



**Universitat**  
de les Illes Balears

## **TRABAJO DE FIN DE GRADO**

# **EFFECTOS NO MARKOVIANOS EN MODELOS BINARIOS ESTOCÁSTICOS**

**Sara Oliver Bonafoux**

**Grado de Física**

**Facultad de Ciencias**

**Año Académico 2020-21**

# **EFFECTOS NO MARKOVIANOS EN MODELOS BINARIOS ESTOCÁSTICOS**

**Sara Oliver Bonafoux**

**Trabajo de Fin de Grado**

**Facultad de Ciencias**

**Universidad de las Illes Balears**

**Año Académico 2020-21**

Palabras clave del trabajo:

Modelos de agentes, efectos no markovianos, procesos de consenso, transiciones de fase

*Nombre Tutor/Tutora del Trabajo: Raúl Toral Garcés*

*Nombre Tutor/Tutora (si procede): Raúl Toral Garcés*

Se autoriza la Universidad a incluir este trabajo en el Repositorio Institucional para su consulta en acceso abierto y difusión en línea, con fines exclusivamente académicos y de investigación

Autor		Tutor	
Sí	No	Sí	No
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## Resumen

En este trabajo se aplican los principios de la disciplina de Física Estadística al estudio de modelos binarios estocásticos. Binario implica que cada variable del sistema puede tomar dos posibles valores, mientras que estocástico significa que la evolución de las variables está regida por leyes aleatorias, no deterministas, que dan la probabilidad de los futuros valores de las variables. Dados estos modelos, cuyo origen e interés pueden estar originados en diversas disciplinas más allá de la Física tales como Economía, Sociología, Biología, etc., se analiza la influencia que tienen sobre ellos determinados aspectos no markovianos. Según estos, las probabilidades futuras de las posibles configuraciones del sistema no dependen solamente de su estado actual, sino también del camino que se ha seguido para llegar hasta él.

El estudio se centra en el modelo ruidoso del votante, también llamado modelo de Kirman, que considera una red de agentes interaccionantes, cada uno de los cuales está caracterizado por una variable binaria de estado u opinión. Hay dos mecanismos por los que un agente puede cambiar de estado: el de imitación, consistente en copiar la opinión de un vecino, y el de ruido, impulsor de una actualización de estado por decisión propia. La correcta descripción de algunos sistemas reales mediante este modelo requiere la incorporación de efectos no markovianos. Aquí se presenta el fenómeno de envejecimiento, por el cual los agentes oponen mayor resistencia a cambiar de estado cuanto mayor sea el tiempo que llevan en él.

En este trabajo se analizan tanto el modelo original de Kirman como algunas de sus modificaciones. Para aquellos modelos que lo permiten, se describe el problema analíticamente y se contrastan los resultados teóricos con simulaciones numéricas.

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Modelos binarios estocásticos . . . . .	1
1.2. Efectos no-markovianos . . . . .	2
<b>2. Modelo ruidoso del votante</b>	<b>3</b>
2.1. Descripción del modelo . . . . .	3
2.2. Transición entre regímenes . . . . .	5
<b>3. Modelo ruidoso del votante con envejecimiento total</b>	<b>7</b>
3.1. Fenómeno de envejecimiento . . . . .	7
3.2. Descripción general del modelo . . . . .	8
3.3. Ecuación de estado y punto crítico . . . . .	10
3.4. Exponente crítico . . . . .	12
3.5. Caracterización de la transición de fase. Magnetización y susceptibilidad . . . . .	13
3.6. Ruptura de simetría . . . . .	15
<b>4. Modelo ruidoso del votante con envejecimiento parcial</b>	<b>15</b>
4.1. Descripción general del modelo . . . . .	15
4.2. Ecuación de estado y punto crítico . . . . .	16
4.3. Exponente crítico . . . . .	18
4.4. Caracterización de la transición de fase. Magnetización y susceptibilidad . . . . .	19
<b>5. Modelo ruidoso del votante con envejecimiento parcial afectando a ambos mecanismos</b>	<b>21</b>
5.1. Descripción del modelo . . . . .	21
5.2. Caracterización cualitativa de la transición de fase . . . . .	24
<b>6. Conclusiones</b>	<b>26</b>
<b>A. Apéndices</b>	<b>29</b>
A.1. Obtención de la ecuación de Fokker-Planck a partir de la ecuación maestra . . . . .	29
A.2. Obtención de la solución estacionaria de la ecuación de Fokker-Planck . . . . .	30

## 1. Introducción

La descripción microscópica de sistemas formados por un gran número de constituyentes es intratable tanto en la mecánica clásica como en la mecánica cuántica. Ahora bien, tal descripción microscópica no sólo es imposible, sino que también es innecesaria si lo que se desea es determinar la conducta global del sistema. De esta idea nace la Física Estadística, la rama de la Física que se aplica a sistemas de un gran número de partículas y que, considerando a sus constituyentes como entidades microscópicas, describe sus propiedades macroscópicas a partir de sus propiedades microscópicas. La conducta global de los sistemas estudiados por la Física Estadística no equivale a la suma de las conductas individuales de sus constituyentes, por lo que tales sistemas reciben el nombre de “sistemas complejos”. Este efecto de no-linealidad es debido a las interacciones existentes entre las partículas del sistema, las cuales son cruciales para entender su evolución.

La Física Estadística, que se desarrolló a lo largo del siglo XIX, se encarga de resolver problemas de dinámica microscópica hamiltoniana a través del cálculo de funciones macroscópicas, potenciales termodinámicos de equilibrio como la entropía, la energía libre o la energía interna [1, 2]. Aún así, en los últimos 20 años las técnicas de esta disciplina se han extendido a problemas que no poseen un hamiltoniano o que ni siquiera están descritos por las leyes fundamentales de la Física. Por ejemplo, las herramientas de la Física Estadística se han utilizado para estudiar sistemas neuronales [3]. Una neurona es una célula capaz de recibir información en forma de señales eléctricas a través de sus dendritas y de transmitirla a otras neuronas mediante un pulso eléctrico a través de su axón. Desde el punto de vista físico, una neurona es un sistema eléctrico bastante sencillo. Ahora bien, las agrupaciones de muchas neuronas conducen a funciones cerebrales mucho más complejas como la inteligencia o la memoria o, por otro lado, pueden provocar algunas enfermedades. Un ataque epiléptico, por ejemplo, se produce cuando un conjunto de neuronas se sincronizan de manera anómala para emitir una señal eléctrica de forma simultánea. El objetivo de la Física Estadística es relacionar el comportamiento individual de una neurona, el cual es relativamente simple, con los comportamientos colectivos de grandes agrupaciones de neuronas. Otros ejemplos de cuestiones que pueden estudiarse mediante las técnicas y herramientas de la Física Estadística son cómo las interacciones entre vehículos dan lugar a un sistema autoorganizado de tráfico y en qué condiciones se producen embotellamientos o un flujo fluido, o por qué los movimientos de individuos entre distintos lugares geográficos pueden manifestarse en forma de grandes migraciones poblacionales. En cualquiera de estos ejemplos, y similarmente con el programa original de la Física Estadística, el propósito siempre es predecir el comportamiento global del sistema a partir de las reglas microscópicas básicas que rigen los componentes individuales, incluyendo las interacciones entre ellos.

