lambda F_2(v) + (1-\lambda)F_2(u)$$

$$\frac{F_1(u)}{\lambda} \leq \frac{1}{\lambda}F_1(\lambda(v-u)+u) + F_2(v) - F_2(u)$$

$$0 \leq \frac{F_1(\lambda(v-u)+u) - F_1(u)}{\lambda} + F_2(v) - F_2(u).$$

Cuando $\lambda \to 0$ obtenemos (2.).
(2.) $\Longrightarrow$ (1.): De la proposición 2.38 particularizando en u tenemos que, para F_1,

$$F_1(v) \geq F_1(u) + \langle F_1'(u), v-u\rangle,\ \forall v \in V,$$

i.e.,

$$F_1(v) - F_1(u) - \langle F_1'(u), v-u\rangle \geq 0,\ \forall v \in V,$$

Sumándola con (2.) resulta,

$$F_1(v) - F_1(u) - \langle F_1'(u), v-u\rangle + \langle F_1'(u), v-u\rangle + F_2(v) - F_2(u) = F(v) - F(u) \geq 0,\ \forall v \in \mathscr{C},$$

de donde u es solución de (3.2).
(2.) $\Longrightarrow$ (3.): Supongamos que $\langle F_1'(u), v-u\rangle + F_2(v) - F_2(u) \geq 0,\ \forall v \in \mathscr{C}$. Comprobemos que $\langle F_1'(v), v-u\rangle + F_2(u) - F_2(v) \geq 0,\ \forall v \in \mathscr{C}$.

Por ser F_1' es monótona se tiene que

$$\langle F_1'(v) - F_1'(u), v-u\rangle \geq 0,\ \forall u, v \in V.$$

Sumando esta desigualdad a (2.) obtenemos lo deseado (es simétrico a (2.) $\Longrightarrow$ (3.) de la demostración del teorema anterior).
(3.) $\Longrightarrow$ (2.): Consideremos $v = \lambda w + (1-\lambda)u$ con $\lambda \in (0,1)$, $w \in V$. Como F cumple (3.) se tiene,

$$\lambda\langle F_1'(u), w-u\rangle - F_2(u) + F_2[\lambda w + (1-\lambda)u] \geq 0$$

Como F_2 es convexa,

$$\lambda \left\langle F_1'(u), w-u \right\rangle - F_2(u) + \lambda F_2(w) + (1-\lambda) F_2(u) = \lambda \left\langle F_1'(u), w-u \right\rangle + \lambda F_2(w) - \lambda F_2(u) \geq 0$$

Dividiendo por λ,

$$\left\langle F_1'(u), w-u \right\rangle + F_2(w) - F_2(u) \geq 0, \forall\, w \in \mathscr{C}$$

que es precisamente (2.) (como tiene que ser para cualquier vector, es independiente que sea v o w). □

3.4 Estudio de algunas desigualdades variacionales

Sigamos asumiendo que estamos en las mismas condiciones respecto a V que en las secciones anteriores. Sea $\phi : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ que satisface que

$$\text{es convexa, lsc y propia,} \tag{ϕ-1}$$

y $A : V \longrightarrow V'$ tal que

- A es débilmente continua en los subespacios de V de dimensión finita. (A-2)
- A es monótona. (A-3)
- Existe un $v_0 \in \text{Dom}\,\phi$ tal que,

$$\frac{\langle Av, v-v_0 \rangle + \phi(v)}{\|v\|} \to +\infty \text{ si } \|v\| \to +\infty. \tag{A-4}$$

Nuestro objetivo ahora es estudiar la existencia de elementos $u \in V$ de manera que satisfagan la desigualdad variacional,

$$\left\langle Au - u^*, v-u \right\rangle + \phi(v) - \phi(u) \geq 0, \ \forall\, v \in V, \tag{3.7}$$

con $u^* \in V'$ previamente fijado.

Con estas hipótesis podemos formular el siguiente resultado:

Teorema 3.6 (Existencia de soluciones del problema (3.7))**.** *Sean ϕ y A funciones que satisfacen $(\phi-1), (A-2), (A-3), (A-4)$ respectivamente. Dado un $u^* \in V'$ hay al menos un $u \in V$ que es solución de la desigualdad variacional (3.7).*

3.4.1 Demostración del teorema de existencia de soluciones

La demostración del teorema 3.6 es larga y compleja, por eso la realizaremos en cuatro etapas.

Funciones de proximidad

Presentemos un tipo de funciones que nos serán útiles, no sólo para la demostración del teorema, sino como ejemplo de aplicación de la sección **2.3**.

Consideremos el espacio de Hilbert $(V, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle)$ y la función $\phi : V \to \mathbb{R}$ lsc, propia y convexa. Sean,

$$F = F_1 + F_2, \quad F_2 = \phi, \tag{3.8}$$

$$F_1(u) = \frac{1}{2}\|u - x\|^2, \quad x \in V \text{ fijado.} \tag{3.9}$$

Demostremos en primer lugar que F_1 es estrictamente convexa.

Sabemos la siguiente igualdad[2]:

$$\|\lambda u + (1-\lambda)v - x\|^2 = \lambda\|u - x\|^2 + (1-\lambda)\|v - x\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|u - v - 2x\|^2, \tag{3.10}$$

para todo $u, v \in V, \lambda \in (0,1)$.

Dado que $-\lambda(1-\lambda)\|u - v - 2x\|^2 < 0$, es claro que,

$$\|\lambda u + (1-\lambda)v - x\|^2 < \lambda\|u - x\|^2 + (1-\lambda)\|v - x\|^2.$$

Aplicando la definición de F_1 tenemos,

$$F_1(\lambda u + (1-\lambda)v) = \frac{1}{2}\|\lambda u + (1-\lambda)v - x\|^2 < \lambda\frac{1}{2}\|u - x\|^2 + (1-\lambda)\frac{1}{2}\|v - x\|^2 = \lambda F_1(u) + (1-\lambda)F_1(v),$$

para cualquier $u, v \in V$ y $\lambda \in (0,1)$, de modo que F_1 es estrictamente convexa.

Dado que la suma de una función estrictamente convexa y una convexa es una función estrictamente convexa[3], F es estrictamente convexa; además es lsc porque F_1 es lsc y F_1 es lsc también (es un producto escalar y usando la observación 11). No sólo eso, sino que F es

[2]

Demostración.

$$\lambda\|u - x\|^2 + (1-\lambda)\|v - x\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|u - v - 2x\|^2 =$$
$$\lambda\|u - x\|^2 + (1-\lambda)\|v - x\|^2 - \lambda(1-\lambda)\left(\|u - x\|^2 - 2\langle\langle u - x, v - x\rangle\rangle + \|v - x\|^2\right) =$$
$$[\lambda - \lambda(1-\lambda)]\|u - x\|^2 + [(1-\lambda) - \lambda(1-\lambda)]\|v - x\|^2 + 2\lambda(1-\lambda)\langle\langle u - x, v - x\rangle\rangle =$$
$$\lambda^2\|u - x\|^2 + 2\lambda(1-\lambda)\langle\langle u - x, v - x\rangle\rangle + (1-\lambda)^2\|v - x\|^2 = \|\lambda u + (1-\lambda)v - x\|^2.$$

□

[3] Ver https://math.stackexchange.com/questions/325952/sum-of-strictly-convex-and-convex-functions para la demotración

coerciva sobre V. De hecho, ϕ está acotada inferiormente por una función afín y continua que escribimos como,

$$\langle\langle u, y\rangle\rangle + \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

De donde,

$$F(u) \geq \frac{1}{2}\left\|u - x\right\|^2 + \langle\langle u, y\rangle\rangle + \alpha.$$

Operando resulta,

$$F(u) \geq \frac{1}{2}\left\|u + y - x\right\|^2 - \frac{1}{2}\left\|y - x\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|x\right\|^2 + \alpha,$$

y por tanto deducimos que $F(u) \to +\infty$ cuando $\left\|u\right\| \to +\infty$ para $u \in V$.
Si $\mathscr{C} = V$, aplicamos el teorema 3.3 y podemos asegurar que existe un único u en V de manera que $F(u)$ es ínfimo de F.
Además, gracias al teorema 3.5, dicho elemento se puede caracterizar como

1. $\langle\langle u - x, v - u\rangle\rangle + \phi(v) - \phi(u) \geq 0$,

2. $\langle\langle v - x, v - u\rangle\rangle + \phi(v) - \phi(u) \geq 0$,

para todo $v \in V$.

A la aplicación $u = u(x) : V \longrightarrow V$ se le denomina *función de proximidad* (con respecto de ϕ) y la denotamos por,

$$u = \text{prox}\, x. \tag{3.11}$$

Como caso especial de función de proximidad tenemos el siguiente:
Sea $\phi = \mathscr{I}_{\mathscr{C}}$ la función indicatriz de $\mathscr{C}$ siendo $\mathscr{C}$ un subconjunto cerrado convexo de V, calculemos la aplicación proyección.
Las condiciones 1. y 2. anteriores ahora quedan,

$$u \in \mathscr{C},\ \langle\langle u - x, v - u\rangle\rangle \geq 0,\ \ \forall v \in \mathscr{C}, \tag{3.12}$$

$$u \in \mathscr{C},\ \langle\langle v - x, v - u\rangle\rangle \geq 0,\ \ \forall v \in \mathscr{C}, \tag{3.13}$$

de manera que, aplicando la definición de función de aproximación resulta que,

$$u = \text{proj}_{\mathscr{C}}\, x.$$

Primer lema técnico

Primero de los tres lemas que necesitaremos para demostrar nuestro teorema

Lema 3.7. *El teorema 3.6 se cumple si además suponemos que V es de dimensión finita y que Dom ϕ está acotado.*

Demostración. Sabemos que todo espacio vectorial de dimensión finita es isométrico a $\mathbb{R}^n$ de manera que se le puede dotar de producto escalar, y por tanto, son Hilbert. Como V lo suponemos finito, V es espacio de Hilbert. Sea $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ el producto escalar definido en V. Además, podemos identificar V con V' gracias al teorema de *Representación de Riesz*.
Si u es solución de (3.7) tenemos que,

$$\left\langle\left\langle Au-u^*, v-u\right\rangle\right\rangle+\phi(v)-\phi(u)\geq 0,\ \forall v\in V, \tag{3.14}$$

o, equivalentemente,

$$\left\langle\left\langle u-\left(u-Au+u^*\right), v-u\right\rangle\right\rangle+\phi(v)-\phi(u)\geq 0,\ \forall v\in V, \tag{3.15}$$

y gracias a 1 (*primera caracterización* obtenida en la subsección referente a las funciones de proximidad) y a la definición de la función prox u, la desigualdad anterior es equivalente a,

$$u=\text{prox}\left(u-Au+u^*\right). \tag{3.16}$$

Dado que la aplicación prox $(\cdot)$ esta definida sobre Dom ϕ -que es un conjunto cerrado, convexo y acotado- la existencia de un punto fijo de (3.16) es una consecuencia inmediata del teorema de punto fijo de Brouwer.

Se puede demostrar que la aplicación $u\mapsto$ prox $(u-Au+u^*)$ es continua. Efectivamente, por $(A-2)$, A es débilmente continua, y como el espacio es de Hilbert de dimensión finita, sabemos que débilmente continua implica fuertemente continua. Por tanto, $u\mapsto u-Au+u^*$ también es continua. Además, prox $(\cdot)$ lo es también:
Sean $v_1, v_2\in V$ de manera que $u_1=$ prox v_1, $u_2=$ prox v_2. Queremos demostrar que
$\|\text{prox } v_1-\text{prox } v_2\|=\|u_1-u_2\|\leq\|v_1-v_2\|$.

Las relaciones habituales de funciones de proximidad son,

$$\langle\langle u_1-v_1, u_2-u_1\rangle\rangle+\phi(u_2)-\phi(u_1)\geq 0, \tag{3.17}$$
$$\langle\langle u_2-v_2, u_1-u_2\rangle\rangle+\phi(u_1)-\phi(u_2)\geq 0. \tag{3.18}$$

Sumando estas desigualdades,

$$0\leq\langle\langle u_1-v_1, u_2-u_1\rangle\rangle+\langle\langle u_2-v_2, u_1-u_2\rangle\rangle=$$
$$-\langle\langle u_1-v_1, u_1-u_2\rangle\rangle+\langle\langle u_2-v_2, u_1-u_2\rangle\rangle=$$
$$\langle\langle v_1-u_1+u_2-v_2, u_1-u_2\rangle\rangle=$$
$$\langle\langle v_1-v_2, u_1-u_2\rangle\rangle+\langle\langle -u_1+u_2, u_1-u_2\rangle\rangle=$$
$$\langle\langle v_1-v_2, u_1-u_2\rangle\rangle-\|u_1-u_2\|^2,$$

de donde,

$$\|u_1-u_2\|^2\leq\langle\langle v_1-v_2, u_1-u_2\rangle\rangle.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky,

$$\|u_1-u_2\|^2\leq\langle\langle v_1-v_2, u_1-u_2\rangle\rangle\leq\|v_1-v_2\|\|u_1-u_2\|.$$

Notemos que si $u_1 - u_2 = 0$ la desigualdad se cumple trivialmente.
Supongamos entonces que $u_1 - u_2 \neq 0$, entonces, dividiendo el primer y tercer miembro de la desigualdad por $\|u_1 - u_2\|$ resulta,

$$\|u_1 - u_2\| \leq \|v_1 - v_2\|,$$

y en consecuencia, prox $(\cdot)$ es función continua. □

Segundo lema técnico

Lema 3.8. *El teorema 3.6 sigue siendo válido si únicamente suponemos que V es de dimensión finita.*

Demostración. Sea $r > 0$ y $\phi_r : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función definida como,

$$\phi_r(u) = \begin{cases} \phi(u), & \text{si } \|u\| \leq r, \\ +\infty, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \tag{3.19}$$

Observemos que ϕ_r no es más que la suma de ϕ y de $\mathscr{I}_{\mathscr{B}(0,1)}$, de manera que es claramente convexa y lsc.
Dado que el dominio efectivo de ϕ está acotado, el lema anterior nos asegura la existencia de un $u_r \in V$ con $\|u\| \leq r$ que satisface,

$$\langle Au_r - u^*, v - u_r \rangle + \phi_r(v) - \phi_r(u_r) \geq 0. \tag{3.20}$$

Entonces, para r suficientemente grande -i.e., más grande $\|v_0\|$ para un cierto $v_0 \in V$- tenemos

$$\langle Au_r - u^*, v_0 - u_r \rangle + \phi_r(v_0) - \phi_r(u_r) \geq 0$$

$$\langle Au_r, v_0 - u_r \rangle - \langle u^*, v_0 - u_r \rangle + \phi_r(v_0) - \phi_r(u_r) \geq 0$$

$$\frac{1}{\|u_r\|} \left[\langle Au_r, v_0 - u_r \rangle - \langle u^*, v_0 - u_r \rangle + \phi_r(v_0) - \phi_r(u_r) \right] \geq 0$$

$$\frac{1}{\|u_r\|} \left[\langle Au_r, v_0 - u_r \rangle - \phi_r(u_r) \right] \geq \frac{1}{\|u_r\|} \left[\langle u^*, v_0 - u_r \rangle - \phi_r(v_0) \right]$$

$$-\frac{1}{\|u_r\|} \left[\langle Au_r, v_0 - u_r \rangle - \phi_r(u_r) \right] \leq \frac{1}{\|u_r\|} \left[-\langle u^*, v_0 - u_r \rangle + \phi_r(v_0) \right]. \tag{3.21}$$

Como el miembro de la derecha está acotado independiente de r, por $(A-4)$ y dado que u_r está acotado también en V, podemos extraer una sucesión, u_{r_i} que converge a un elemento u de V (recordemos que V es de dimensión finita). Usando $(A-3)$, haciendo el límite cuando $r \to +\infty$ en (3.20) demostramos que es una solución de (3.7). □

Tercer lema técnico

Lema 3.9. *Si una sucesión u_m converge débilmente a $u \in V$ y satisface la desigualdad,*

$$\limsup \langle Au_m, u_m - u\rangle \leq 0^{4},$$

entonces,

$$\liminf \langle Au_m, u_m - v\rangle \geq \langle Au, u - v\rangle\,,\ \forall v \in V.$$

Demostración. Como A es monótona $(A-3)$,

$$\langle Au_m - Au, u_m - u\rangle = \langle Au_m, u_m - u\rangle - \langle Au, u_m - u\rangle \geq 0.$$

En consecuencia,

$$\liminf \langle Au_m, u_m - u\rangle \geq \langle Au, u_m - u\rangle \to 0.$$

Como suponemos que $\limsup \langle u_m - u, Au_m\rangle \leq 0$, todo junto nos queda

$$\lim \langle Au_m, u_m - u\rangle = 0. \tag{3.22}$$

Sea $w = \lambda(v-u) + u$ con $\lambda \in (0,1)$. Escribiendo la condición de monotonicidad en u_m, w resulta,

$$0 \leq \langle Au_m - Aw, u_m - w\rangle = \langle Au_m - Aw, u_m - \lambda(v-u) - u\rangle$$

$$0 \leq \lambda\langle Au_m, u - v\rangle - \langle Aw, u_m - u\rangle + \langle Au_m, u_m - u\rangle - \lambda\langle Aw, u - v\rangle$$

$$\langle Aw, u_m - u\rangle - \langle Au_m, u_m - u\rangle + \lambda\langle Aw, u - v\rangle \leq \lambda\langle Au_m, u - v\rangle\,.$$

Tomando el límite inferior cuando $m \to +\infty$ y teniendo en cuenta (3.22) y que $u_m \rightharpoonup u$ obtenemos

$$\lambda \liminf \langle Au_m, u - v\rangle \geq \lambda\langle Aw, u - v\rangle\,.$$

Dividiendo por λ,

$$\liminf \langle Au_m, u - v\rangle \geq \langle Aw, u - v\rangle = \langle A[\lambda(v-u) + u], u - v\rangle\,,$$

y cuando λ tiende a 0,

$$\liminf \langle Au_m, u - v\rangle \geq \langle Aw, u - v\rangle = \langle Au, u - v\rangle\,,$$

entonces,

$$\liminf \langle Au_m, u_m - v\rangle = \lim \langle Au_m, u_m - v\rangle + \liminf \langle Au_m, u - v\rangle \geq \langle Au, u - v\rangle\,,$$

demostrando así el lema. □

[4] Ver 2.6 para recordar la definición de límite superior

Demostración del teorema

Con todas las herramientas que hemos dado ya estamos en condiciones de poder dar la demostración del teorema 3.6.