### 1.1. Modelos binarios estocásticos

En este trabajo vamos a implementar los principios de la Física Estadística a modelos binarios estocásticos. *Binario* implica que cada variable dinámica puede tomar dos valores, y *estocástico* significa que las reglas de evolución no son deterministas. Estos problemas requieren tratar con la ecuación de evolución de la probabilidad de hallar el sistema en un estado, llamada *ecuación maestra*. Tales modelos pueden ser considerados y analizados para describir fenómenos sociales colectivos si se interpreta la variable binaria como la opinión de entre dos posibles mantenida por una persona sobre un tema determinado [4].

Un modelo muy sencillo que reúne estas características es el *modelo del votante*, el cual nace de las Matemáticas y posteriormente es aplicado al estudio de sistemas físicos [5, 6]. Este modelo describe sistemas compuestos por un gran número de elementos, también llamados nodos o agentes, cada uno de los cuales se sitúa en el nodo de una red y está caracterizado por una variable binaria. La evolución del sistema viene dada por el *mecanismo de imitación*, según el cual un agente puede escoger aleatoriamente a uno de sus vecinos y adoptar ciegamente su opinión.

Para redes de dimensión  $d > 2$ , que es el caso de la mayoría de redes complejas, se encuentra que el sistema global alcanza un estado dinámico de coexistencia de estados como resultado de las interacciones entre sus nodos. Este resultado en un principio se consideró contraintuitivo ya que, si el único mecanismo de interacción entre agentes es el de imitación por parejas, puede parecer de sentido común pensar que el sistema alcanzará un estado de consenso global.

El objetivo es construir un modelo que sea capaz de describir cambios de estado del sistema a escala macroscópica como transiciones de fase ocurriendo para un valor crítico de un parámetro de control. Y, como el modelo del votante no tiene parámetros, no induce ninguna transición de fase. El economista Kirman realizó una modificación del modelo del votante [7], ya propuesta con anterioridad en otros contextos (ver resumen en [8]), denominada *modelo ruidoso del votante*. En esta variante se considera un mecanismo adicional de actualización de estado: un agente no sólo puede cambiar de estado por imitación, sino que también puede hacerlo por el *efecto del ruido*. Este nuevo mecanismo permite a los agentes cambiar de estado por decisión propia, independientemente de las opiniones mantenidas por sus vecinos. Esta modificación introduce un parámetro en el modelo, el parámetro de ruido, que indica la proporción entre los cambios de estado debidos a imitación y los impulsados por el ruido. Dadas las dos leyes microscópicas por las que se rigen los individuos (actualizar su estado por ruido o por imitación), nos preguntamos por la predicción de la Física Estadística para el estado final macroscópico del sistema: ¿se llega al consenso o, por el contrario, a la coexistencia de opiniones? La respuesta es que ambas situaciones son posibles, y la transición entre ellas se da para un valor crítico del parámetro de ruido que depende del número de agentes y que tiende a cero en el límite termodinámico. En el límite en el que el número de agentes es infinito, siempre hay coexistencia de opiniones. Aunque este escenario nos puede recordar a una transición de cambio de fase, la transición del modelo de Kirman no es propiamente una transición de fase porque para ello debería existir en el límite termodinámico.

## 1.2. Efectos no-markovianos

Se han propuesto numerosas modificaciones del modelo de Kirman con la finalidad de obtener una transición de fase bien definida. En este trabajo nos centraremos en la influencia de *efectos no-markovianos* sobre el modelo, según los cuales las probabilidades futuras del sistema no sólo dependen de su estado, sino también del camino que se ha seguido para llegar a él [9].

En concreto, incorporaremos el efecto de *envejecimiento* y asumiremos que cada nodo cuenta con un reloj interno que mide el tiempo de persistencia en su estado, es decir, su edad. La probabilidad de que un agente cambie de opinión ahora no sólo dependerá de las interacciones con sus vecinos, sino también de su tiempo interno. Cuanto mayor sea el tiempo que lleve un nodo en un estado, más resistencia opondrá a actualizarlo [10].

En primera instancia asumiremos que todos los nodos están afectados por el fenómeno de envejecimiento, y que este influye solamente sobre el mecanismo de imitación. Cuando un agente sea seleccionado para llevar a cabo una actualización de estado por imitación, primero deberá ser activado con una probabilidad inversamente proporcional a su edad. El mecanismo de cambio de estado por ruido, en cambio, permanecerá inalterado. También nos preguntaremos por el estado global del sistema en un modelo en el que no todos los agentes estén afectados por el envejecimiento, sino que sólo una porción de ellos tenga un reloj interno que condicione las probabilidades de sus actualizaciones de estado por imitación [11]. Tal y como veremos, ambos modelos dan lugar a un valor del parámetro de ruido crítico que no se anula en el límite termodinámico e inducen una transición de fase de segundo orden perteneciente a la clase de universalidad del modelo de Ising.

Por último, manteniendo la particularidad de que el sistema cuenta con algunos agentes que están afectados por el envejecimiento y otros que no, estudiaremos cómo se modifican los resultados si consideramos que el efecto de la edad también influye sobre los cambios de estado impulsados por el ruido. Aunque las simulaciones numéricas indican que en este modelo la

transición de fase también existe en el límite termodinámico, hemos dejado la resolución analítica completa del problema para un futuro estudio.

## 2. Modelo ruidoso del votante

En esta sección describiremos la versión estándar del modelo del votante incluyendo efectos aleatorios o de ruido, también conocido como modelo de Kirman, sobre el cual iremos introduciendo modificaciones a lo largo del trabajo.

### 2.1. Descripción del modelo

Consideramos un sistema de  $N$  agentes, cada uno de los cuales tiene asociada una variable binaria  $s_i = \{0, 1\}$ . Esta variable puede tomar múltiples significados según el sistema que se esté estudiando. En la versión original de Kirman los dos posibles valores representan la predisposición de un agente de bolsa a comprar o vender acciones. Otras interpretaciones pueden ser la lengua hablada por un individuo perteneciente a una sociedad bilingüe o, de forma más general, cuál de dos opiniones posibles es mantenida por una persona acerca de un tema determinado. De todos modos, el significado de esta variable binaria no nos atañe en este trabajo. Con la finalidad de caracterizar el estado global del sistema se define la variable  $n = \sum_{i=1}^N s_i$ , que corresponde al número total de nodos en el estado 1, o número de ocupación del estado. Alternativamente, se introduce la variable global  $m = 2n/N - 1$ , la cual está restringida al intervalo  $[-1, 1]$  y recibe el nombre de *magnetización* por analogía con modelos del ferromagnetismo. Estos modelos (como, por ejemplo, el modelo de Ising) usan una variable de espín  $1/2$  que puede adoptar también dos posibles valores.

Para explicar la dinámica del sistema, estudiamos el evento de actualización del nodo  $i$ . Este tiene una probabilidad  $a \in [0, 1]$  de cambiar su estado aleatoriamente debido al efecto del ruido, dando como resultado un estado final  $s_i = 0$  o  $s_i = 1$  con la misma probabilidad independientemente del valor previo de la variable. Por otra parte, con la probabilidad complementaria  $1 - a$  el agente cambiará su estado mediante el proceso de imitación, consistente en escoger de manera aleatoria a uno de sus vecinos y adoptar automáticamente su opinión. De esta manera, la probabilidad de copiar uno u otro estado es proporcional a la fracción de vecinos que se encuentran en cada uno de ellos.