Demostración. Sea $\mathscr{V}$ una familia de subespacios de dimensión finita de V que contienen a v_0. Queremos demostrar que dado un $u^* \in V'$ hay al menos un $u \in V$ que es solución de la desigualdad variacional (3.7).

Para cada $V_m \in \mathscr{V}$ el **segundo lema técnico** nos asegura la existencia de un $u_m \in V_m$ tal que,

$$\langle Au_m - u^*, v - u_m \rangle + \phi(v) - \phi(u_m) \geq 0, \ \forall v \in V_m. \tag{3.23}$$

Si $v = v_0$, tenemos una desigualdad simétrica a la (3.21), de donde deducimos que u_m está en V. En estas condiciones, tenemos que para un ultrafiltro $\mathscr{U}$ más fino que V,

$$u_m \rightharpoonup u \text{ en } V.$$

Escribiendo con $v = u$ la desigualdad (3.23) y haciendo el límite superior resulta,

$$\limsup \langle Au_m, u_m - u \rangle \leq \limsup \left[\phi(u) - \phi(u_m) \right].$$

Dado que ϕ es lsc y convexa,

$$\limsup \left[\phi(u) - \phi(u_m) \right] = \phi(u) - \liminf \phi(u_m) \leq 0,$$

lo que implica,

$$\limsup \langle Au_m, u_m - u \rangle \leq 0.$$

Por el **tercer lema técnico**,

$$\limsup \left\langle Au_m - u^*, u_m - v \right\rangle \leq \limsup \left[\phi(v) - \phi(u_m) \right] \leq \phi(v) - \liminf \phi(u_m).$$

Finalmente, por propiedad de semicontinuidad de ϕ,

$$\left\langle Au - u^*, u - v \right\rangle \leq \phi(v) - \phi(u),$$

de manera que tenemos demostrado el teorema. □

CAPÍTULO 4

DUALIDAD EN LA OPTIMIZACIÓN CONVEXA

4.1 Orientación

El objetivo de este capítulo es asociar a un problema de minimización ($\mathscr{P}$) un problema de maximización ($\mathscr{P}^*$) llamado el problema dual de $\mathscr{P}$. Estudiaremos la relación entre ambos problemas, la comparación del ínfimo de $\mathscr{P}$ con el supremo de $\mathscr{P}^*$ y la relación entre las soluciones de dichos problemas.

4.2 El problema primario y el problema dual

Sea V un espacio vectorial topológico y V' su dual.

Consideremos el funcional $F : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Nuestro objetivo es resolver el problema

$$(\mathscr{P}) \qquad \inf_{u \in V} \quad F(u). \tag{4.1}$$

A $\mathscr{P}$ le llamaremos problema primario (*primal* en inglés). El ínfimo de $\mathscr{P}$ será denotado por $inf\ \mathscr{P}$, y al igual que en el capítulo anterior, cada $u \in V$ de manera que,

$$F(u) = inf\ \mathscr{P}, \tag{4.2}$$

diremos que es una *solución* de $\mathscr{P}$.

El problema $\mathscr{P}$ será *no trivial* cuando exista un $u_0 \in V$ tal que,

$$F(u_0) < +\infty. \tag{4.3}$$

Observemos que de momento F es una función arbitraria, más adelante nos centraremos en el caso en que $F \in \Gamma_0(V)$, i.e., cuando F sea convexa, lsc y finita. Entonces el problema $\mathscr{P}$ será no trivial.

4.2.1 Problemas con perturbaciones

En primer lugar, definamos el concepto de perturbación y de problema perturbado.

Definición 4.1 (Función perturbación, problema perturbado)**.** *Sean V, V' espacios vectoriales topológicos en dualidad (ver apéndice A) y Y, Y' dos espacios Hausdorff también en dualidad. Como no hay ambigüedades, ambos productos de dualidad serán representados por $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Denotaremos por $p, q, r, \ldots$ los elementos de Y y por $p^*, q^*, r^*, \ldots$ los elementos de Y'. Consideremos $\Phi : V \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tal que $\Phi(u,0) = F(u)$. A dicha función la llamaremos función de perturbación.*

Podemos considerar para cada p el problema de minimización

$$\left(\mathscr{P}_p\right) \qquad \inf_{u\in V} \quad \Phi(u,p). \tag{4.4}$$

Notemos que para $p = 0$ se tiene que $\mathscr{P}_0 = \mathscr{P}$. A la familia de perturbaciones $\mathscr{P}_p$ se le llama problema perturbado de $\mathscr{P}$ -con respecto a la perturbación Φ dada-.

Ejemplo 4.2.1 (Función de perturbación)**.** *Supongamos que $V = Y = \mathbb{R}$, $F(u) = u^2$ y que $\Phi\left(u,p\right) = u^2 + p^2$. Claramente Φ es una perturbación de F, sin embargo, para la misma F puede haber más de una perturbación, por ejemplo, $\Phi\left(u,p\right) = u^2 + 4p^2$.*

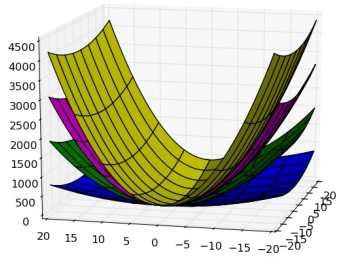

Figura 4.1: Perturbaciones de F de la forma $\phi(u,p) = u^2 + kp^2$ con $k = 1$, $k = 4$, $k = 7$ y $k = 10$ de colores azul, verde, magenta y amarillo respectivamente. Ver apéndice F para el código.

Observación 12. El espacio Y es el espacio de las variables de perturbación.

4.2.2 El problema dual respecto a las perturbaciones dadas

Dados el problema $\mathscr{P}$ y el problema perturbado $\mathscr{P}_p$, estamos en condiciones de definir el problema dual. Para ello consideremos

$$\Phi^* : V' \times Y' \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad \Phi^* \in \Gamma\left(V' \times Y'\right),^{1}$$

la función polar de Φ en la dualidad entre $V \times Y$ y $V' \times Y'$, que clásicamente se escribe como

$$\left\langle \left(u^*, p^*\right), (u, p) \right\rangle_{V \times Y} = \left\langle u^*, u \right\rangle_V + \left\langle p^*, p \right\rangle_Y .$$

El problema

$$\left(\mathscr{P}^*\right) \qquad \sup_{p^* \in Y'} \quad -\Phi^*(0, p^*), \tag{4.5}$$

es el *problema dual* de $\mathscr{P}$ con respecto Φ. El supremo de este problema es denotado por $sup\ \mathscr{P}^*$ y cualquier elemento $p^* \in Y'$ de manera que

$$-\Phi^*(0, p^*) = sup\ \mathscr{P}^*, \tag{4.6}$$

es llamado *solución de* $\mathscr{P}^*$.

El resultado siguiente nos da la primera relación entre $\mathscr{P}$ y $\mathscr{P}^*$.

Proposición 4.2. *Sea $\mathscr{P}$ un problema primario y $\mathscr{P}^*$ su dual. Si $inf\ \mathscr{P}$ y $sup\ \mathscr{P}^*$ son soluciones de $\mathscr{P}$ y $\mathscr{P}^*$ respectivamente, entonces*

$$-\infty \leq sup\ \mathscr{P}^* \leq inf\ \mathscr{P} \leq +\infty. \tag{4.7}$$

Demostración. Sea $p^* \in Y'$; por definición de función polar,

$$\Phi^*\left(0, p^*\right) = \sup_{u \in V, p \in Y} \left[\left\langle p^*, p \right\rangle - \Phi\left(u, p\right)\right].$$

En particular, para $p = 0$,

$$\Phi^*\left(0, p^*\right) \geq \left\langle p^*, 0 \right\rangle - \Phi\left(u, 0\right),$$
$$-\Phi^*\left(0, p^*\right) \leq \Phi\left(u, 0\right).$$

Como la relación anterior es válida para cualquier $u \in V$ y $p^* \in Y'$, se tiene que $sup\ \mathscr{P}^* \leq inf\ \mathscr{P}$. □

Tenemos un resultado parecido para el caso en que $\mathscr{P}$ o $\mathscr{P}^*$ (o ambos a la vez) no sean triviales.

Proposición 4.3. *Sea $\mathscr{P}$ un problema primario y $\mathscr{P}^*$ su dual. Si $inf\ \mathscr{P}$ y $sup\ \mathscr{P}^*$ son soluciones de $\mathscr{P}$ de $\mathscr{P}^*$ respectivamente.*

[1] Convexa, lsc y el supremo puntual de una familia de funciones afines.

1. *Si $\mathscr{P}$ es no trivial,*
$$-\infty \leq sup\ \mathscr{P}^* \leq inf\ \mathscr{P} < +\infty.$$
2. *Si $\mathscr{P}^*$ es no trivial,*
$$-\infty < sup\ \mathscr{P}^* \leq inf\ \mathscr{P} \leq +\infty.$$
3. *Si $\mathscr{P}$ y $\mathscr{P}^*$ son no triviales,*
$$-\infty < sup\ \mathscr{P}^* \leq inf\ \mathscr{P} < +\infty.$$

Demostración. Demostraremos únicamente (1.) dado que los otros se hacen de manera similar.
Si $\mathscr{P}$ es no trivial, $\exists u_0 \in V$ tal que $\Phi(u_0,0) = F(u_0) < \infty$. Utilizando la proposición anterior,
$$-\infty \leq sup\ \mathscr{P}^* \leq inf\ \mathscr{P} \leq \Phi(u_0,0) < +\infty.$$

□

4.2.3 Reiteración de la dualidad

De manera natural nos podemos realizar la siguiente pregunta: ¿cuál es el dual de $\mathscr{P}^*$?
Supongamos que para cada $u^* \in V'$ tenemos el siguiente problema,
$$\left(\mathscr{P}^*_{u^*}\right) \qquad \sup_{p^* \in Y'} \quad -\Phi^*(u^*,p^*). \tag{4.8}$$
Consideremos Φ^{**} la bipolar de Φ. Recordemos que Φ^{**} es la Γ-regularización de Φ. Entonces, el problema
$$\left(\mathscr{P}^{**}\right) \qquad \inf_{u \in V} \quad \Phi^{**}(u,0). \tag{4.9}$$
es el llamado *problema bidual* de $\mathscr{P}$.
Observemos que si $\Phi \in \Gamma_0(V \times Y)$ se tiene que $\Phi^{**}(u,0) = \Phi(u,0)$ para todo u, de manera que los problemas $\mathscr{P}$ y $\mathscr{P}^{**}$ son idénticos. Por tanto, $\mathscr{P}$ y $\mathscr{P}^*$ son duales el uno del otro y hay una completa simetría entre el problema primario y el dual.
En particular, esto implica que,
$$F \in \Gamma_0(V),$$
de manera que F es lsc, convexa y finita.

Esta es una de las razones por que los casos en que la hipótesis $\Phi \in \Gamma_0(V \times Y)$ se satisface son de especial interés para nosotros. La simetría entre $\mathscr{P}$ y $\mathscr{P}^*$ no implica, sin embargo, que $inf\ \mathscr{P} = sup\ \mathscr{P}^*$. Más adelante veremos bajo qué condiciones tenemos la igualdad.

Repitamos el proceso de "dualización". Para cada $p \in Y$ las perturbaciones de $\mathscr{P}^{**}$ son los problemas
$$\inf_{u \in V} \quad \Phi^{**}(u,p), \tag{4.10}$$
y el dual de $\mathscr{P}^{**}$ con respecto de cada una de las perturbaciones es el problema
$$\sup_{p^* \in Y'} \quad -\Phi^{***}(u,p^*). \tag{4.11}$$
Como $\Phi^{***} = \Phi^*$ (corolario 2.28), este problema y $\mathscr{P}^*$ son idénticos y no ganamos nada.

4.3 Problemas normales y problemas estables

A partir de ahora supondremos que $\Phi \in \Gamma_0(V \times Y)$ a no ser que se diga lo contrario. Así, ϕ es una función lsc, convexa y $\phi \not\equiv +\infty$ y $\phi \not\equiv -\infty$.

Para $p \in Y$ sea $h : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida por,

$$h(p) = inf\ \mathscr{P}_p = \inf_{u \in V} \Phi(u, p). \tag{4.12}$$

Gracias a esta función definiremos los conceptos de *problema normal* y *problema estable*, que nos darán las condiciones necesarias y suficientes para que $-\infty < inf\ \mathscr{P} = sup\ \mathscr{P}^* < +\infty$.

Estudiemos las propiedades de esta función.

Lema 4.4. *h es convexa*

Demostración. Sean $p, q \in V$. Debemos demostrar que

$$h(\lambda p + (1-\lambda) q) \leq \lambda h(p) + (1-\lambda) h(q),\ \forall \lambda \in [0,1],$$

siempre y cuando el miembro de la derecha de la desigualdad esté definido.
Si $h(p) \equiv +\infty$ o $h(q) \equiv +\infty$ el resultado se sigue trivialmente. Supongamos pues, que $h(p) \not\equiv +\infty$ y $h(q) \not\equiv +\infty$. Entonces, para cada $a > h(p)$ y para cada $b > h(q)$ existen $u \in V, v \in V$ tales que

$$h(p) < \phi(u, p) \leq a,$$

$$h(q) < \phi(v, q) \leq b.$$

Consideremos un w de manera que $w = \lambda u + (1-\lambda) v$, entonces

$$h(\lambda p + (1-\lambda) q) = \inf_{w \in V} \Phi(w, \lambda p + (1-\lambda) q)$$

$$\inf_{w \in V} \Phi(w, \lambda p + (1-\lambda) q) \leq \Phi(\lambda u + (1-\lambda) v, \lambda p + (1-\lambda) q) \underset{\Phi \text{ convexa}}{\leq} \lambda \Phi(u, p) + (1-\lambda) \Phi(v, q).$$

Haciendo tender $\Phi(u, p)$ a $h(p)$ y $\Phi(v, q)$ a $h(q)$ obtenemos el resultado. □

Observación 13.

- Para el lema anterior no hace falta suponer que $\Phi \in \Gamma_0(V \times Y)$. Con Φ convexa basta
- En general h no pertenece a $\Gamma_0(Y)$.

Observemos que $h : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ de modo que podemos calcular su conjugada h^*, el cual es nuestro próximo objetivo.

Lema 4.5.

$$h^*(p^*) = \Phi^*(0, p^*),\ \forall p^* \in Y'.$$

Demostración. Por propia definición de h^* tenemos

$$h^*\left(p^*\right) = \sup_{p\in Y}\left\{\left\langle p^*, p\right\rangle - h\left(p\right)\right\} = \sup_{p\in Y}\left\{\left\langle p^*, p\right\rangle - \inf_{u\in V}\Phi\left(u,p\right)\right\} =$$

$$\sup_{p\in Y}\left\{\left\langle p^*, p\right\rangle + \sup_{u\in V} -\Phi\left(u,p\right)\right\} = \sup_{p\in Y}\sup_{u\in V}\left\{\left\langle p^*, p\right\rangle - \Phi\left(u,p\right)\right\} = \Phi^*\left(0,p^*\right).$$

□

De manera inmediata tenemos

Lema 4.6.

$$sup\ \mathscr{P}^* = h^{**}\left(0\right).$$

Demostración. Recordemos que

$$h^{**}(p) = \sup_{p^*\in V'}\left\{\left\langle p, p^*\right\rangle - h^*(p^*)\right\}.$$

Entonces,

$$sup\ \mathscr{P}^* = \sup_{p^*\in Y'}\left\{-\phi^*(0,p^*)\right\} = \sup_{p^*\in Y'}\left\{-h^*\left(p^*\right)\right\} = \sup_{p^*\in Y'}\left\{\left\langle 0, p^*\right\rangle - h^*\left(p^*\right)\right\} = h^{**}\left(0\right),$$

como queríamos demostrar. □

Observación 14. Por 4.2 sabemos que $sup\ \mathscr{P}^* \leq inf\ \mathscr{P}$. Esta desigualdad es equivalente a $h^{**}\left(0\right) \leq h\left(0\right)$.

Definición 4.7 (Problema normal)**.** *El problema $\mathscr{P}$ es normal si $-\infty < h\left(0\right) < +\infty$ y h es lsc en 0.*

Con el concepto de problema normal podemos determinar la relación entre $\mathscr{P}$ y $\mathscr{P}^*$.

Teorema 4.8. *Bajo la hipótesis $\Phi \in \Gamma_0\left(V \times Y\right)$ las tres afirmaciones siguientes son equivalentes*

(1.) $\mathscr{P}$ es normal.

(2.) $\mathscr{P}^*$ es normal.

(3.) $inf\ \mathscr{P} = sup\ \mathscr{P}^*$ y este número es finito.

Demostración. Demostremos en primer lugar que (1.) $\Longleftrightarrow$ (3.) y en segundo lugar, (2.) $\Longleftrightarrow$ (3.).

(1.) $\Longleftrightarrow$ (3.): Supongamos primero que $\mathscr{P}$ es normal, entonces $h\left(0\right)$ es finita y h es lsc en 0. Sea $\overline{h}$ la lsc regularización de h. Sabemos que

$$h^\Gamma = h^{**} \leq \overline{h} \leq h. \tag{4.13}$$

Como suponemos que el problema es normal, tenemos que h es lsc en 0, de modo que $h(0) = \overline{h}(0) \in \mathbb{R}$; además h es convexa, de manera que, por el teorema 2.14, no puede tomar el valor $-\infty$ en ninguno de los puntos de su dominio. En resumen, por el teorema 2.21, $\overline{h} \in \Gamma(Y)$ y en consecuencia, $\overline{h} = \overline{h}^{**}$. La desigualdad (4.13) implica por las propiedades de la conjugación -sección 1.4.3-

$$h^* = h^{***} \geq \overline{h}^* \geq h^*,$$

por tanto, $h^* = \overline{h}^*$ y, conjugando ambos miembros de la igualdad, $h^{**} = \overline{h}^{**} = h$ de manera que $\overline{h}(0) = h(0) = h^{**}(0)$. Con esta última igualdad y aplicando el lema 4.6 obtenemos precisamente (3.).
Supongamos que se cumple (3.), entonces $h(0) = h^{**}(0) \in \mathbb{R}$ y por (4.13), $\overline{h}(0) = h(0) \in \mathbb{R}$ con lo que $\mathscr{P}$ es normal.

(1.) $\Longleftrightarrow$ (2.): $\mathscr{P}$ es normal $\Longleftrightarrow$ $h(0) \in \mathbb{R}$ y h es lsc en 0 $\Longleftrightarrow$ $h(0) = \overline{h}(0) \in \mathbb{R} \underset{\text{aplicando } *}{\Longleftrightarrow} h^*(0) = \overline{h}^*(0) \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow h^*$ es lsc en 0 y $h^*(0)$ finita $\Longleftrightarrow$ $\mathscr{P}^*$ es normal. □

Definición 4.9 (Problema estable)**.** *El problema $\mathscr{P}$ es estable si $h(0) \in \mathbb{R}$ y h es subdiferenciable en 0.*

Trataremos de relacionar la estabilidad del problema $\mathscr{P}$ con la existencia de soluciones, pero antes necesitamos un lema previo.

Lema 4.10. *El conjunto de soluciones de $\mathscr{P}^*$ es igual a $\partial h^{**}(0)$.*

Demostración. Si $p^* \in Y'$ es una solución de $\mathscr{P}^*$, tenemos

$$-\Phi^*(0, p^*) \geq -\Phi^*(q^*, 0), \ \forall q^* \in Y',$$

utilizando el lema 4.5

$$-h^*(p^*) \geq -h^*(q^*), \ \forall q^* \in Y' \Longleftrightarrow -h^*(p^*) = \sup_{q^* \in Y'} \{\langle 0, q^* \rangle - h^*(q^*)\} = h^{**}(0),$$

lo que es equivalente a

$$p^* \in \partial h^{**}(0).$$

Demostremos ahora que si $p^* \in \partial h^{**}(0)$ entonces p^* es solución de $\mathscr{P}^*$, i.e., $p^* = sup\ \mathscr{P}^*$.

$$p^* \in \partial h^{**}(0) \Longleftrightarrow -h^*(p^*) = \sup_{q^* \in Y'} \{\langle 0, q^* \rangle - h^*(q^*)\} = h^{**}(0) \Longleftrightarrow -h^*(p^*) \geq -h^*(q^*), \ \forall q^* \in Y.$$

Por tanto

$$-\Phi^*(0, p^*) \geq -\Phi^*(0, q^*), \ \forall q^* \in Y',$$

y $p^* \in Y'$ es una solución de $\mathscr{P}^*$. □

Ya estamos en condiciones de poder formular el teorema.

Teorema 4.11. *Dados los problemas $\mathscr{P}$ y su dual $\mathscr{P}^*$, se tiene la siguiente equivalencia:*

(1.) $\mathscr{P}$ es estable.

(2.) $\mathscr{P}$ es normal y $\mathscr{P}^*$ tiene al menos una solución.

Demostración. ($\Longrightarrow$): Si $\mathscr{P}$ es estable, $h(0)$ es finita y $\partial h(0) \neq \emptyset$. En este caso, $h(0) = h^{**}(0) \in \mathbb{R}$, lo que implica que el problema es normal. Además, por la proposición 2.32, $\partial h(0) = \partial h^{**}(0) \neq \emptyset$. Por el lema 4.10, tenemos la implicación.
($\Longleftarrow$): Si $\mathscr{P}$ es normal, $h(0) = h^{**}(0) \in \mathbb{R}$; además, $\mathscr{P}^*$ tiene al menos una solución. Por el lema, $\partial h(0) = \partial h^{**}(0) \neq \emptyset$, con lo cual, $\mathscr{P}$ es estable. □

Notemos que cuando el problema es estable, el lema previo a la demostración nos dice que las soluciones de $\mathscr{P}^*$ son los subgradientes de h^{**} en el 0.
Además, como $\mathscr{P}^*$ es normal (por tanto $\mathscr{P}$ estable y entonces $\mathscr{P}$ normal) los subgradientes de $h^{**}(0)$ son las soluciones de $\mathscr{P}$.

Podemos resumir los teoremas 4.8 y 4.11 con el siguiente resultado.

Corolario 4.12. *Si $\mathscr{P}$ es un problema y $\mathscr{P}^*$ su dual, las tres siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1.) $\mathscr{P}$ y $\mathscr{P}^*$ son normales y tienen al menos una solución.

(2.) $\mathscr{P}$ y $\mathscr{P}^*$ son estables.

(3.) $\mathscr{P}$ es estable y tiene alguna solución.

Demostración. $\mathscr{P}$ es normal si, y sólo si, $\mathscr{P}^*$ lo es (por el teorema 4.8). Ahora, utilizando el teorema 4.11, la equivalencia entre (1.) y (2.) es inmediata. Por el mismo teorema, también es inmediata la equivalencia (1.) $\Longleftrightarrow$ (3.). □

Presentemos un criterio para saber si un problema es o no estable

Proposición 4.13 (Un criterio de estabilidad)**.** *Supongamos que Φ es convexa, que $inf\ \mathscr{P} \in \mathbb{R}$ y que*

$$\exists u_0 \in V \text{ tal que la aplicación } \psi_u : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ definida por } p \mapsto \Phi(u_0, p) \text{ es finita y continua en } 0. \tag{4.14}$$

Entonces, $\mathscr{P}$ es estable.

Demostración. Observemos que por el lema 4.4 h es convexa (incluso bajo la única hipótesis de ser Φ convexa) y $h(0)$ es finita.

Para cada $u \in V$, consideremos la función $\psi_u : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida por $p \mapsto \Phi(u, p)$.
ψ es función convexa, puesto que Φ lo es. Además, es continua y finita en 0 por hipótesis, de

manera que existe un entorno $\mathscr{V}$ del 0 en Y donde ψ está acotada superiormente por una constante finita M:

$$\psi_{u_0}(p) \leq M < +\infty, \ \forall p \in \mathscr{V}.$$

Por tanto,

$$h(p) = \inf_{u \in V} \Phi(u,p) \leq \psi_{u_0}(p) = \Phi(u_0,p) \leq M, \ \forall p \in \mathscr{V},$$

como la función convexa h está acotada en un entorno de 0, por el teorema 2.16 es continua en el interior de su dominio efectivo (el cual no es vacío). La proposición 2.31 nos asegura entonces que h subdiferenciable. □

Relaciones de extremalidad y existencia de soluciones

En esta subsección introduciremos las relaciones de extremalidad, las cuales son esenciales en el cálculo variacional. También daremos un teorema que relaciona las soluciones de $\mathscr{P}$ y $\mathscr{P}^*$ sin que el problema sea o bien normal, o bien estable.

Como primer resultado, presentemos las relaciones de extremalidad.

Proposición 4.14. *Si $\mathscr{P}$ y $\mathscr{P}^*$ tienen solución y si*

$$inf\ \mathscr{P} = sup\ \mathscr{P}^* \in \mathbb{R}, \tag{4.15}$$

todas las soluciones $\bar{u}$ de $\mathscr{P}$ y todas las soluciones $\bar{p}^*$ de $\mathscr{P}^*$ están relacionadas por la relación de extremalidad,

$$\Phi(\bar{u},0) + \Phi^*(0,\bar{p}^*) = 0, \tag{4.16}$$

o

$$(0,\bar{p}^*) \in \partial\Phi(\bar{u},0). \tag{4.17}$$

Recíprocamente, si $\bar{u} \in V$ y $\bar{p}^* \in Y'$ satisface la relación de extremalidad (4.16) entonces $\bar{u}$ es una solución de $\mathscr{P}$, $\bar{p}^*$ es solución de $\mathscr{P}^*$ y se tiene (4.15).

Observación 15. Las relaciones dadas por (4.16) y (4.17) reciben el nombre de *relaciones de extremalidad.*

Demostración. Tenemos

$$inf\ \mathscr{P} = \Phi(\bar{u},0) = sup\ \mathscr{P}^* = -\Phi^*(0,\bar{p}^*),$$

o equivalentemente

$$\Phi(\bar{u},0) + \Phi^*(0,\bar{p}^*) = 0,$$

que es precisamente (4.16).
Además, como $0 = \langle(\bar{u},0),(0,\bar{p}^*)\rangle$ entonces,

$$\Phi(\bar{u},0) + \Phi^*(0,\bar{p}^*) = \langle(\bar{u},0),(0,\bar{p}^*)\rangle,$$

que es idéntico a (4.17) por la proposición 2.32.
Supongamos que $\bar{u}$ y $\bar{p}^*$ satisfacen (4.16). Entonces,

$$\Phi(\bar{u},0)+\Phi^*\left(0,\bar{p}^*\right)=0.$$

Como $\Phi(\bar{u},0)=\inf_{u\in V}\phi(u,0)$ y $-\Phi^*\left(0,\bar{p}^*\right)=\sup_{p^*\in Y'}-\phi^*(0,p^*)$ y por hipótesis, $\mathscr{P},\mathscr{P}^*$ tiene solución, debe ocurrir que

$$\inf_{u\in V}\Phi(u,0)=\Phi(\bar{u},0)=-\Phi\left(0,\bar{p}^*\right)=-\sup_{p^*\in Y'}\Phi\left(0,p^*\right),$$

de manera que tenemos el resultado probado. □

Podemos reagrupar todos los resultados de esta sección en el siguiente teorema.

Teorema 4.15. *Supongamos V un espacio Banach reflexivo, $\Phi\in\Gamma_0(V\times Y)$ se cumple la condición (4.14) y que,*

$$\lim\Phi(u,0)=+\infty \text{ cuando } \|u\|\to+\infty,\ \forall u\in V.$$

Bajo estas condiciones, el problema $\mathscr{P}$ y su dual $\mathscr{P}^*$ tienen al menos una solución que satisface,

$$inf\ \mathscr{P}=sup\ \mathscr{P}^*,$$

y las relaciones (4.16) y (4.17).

Demostración. La función $F(u)=\Phi(u,0)$ es coerciva (por hipótesis) y por tanto, por el teorema 3.3 el problema tiene como mínimo una solución.
De la condición (4.14) del teorema 4.13 deducimos que $\mathscr{P}$ es estable, de manera que, por el teorema 4.11, existe al menos una solución para $\mathscr{P}^*$. Finalmente, por la proposición anterior, las condiciones (4.16) y (4.17) se satisfacen. □

4.4 Lagrangianos y puntos de silla

En esta sección introduciremos uno de los conceptos más importantes de la dualidad en la optimización convexa, la *función lagrangiana*. Es muy habitual resolver el problema dual utilizando esta función, sobre todo cuando nos encontramos problemas definidos en $\mathbb{R}^n$ (para un ejemplo práctico ver apéndice F).
En primer lugar presentemos la definición de dicha función

Definición 4.16. *La función*

$$L:\ V\times Y'\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$$

definida por

$$-L\left(u,p^*\right)=\sup_{p\in Y}\left\{\left\langle p^*,p\right\rangle-\phi\left(u,p\right)\right\},\quad \forall u\in V,\ \forall p^*\in Y', \tag{4.18}$$

es el lagrangiano o función lagrangiana del problema $\mathscr{P}$ con respecto la perturbación dada.

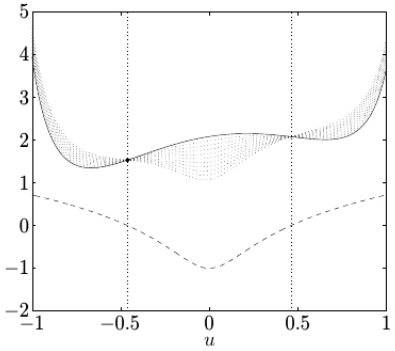

Figura 4.2: Imagen extraída de [6]. La curva sólida representa la función F a minimizar, la curva rayada es la restricción p^*. El conjunto factible es el intervalo [-0.46,0.46], el cual está indicado por dos lineas verticales punteadas. El $inf\ \mathscr{P}$ se alcanza en el punto (-0.46,1.54) y es un círculo sobre la gráfica de F. Las curvas punteas son $L(u,p^*)$ para $p = 1/10, 2/10, \ldots, 1$. Cada una de las funciones lagrangianas tienen un mínimo menor que 1.54, dado que $L(u,p^*) \leq F(u)$ como veremos más adelante.