Podemos describir las transiciones entre los dos estados como eventos aleatorios que ocurren a unos ritmos determinados. El ritmo al que el nodo  $i$  cambia del estado 1 al estado 0 se denota por  $\Omega_i^-$ . Asumiendo que estas transiciones ocurren aleatoriamente al ritmo constante  $\Omega_i^-$ , hay una probabilidad  $\Omega_i^- dt$  de que un agente transite del estado 1 al estado 0 en el intervalo de tiempo  $(t, t + dt)$ . Análogamente,  $\Omega_i^+$  es el ritmo al que el nodo  $i$  cambia del estado 0 al estado 1 y  $\Omega_i^+ dt$  es la probabilidad de que ocurra dicha transición en el intervalo  $(t, t + dt)$ . En un escenario *all-to-all* en el que todos los nodos están conectados entre sí, las probabilidades de transición microscópicas para cada agente  $i$  pueden expresarse como:

$$\Omega_i^- dt \equiv \Omega(s_i = 1 \rightarrow s_i = 0)dt = \frac{1}{N} \left[ \frac{a}{2} + (1 - a) \frac{N - n}{N} \right], \quad (1)$$

$$\Omega_i^+ dt \equiv \Omega(s_i = 0 \rightarrow s_i = 1)dt = \frac{1}{N} \left[ \frac{a}{2} + (1 - a) \frac{n}{N} \right], \quad (2)$$

donde se ha usado que la fracción de agentes en el estado 1 es  $n/N$  y, complementariamente, que la fracción de agentes en el estado 0 es  $(N - n)/N$ . En las simulaciones numéricas usualmente se suele tomar  $dt = 1/N$  correspondiente al evento de elección individual de un agente aleatoriamente entre todos los posibles. El tiempo así definido se mide en *pasos Monte Carlo* (o MCS por sus siglas en inglés [12]), y es el convenio de unidades para el tiempo que usaremos a lo largo del trabajo. El factor  $1/N$  en el lado derecho de las Ecuaciones (1) y (2) refleja precisamente

la probabilidad de que el agente  $i$  sea elegido para su actualización de entre los  $N$  posibles agentes. El factor  $a/2$  corresponde a la probabilidad  $a$  de que el mecanismo elegido sea el de ruido multiplicada por la probabilidad  $1/2$  de que el estado final elegido al azar sea el opuesto al inicial. Por otra parte, el mecanismo de imitación se activa con probabilidad  $1 - a$  y conduce al estado 1 con una probabilidad  $n/N$  igual a la de elegir el vecino a copiar en el estado 1, o al 0 con una probabilidad  $(N - n)/N$ . Esto explica cada uno de los factores que aparecen en el cálculo de la probabilidad de actualización del estado de un nodo en las ecuaciones anteriores.

En lugar de estudiar el problema a partir de las transiciones realizadas por cada uno de los agentes, podemos hacerlo desde el punto de vista de los números de ocupación. Así, introducimos las probabilidades de transición macroscópicas de que el sistema salte entre estados globales con  $n$  partículas en el estado 1. Estas probabilidades por unidad de tiempo pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\Omega^-(n) \equiv \Omega(n \rightarrow n - 1) = n\Omega_i^- = n \left[ \frac{a}{2} + (1 - a)\frac{N - n}{N} \right], \quad (3)$$

$$\Omega^+(n) \equiv \Omega(n \rightarrow n + 1) = (N - n)\Omega_i^+ = (N - n) \left[ \frac{a}{2} + (1 - a)\frac{n}{N} \right]. \quad (4)$$

Llegados a este punto, vemos que nos encontramos ante un proceso que está dominado por la aleatoriedad, es decir, un proceso estocástico. Por otra parte, al carecer de memoria y ser las probabilidades futuras independientes de la historia del sistema, el proceso es de Markov. Este tipo de procesos requieren tratar con la ecuación de evolución de la probabilidad de hallar al sistema en un estado, llamada ecuación maestra. Para un sistema de dos estados con ritmos de transición constantes, la ecuación maestra toma la siguiente forma general [12, 13, 14]:

$$\frac{\partial P(n; t)}{\partial t} = (E - 1)[\Omega^-(n)P(n; t)] + (E^{-1} - 1)[\Omega^+(n)P(n; t)], \quad (5)$$

donde  $P(n; t)$  es la probabilidad de que el sistema tenga  $n$  nodos en el estado 1 a tiempo  $t$  y  $E^l$  es un operador escalera tal que  $E^l[f(n)] = f(n + l)$ .

Se puede ahora deducir que la ecuación de evolución temporal de  $\langle n(t) \rangle$ , con  $\langle \cdot \rangle$  representando el promedio sobre las realizaciones de la dinámica,  $\langle n(t) \rangle = \sum_n nP(n; t)$ , es la siguiente:

$$\frac{d\langle n \rangle}{dt} = \langle \Omega^+(n) \rangle - \langle \Omega^-(n) \rangle. \quad (6)$$

Es trivial comprobar que esta ecuación solamente tiene una solución estacionaria:  $\langle n \rangle = N/2$ , la cual corresponde al estado más desordenado posible con coexistencia de opiniones en los dos estados.

La magnetización,  $m$ , está relacionada con el número de nodos en el estado 1,  $n$ , mediante la relación ya mencionada  $n = N(m + 1)/2$ , la cual podemos considerar como un simple cambio de variables. Notemos, sin embargo, que la principal diferencia es que  $n$  es una variable *extensiva*, que escala de manera proporcional al número de agentes  $N$ , mientras que  $m$  es una variable *intensiva* y que, por tanto, está bien definida también en el límite termodinámico. Para escribir la ecuación maestra en función de la magnetización desarrollamos los operadores  $(E^\pm - 1)$  en potencias negativas de  $N$ . Al realizar este proceso, el cual es estándar y puede consultarse en el Apéndice A.1, llegamos a la ecuación de Fokker-Planck:

$$\frac{\partial P(m; t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial m}[F(m)P(m; t)] + \frac{\partial^2}{\partial m^2}[D(m)P(m; t)], \quad (7)$$

cuyos términos de deriva,  $F(m)$ , y de difusión,  $D(m)$ , vienen dados por:

$$\begin{aligned} F(m) &= -am, \\ D(m) &= \frac{a + (1 - a)(1 - m^2)}{N}. \end{aligned} \quad (8)$$



Aunque la ecuación de Fokker-Planck del modelo de Kirman puede ser resuelta explícitamente, aquí nos restringiremos a analizar su solución estacionaria,  $P_{\text{st}}(m)$ . Tal y como se detalla en el Apéndice A.2, si igualamos la derivada temporal de la Ecuación (7) a cero llegamos a la siguiente función de densidad de probabilidad (fdp) estacionaria:

$$P_{\text{st}}(m) = \mathcal{Z}^{-1} [1 + (a - 1)m^2]^{\frac{2-a(N+2)}{2(a-1)}}, \quad (9)$$

con constante de normalización  $\mathcal{Z} = {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1 + \frac{aN}{2(a-1)}, \frac{3}{2}, 1 - a\right)$ , donde  ${}_2F_1$  es la función hipergeométrica. El signo del exponente de la ecuación de la solución estacionaria determina el comportamiento cualitativo del sistema. Si es negativo [ $a > 2/(N + 2)$ ], la solución es cóncava, simétrica y con un único máximo en  $m = 0$  (es decir, en  $n = N/2$ ). En este régimen unimodal, la solución más probable corresponde al estado más desordenado posible, caracterizado por una coexistencia equiprobable de ambas opiniones. En cambio, si el exponente es positivo [ $a < 2/(N + 2)$ ], la solución es convexa, simétrica y con dos picos simétricos en los bordes del intervalo  $m = +1, -1$  (lo que corresponde a  $n = N, 0$ ), un régimen bimodal. Los dos máximos de la probabilidad corresponden entonces a situaciones llamadas de consenso, porque todos los agentes han adoptado el mismo valor de su variable. Hay que tener en cuenta que el régimen de consenso es dinámico y en él se observan transiciones dinámicas entre el estado de consenso en la opinión 0 y el de consenso en la opinión 1. La transición entre los dos regímenes, desordenado y de consenso, se da para el siguiente valor crítico del parámetro del ruido:

$$a_c = \frac{2}{N + 2}, \quad (10)$$

para el cual el exponente de la ecuación se anula y la distribución estacionaria es plana, lo cual indica que cualquier valor de la magnetización es equiprobable.

## 2.2. Transición entre regímenes

Los tres regímenes del modelo ruidoso del votante se pueden observar en la Figura 1, donde se comparan simulaciones numéricas con sus respectivas soluciones analíticas. Por otra parte, la Figura 2 muestra una trayectoria típica de la dinámica para cada uno de los tres regímenes.

La transición de régimen bimodal a régimen unimodal es de naturaleza discontinua porque, tal y como podemos apreciar en la Figura 3, el estado más probable cambia de manera abrupta cuando el parámetro  $a$  cruza el valor  $a_c$ . Para  $a < a_c$  la función de densidad de probabilidad tiene dos máximos que se dan para los valores extremos de la magnetización,  $m = \pm 1$ , mientras que para  $a > a_c$  hay un único máximo que se desplaza hacia el valor central  $m = 0$ . Otro aspecto a destacar de la transición inducida en el modelo ruidoso del votante es su dependencia con el tamaño del sistema: a medida que el número de nodos aumenta, el valor del ruido crítico disminuye. En sistemas reales el número de agentes es finito, de manera que siempre será posible observar la transición. Ahora bien, según nos enseña la Mecánica Estadística, una transición de fase bien definida debe existir en el límite termodinámico,  $N \rightarrow \infty$ . Al tomar este límite en nuestro modelo el valor del ruido crítico tiende a cero, de forma que no hay transición posible. En consecuencia, el régimen bimodal es inaccesible y el sistema se encuentra en un estado desordenado con coexistencia de fases para cualquier valor del parámetro de ruido. La situación es similar a la que se da en el modelo de Ising unidimensional con una temperatura crítica  $T_c = 0$ .

En la literatura se han propuesto numerosas modificaciones del modelo ruidoso del votante con la finalidad de obtener una transición de fase bien definida, de manera que el régimen bimodal sea accesible incluso en el límite termodinámico. Algunas de estas formulaciones alternativas consisten en considerar una red compleja de vecinos [15], introducir agentes fanáticos que nunca cambian su estado [16] o tener en cuenta el tiempo transcurrido entre la última actualización de cada uno de los agentes [17]. En las próximas secciones incorporaremos este último efecto,

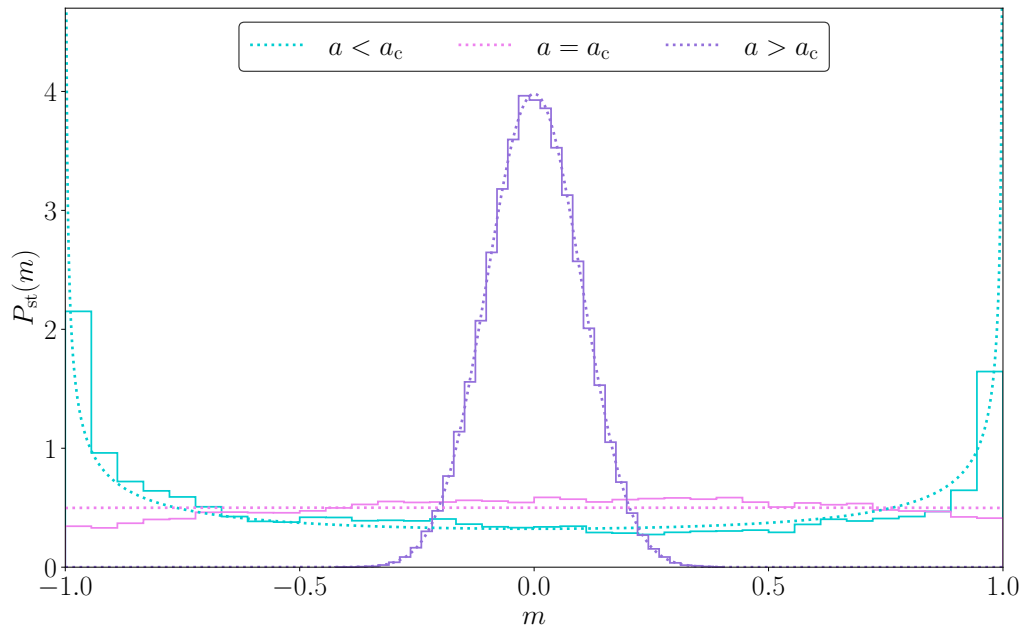


Figura 1: Función de densidad de probabilidad estacionaria de la magnetización en los tres regímenes ( $a = 0.0005, 0.001$  y  $0.05$ ) para un sistema de tamaño  $N = 2000$ . El valor crítico es  $a_c = \frac{2}{N+2} \approx 0.001$ . Las líneas sólidas representan los histogramas provenientes de las simulaciones numéricas, mientras que las líneas discontinuas son las soluciones analíticas dadas por la Ecuación (9).

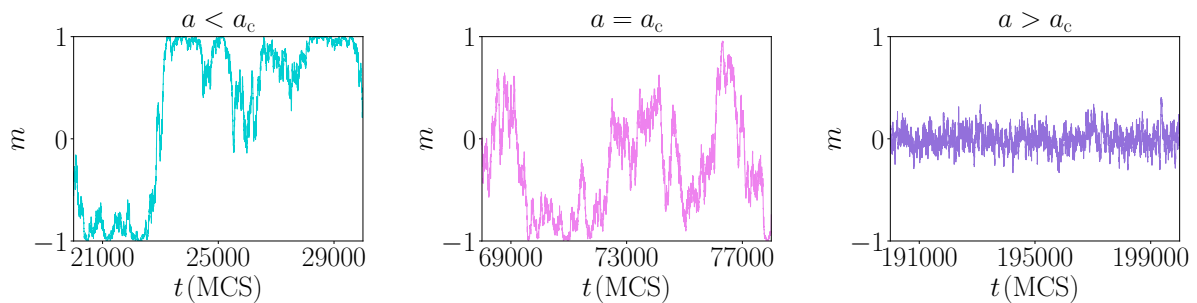


Figura 2: En esta figura nuevamente se ha considerado un sistema de  $N = 2000$  nodos en los tres regímenes diferentes ( $a = 0.0005, 0.001$  y  $0.05$ ), y se muestra una trayectoria típica de la dinámica para cada uno de ellos.

y consideraremos que cuanto más tiempo permanece un nodo en un mismo estado, mayor es la resistencia que opone a actualizarlo.