Observación 16. Fijado $u \in V$, tenemos que $-L\left(u,p^*\right) = \phi_u^*(p^*)$ para todo $p^* \in Y'$. En efecto,

$$\phi_u^*(p^*) = \sup_{p \in Y} \left\{ \left\langle p^*, p \right\rangle - \phi_u\left(p^*\right) \right\},$$

que es precisamente $-L\left(u,p^*\right)$ estando u fijado.

Algunas de las propiedades del lagrangiano son,

Propiedades 4.4.1.

(1.) Para todo $u \in V$, el funcional,

$$\begin{aligned} L_u :\ & Y' \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ & p^* \longrightarrow L\left(u,p^*\right), \end{aligned}$$

es cóncavo y usc[2]

(2.) Si ϕ es convexa, para todo $p^* \in Y'$ el funcional,

$$\begin{aligned} L_{p^*} :\ & V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ & u \longrightarrow L\left(u,p^*\right), \end{aligned}$$

es convexo.

[2]Con la notación del primer tema, se dice que una función F es usc (*upper semicontinuous*) si

$$\forall c > F(u),\ \exists N_c \in \mathscr{N}_u(\tau) :\ \forall v \in N_c,\ F(v) < c.$$

Demostración. La demostración de estas propiedades pueden encontrarse en la página 55 de [1]. □

Observación 17. No podemos asegurar que L_{p^*} sea lsc incluso si $\phi \in \Gamma_0(V \times Y)$. En efecto, no sabemos si el ínfimo puntual de una familia de funciones lsc es lsc[3] ($-L$ es el supremo y por tanto L es menos el ínfimo).

Resulta útil expresar los problemas $\mathscr{P}$ y $\mathscr{P}^*$ en función de L.

Sin suponer nada sobre ϕ tenemos,

$$\phi^*(u^*, p^*) = \sup_{u \in V, p \in Y} \{\langle u^*, u\rangle + \langle p^*, p\rangle - \phi(u,p)\} =$$

$$\sup_{u \in V} \left\{ \langle u^*, u\rangle + \sup_{p \in Y} \{\langle p^*, p\rangle - \phi(u,p)\} \right\} =$$

$$\sup_{u \in V} \{\langle u^*, u\rangle - L(u, p^*)\}.$$

De donde,

$$-\phi^*(0, p^*) = \inf_{u \in V} L(u, p^*). \tag{4.19}$$

Sabemos por (4.5) que $\mathscr{P}^*$ es

$$\sup_{p^* \in Y'} \{-\phi(0, p^*)\};$$

de modo que el problema $\mathscr{P}^*$ se puede escribir como

$$(\mathscr{P}^*) \qquad \sup_{p^* \in Y'} \inf_{u \in V} L(u, p^*). \tag{4.20}$$

Si ahora asumimos que $\phi \in \Gamma_0(V \times Y)$ para todo $u \in V$ la función $\phi_u : p \mapsto \phi(u,p)$ pertenece a $\Gamma_0(Y)$. En efecto, ϕ_u es convexa por ser ϕ de $\Gamma_0(V \times Y)$ y $\phi_u \not\equiv +\infty$ y $\phi_u \neq +\infty$.
Por ello, $\phi_u^{**} = \phi_u$, de donde,

$$\phi(u,p) = \phi_u^{**}(p) = \sup_{p^* \in Y'} \{\langle p, p^*\rangle - \phi_u^*(p^*)\} = \sup_{p^* \in Y'} \{\langle p, p^*\rangle + L(u, p^*)\}.$$

Con ello,

$$\phi(u,0) = \sup_{p^* \in Y'} L(u, p^*), \tag{4.21}$$

y el problema $\mathscr{P}$ resulta

$$(\mathscr{P}) \qquad \inf_{u \in V} \sup_{p^* \in Y'} L(u, p^*). \tag{4.22}$$

[3] Ver [21] para saber bajo qué condiciones el ínfimo puntual de una familia de funciones lsc es lsc.

Definición 4.17. *Un punto* $(\bar{u}, \bar{p}^*)$ *de* $V \times Y'$ *es un punto de silla de* L *si,*

$$L(\bar{u}, p^*) \leq L(\bar{u}, \bar{p}^*) \leq L(u, \bar{p}^*), \tag{4.23}$$

para todo $u \in V$ *y todo* $p \in Y'$.

Caractericemos los puntos de silla.

Proposición 4.18. *Siempre que* $\phi \in \Gamma_0(V \times Y)$ *las siguiente afirmaciones son equivalentes,*

(1.) $(\bar{u}, \bar{p}^*)$ *es un punto de silla de* L.

(2.) $\bar{u}$ *es una solución del problema* $\mathscr{P}$, $\bar{p}^*$ *es una solución del problema* $\mathscr{P}^*$ *y además*

$$inf\ \mathscr{P} = sup\ \mathscr{P}^*.$$

Demostración. ($\Longrightarrow$): Supongamos que $(\bar{u}, \bar{p}^*)$ es un punto de silla de L. Como $L(\bar{u}, \bar{p}^*) \leq L(u, \bar{p}^*)$, $\forall u \in V$, entonces

$$L(\bar{u}, \bar{p}^*) = \inf_{u \in V} L(u, \bar{p}^*) \underset{(4.19)}{=} -\phi^*(0, \bar{p}^*).$$

También se tiene que $L(\bar{u}, p^*) \leq L(\bar{u}, \bar{p}^*)$, $\forall p^* \in Y'$, de donde,

$$L(\bar{u}, \bar{p}^*) = \sup_{p^* \in Y'} L(\bar{u}, p^*) \underset{(4.21)}{=} \phi(\bar{u}, 0).$$

Restando ambas igualdades se obtiene,

$$\phi(\bar{u}, 0) + \phi^*(0, \bar{p}^*) = 0.$$

Por el teorema 4.14, deducimos

$$inf\ \mathscr{P} = sup\ \mathscr{P}^*.$$

($\Longleftarrow$): Supongamos ahora que se satisface (2.). Por (4.19), (4.21) y por ser $\bar{u}, \bar{p}^*$ soluciones de $\mathscr{P}$ y $\mathscr{P}^*$ sabemos que

$$-\phi^*(0, \bar{p}^*) = \inf_{u \in V} L(u, \bar{p}^*) \leq L(\bar{u}, \bar{p}^*),$$

$$L(\bar{u}, \bar{p}^*) \leq \phi(\bar{u}, 0) = \sup_{p^* \in Y'} L(\bar{u}, p^*).$$

De nuevo, por ser $\bar{u}$ y $\bar{p}$ soluciones de $\mathscr{P}$ y $\mathscr{P}^*$, por el teorema 4.14 tenemos que

$$\phi(\bar{u}, 0) + \phi^*(0, \bar{p}^*) = 0.$$

Por tanto,

$$L(\bar{u}, p^*) \leq \sup_{p^* \in Y'} L(\bar{u}, p^*) = L(\bar{u}, \bar{p}^*) = \inf_{u \in V} L(u, \bar{p}^*) \leq L(u, \bar{p}^*),$$

de donde concluimos que $(\bar{u}, \bar{p}^*)$ es un punto de silla. □

Proposición 4.19. *Consideremos que $\phi \in \Gamma_0(V \times Y)$ y que el problema $\mathscr{P}$ es estable. Entonces $\bar{u}$ es una solución de $\mathscr{P}$ si, y solo si, existe un $\bar{p}^*$ de Y' tal que $(\bar{u}, \bar{p}^*)$ es un punto de silla de L.*

Demostración. ($\Longrightarrow$): Sea $\bar{u}$ una solución de $\mathscr{P}$. Como el problema es estable, por el teorema 4.11, $\mathscr{P}^*$ tiene al menos una solución $\bar{p}^*$, y $\mathscr{P}$ es normal. Por ser $\mathscr{P}$ normal, el teorema 4.8 no asegura que $inf\ \mathscr{P} = sup\ \mathscr{P}^*$. Por la proposición anterior, $(\bar{u}, \bar{p}^*)$ es un punto de silla.
($\Longleftarrow$): Dado $\bar{u} \in V$, si existe un $\bar{p}^* \in Y'$ tal que el par $(\bar{u}, \bar{p}^*)$ es un punto de silla de L, la proposición anterior nos asegura que $\bar{u}$ es solución de $\mathscr{P}$ y además que $\bar{p}^*$ es solución de $\mathscr{P}^*$. □

CAPÍTULO 5

APLICACIONES DE LA DUALIDAD AL CÁLCULO DE VARIACIONES

5.1 Orientación

En este capítulo aplicaremos los resultados de la dualidad para resolver el problema lineal de Dirichlet y un problema no lineal, el problema de la torsión elasto-plástica. Para ver detalladamente el paso de las EDP's a su forma variacional, consultar [15].

5.2 El problema de Dirichlet

Dada $f \in L^2(\Omega)$, con Ω abierto de $\mathbb{R}^n$ que satisface la propiedad de regularidad (ver apéndice sobre espacios Sobolev para más detalles), buscamos una función u solución de

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{en } \Gamma, \end{cases} \tag{5.1}$$

donde Γ es la frontera de Ω.

La formulación variacional del problema es la siguiente: Hay que encontrar una $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(u,v) = (f,v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{5.2}$$

siendo

$$(f,v) = \int_\Omega f(x)\,v(x)\,dx,$$

el producto escalar en $L^2(\Omega)$ y $a(u,v)$ es la forma bilineal continua y coerciva dada por:

$$a(u,v) = \sum_{|j|\leq 1} \left(D^j u, D^j v\right)_{L^2(\Omega)}.$$

Por la desigualdad de Poincaré (ver [18] o el apéndice sobre espacios Sobolev), la norma $\|u\| = \sqrt{a(u,u)}$ es equivalente sobre $H_0^1(\Omega)$ a la norma (D.1) y el teorema de Lax Milgram (ver [16] o [22]) garantiza la existencia y unicidad de una solución $\bar{u}$ de (5.2) que alcanza su mínimo en $H_0^1(\Omega)$ de

$$\frac{1}{2}a(u,u) - (f,u). \tag{5.3}$$

Reducimos el problema al capítulo 3 eligiendo

$$V = H_0^1(\Omega), \quad Y = L^2(\Omega)^n,$$

$$\Lambda = \text{ operador gradiente},$$

$$V' = H_0^1(\Omega)' = H^{-1}(\Omega), \quad Y' = Y,$$

$$F(u) = -(f,u), \ \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

$$G(p) = \frac{1}{2}\int_\Omega |p(x)|^2 \, dx.$$

Observemos que, con estas elecciones, el problema (B.10) es idéntico al problema de minimización (5.3) sobre $H_0^1(\Omega)$.

Calculemos $F^*(u^*)$.

$$F^*\left(u^*\right) = \sup_{u\in V}\left\{\left\langle u^*, u\right\rangle + \left(f,u\right)\right\} = \sup_{u\in V}\left\{\left\langle u^* + f, u\right\rangle\right\}^{1}.$$

Fácilmente se deduce que,

$$F^*\left(u^*\right) = \begin{cases} 0, & \text{si } u^* + f = 0, \\ +\infty, & \text{en otro caso,} \end{cases}.$$

En efecto, si $u^* + f = 0$ entonces $F^*(u^*) = 0$. Si $u^* + f \neq 0$, $F^*(u^*) = +\infty$ por no estar la aplicación $\left\langle u^* + f, u\right\rangle$ acotada superiormente.

Por otro lado, se puede comprobar que (ver apéndice E),

$$G^*(p^*) = \frac{1}{2}\int_\Omega |p^*(x)|^2 \, dx.$$

[1] Hemos identificado $H_0^1(\Omega)$ con un subesacio de $L^2(\Omega)$ y por tanto $(f,u) = \left\langle f, u\right\rangle$ siendo $\langle\cdot,\cdot\rangle$ la dualidad entre $H_0^1(\Omega)$ y $H^{-1}(\Omega)$.

En este caso, el problema (B.12) es equivalente a

$$\sup_{p^* \in L^2(\Omega)} \left\{ -F^* \left(\Lambda^* p^* \right) - G^* \left(-p^* \right) \right\}, \tag{5.4}$$

donde Λ^* es ahora el operador divergencia. Añadiendo la restricción de evaluar el problema a los p^* tales que $F^* \left(\Lambda^* p^* \right) < +\infty$, nos queda

$$\sup_{\substack{p^* \in L^2(\Omega)^n \\ \Lambda^* p^* + f = 0}} \left\{ -\frac{1}{2} \int_\Omega |p^*(x)|^2 \, dx \right\}, \tag{5.5}$$

Las hipótesis del problema (4.15) se satisfacen (ahora $\phi(u,0) = \frac{1}{2} a(u,u) - (f,u)$), de manera que el problema admite solución única dado que el funcional,

$$p \mapsto \frac{1}{2} \int_\Omega |p^*(x)|^2 \, dx$$

es estrictamente convexo.
Además, las relaciones de extremalidad (B.14) y (B.15) resultan,

$$F(\bar{u}) + F^* \left(\Lambda^* \bar{p}^* \right) = \left\langle \Lambda^* \bar{p}^*, \bar{u} \right\rangle,$$

$$G(\Lambda \bar{u}) + G^* \left(-p^* \right) = -\left\langle \bar{p}^*, \Lambda \bar{u} \right\rangle,$$

que, substituyendo la segunda,

$$\int_\Omega |\nabla \bar{u}(x)|^2 \, dx + \int_\Omega |\bar{p}^*(x)|^2 \, dx = -2 \int_\Omega \left\langle \nabla \bar{u}(x), \bar{p}^*(x) \right\rangle,$$

que solo es posible si,

$$\bar{p}^*(x) = -\nabla \bar{u}(x),$$

casi por todo $x \in \Omega$. Comprobémoslo

$$\int_\Omega \langle \nabla \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x) \rangle \, dx + \int_\Omega \left\langle \bar{p}^*(x), \bar{p}^*(x) \right\rangle \, dx + 2 \int_\Omega \left\langle \nabla \bar{u}(x), \bar{p}^*(x) \right\rangle \, dx =$$

$$\int_\Omega \left\langle \nabla \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x) + \bar{p}^*(x) \right\rangle \, dx + \int_\Omega \left\langle \bar{p}^*(x), \nabla \bar{u} + \bar{p}^*(x) \right\rangle \, dx = 0$$

$$\int_\Omega \left\langle \nabla \bar{u}(x) + \bar{p}^*(x), \nabla \bar{u} + \bar{p}^*(x) \right\rangle \, dx = \int_\Omega \left\| \nabla \bar{u}(x) + \bar{p}^*(x) \right\|^2 \, dx = 0 \iff \nabla \bar{u}(x) + \bar{p}^*(x) = 0 \text{ c.p.t. en } \Omega.$$

Finalmente tenemos,

Proposición 5.1. *El problema de Dirichlet (5.1) escrito como problema de minimización de la integral de Dirichlet (5.3), tiene como problema dual (5.5). Ambos tienen una única solución, $\bar{u}$, $\bar{p}^*$, que están relacionadas por*

$$\bar{p}^*(x) = -\nabla \bar{u}(x).$$

Además,

$$\max \mathscr{P}^* = \min \mathscr{P}.$$

5.3 El problema de la torsión elasto-plástico

Este problema se ha extraído de [7]. La motivación física está inspirada en [23] (pag 229).

Consideremos una barra infinita (usualmente es un cilindro) de sección transversal Ω, siendo Ω simplemente conexo. Supongamos que la barra está compuesta de un material isotrópico[2]. Empezando con una torsión inicial nula, se le va incrementando a la barra el momento de torsión. La determinación del campo de torsión es la solución al problema que nos planteamos en esta sección.