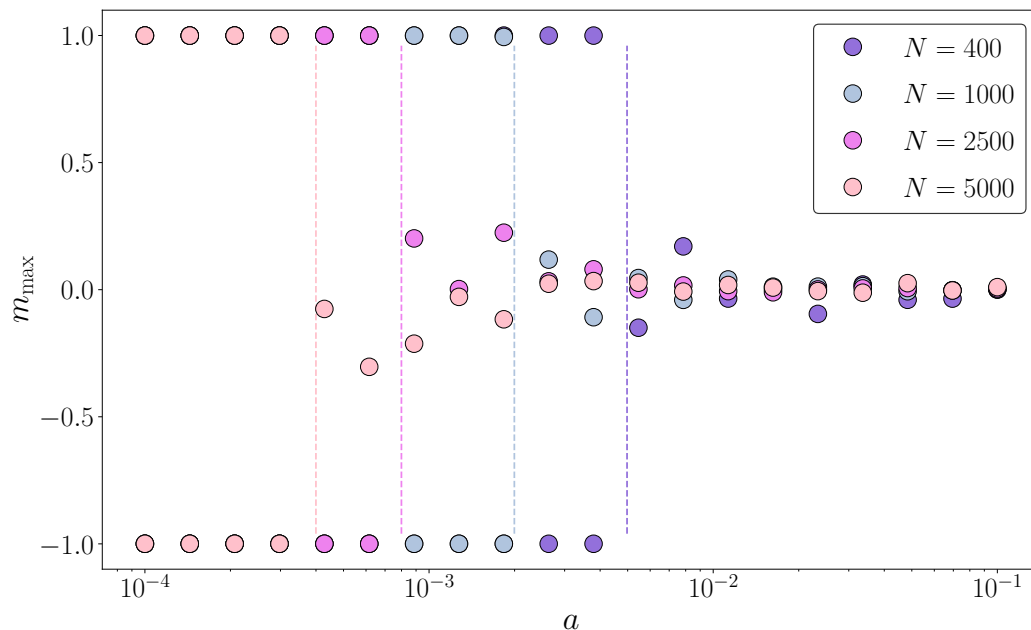


Figura 3: Simulaciones numéricas de los valores de la magnetización que maximizan la función de densidad de probabilidad,  $m_{\max}$ , frente al parámetro de ruido para cuatro sistemas de diferente tamaño. Las líneas discontinuas verticales son las predicciones para el ruido crítico,  $a_c = 2/(N + 2)$ , para cada uno de los sistemas.

### 3. Modelo ruidoso del votante con envejecimiento total

El modelo ruidoso del votante estándar es completamente markoviano porque las probabilidades futuras del sistema sólo dependen de su estado y no de la trayectoria seguida para llegar hasta él. Ahora bien, es sabido que la correcta descripción de muchos sistemas reales, especialmente aquellos en los que sus agentes interactúan entre sí, requiere la incorporación de efectos no markovianos.

#### 3.1. Fenómeno de envejecimiento

En esta sección vamos a presentar el modelo ruidoso del votante con envejecimiento, en el que se asigna a cada agente una nueva variable temporal,  $\tau$ , llamada *edad*. La edad de un agente se define como el tiempo transcurrido en unidades de Monte Carlo desde su último cambio de estado. Esta variable puede tomar los valores  $\tau = 0, 1, 2, \dots$ , e inicialmente es cero para todos los agentes. Si un nodo mantiene el mismo estado tras un evento de actualización, su edad aumenta en una unidad. Si, por el contrario, el agente modifica su estado ya sea por ruido o por imitación, su edad se restablece a 0.

En lo que respecta a la dinámica, consideramos de momento que la edad influye sólo sobre los cambios de estado por imitación. Si un agente es seleccionado para llevar a cabo este tipo de actualización, primero deberá activarse con una probabilidad  $P(\tau) = 1/(\tau + 2)$ . De esta manera, cuanto más viejo sea un agente, más difícil será que cambie de opinión por interacción con uno de sus vecinos. El mecanismo de cambio de estado por ruido, en cambio, no se ve afectado por el tiempo interno de los nodos en este modelo.

Son muchos los campos de estudio que incorporan el fenómeno de envejecimiento en sus modelos, y los significados que se atribuyen a este efecto son muy variados [10]. En Biología computacional, por ejemplo, el envejecimiento se traduce en un aumento de la mortalidad de

una especie a medida que su población envejece. En Química, el envejecimiento es el responsable de que las propiedades de ciertos materiales cambien a lo largo del tiempo sin que actúen fuerzas sobre ellos como resultado de reacciones lentas con sus alrededores. Es el caso, por ejemplo, de la fotooxidación.

### 3.2. Descripción general del modelo

Las simulaciones numéricas del modelo ruidoso del votante muestran que la distribución estacionaria de la magnetización puede ser unimodal o bimodal según el valor del parámetro de ruido (ver Figura 4). Este comportamiento es similar al que se obtenía en el modelo ruidoso del votante estándar, solo que ahora la transición de régimen bimodal a régimen unimodal es continua y estable independientemente del tamaño del sistema, tal y como se puede apreciar en la Figura 5. También podemos observar que, a diferencia de lo que ocurre en el modelo ruidoso del votante estándar, ahora la posición de  $a_c$  depende muy débilmente del tamaño del sistema. Por otra parte, el régimen bimodal con dos picos en  $m = \pm 1$ , correspondientes a los estados más ordenados posibles, solamente se da cuando no hay ruido en el sistema, es decir, cuando  $a = 0$ . A medida que el ruido aumenta, los valores más probables de la magnetización se desplazan simétricamente hacia el centro del intervalo. Para ruidos  $a \geq a_c$ , el sistema se encuentra en el régimen unimodal, lo que equivale al estado más desordenado posible con igual coexistencia de las dos opiniones. Cuanto mayor es el ruido, menos dispersa es la distribución estacionaria de la magnetización.

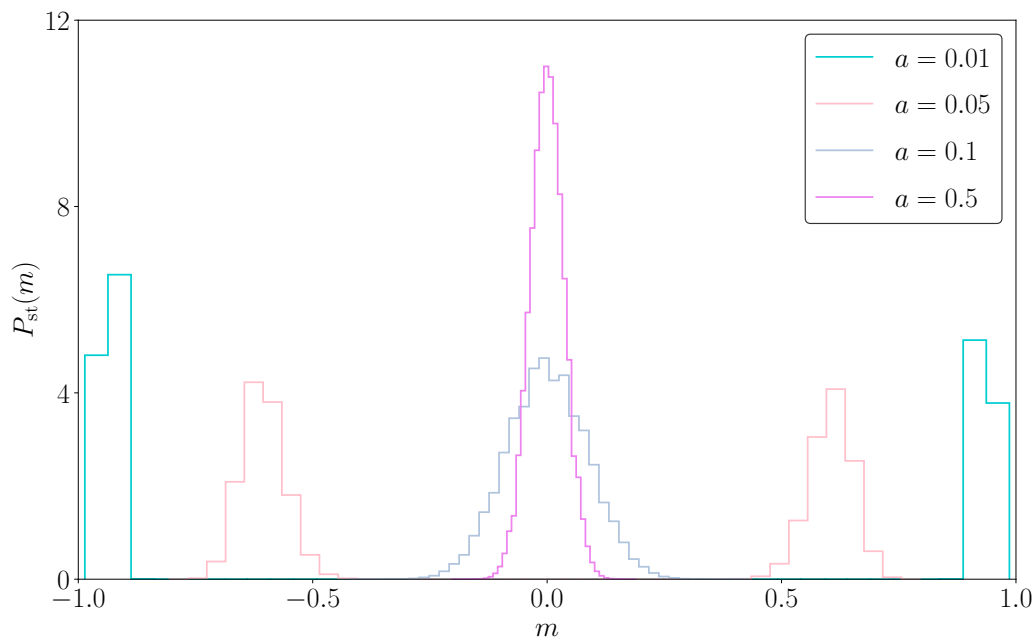


Figura 4: En el modelo ruidoso del votante con envejecimiento, histogramas numéricos de la función de densidad de probabilidad estacionaria en función de la magnetización para dos valores de ruido por debajo (bimodal) y dos valores por encima (unimodal) del punto crítico,  $a_c$ . El sistema considerado tiene  $N = 1000$  agentes.

Un aspecto importante a tener en cuenta del modelo ruidoso del votante con envejecimiento y que explicaremos con mayor detalle más adelante es que, al asignar un tiempo interno a cada uno de los nodos, se produce una ruptura de simetría en el sistema. Recordamos que en el modelo ruidoso del votante estándar el régimen de consenso es dinámico, es decir, en él se observan

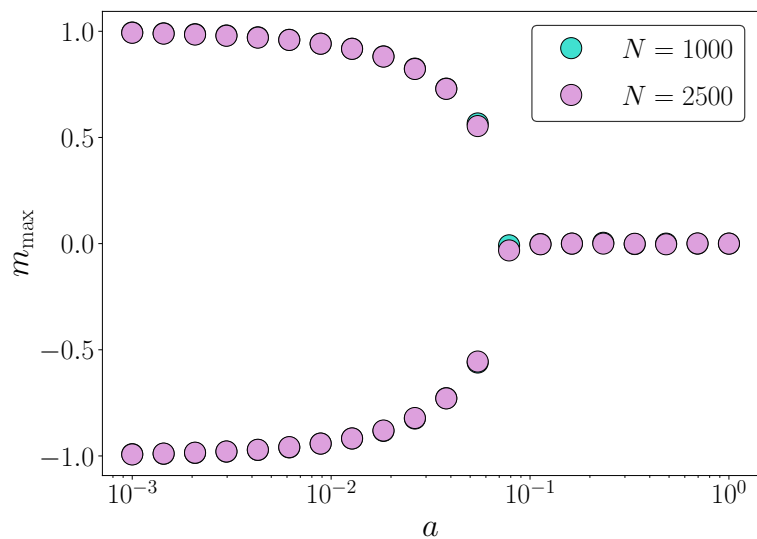


Figura 5: Máximos de la funci3n de densidad de probabilidad,  $m_{\max}$  en funci3n del parámetro de ruido,  $a$ . Las simulaciones se han realizado para dos sistemas de tamaños  $N = 1000$  y  $N = 2500$ , cuyos datos se superponen.

transiciones entre el estado de consenso en la opini3n 1 y el de consenso en la opini3n 0. En el modelo ruidoso del votante con envejecimiento, en cambio, cuando el parámetro de ruido cruza el valor  $a_c$ , el sistema elige aleatoriamente uno de los dos estados de consenso y permanece en 3l indefinidamente. Esta situaci3n es análoga a la que se tiene en un sistema magn3tico con campo externo aplicado nulo. En tal caso, si la temperatura del sistema disminuye hasta la temperatura de Curie,  $T_c$ , el sistema escoge espontáneamente una de las dos ramas ferromagn3ticas.

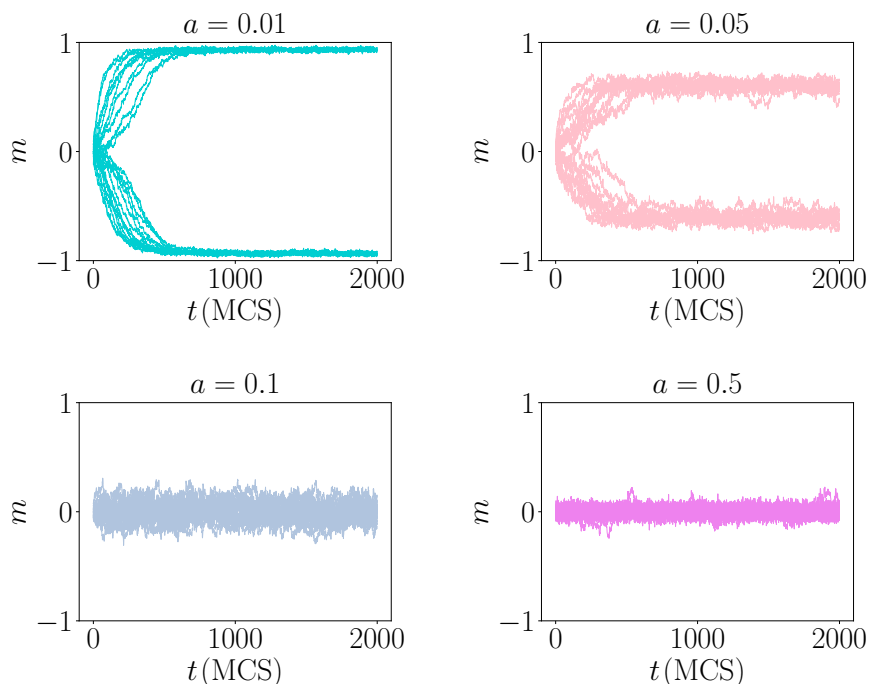


Figura 6: 25 trayectorias de la magnetizaci3n para cuatro valores del parámetro de ruido en un sistema de  $N = 1000$  agentes. Las dos gráficas superiores corresponden al r3gimen bimodal, mientras que las dos gráficas inferiores ilustran el r3gimen unimodal.

En la Figura 6 se pueden observar trayectorias típicas de la magnetización en los regímenes bimodal y unimodal. En el caso del modelo ruidoso del votante estándar, el régimen bimodal puede ilustrarse considerando una sola trayectoria de la magnetización para un valor del ruido inferior al crítico. En el modelo con envejecimiento, en cambio, debido a la ruptura de la simetría debemos considerar más de una trayectoria de la magnetización en el régimen bimodal si queremos plasmar bien las dos ramas que puede tomar aleatoriamente la variable.