Dada $f \in L^2(\Omega)$, queremos resolver el siguiente problema,

$$(\mathscr{P}) \qquad \inf_{v \in C} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx - (f, v) dx \right\}, \tag{5.6}$$

donde $C = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) : |\nabla v| \leq 1, \text{ c.p.t. en } \Omega \right\}$ es un convexo cerrado y no vacío.
Consideremos

$$V = H_0^1(\Omega), \quad Y = L^2(\Omega)^n,$$

$$\Lambda : V \longrightarrow Y \text{ definido por } \Lambda v = \nabla v,$$

$$V' = H_0^1(\Omega)' = H^{-1}(\Omega), \quad Y' = Y,$$

$$F(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \, dx - (f, v), \ \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

$$G(p) = \mathscr{I}_S(p).$$

con $S = \left\{ p \in L^2(\Omega)^n \mid |p(x)| \leq 1, \text{ c.p.t en } \Omega \right\}$.
De donde $\mathscr{P}$ es equivalente a

$$\inf_{v \in V} \{F(v) + G(\Lambda v)\}. \tag{5.7}$$

Haciendo cálculos similares a los de la sección anterior se obtiene

$$F^*(v) = \frac{1}{2} \| v^* + f \|^2_{H^{-1}(\Omega)},$$

$$G^*(p^*) = \int_\Omega |p^*(x)| \, dx.$$

Entonces, el problema (B.4) puede escribirse como

$$\sup_{p^* \in L^2(\Omega)} \left\{ -F^*\left(\Lambda^* v^*\right) - G^*\left(-p^*\right) \right\}, \tag{5.8}$$

[2] Las sustancias isotrópicas presentan siempre el mismo comportamiento independientemente de la dirección. Para más información y ejemplos consultar https://www.quora.com/What-are-homogeneous-isotropic-anistropic-and-orthotropic-materials elástico perfectamente plástico que es de donde se ha sacado la definición de isótropo.

donde Λ^* vuelve a ser el operador divergencia. Observemos que $F^*(\Lambda v^*) = \frac{1}{2}\|\text{div}p^* + f\|^2_{H^{-1}(\Omega)}$. Por tanto, el problema dual resulta

$$\sup_{p^* \in L^2(\Omega)^n} \left\{ -\frac{1}{2}\|\text{div}p^* + f\|^2_{H^{-1}(\Omega)} - \int_\Omega |p^*(x)|\, dx \right\}. \tag{5.9}$$

El problema (5.7) en general no tiene porque cumplir la condición de estabilidad (B.13). No obstante, el problema $\mathscr{P}^*$ sí satisface la condición análoga (en el caso dual) a la condición (B.13) y debido a la simetría entre $\mathscr{P}$ y $\mathscr{P}^*$ podemos fácilmente traducir el teorema B.1. Por tanto $\mathscr{P}^*$ es estable, $\mathscr{P}$ admite una solución y

$$inf\ \mathscr{P} = sup\ \mathscr{P}^*.$$

Si $\bar{p}^*$ es solución de $\mathscr{P}^*$, las relaciones de extremalidad (B.14) y (B.15) resultan ahora

- $F(\bar{u}) + F^*\left(\Lambda^* \bar{p}^*\right) = \left\langle \Lambda^* \bar{p}^*, \bar{u} \right\rangle$ lo que equivale a $\Delta\bar{u} + \text{div}\bar{p}^* = -f$ (en $H^{-1}(\Omega)$ debido a las ecuaciones de Euler-Lagrange[3]
- $G(\Lambda\bar{u}) + G^*(-\bar{p}^*) = -\left\langle \bar{p}^*, \Lambda\bar{u} \right\rangle$ lo que equivale a

$$\int_\Omega |\bar{p}(x)|\, dx = -\int_\Omega \Lambda^* \bar{u}(x)\, \bar{p}^*(x)\ dx,$$

  o equivalentemente,

$$|\bar{p}(x)| = \Lambda^* \bar{u}(x)\, \bar{p}^*(x), \text{ c.p.t.}$$

De esta relación deducimos que en c.p.t. en Ω se tiene que

$$\bar{p}^* = \begin{cases} 0 & \text{si } |\nabla\bar{u}(x)| < 1, \\ \Lambda(x)\nabla\bar{u}(x) & \text{si } |\nabla\bar{u}(x)| = 1, \end{cases} \tag{5.10}$$

donde $\Lambda(x) = |\bar{p}^*(x)|$. Por tanto

$$\Delta\bar{u} + \text{div}(\Lambda(x)\nabla\bar{u}) = -f \text{ en } H^{-1}(\Omega). \tag{5.11}$$

Recíprocamente, si existe un $\lambda(x) \in L^2(\Omega)$ tal que $\lambda(x) = 0$ cuando $|\nabla\bar{u}(x)| \leq 1$ y satisface (5.11) definimos $\bar{p}^*$ tal y como en (5.10) y las relaciones de extremalidad se satisfacen asegurándonos así que $\bar{p}^*$ es solución de $\mathscr{P}^*$ y por tanto de $\mathscr{P}$.

[3] Ver página 11 del link http://www-users.math.umn.edu/~olver/ln_/cv.pdf

APÉNDICE A

CONCEPTOS NECESARIOS DE TOPOLOGÍA Y DE ESPACIOS DUALES

Orientación

En este apéndice presentaremos los conceptos básicos que se han utilizado en el trabajo de topología y espacios duales. El apéndice está inspirado en los primeros capítulos de [7]. Así mismo se puede complementar la lectura con [19], [16] y [18], donde aparecen más resultados y ejemplos de espacios vectoriales topológicos y de espacios duales.

Espacios vectoriales topológicos

Un espacio vectorial real V dotado de una topología τ se dice que es un *espacio vectorial topológico* (y se abrevia por e.v.t.) si las operaciones suma

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow V \\ (u, v) &\longrightarrow u + v, \end{aligned}$$

y el producto de un vector por un escalar

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\lambda, u) &\longrightarrow \lambda u, \end{aligned}$$

son continuas para las topologías producto $\tau \times \tau$ sobre $V \times V$ y $\tau(\mathbb{R}) \times V$ sobre $\mathbb{R} \times V$ respectivamente. Se tiene que los entornos de cualquier punto se obtienen a partir de los entornos del origen por traslación. Se dice además que el e.v.t. es localmente convexo (l.c.) si el origen admite una base de vecindades convexas.

Como ejemplo sencillo de e.v.t.l.c. consideremos un espacio vectorial normado $(V, \|\cdot\|)$, pues basta tomar la base de entornos constituida por los abiertos que contienen con el origen.

Dado un e.v.t. (V,τ) denotaremos por $(V,\tau)'$, o más brevemente por V', el espacio vectorial de todas los funcionales lineales (funciones lineales definidas de V a valores en $\mathbb{R}$) que son τ -continuas (continuas respecto la topología) sobre V . El espacio V' se conoce como *espacio dual* o dual *dual topológico* (para diferenciarlo del dual algebraico; este último contiene a las las aplicaciones lineales sobre V independiente de cualquier noción topológica), de (V,τ). Si $u^* \in V'$ entonces para todo $v \in V$ escribiremos

$$\left\langle u, u^* \right\rangle = u^*(u),$$

lo que define una forma bilineal $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V' \longrightarrow \mathbb{R}$ conocida como producto de dualidad entre V y V'. Esta última notación intenta a enfatizar los roles simétricos -en cierto sentido- jugados por V y V'. En efecto, dado $u \in V$, el funcional $\langle u,\cdot\rangle : V' \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma lineal sobre V' así como el funcional $\langle\cdot, u^*\rangle : V \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma lineal sobre V.

Teoremas de separación de conjuntos convexos: Teorema de Hahn-Banach

En esta subsección daremos uno de los teoremas más importantes del análisis convexo y del análisis funcional.

Definición A.1 (hiperplano)**.** *Un hiperplano (o hiperplano afín) es un subconjunto $\mathscr{H} \subseteq V$ de la forma*

$$\{v \in V \mid F(v) = \alpha\},$$

siendo $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ función lineal continua y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Notación A.0.1. *Escribiremos $[\ell = \alpha] = \{v \in V \mid F(v) = \alpha\}$, $[\ell \leq \alpha] = \{v \in V \mid F(v) \leq \alpha\}$ y se extiende la notación de forma natural a $<, >, \geq$.*

Observación 18. Se puede demostrar que $[\ell = \alpha]$ es cerrado respecto a la topología τ si, y sólo si, $\ell \in V'$. En tal caso, $[\ell \leq \alpha]$ y $[\ell \geq \alpha]$ serán cerrados en (V,τ), mientras que $[\ell < \alpha]$ y $[\ell > \alpha]$ serán abiertos en (V,τ).

Presentemos el teorema de Hahn-Banach en su versión geométrica.

Teorema A.2 (Hahn-Banach versión geométrica)**.** *Sea V e.v.t y $\mathscr{A}, \mathscr{B} \subseteq V$ dos subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos. Entonces,*

(1.) Si $\mathscr{A}$ es abierto existe un hiperplano cerrado que separa $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$, i.e., existe $\ell \in V'$ y un valor $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $\mathscr{A} \subseteq [\ell \leq \alpha]$ y $\mathscr{B} \subseteq [\ell \geq \alpha]$.

(2.) Si V es un e.v.t.l.c. se tiene que: Si $\mathscr{A}$ es cerrado y $\mathscr{B}$ es compacto, entonces existe un hiperplano que separa estrictamente $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$.

Observación 19. Si V es un e.v.t.l.c. Hausdorff entonces el Teorema de Hahn-Banach permite asegurar que existen formas lineales continuas no nulas. Más aún, bajo la condición de ser Hausdorff, dado cualquier par de puntos $v_1 \neq v_2$ en V, el punto (2.) del teorema nos asegura que es posible encontrar $u^* \in V'$ tal que $u^*(v_1) \neq u^*(v_2)$.

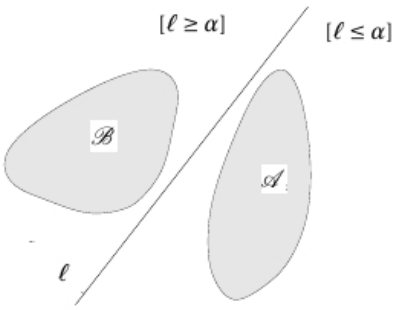

Figura A.1: Ejemplo de dos conjuntos separados por $\ell \in V'$.

Topología débil

En principio V' está desprovisto de estructura topológica. Sin embargo, es natural dotar V' de la topología de la convergencia puntual sobre V , que resulta ser la topología menos fina (i.e. la más pequeña) que hace que todos los funcionales $\langle u, \cdot \rangle$, con $u \in V$, sean continuos. Esta topología se denota por $\sigma\left(V', V\right)$ y se llama topología débil de V' asociada a la dualidad entre V y V'. Se puede demostrar (pero no es objeto de este trabajo) que $\left(V', \sigma\left(V', V\right)\right)$ resulta ser e.v.t.l.c. separado.

Un resultado útil en el estudio de la dualidad es el siguiente:

Teorema A.3 (Banach)**.** *Sean (V, τ) un e.v.t.l.c. separable y V' su dual. consideremos la aplicación $\ell \in V'$ $\sigma(V', V)$-continua, entonces existe un único $u \in V$ tal que $\forall\, u^* \in V'$, $\ell(u^*) = \langle u, u^* \rangle$. Es más, V y $\left(V', \sigma\left(V', V\right)\right)'$ son isomorfos como espacios vectorial vía la aplicación $u \mapsto \langle u, \cdot \rangle$.*

Demostración. Se puede encontrar en la página 19 de [7]. □

Similarmente, es posible dotar a V de la topología débil $\sigma\left(V, V'\right)$ definida como la topología menos fina que hace que todos las formas lineales $\langle \cdot, u^* \rangle$, $u^* \in V'$, sean continuas. Por definición, $\sigma\left(V, V'\right)$ está contenida en la topología inicial τ. El espacio $\left(V, \sigma\left(V, V'\right)\right)$ de hecho es e.v.t.l.c. y es separado cuando (V, τ) es un e.v.t.l.c. separado debido al teorema de Hahn-Banach.

Corolario A.4. *Sea V un espacio vectorial topológico localmente convexo y sea V' su dual. entonces*

(1.) Si $\mathscr{C} \subseteq V$ es convexo entonces

$$\mathscr{C} \text{ es } \tau\text{-cerrado si, y sólo si, } \mathscr{C} \text{ es } \sigma(V', V)\text{-cerrado.}$$

(2.) Si $F : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es convexa entonces

$$F \text{ es } \tau\text{-lsc si, y sólo si, } F \text{ es } \sigma(V', V)\text{-lsc.}$$

Demostración. Se puede encontrar en la página 20 de [7]. □

Es necesario también recordar los conceptos de la convergencia débil y *-débil.

Definición A.5 (Convergencia débil)**.** *Sea V e.v.t., una sucesión $\{u_n\} \subseteq V$ se dice que converge débilmente (en $\sigma(V', V)$) a un punto $u \in V$ y se escribe $u_n \rightharpoonup u$ si, y sólo si*

$$\langle u_n, u^* \rangle \to \langle u, u^* \rangle \quad \forall u^* \in V'.$$

Definición A.6 (Convergencia *-débil)**.** *Sea V e.v.t., una sucesión $\{u_n^*\} \subseteq V'$ se dice que converge *-débilmente (en $\sigma(V', V)$) a un punto $u^* \in V'$ y se escribe $u_n^* \rightharpoonup u^*$ si, y sólo si*

$$\langle u, u_n^* \rangle \xrightarrow{*} \langle u, u^* \rangle \quad \forall u \in V.$$

Espacios en dualidad

Diremos que dos e.v.t.l.c. $(V, \tau), (W, \sigma)$, son espacios en dualidad si existe un producto de dualidad entre V y W , esto es, una función bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

(1.) $\forall u \in V \setminus \{0\}, \exists v \in W : \langle u, v \rangle \neq 0.$

(2.) $\forall v \in W \setminus \{0\}, \exists u \in V : \langle u, v \rangle \neq 0.$

(3.) $\forall v \in W, \langle \cdot, v \rangle \in (V, \tau)'$ y $\forall \ell \in (V, \tau)', \exists! v \in W : \ell = \langle \cdot, v \rangle.$

(4.) $\forall u \in V, \langle u, \cdot \rangle \in (W, \sigma)'$ y $\forall \ell \in (W, \sigma)', \exists! u \in V : \ell = \langle u, \cdot \rangle.$

Diremos que (1.) y (2.) son propiedades que hacen a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ separar puntos. Las topologías τ y σ se dirán compatibles con la dualidad $(V, W, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y necesariamente son separadas. En efecto, dados $u, v \in V,\ u \neq v$ por (1.) tenemos que $\exists \alpha \in \mathbb{R}, w \in W$ tales que $\langle u, w \rangle \geq \alpha \langle v, w \rangle$. Por (3.), se tiene que $u \in \{\tilde{u} \in V \mid \langle \tilde{u}, w \rangle < \alpha\} \in \tau$ y $v \in \{\tilde{u} \in V \mid \langle \tilde{u}, w \rangle > \alpha\} \in \tau$.

Ejemplo A.0.1.

- *Si $V = W$ y V es espacio de Hilbert cuya topología esta inducida por el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que a su vez resulta ser el producto de dualidad.*
- *Si $(V, \|\cdots\|)$ es un espacio vectorial normado, $W = V'$, $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V' \longrightarrow$ definido por $\langle u, u^* \rangle = u^*(u)$.. Ver página 34 de [7] para la demostración más detallada.*

  Demostración. Daremos un esquema de la demostración. Cada uno de los puntos de esta demostración es una breve justificación de los puntos correspondientes a las condiciones de dualidad

  (1.) Consecuencia del teorema de Hahn-Banach.

  (2.) Se cumple cuando $u^* \neq 0$.

(3.) Por definición de este producto escalar.

(4.) Depende de la topología en V':

- Si $\sigma = \tau_{\|\cdot\|'}$ entonces equivale a que V sea Banach reflexivo
- Si $\sigma = \sigma(V', V)$ es la topología débil, entonces el punto se cumple por el teorema de Banach

□

- *En términos más generales, si V y W son e.v. y $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ es función bilineal que separa puntos, entonces $(V, \sigma(V,W))$ y $(W, \sigma(W,V))$ son espacios en dualidad, donde $\sigma(V,W)$ es la topología más pequeña que hace todo las aplicaciones $\langle\cdot, w\rangle$ continuas.*

En las aplicaciones, la única situación útil es el caso de $(V, V', \langle\cdot,\cdot\rangle)$ siendo V espacio de Banach y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ funciones de evaluación, que, en este caso, a modo de resumen tenemos:

(1.) $\left(V, \tau_{\|\cdot\|}\right)$ es compatible con la dualidad $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

(2.) $(V, \sigma(V, V'))$ es compatible con la dualidad $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

(3.) $(V'\sigma(V', V))$ es compatible con la dualidad $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

(4.) $\left(V', \tau_{\|\cdot\|'}\right)$ es compatible con la dualidad $\langle\cdot,\cdot\rangle$ si, y sólo si, V es reflexivo.

APÉNDICE B

CASOS IMPORANTES DE LA DUALIDAD EN LA OPTIMIZACIÓN CONVEXA I

En este apéndice, debido a la longitud del trabajo y por el hecho de ser un apéndice técnico (únicamente necesitamos los resultados para el último capítulo), no se harán las demostraciones de los teoremas o de las proposiciones a menos que sean inmediatas. No obstante, sí se indicará dónde pueden encontrarse.

Dados los espacios vectoriales topológicos V, V' y Y, Y' en la misma dualidad que el capítulo 4. Suponemos que existe $T \in \mathscr{L}(V,Y)$[1] con traspuesta $T^* \in \mathscr{L}(Y^*, V^*)$[2]. Supongamos también que la función a minimizar $F : V \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, puede escribirse como

$$F(u) = J(u, Tu), \tag{B.1}$$

donde $J : V \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.
Nuestro objetivo es resolver el problema primario $\mathscr{P}$

$$\inf_{u \in V} J(u, Tu). \tag{B.2}$$

En este caso la función ϕ de perturbación es

$$\phi(u,p) = J\big(u, Tu - p\big). \tag{B.3}$$

[1] $T \in \mathscr{L}(V,Y) \iff T : V \longrightarrow Y$ y T es lineal y continua.

[2] Sea $A : V \longrightarrow W$ aplicación lineal continua entre dos e.v.t.. La función $A^* : W' \longrightarrow V'$ diremos que es la traspuesta de A si se verifica que

$$A^*(u^*) = u^* \circ A, \text{ con } u^* \in W'$$

Es sencillo calcular el problema dual;

$$\phi^*\left(0,p^*\right)=\sup_{u\in V,p\in Y}\left\{\left\langle p^*,p\right\rangle-J\left(u,Tu-p\right)\right\}=\sup_{u\in V}\sup_{p\in Y}\left\{\left\langle p^*,p\right\rangle-J\left(u,Tu-p\right)\right\}.$$

Fijando u y $q=Tu-p$, tenemos que

$$\left\langle p^*,p\right\rangle=\left\langle p^*,Tu-q\right\rangle=\left\langle p^*,Tu\right\rangle-\left\langle p^*,q\right\rangle=\left\langle T^*p^*,u\right\rangle-\left\langle p^*,q\right\rangle,$$

y en consecuencia,

$$\phi^*\left(0,p^*\right)=\sup_{u\in V}\sup_{p\in Y}\left\{\left\langle p^*,Tu\right\rangle-\left\langle p^*,q\right\rangle-J\left(u,q\right)\right\}=J^*\left(T^*p^*,-p^*\right).$$

De modo que $\mathscr{P}^*$ puede escribirse como,

$$\sup_{p^*\in Y'}J^*\left(T^*p^*,-p^*\right). \tag{B.4}$$

Observación 20. De manera inmediata deducimos que

(1.) Si J es convexa, ϕ es convexa.

(2.) Si $J\in\Gamma_0\left(V\times Y\right)$, $\phi\in\Gamma_0\left(V\times Y\right)$.

Teorema B.1. *Supongamos que J es convexa, que $inf\ \mathscr{P}$ es finito y que:*

$$\text{existe un } u_0\in V \text{ tal que } J\left(u_0,Tu_0\right)<+\infty, \text{ la función } p\mapsto J\left(u_0,p\right) \text{ es continua en } Tu_0. \tag{B.5}$$

Entonces, el problema (B.2) es estable,

$$inf\ \mathscr{P}=sup\ \mathscr{P}^*,$$

y por tanto, $\mathscr{P}^*$ tiene al menos una solución $\bar{p}^*$.

Demostración. Se puede encontrar en la página 59 de [1]. □

Proposición B.2. *Las siguientes condiciones son equivalentes*

(1.) $\bar{u}$ es una solución de (B.2), p^* es una solución de (B.4) y

$$inf\ \mathscr{P}=sup\ \mathscr{P}^*.$$

(2.) $\bar{u}\in V$ y $\bar{p}^*\in Y'$ satisfacen la relación de extremalidad

$$J\left(\bar{u},T\bar{u}\right)+J^*\left(T^*\bar{p}^*,-\bar{p}^*\right)=0, \tag{B.6}$$

o equivalentemente,

$$\left(T^*\bar{p}^*,-\bar{p}^*\right)\in\partial J\left(\bar{u},T\bar{u}\right). \tag{B.7}$$

Demostración. Inmediata aplicando la proposición 4.14. □

Teorema B.3. *Sean V un espacio Banach reflexivo y $J : V \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tal que $J \in \Gamma_0(V \times Y)$. Supongamos que la condición (B.13) se satisface y que J es coerciva.*

Bajo estas condiciones, los problemas (B.2) y (B.4) tienen al menos una solución,

$$inf\ \mathscr{P} = sup\ \mathscr{P}^*,$$

y se cumple la relación de extremalidad (B.6).

Demostración. Resulta de aplicar el teorema 4.15. □

Observación 21. El lagrangiano asociado a este problema puede escribirse como,

$$-L(u,p^*) = \sup_{p\in Y}\{\langle p^*, p\rangle - J(u, Tu-p)\}.$$

Fijando $q = Tu - p$,

$$-L(u,p^*) = \sup_{p\in Y}\{\langle p^*, p\rangle - J(u, Tu-p)\} =$$

$$\sup_{p\in Y}\{\langle p^*, Tu-q\rangle - J(u,q)\} =$$

$$\sup_{p\in Y}\{\langle p^*, Tu\rangle - \langle p^*, q\rangle - J(u,q)\} =$$

$$\langle p^*, Tu\rangle + \sup_{p\in Y}\{\langle -p^*, q\rangle - J(u,q)\} =$$

$$\langle p^*, Tu\rangle + J_u^*(-p^*),$$

de modo que

$$L(u,p^*) = -\langle p^*, Tu\rangle - J_u^*(-p^*), \tag{B.8}$$

donde,

$$\begin{aligned} J_u : Y &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ p &\longrightarrow J(u,p), \end{aligned}$$

y $J_u^* \in \Gamma(V)$ su polar.

Observación 22. Puede ser útil particularizar este caso cuando J puede descomponerse como suma de dos funciones, $G : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ y $H : V \longrightarrow \mathbb{R}$, de manera que

$$J(u,Tu) = H(u) + G(Tu). \tag{B.9}$$

Por tanto, el problema (B.2) es

$$\inf_{u\in V}\{H(u) + G(Tu)\}. \tag{B.10}$$

Es inmediato comprobar que,

$$J^*(u^*,p^*) = H^*(u^*) + G^*(p^*). \tag{B.11}$$

En consecuencia, $\mathscr{P}^*$ es , en este caso,

$$\sup_{p^* \in Y'} \left\{ -H^* \left(T^* u \right) - G^* \left(-p^* \right) \right\}. \tag{B.12}$$

La condición (B.5) es ahora,

Existe un $u_0 \in V$ tal que $H(u_0) < +\infty$, $G(Tu_0) < +\infty$, siendo G continua en Tu_0. (B.13)

Si J es convexa, $inf\ \mathscr{P}$ es finito y se cumple (B.13), entonces la relación de extremalidad se puede descomponer ahora como

$$H(\bar{u}) + H^* \left(T^* \bar{p}^* \right) - \left\langle T^* \bar{p}^*, \bar{u} \right\rangle = 0, \tag{B.14}$$

$$G(T\bar{u}) + G^* \left(-\bar{p}^* \right) + \left\langle \bar{p}^*, T\bar{u} \right\rangle = 0, \tag{B.15}$$

que es equivalente a,

$$T^* \bar{p}^* \in \partial H(\bar{u}), \tag{B.16}$$

$$-\bar{p}^* \in \partial G(T\bar{u}). \tag{B.17}$$

APÉNDICE C

CASOS IMPORANTES DE LA DUALIDAD EN LA OPTIMIZACIÓN CONVEXA II: TEOREMA DE KUHN-TUCKER

Orientación

El objeto de este anexo es presentar el famoso teorema de Kuhn-Tucker (sin demostración) y un ejemplo de problema de optimización en un cono convexo (con el cálculo de su problema dual y la relación entre las soluciones del dual y el primario). Las ideas de este anexo se han extraído de [1] y [5] así como la demostración de los dos teoremas previos al de Kuhn-Tucker.

Conceptos previos

Sean V, Y espacios vectoriales topológicos normados, $\mathscr{A} \subseteq V$ cerrado convexo no vacío.

Definición C.1 (Cono)**.** *Un conjunto $\mathscr{C}$ es un cono con vértice 0*[1] *si para $\lambda > 0$, $\lambda\mathscr{C} \subseteq \mathscr{C}$.*

Podemos asociar a un cono la relación de orden parcial

$$p \leq q \iff q - p \in \mathscr{C}.$$

Observemos que es inmediato comprobar que esta relación es reflexiva y transitiva.

El orden parcial definido es compatible con la estructura de espacio vectorial de V en el sentido de:

- si $u \geq 0$ entonces $\lambda u \geq 0$, $\forall \lambda \geq 0$.

[1] También se le llama cono puntuado.

- si $u \geq v$ entonces $u + w \geq v + w$ para todo $w \in V$.

También esta relación nos induce a los siguientes conjuntos

(1.) $\mathscr{C} = \{u \in V : u \geq 0\}$ es el conjunto de todos los elementos positivos.

(2.) $-\mathscr{C} = \{u \in V : u \leq 0\}$ es el conjunto de todos los elementos negativos.

Sea ahora V un espacio vectorial normado y V' su dual topológico.

Definición C.2 (Cono dual)**.** *Consideremos $\mathscr{C} \subseteq V$ un cono. El conjunto*

$$\mathscr{C}^* = \left\{u^* \in V' : \left\langle p^*, p \right\rangle \geq 0,\ \forall u \in \mathscr{C}\right\},$$

se llama el ***cono dual*** *de $\mathscr{C}$.*

La relación de orden parcial en el cono dual viene dada por $u^* \leq v^* \iff v^* - u^* \in \mathscr{C}^*$. Una manera intuitiva de pensar en $\mathscr{C}^*$ es referirse a él como el cono de los elementos positivos de V', i.e.,

$$p \in \mathscr{C} \iff p \geq 0 \iff \left\langle p^*, p \right\rangle \geq 0,\ \forall p^* \in \mathscr{C}^*. \tag{C.1}$$

Problema primario

Consideremos V, Y espacios vectoriales normados, $\mathscr{A} \subseteq V$ cerrado y no vacío, $J : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ lsc y convexa, $\mathscr{C} \subseteq Y$ el cono con la relación de orden parcial definida antes y $B : \mathscr{A} \longrightarrow Y$ lsc y convexa respecto la relación $\leq$, i.e.,

$$B(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda B(u) + (1-\lambda)B(v).$$

Asumamos también que para cada $p^* \in Y'$ con $p^* \geq 0$, la aplicación $\phi_{p^*} : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $u \mapsto \left\langle p^*, Bu \right\rangle$ es lsc. Finalmente consideremos el conjunto convexo no vacío $\left\{u \in \mathscr{A} \mid Bu \leq 0\right\}$.

Proposición C.3. *El conjunto $\left\{u \in \mathscr{A} \mid Bu \leq 0\right\}$ es convexo*

Demostración. Sean $u, v \in \mathscr{A}$ tales que $Bu \leq 0$ y $Bv \leq 0$. Tenemos que para $\lambda \in (0,1)$ se cumple $\lambda Bu \leq 0$ y $\lambda Bv \leq 0$. Consideremos ahora $\lambda u + (1-\lambda)v$. Queremos demostrar que este segmento pertenece a $\mathscr{A}$. En efecto,

$$B(\lambda u + (1-\lambda)v) \overset{B \text{ convexa}}{\leq} \lambda B(u) + (1-\lambda)B(v) \leq 0.$$

□

El problema primario es

$$\inf_{\substack{u \in \mathscr{A} \\ Bu \leq 0}} J(u). \tag{C.2}$$

Podemos escribir este problema como

$$(\mathscr{P}) \qquad \inf_{u\in V} \quad J'(u), \tag{C.3}$$

donde

$$J' : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \;\; J'(u) = \begin{cases} Ju, & \text{si } u \in \mathscr{A} \wedge Bu \leq 0, \\ +\infty, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Definamos la perturbación

$$\phi : V \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \;\; \phi(u,v) = \tilde{J} + \mathscr{I}_{E_p}(u), \tag{C.4}$$

siendo $\tilde{J}$ la extensión convexa de J y $\mathscr{I}_{E_p}$ la función indicatriz del conjunto $E_p = \{u \in \mathscr{A} : \; Bu \leq p\}$.

Lema C.4.

(1.) El conjunto E_p es cerrado y convexo en V.

(2.) El conjunto $E = \{(u,p) \in V \times Y : \; u \in \mathscr{A}, Bu \leq p\}$ es un conjunto cerrado convexo en $V \times Y$.

Demostración.

(1.) Sea $u \in E_p$. Entonces $Bu - p \leq 0$. Por (C.1) obtenemos que $\langle Bu - p, p^* \rangle \geq 0, \; \forall p^* \in \mathscr{C}^*$, i.e., $\forall p^* \geq 0$.
Dado que B es convexa, la aplicación $u \mapsto \langle Bu - p, p^* \rangle$ es convexa para $p^* \geq 0$ fijado. En efecto. Consideremos $\lambda \in (0,1)$, entonces

$$\lambda B(u) + (1-\lambda)B(v) - B(\lambda u + (1-\lambda)v) \geq 0,$$

es decir,

$$\lambda B(u) + (1-\lambda)B(v) - B(\lambda u + (1-\lambda)v) \in \mathscr{C},$$

se sigue que para $p^* \in \mathscr{C}^*$

$$\langle \lambda B(u) + (1-\lambda)B(v) - B(\lambda u + (1-\lambda)v), p^* \rangle \geq 0,$$

es equivalente

$$\langle B(\lambda u + (1-\lambda)v) - p, p^* \rangle \leq \lambda \langle B(u) - p, p^* \rangle + (1-\lambda) \langle B(v) - p, p^* \rangle,$$

lo que demuestra la convexidad de la función.

Además, por hipótesis, la función ϕ_{p^*} es lsc y por tanto, por el teorema 2.8 su conjunto de subnivel $\{u \in \mathscr{A} \mid Bu \leq 0\}$ es un cerrado (que además es convexo). Lo mismo sirve para la intersección de todos los conjuntos que corresponden a cualquier $p^* \geq 0$.

(2.) Por ser la función $u \mapsto \langle Bu - p, p^* \rangle$ lsc y convexa en $\mathscr{A} \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall p^* \geq 0$ fijado podemos aplicar un razonamiento análogo al anterior.

□

Lema C.5. *La perturbación ϕ de la ecuación (C.4) es convexa propia y lsc ($\phi \in \Gamma_0(V \times Y)$).*

Demostración. Es evidente que ϕ en su dominio efectivo es función propia propia.
Como $\phi(u,v) = \tilde{J} + \mathscr{I}_{E_p}$ y la suma de convexas es función convexa, ϕ es convexa. Demostremos que suma de dos funciones lsc es función lsc.
Sean $F, G : V \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones lsc. Queremos probar que $F+G$ es también lsc, i.e.,

$$\forall c < F(u_0) + G(u_0)\,,\ \exists N_c \in \mathscr{N}_{u_0}(\tau) :\ \forall v \in N_c,\ G(v) + F(v) > c.$$

- Si F es lsc en $u_0 \in V$ entonces, $\forall c < F(u_0)\,,\ \exists N_{c_1} \in \mathscr{N}_{u_0}(\tau) :\ \forall v \in N_{c_1},\ F(v) > \dfrac{c}{2}$.
- Si G es lsc en u_0 entonces $\forall c < G(u_0)\,,\ \exists N_{c_2} \in \mathscr{N}_{u_0}(\tau) :\ \forall v \in N_{c_2},\ G(v) > \dfrac{c}{2}$.