### 3.3. Ecuación de estado y punto crítico

Para describir matemáticamente el modelo ruidoso del votante con envejecimiento, es conveniente dividir la población total en subgrupos en función de su edad y su estado. Introducimos la variable  $n_\tau^+$  (respectivamente,  $n_\tau^-$ ), que corresponde al número de agentes de edad  $\tau$  en el estado 1 (respectivamente, estado 0). El número total de nodos en el estado 1 es  $n = \sum_{\tau=0}^{\infty} n_\tau^+$  y, equivalentemente para el estado 0,  $N - n = \sum_{\tau=0}^{\infty} n_\tau^-$ .

Los ritmos de transición globales pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\Omega_1(\tau) = n_\tau^+ \left( \frac{a}{2} + \frac{1-a}{2+\tau} \frac{N-n}{N} \right), \quad (11)$$

$$\Omega_2(\tau) = n_\tau^- \left( \frac{a}{2} + \frac{1-a}{2+\tau} \frac{n}{N} \right), \quad (12)$$

$$\Omega_3(\tau) = n_\tau^+ \left[ \frac{a}{2} + \frac{(1-a)(1+\tau)}{2+\tau} + \frac{1-a}{2+\tau} \frac{n}{N} \right], \quad (13)$$

$$\Omega_4(\tau) = n_\tau^- \left[ \frac{a}{2} + \frac{(1-a)(1+\tau)}{2+\tau} + \frac{1-a}{2+\tau} \frac{N-n}{N} \right]. \quad (14)$$

La primera ecuación representa la probabilidad por unidad de tiempo de que un agente de edad  $\tau$  en el estado 1 cambie de estado y, por lo tanto, su edad se restablezca a 0:  $\{n_\tau^+ \rightarrow n_\tau^+ - 1; n_0^- \rightarrow n_0^- + 1\}$ . La segunda probabilidad es equivalente a la primera pero para un nodo en el estado 0. La tercera ecuación corresponde a la probabilidad por unidad de tiempo de que un agente en el estado 1 no sea capaz de cambiar su estado, por lo que su edad aumenta en una unidad:  $\{n_\tau^+ \rightarrow n_\tau^+ - 1; n_{\tau+1}^+ \rightarrow n_{\tau+1}^+ + 1\}$ . Esta situación puede darse si el agente hace una actualización por ruido que da lugar al mismo estado final, si es seleccionado para hacer una actualización por imitación pero su edad le impide activarse, o si supera la barrera del envejecimiento pero copia a un vecino que está en su mismo estado. Por último, la cuarta probabilidad es equivalente a la tercera pero para un nodo en el estado 0. Es trivial comprobar que:

$$\Omega_1(\tau) + \Omega_3(\tau) = n_\tau^+, \quad \Omega_2(\tau) + \Omega_4(\tau) = n_\tau^-. \quad (15)$$

Las ecuaciones de evolución temporal de  $\langle n_\tau^\pm \rangle$  son:

$$\frac{d\langle n_\tau^+ \rangle}{dt} = -\langle \Omega_1(\tau) \rangle + \langle \Omega_3(\tau-1) \rangle - \langle \Omega_3(\tau) \rangle, \quad (16)$$

$$\frac{d\langle n_\tau^- \rangle}{dt} = -\langle \Omega_2(\tau) \rangle + \langle \Omega_4(\tau-1) \rangle - \langle \Omega_4(\tau) \rangle, \quad (17)$$

válidas para edades  $\tau \geq 1$ . En el caso particular de  $\tau = 0$ , tenemos:

$$\frac{d\langle n_0^+ \rangle}{dt} = \sum_{\tau=0}^{\infty} \langle \Omega_2(\tau) \rangle - \langle \Omega_3(0) \rangle - \langle \Omega_1(0) \rangle, \quad (18)$$

$$\frac{d\langle n_0^- \rangle}{dt} = \sum_{\tau=0}^{\infty} \langle \Omega_1(\tau) \rangle - \langle \Omega_4(0) \rangle - \langle \Omega_2(0) \rangle. \quad (19)$$

Las Ecuaciones (16) – (19) constituyen un conjunto infinito de ecuaciones diferenciales acopladas, por lo que la resolución analítica del problema es muy complicada. Ahora bien, el análisis de las soluciones estacionarias proporciona información suficiente para caracterizar la transición de fase.

Sumando las Ecuaciones (16) y (18) e igualando las derivadas temporales a cero, tenemos:

$$\frac{d\langle n_0^+ \rangle}{dt} + \sum_{\tau=1}^{\infty} \frac{d\langle n_{\tau}^+ \rangle}{dt} = \frac{d\langle n \rangle}{dt} = 0 = \langle \Omega_2(0) \rangle - \langle \Omega_1(0) \rangle + \sum_{\tau=1}^{\infty} \langle \Omega_2(\tau) \rangle - \sum_{\tau=1}^{\infty} \langle \Omega_1(\tau) \rangle. \quad (20)$$

Por otra parte, restándole la Ecuación (18) a la Ecuación (19), imponiendo que la solución sea la estacionaria y utilizando el resultado obtenido en la Ecuación (20), llegamos a la relación  $\langle \Omega_1(0) \rangle + \langle \Omega_3(0) \rangle = \langle \Omega_2(0) \rangle + \langle \Omega_4(0) \rangle$ . Esta expresión implica, según las Ecuaciones (15):

$$\langle n_0^+ \rangle = \langle n_0^- \rangle, \quad (21)$$

lo que significa que en el régimen estacionario los números de agentes en los estados 1 y 0 de edad nula coinciden.

Igualando a cero la derivada temporal de la Ecuación (16) y recordando que  $\Omega_1(\tau) + \Omega_3(\tau) = n_{\tau}^+$ , obtenemos la siguiente expresión:

$$\langle n_{\tau}^+ \rangle = \left[ \frac{a}{2} + \frac{(1-a)\tau}{1+\tau} + \frac{1-a}{1+\tau} \frac{\langle n \rangle}{N} \right] \langle n_{\tau-1}^+ \rangle, \quad (22)$$

que es una relación recursiva para  $\langle n_{\tau}^+ \rangle$ :

$$\langle n_{\tau}^+ \rangle = \prod_{k=1}^{\tau} \left[ \frac{a}{2} + (1-a) \frac{x+k}{1+k} \right] \langle n_0^+ \rangle, \quad (23)$$

donde se ha introducido la variable  $x \equiv \langle n \rangle / N$ . Su solución, la cual puede obtenerse mediante cálculo simbólico [18], es la siguiente:

$$\langle n_{\tau}^+ \rangle = \left( 1 - \frac{a}{2} \right)^{\tau} \frac{1}{\Gamma(2+\tau)} \left[ \frac{2+2(1-a)x}{2-a} \right]_{\tau} \langle n_0^+ \rangle, \quad (24)$$

con  $(z)_n = z(z+1) \cdots (z+n-1)$  el símbolo de Pochhammer. Si imponemos estacionariedad en la Ecuación (17), llegamos a la misma ecuación para  $\langle n_{\tau}^- \rangle$  pero con variables  $\langle n_0^- \rangle$  y  $1-x$  en lugar de  $\langle n_0^+ \rangle$  y  $x$ .