Consideremos $N = N_{c_1} \cap N_{c_2}$. Entonces

$$\forall c < F(u_0) + G(u_0)\,,\ \exists N_c \in \mathscr{N}_{u_0}(\tau) :\ \forall v \in N_c,\ G(v) + F(v) > \frac{c}{2} + \frac{c}{2} > c.$$

Por tanto ϕ es lsc por ser suma de dos lsc.
Aplicando la proposición 2.21 deducimos que $\phi \in \Gamma_0(V \times Y)$. □

Problema dual

Calculemos el problema dual de $\mathscr{P}$. Para ello debemos calcular $\phi(0, p^*)$ con $p^* \in Y'$.

$$\phi^*(0,p^*) = \sup_{u \in V,\, p \in Y} \{\langle p^*, p\rangle - \phi(u,v)\} = \sup_{\substack{u \in \mathscr{A} \\ p \in Y \\ Bu \leq p}} \{\langle p^*, p\rangle - Ju\}.$$

Sea $q = p - Bu$ con $q \geq 0$. Entonces,

$$\phi^*(0,p^*) = \sup_{u \in \mathscr{A}} \sup_{\substack{q \in Y \\ q \geq 0}} \{\langle p^*, Bu + q\rangle - Ju\} =$$

$$\sup_{\substack{q \in Y \\ q \geq 0}} \langle p^*, q\rangle + \sup_{u \in \mathscr{A}} \{\langle p^*, Bu\rangle - Ju\}.$$

Como ya sabemos,

$$\sup_{\substack{q \in Y \\ q \geq 0}} \langle p^*, q\rangle = \mathscr{I}_{\mathscr{C}}(-p^*),$$

podemos escribir

$$-\phi^*(0,p^*) = -\mathscr{I}_{\mathscr{C}}(-p^*) - \sup_{u\in\mathscr{A}}\left\{\langle p^*, Bu\rangle - Ju\right\} = -\mathscr{I}_{\mathscr{C}}(-p^*) + \inf_{u\in\mathscr{A}}\left\{\langle -p^*, Bu\rangle + Ju\right\}.$$

Por tanto, el problema dual es

$$\left(\mathscr{P}^*\right) \qquad \sup_{p^*\geq 0}\inf_{u\in\mathscr{A}} \quad \left\{\langle -p^*, Bu\rangle + Ju\right\}. \tag{C.5}$$

Ya estamos en condiciones de dar una condición de estabilidad para el problema $\mathscr{P}$.

Teorema C.6. *Supongamos que, además de ser el conjunto* $\left\{u\in\mathscr{A} \mid Bu\leq 0\right\}$ *un convexo cerrado no vacío y que se satisfacen todas las demás hipótesis sobre* J *y* B, $inf\ \mathscr{P}$ *es finito y se cumple la condición de Slater, i.e.,:*

$$\textit{existe } u_0\in\mathscr{A} \textit{ tal que } Bu_0 < 0,$$

o equivalentemente:

$$\textit{existe } u_0\in\mathscr{A} \textit{ tal que } -Bu_0\in\mathring{\mathscr{C}}.$$

Entonces, $\mathscr{P}$ *es estable.*

Demostración. De las condiciones de Slater sabemos que existe un entorno $\mathscr{U}$ del 0 en Y tal que $-Bu_0 + p\in\mathscr{C}$ para todo $y\in\mathscr{U}$, de donde se sigue que $-Bu_0 + p\geq 0,\ \forall p\in\mathscr{U}$. Entonces $\phi(u_0,p) = F(u_0),\ \forall p\in\mathscr{U}$ de manera que la aplicación $p\mapsto\phi\left(u_0,p\right)$ es finita y continua en $0\in Y$. Por el criterio de estabilidad 4.13 $\mathscr{P}$ es estable. □

Enunciemos ahora el teorema de la dualidad fuerte, que nos relacionará (en estas hipótesis) la solución de $\mathscr{P}$ con la de $\mathscr{P}^*$.

Teorema C.7 (Dualidad fuerte)**.** *Bajo las condiciones del teorema anterior* $\mathscr{P}^*$ *tiene una solución que cumple*

$$inf\ \mathscr{P} = \inf_{u\in\mathscr{A}\,Bu\leq 0} Ju = \sup_{p^*\leq 0}\inf_{u\in\mathscr{A}}\left\{\langle -p^*, Bu\rangle + Ju\right\} = sup\ \mathscr{P}^*.$$

Observación 23. Podemos inferir las relaciones de extremalidad para los problemas $\mathscr{P}$ y $\mathscr{P}^*$.

Si $\bar{u}$ es solución de $\mathscr{P}$ y $\bar{p}^*$ es solución de dual entonces se cumple la relación

$$\phi(\bar{u},0) + \phi^*(0,\bar{p}^*) = 0.$$

En nuestro caso tenemos

$$0 = J\bar{u} + \mathscr{I}^*_{\mathscr{C}}(-\bar{p}^*) - \inf_{u\in\mathscr{A}}\left\{\langle -p^*, Bu\rangle + Ju\right\}.$$

Dado que $\bar{p}^* \leq 0$ se sigue

$$Ju_0 = \inf_{u \in \mathscr{A}} \{\langle -p^*, Bu\rangle + Ju\} \leq \langle -\bar{p}^*, B\bar{u}\rangle + J\bar{u},$$

y obtenemos

$$\langle p^*, Bu\rangle \leq 0.$$

Por otro lado, por ser $\bar{u}$ solución de $\mathscr{P}$ y $\bar{p}^*$ solución de $\mathscr{P}^*$ tenemos $B\bar{u} \leq 0$ y $\bar{p}^* \leq 0$, de donde

$$\langle p^*, Bu\rangle \geq 0.$$

Por tanto,

$$\langle p^*, Bu\rangle = 0,$$

es nuestra relación de extremalidad.

Cálculo del lagrangiano

Por definición del lagrangiano tenemos

$$-L(u, p^*) = \sup_{p \in Y} \{\langle p^*, p\rangle - \phi(u, p)\} =$$

$$\begin{cases} \sup\limits_{\substack{p \in Y \\ Bu \leq p}} \{\langle p^*, p\rangle - Ju\}, & \text{si } u \in \mathscr{A}, \\ -\infty, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Haciendo el cambio $q = p - Bu$ con $p \geq 0$ para $Bu \leq p$ nos da

$$-L(u, p^*) = \sup_{q \in Y, q \geq 0} \{\langle p^*, q\rangle + \langle p^*, Bu\rangle - Ju\} = \langle p^*, Bu\rangle - Ju + \sup_{q \in Y, q \geq 0} \{\langle p^*, q\rangle\}.$$

En caso que $u \notin \mathscr{A}$ puede ser añadido reemplazando J por $\tilde{J}$, su extensión convexa.
De nuevo, como

$$\sup_{q \in Y, q \geq 0} \{\langle p^*, q\rangle\} = \mathscr{I}^*_{\mathscr{C}}(-p^*),$$

el lagrangiano es

$$L(u, p) = \tilde{J} - \langle p^*, Bu\rangle - \mathscr{I}^*_{\mathscr{C}}(-p^*).$$

De la definición de punto de silla sabemos que $(\bar{u}, \bar{p}^*)$ es un punto de silla de $L(u, p^*)$ si, y sólo si $\bar{u} \in \mathscr{A}$ y $\bar{p}^* \leq 0$. Para todo $u \in \mathscr{A}$ y todo $\bar{p}^* \leq 0$ tenemos que

$$L(u, p^*) = J\bar{u} - \langle p^*, B\bar{u}\rangle \leq J\bar{u} - \langle \bar{p}^*, B\bar{u}\rangle = L(\bar{u}, \bar{p}^*) \leq Ju - \langle \bar{p}^*, Bu\rangle = L(u, \bar{p}^*).$$

Teorema

Supongamos que $V = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$; los elementos de V son de la forma $u = (u_1, \ldots, u_n)$, mientras que los elementos de Y los escribimos como $p = (p_1, \ldots, p_n)$. Consideremos $\mathscr{A} \subseteq V$ cerrado convexo, $J : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ lsc y convexa, $\mathscr{C} \subseteq Y$ el cono definido por

$$\{p \mid p_i \geq 0, \ \forall i : 1 \leq i \leq m\},$$

y la función $B : \mathscr{A} \longrightarrow Y$ lsc y convexa respecto la relación $\preceq$ definida por

$$p \preceq q \iff q - p \in \mathscr{C},$$

tal que cada una de sus componentes $B_i : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ son convexas y lsc. Sabemos que el lagrangiano es de la forma

$$L(u, p) = J(u) - \sum_{i=1}^{m} p_i B_i u, \ \text{ si } p \leq 0 \text{ y } u \in \mathscr{A}. \tag{C.6}$$

Con todo ello, el teorema de *Kuhn-Tucker* es

Teorema C.8 (Teorema de Kuhn-Tucker)**.** *Si existe un $u_0 \in \mathscr{A}$ tal que $B_i u_0 < 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$ entonces, $\bar{u} \in \mathscr{A}$ es una solución de (C.2) si, y solo si, existe un $\bar{p} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{p} \leq 0$ tal que*

$$L(\bar{u}, p) \leq L(\bar{u}, \bar{p}) \leq L(u, \bar{p}), \ \forall u \in \mathscr{A}. \tag{C.7}$$

En este caso, $\sum_{i=1}^{m} \bar{p}_i B_i \bar{u} = 0$, lo que implica que, para todo i, $1 \leq i \leq m$, se cumple una de las dos condiciones (las dos a la vez no pueden cumplirse):

1. $B_i \bar{u} < 0$ *y* $p_i = 0$,
2. $B_i \bar{u} = 0$ *y* $p_i \leq 0$.

APÉNDICE D

ESPACIOS SOBOLEV

Orientación

En este anexo introduciremos la notación y los conceptos necesarios sobre los espacios Sobolev para el desarrollo del capítulo 4. Para ello, nos hemos inspirado en [1] y en [18].

Conceptos sobre espacios Sobolev

Nos referiremos a un punto de $\mathbb{R}^n$ por la variable $x = (x_1, \ldots, x_n)$. El operador $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ será denotado por D_i, y si $j = \left(j_1, \ldots, j_n\right)$, escribimos

$$D^j = D_1^{j_1} \ldots D_n^{j_n} = \frac{\partial^{|j|}}{\partial x_n^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}},$$

donde $|j| = j_1 + \ldots + j_n$.
Cuando $j = (0, \ldots, 0)$, se tiene que $D^j = \mathrm{Id}$.

Si Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ que satisface la siguiente propiedad de regularidad:

La frontera Γ de Ω es una variedad de $\mathscr{C}^r$, de dimensión $n-1$ y Ω está situada en un único lado de Γ.

diremos que Ω es de clase $\mathscr{C}^r$.

Sea m un entero y $1 \leq p \leq +\infty$. El espacio de Sobolev $W^{m,p}$ es el conjunto de todas las funciones $u \in L^p(\Omega)$ tales que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ para todo $\alpha \leq m$.

$W^{m,p}$ es un espacio de Banach (ver cualquiera de las dos referencias citadas al principio del Anexo) dotado de la norma,

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left| \sum_{|j|\leq m} \left\|D^j u\right\|^p_{L^p(\Omega)} \right|^{1/p}. \tag{D.1}$$

Para $p = 2$ escribimos $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$. Su norma correspondiente induce, de hecho, el producto escalar,

$$\langle\langle u, v\rangle\rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|j|} \left(D^j u, D^j v\right)_{L^2(\Omega)},$$

de modo que $H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.
La clausura en $H^m(\Omega)$ del subespacio de funciones con soporte compacto en Ω se escribe como $H^m_0(\Omega)$. De manera similar, la clausura en $W^{m,p}$ es el subespacio de funciones con soporte compacto en Ω y se denota por $W^{m,p}_0$.

Finalmente enunciemos un teorema que resulta de utilidad en el capítulo 5.

Teorema D.1 (Desigualdad de Poincaré)**.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto acotado. Entonces existe una constante C que depende únicamente de $|\Omega|$ tal que*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C\|u'\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,p}_0(\Omega).$$

En otras palabras, en $W^{1,p}_0(\Omega)$, el valor $\|u'\|_{L^p(\Omega)}$ es equivalente en norma a la norma de $W^{1,p}$.

APÉNDICE E

CONJUGADA DE UNA FUNCIÓN PAR

Orientación

En este anexo calcularemos la función polar que se ha referenciado en capítulo 5.

Cálculo de la polar de G en el problema de Dirichlet

Sea Ω un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ abierto y que satisface la condición de regularidad del apéndice de Sobolev. Consideremos la función $G: L^2(\Omega)^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$G(p) = \frac{1}{2}\int_\Omega |p|^2 \, dx = \frac{1}{2}\|p\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Como no hay ambigüedad, la norma la escribiremos simplemente por $\|\cdot\|$.

Demostremos que $G^*(p^*) = \frac{1}{2}\|p^*\|^2_* = \frac{1}{2}\|p^*\|^2$ (por ser $L^2(\Omega)^n \approx \left(L^2(\Omega)^n\right)'$).

Demostración. En primer lugar recordemos que

$$G^*(p) = \sup_{p\in V}\left\{\langle p^*, p\rangle - G(p)\right\}.$$

Demostraremos la igualdad mediante dos desigualdades.

$\leq$: $\langle p^*, p\rangle - \frac{1}{2}\|p\|^2 \leq \|p\|\|p^*\| - \frac{1}{2}\|p\|^2$ debido a la desigualdad de Hölder. Observemos que el miembro de la derecha es una función cuadrática en p, por tanto es sencillo demostrar que

alcanza su máximo en $\frac{1}{2}\|p\|^2$ de modo que

$$\langle p^*, p\rangle - \frac{1}{2}\|p\|^2 \leq \frac{1}{2}\|p\|^2,$$

y por tanto tenemos que $G^*(p^*) \leq \frac{1}{2}\|p\|^2$.

$\geq$: Sea p tal que $\langle p^*, p\rangle$ y con $\|p\| = \|p^*\|_*$. Entonces,

$$\langle p^*, p\rangle - \frac{1}{2}\|p\|_*^2 = \frac{1}{2}\|p^*\|_*^2,$$

y como $G^*(p^*)$ es el supremo respecto a p, tenemos $G^*(p^*) \geq \frac{1}{2}\|p\|^2$. □

APÉNDICE F

EJEMPLO DE UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL Y NO LINEAL USANDO PYTHON

Orientación

La idea de este anexo es encontrar la solución a un caso particular del problema resuelto en F en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ además de un problema no lineal utilizando Python.
Es natural que los problemas de optimización se resuelvan utilizando lenguajes de programación y con ordenadores potentes o con altas precisiones, pues el cálculo "a mano" de su solución en muchos casos es inviable. Por ello es importante conocer alguna herramienta para poder resolver estos problemas, que, en general, serán en $\mathbb{R}^n$.
Se ha elegido el lenguaje de programación **Python** por las siguientes razones:

- Paquetes muy completos y bien documentados para el cálculo científico tales "Scipy" o "Numpy".
- Por su legibilidad.
- Por sus estructuras de dato, como listas y diccionarios que son esenciales en el "BigData".

La estructura de este apéndice será la siguiente: resolución de los problema y presentación del código utilizado.

Observación 24.
- La notación a lo largo del trabajo ha sido $u, v, \ldots$, sin embargo, para remarcar que estamos en $\mathbb{R}^n$ ahora seguiremos la notación de $x, y, \ldots$ para las variables. También haremos un abuso de notación indicando por $\leq$ la relación siguiente: Dados $u, v \in \mathbb{R}^n$, decimos que $u \leq v \iff u_i \leq v_i \forall i : 1, \ldots, n$.

- A pesar de ser ejemplos sencillos el objetivo de este apéndice es mostrar que los algoritmos dados funcionan para cualquier tipo de problema. Unos de los motivos de la sencillez ha sido el poder representar gráficamente las funciones (en el ejemplo no lineal).

Ejemplos

Problema lineal

Consideremos el problema primario extraído del ejercicio 5.28 de [6]

$$(\mathscr{P}) \qquad \begin{array}{ll} \inf\limits_{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4} & 47x+93y+17z-93t \\ \text{sujeto a} & Ax \leq b \end{array} \tag{F.1}$$

extraído del ejercicio 5.28 de [6] donde,

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & -10 & -1 \\ -6 & -11 & -2 & 12 \\ 1 & 6 & -1 & -3 \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix},\ c=\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -8 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Sabemos por el ejemplo F que el problema dual viene dado por

$$(\mathscr{P}^*) \qquad \begin{array}{ll} -\inf\limits_{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4} & b^T y^* \\ \text{sujeto a} & A^T y + c = 0, y^* \geq 0 \end{array} \tag{F.2}$$

Python tiene la libreria **scipy** con algoritmos de optimización implementados, de manera que resolveremos este problema con dicha librería (ver sección "Código" para la referencia de la misma).
Resolveremos $\mathscr{P}$ y $\mathscr{P}^*$ para ver que se verifica que $sup\ \mathscr{P}^* = inf\ \mathscr{P}$ al igual que también se cumplen las relaciones de extremalidad.

- La solución de $\mathscr{P}$ ha resultado

```
x: array([ 1.,  1.,  1.,  1.]) # punto optimo
fun: 64.0 # valor de la funcion en tal punto
```

- La solución de $\mathscr{P}^*$ es

```
x: array([ -3.,  -2.,  -2.,  -7.,  0.])
fun: 64
```

En consecuencia, $64 = sup\ \mathscr{P}^* = inf\ \mathscr{P} = 64$ y la relación de extremalidad 4.14 se cumple. Además, como las soluciones coinciden, debe ocurrir que el problema es normal y estable por los teoremas 4.8 y 4.11 respectivamente.

Problema no lineal

Consideremos el problema primario

$$(\mathscr{P}) \qquad \begin{array}{ll} \underset{(x,y)\in\mathbb{R}}{\text{ínf}} & x^2+y^2-10x+15 \\ \text{sujeto a} & x+y+15=0. \end{array} \tag{F.3}$$

Representemos gráficamente la función objetivo y la restricción:

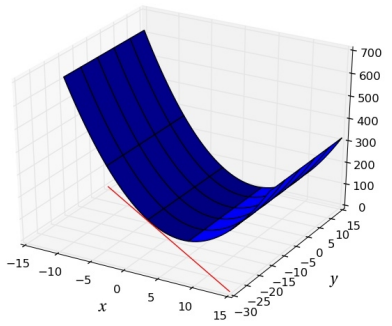

Figura F.1: Representación gráfica de la función objetivo (azul) $F(x,y) = x^2+y^2-10x+15$ y su restricción (rojo) $g(x,y) = x+y+15$.

El siguiente paso que debemos hacer es construir la función lagrangia que es la siguiente

$$L(x,y,p) = x^2+y^2-10x+15-p\left(x+y+15\right).$$

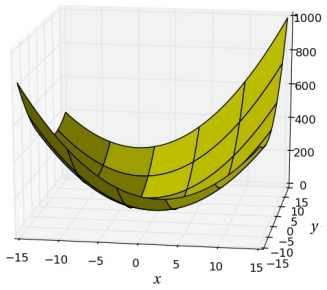

Figura F.2: Representación gráfica de la función lagrangiana.

Nuestro objetivo ahora es resolver el sistema siguiente,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial p} = 0. \end{cases}$$

Para aproximar las parciales utilizaremos un método numérico, puesto que el cálculo analítico de las mismas puede ser bastante ineficiente. El método a usar será el de diferencias centradas. Recordemos que el método de diferencias centras viene dado por

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h},$$

donde h es la longitud del paso que se desea y f la función de la cual se quiere aproximar sus derivadas.

Una vez se haya resuelto el sistema de ecuaciones (que es bastante costoso computacionalmente) habremos encontrado la solución de nuestro problema. En definitiva, las soluciones del sistema son,

```
[ -5. -10.  20.] 190.0
```

donde las dos primeras coordenadas del vector son las coordenadas del punto óptimo, es decir, $(\bar{x}, \bar{y}) = (-5, -10)$. La tercera coordenada del vector no es más que el valor de p y 190 es el valor de F en el punto $(-5, -10)$.

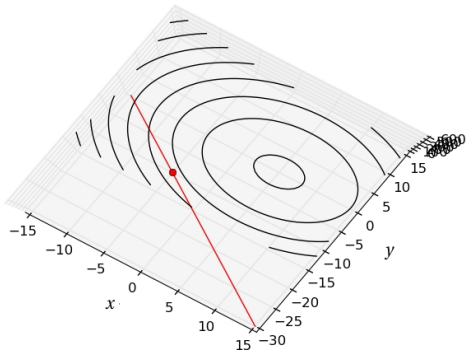

Figura F.3: Representemos la gráfica de contornos de F, la restricción y añadamos el punto obtenido.

Código

Una vez planteada brevemente la idea teórica, presentemos el código necesario para la resolución de $\mathscr{P}$ para ambos problemas.

En primer lugar hacemos los imports necesarios:

```
import numpy as np
import matplotlib as mpl
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import fsolve
from scipy.optimize import linprog
from numpy.linalg import solve
```

La documentación de los mismos así como información sobre el paquete, funciones etc, puede encontrarse en las siguientes direcciones

- Numpy: http://www.numpy.org/.
- Matplotlib: https://matplotlib.org/.
- Scipy: https://www.scipy.org/.

Problema lineal

El código para el problema lineal es muy sencillo,

```
A = np.array([[-1,-6,1,3],[-1, -2, 7, 1], [0, 3, -10, -1],
[-6, -11, -2, 12], [1, 6,  -1, -3]])

c = np.array([47, 93, 17, -93])

b = np.array([-3, 5, -8, -7, 4])

solPrimal = linprog(c,A,b)

solDual = linprog(b, A_ub=None, b_ub=None, A_eq=A.T, b_eq=-c)
```

Hay que tener en cuenta que para el dual estamos resolviendo mín $b^T y^*$ y luego debemos cambiar de signo al resultado (el algoritmo es de minimización únicamente, no de maximización).

Problema no lineal

Definimos las funciones objetivo, restricción y lagrangiana

```
def f(x,y): return x**2+y**2-10*x+15
def g(x,y): return x+y+15
def func(x):
 u1 = x[0]
 u2 = x[1]
 p = x[2] # p hace las veces de multiplicador de Lagrange y p* son cada
          # una de las restricciones (en este caso p^{*}=g)
 return f(u1,u2) + p*g(u1,u2)
```

Planteamos el método de diferencias centradas,

```
def partialFunc(x):
 partialP = np.zeros(len(x))
 h = 1e-4 # long. de paso
 for i in range(len(x)):
     dx = np.zeros(len(x))
     dx[i] = h
     partialP[i] = (func(x+dx)-func(x-dx))/(2*dx[i]) # diferencias centradas
 return partialP
```

y resolvemos el sistema resultante llamado **partialP**

```
barx = fsolve(partialFunc, [-1,-1,0])
```

Más código

Presentemos el código utilizado para representar las gráficas

```
# Creamos los ejes x,y entre los valores -15 y 15
x = np.linspace(-15, 15)
y = np.linspace(-15, 15)
[X, Y] = np.meshgrid(x, y)

# Hacemos una figura en 3d
fig = plt.figure()
ax = fig.gca(projection='3d')

# Dibujamos las grafica de las funciones
ax.plot_surface(X, Y, f(x,y)) # grafo de F
plt.plot(x,-x-15, 'r') # grafo de g
plt.plot([barx[0]],[barx[1]], 'ro') # pintamos el punto maximo
ax.contour(X, Y, Z, 10, lw=3, colors="k", linestyles="solid") # diagrama de
                                                              # contorno de F
plt.show()

# Si queremos representar el Lagrangiano
p=np.linspace(-15, 15)
ax.plot_surface(X, Y, func([X,Y,p]), color='y')

#-------------------- Dibujar perturbaciones de F

def phi(x,y,k): return x**2+k*y**2

k=[i for i in range(1, 13, 3)] # valores de k para las perturbaciones
                               # de u^2+k*p^2
colors = ['b','g','m'] # Colores diferentes para las
                               # diferentes funciones
for i in range(len(u)):
   znew = phi(X,Y,k[i]) # Perturbaciones de F para cada p
   x.plot_surface(x, y, znew, color = colors[i])
plt.show()
```

APÉNDICE G

ERRORES ENCONTRADOS

Orientación

Este anexo es una recopilación de errores que se han ido encontrando durante la realización de este trabajo. Como el libro principal seguido ha sido [1], y a no ser que se indique lo contrario, los errores serán del citado libro.

Los errores que aquí aparecen son desde tipográficos hasta errores graves de definiciones o en demostraciones.

No se han incluido todos los errores, pues la necesidad de entregar rápidamente la memoria ha hecho que algunas erratas no se hallan escrito en este apéndice, aunque sí corregido en la memoria.

Errores

(1.) En la pág. 10, para el corolario 2.1, el libro define G tal que epi G = epi F.

(2.) En la pág. 11, en la demostración de la proposición 2.4, el libro considera un $\beta \in \mathbb{R}$, sin embargo, luego trabaja con α en su lugar.

(3.) En la pág. 14, define una función afín continua como $v > l(v) + \alpha$.

(4.) En la pág. 18, en la demostración del corolario 4.1, considera $u \in C$ y debe ser $u \in V$.

(5.) En la pág. 47, en la definición de $\mathscr{P}^*$, escribe los $p \in Y'$ en lugar de $p^* \in Y'$.

(6.) En la pág. 48, en la proposición 1.1, en las desigualdades debiera ser inf y sup, puesto que Inf y Sup son los problemas y no las soluciones de estos.

(7.) En la pág. 56, dice que $\phi_u \in \Gamma(V)$ pero debe ser $\phi_u \in \Gamma_0(V)$.

(8.) En la pág. 60, en la definición de $\mathscr{P}^*$ a usado el lagrangiano, escribe $\sup_{p^* \in Y}$ y debe ser $p^* \in Y'$. También, escribe la función lagrangiana como,

$$L(u, p^*) = -\langle p^*, p \rangle + J_u^*(-p^*),$$

cuando debe ser.

$$L(u, p^*) = -\langle p^*, p \rangle - J_u^*(-p^*).$$

(9.) En la pág. 69, una de las consecuencias del Teorema de Kuhn-Tucker dice que es $\sum_{i=1}^{m} \langle \bar{p}_i, B_i \bar{u} \rangle = 0$ pero tanto $\bar{p}_i$ como B_i son de $\mathbb{R}$, o bien es el producto escalar, o bien es la suma.

(10.) En la pág. 77, escribe $|j| = j_1 + \cdots + j^n$ cuando debe ser $|j| = j_1 + \cdots + j_n$

(11.) En la pág. 80, una de las restricciones del problema dual es incorrecta, pues debe ser $\Lambda^* p^* + f = 0$ en lugar de $p^* = f$.

(12.) En la pág. 81 de los apuntes [7], escribe (dentro del ínfimo en el problema $\mathscr{P}^*$) $\frac{1}{2}\|\mathrm{div} p^* + f\|$ cuando debe ser $F^*(\Lambda v^*) = \frac{1}{2}\|\mathrm{div} p^* + f\|^2$.

BIBLIOGRAFÍA

[1] I. Ekeland and R. Témam, *Convex Analysis and Variational Problems*, 2nd ed. Siam, 1999. (2.), (3.), (4.), (5.), (document), 2.2.2, 2.4.4, 2.5, 4.4, B, C, D, G

[2] W. Schirotzek, *Nonsmooth Analysis*, 1st ed. Springer, 2007. (2.), (document), 1.1, 2.2, 2.3, 2.4.2, 2.4.3, 2.4.4, 2.4, 2.4.4, 2.6, 2.7

[3] R. Rockafellar, *Convex analysis (Princeton Landmarks in Mathematics and Physics)*. Princeton University Press, 1997. (2.), (document), 1

[4] J. M. Borwein and J. D. Vanderwerff, *Convex functions. Constructions, characterizations and counterexamples*, 1st ed. Cambridge University Press. (2.), (document), 2.4.3

[5] O. Feroq, P. Bianchi, and A. Sabourin, "Convex Analysis," *Master "Mathematics for data science and big data", Télécom-ParisTec*, 2015-2016. (2.), (4.), C

[6] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004. (2.), 2.1, 2.2.1, 2.5, 4.2, F, F

[7] F. Álvarez, "Análisis convexo y dualidad," *Apuntes para el curso del programa de Doctorado en Ciencias de la Ingeniería, mención Modelación Matemática*, 2015. [Online]. Available: https://www.yumpu.com/es/document/view/33170551/apuntes-analisis-convexo-dim-universidad-de-chile (2.), (4.), (5.), 2, 2.2.2, 11, 15, 5.3, A, A, A, A.0.1, (12.)

[8] R. Rockafellar and R. J-B Wets, *Variational Analysis*. Springer, 2009. (3.)

[9] V. Barbu and T. Precupanu, *Convexity and Optimization in Banach Spaces*. Springer, 2012, vol. 161, Springer Monographs in Mathematics, no. x. (4.)

[10] I. R. Bot, *Duality in Convex Optimization*. Springer, 2010. (4.)

[11] I. R. Bot, S.-M. Grad, and W. Gert, *Duality in Convex Optimization*. Springer, 2009. (4.)

[12] J. J. Moreau, "Proximité et dualité dans un espace hilbertien," *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1965. (4.), 1

[13] T. Roubíček, *Nonlinear Partial Differential Equations with Applications*. Springer, 2009. (5.)

[14] R. Lucchetti, *Convexity and Well-Posed Problems*, 2nd ed. Springer, 2010. (5.), 2.4.3, 2.5.1

[15] H. Le Dret, "Numerical Approximation of PDEs," *Master MM26E, Applied Mathematics*, p. Chapter 3, 2011-2012. [Online]. Available: https://www.ljll.math.upmc.fr/~ledret/M1ApproxPDE.html (5.), 5.1

[16] L. Debnath and M. Piotr, *Hilbert Spaces with Applications*. Elsevier, 2005. (document), 14, 5.2, A

[17] J. N. McDonald and N. A. Weiss, *A Course in Real Analysis*. Academic Press, 2004. (document)

[18] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 2010. (document), 5.2, A, D

[19] M. González Hidalgo, "Apuntes de Análisis Funcional de 4 curso de la licenciatura de Matemáticas. Notas de la asignatura de Análisis Matemático IV, de 4 curso de la licenciatura de Matemáticas," *Universitat de les Illes Balears*, 2012. (document), A

[20] J. Lindenstrauss and D. Preiss, "On Frechet differentiability of Lipschitz maps between Banach spaces," *Annals of Mathematics, 157*, no. 157, pp. 257–288, 2003. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/math/0402160 14

[21] K. Keimel, "Remarks on pointwise infima of lower semicontinuous functions," *Bremen Proceedings*, 1984. 3

[22] S. Barceló Bauçà, "Trabajo de Final de Grado: Formulación variacional de problema de contorno," *Universitat de les Illes Balears*, 2015. 5.2

[23] B. van Bloemen, *Large-Scale PDE-Constrained Optimization*. Springer, 2003. 5.3

ÍNDICE ALFABÉTICO

conjunto
    de soluciones, 38
condición de Slater, 85
cono
    cono, 81
    cono dual, 82
convergencia
    *-débil, 74
    débil, 74

desigualdad
    de Poincaré, 90
    variacional, 43
    Young, 22
diferencias centradas, 96
dominio
    efectivo, 5

epígrafo, 5
espacio
    Banach reflexivo, 37
    dual algebraico, 72
    dual topológico, 74
    Hilbert, 16
    Sobolev, 89
    vectorial topológico, 71
    vectorial topológico localmente convexo, 71
espacio vectorial
    Banach, 16
    dimensión finita, 13
    normado, 14

forma bilineal, 72
función
    bipolar, 24
    cóncava, 4
    coerciva, 38
    convexa, 4
    de proximidad, 45
    estrictamente cóncava, 7
    estrictamente convexa, 7
    extensión convexa, 4
    Gâteaux diferenciable, 33
    indicatriz, 4
    Lagrangiana, 60
    log-sum-exp, 4
    media geométrica, 5
    minorante, 10
    perturbación, 52
    polar, 21
    proyección, 45
    semicontinua inferiormente, 7
    traspuesta, 77

$\Gamma(V)$, 16
$\Gamma_0(V)$, 16

hiperplano, 72
homotecia, 12

límite
    inferior, 7
    superior, 7

problema
    bidual, 54
    no trivial, 51
    normal, 56, 57
    perturbado, 52

primario, 51
producto de la dualidad, 74
punto de silla, 63

regularización
Γ, 18
lsc, 10
relaciones de extremalidad, 59

subdiferencial, 26
subgradiente, 26

teorema
de Banach, 73
de Hahn-Banach versión geométrica, 72
de Kuhn-Tucker, 87
de la dualidad fuerte, 85
topología débil, 73