Las Ecuaciones (24) pueden sumarse analíticamente, dando como resultado:

$$\langle n \rangle = \sum_{\tau=0}^{\infty} \langle n_{\tau}^+ \rangle = f(a, x) \langle n_0^+ \rangle, \quad (25)$$

donde para simplificar la notación se ha definido la función:

$$f(a, x) \equiv \frac{1}{a+2(1-a)x} \left[ 2^{\frac{-2+2(a-1)x}{a-2}} a^{\frac{a+2(1-a)x}{a-2}} - 2 \right] \langle n_0^+ \rangle \quad (26)$$

Sumando las ecuaciones para los nodos en el estado 0 llegamos a la misma ecuación pero con variables  $\langle n_0^- \rangle$  y  $1-x$  en lugar de  $\langle n_0^+ \rangle$  y  $x$ , es decir,  $N - \langle n \rangle = f(a, 1-x) \langle n_0^- \rangle$ . Utilizando que  $\langle n_0^+ \rangle = \langle n_0^- \rangle$ , llegamos a:

$$\frac{x}{1-x} = \frac{f(a, x)}{f(a, 1-x)}. \quad (27)$$

La Ecuación (27) es la ecuación de estado del sistema ya que sus soluciones  $x(a)$  proporcionan las curvas de la magnetización en función del ruido en el estado estacionario. De manera trivial

podemos comprobar que  $x = 1/2$  es solución, lo que corresponde al caso simétrico con igual coexistencia de agentes en los dos estados. Esta solución es estable para valores del parámetro de ruido superiores a un cierto valor crítico,  $a > a_c$ , e inestable para  $a < a_c$ . En el régimen  $a < a_c$  aparecen dos nuevas soluciones simétricas y estables cuyo perfil se asemeja mucho al de las dos ramas ferromagnéticas en un diagrama de la magnetización en función de la temperatura.

Para determinar el valor del ruido crítico  $a_c$ , imponemos que las derivadas respecto de  $x$  de los dos lados de la Ecuación (27) coincidan al evaluarlas en  $x = 1/2$ . Este proceso es, desde el punto de vista algebraico, sencillo pero extenso. La ecuación obtenida para el ruido crítico es la siguiente:

$$\frac{(2 - a_c)^2}{1 - a_c} = \ln \left( \frac{2}{a_c} \right) \left[ 1 - \left( \frac{a_c}{2} \right)^{\frac{1}{2-a_c}} \right]^{-1}, \quad (28)$$

cuya solución es  $a_c = 0.07556 \dots$

Introduciendo el efecto del envejecimiento sobre el modelo ruidoso del votante hemos llegado a un valor crítico del ruido que es independiente del tamaño del sistema. Este valor crítico no se anula en el límite termodinámico tal y como ocurría en el modelo estándar, por lo que ahora el régimen bimodal es accesible independientemente del número de agentes.

### 3.4. Exponente crítico

Con la información de la que disponemos podemos calcular el exponente crítico de la magnetización,  $\beta$ , tal que  $m \sim (a_c - a)^\beta$ . Como  $m = 2x - 1$ , el comportamiento de  $x$  cerca del punto crítico será el mismo que el de  $m$ . Podemos observar que la Ecuación (27) tiene simetría  $x \rightarrow 1 - x$ , es decir, simetría alrededor de  $x = 1/2$ . Si hacemos la sustitución  $x \rightarrow 1/2 + m$  (de manera que  $1 - x \rightarrow 1/2 - m$ ), la simetría pasa a ser  $m \rightarrow -m$ , es decir, alrededor de  $m = 0$ . A continuación definimos la función  $F(a, m)$ :

$$F(a, m) \equiv \frac{f(a, \frac{1}{2} - m)}{f(a, \frac{1}{2} + m)} - \frac{\frac{1}{2} + m}{\frac{1}{2} - m} = 0, \quad (29)$$

que es antisimétrica ya que  $F(a, m) = -F(a, -m)$ .

Si desarrollamos la función  $F(a, m)$  en serie de Taylor respecto de la variable  $m$  alrededor de  $m = 0$ , obtenemos:

$$F(a, m) = F(a, 0) + F_m(a, 0)m + \frac{F_{mm}(a, 0)}{2!}m^2 + \frac{F_{mmm}(a, 0)}{3!}m^3 + \dots, \quad (30)$$

donde el subíndice  $m$  denota derivada respecto de  $m$ . Ahora bien, como la función  $F(a, m)$  es antisimétrica, su desarrollo no puede contener términos pares. Por lo tanto, tenemos:

$$F(a, m) = F_m(a, 0)m + \frac{F_{mmm}(a, 0)}{3!}m^3 + \dots. \quad (31)$$

Hacemos un segundo desarrollo de la función  $F(a, m)$ , pero esta vez respecto de la variable  $a$  y alrededor de  $a = a_c$ :

$$F(a, m) = [F_m(a_c, 0) + F_{ma}(a_c, 0)(a - a_c) + \dots]m + \left[ \frac{F_{mmm}(a_c, 0)}{3!} + \dots \right]m^3 + \dots. \quad (32)$$

Como la función  $F(a, m)$  tiene tres soluciones para  $a < a_c$  pero sólo una para  $a > a_c$ , necesariamente  $F_m(a_c, 0) = 0$ . Teniendo esto en cuenta y recordando que  $F(a, m) = 0$ , tenemos:

$$m \left[ F_{ma}(a_c, 0)(a - a_c) + \frac{F_{mmm}(a_c, 0)}{3!}m^2 \right] = 0. \quad (33)$$

Una solución de esta ecuación es  $m = 0$ , lo que equivale a  $x = 1/2$ . La otra solución es:



$$m = \left[ 3! \frac{F_{ma}(a_c, 0)}{F_{mmm}(a_c, 0)} (a_c - a) \right]^{1/2} \Rightarrow m \propto (a_c - a)^{1/2}. \quad (34)$$

Por lo tanto, el exponente crítico de la magnetización en el modelo ruidoso del votante con envejecimiento es  $\beta = 1/2$ . Este coincide con el exponente crítico de campo medio del modelo de Ising, por lo que esta clase de universalidad es un candidato bastante razonable para nuestro modelo.

### 3.5. Caracterización de la transición de fase. Magnetización y susceptibilidad

En el estudio termodinámico de un sistema magnético, la magnetización,  $m$ , y la susceptibilidad,  $\chi$ , pueden calcularse como derivadas de la energía libre de Helmholtz,  $F$ :

$$m = \frac{\partial F}{\partial H}, \quad \chi = \frac{\partial m}{\partial H} = \frac{\partial^2 F}{\partial H^2}, \quad (35)$$

donde  $H$  es el campo magnético.

Las transiciones de fase se caracterizan por discontinuidades de los potenciales termodinámicos o de alguna de sus derivadas. Una transición de fase *discontinua* o *de primer orden* es aquella en la que hay una discontinuidad en una o más de las primeras derivadas del potencial. Una transición *continua* o *de segundo orden*, en cambio, se da si el potencial tiene primera derivada continua, pero segunda derivada discontinua. En un sistema magnético, la transición de fase es de primer orden si la magnetización es discontinua, y de segundo orden si la magnetización es continua pero la susceptibilidad es divergente. Cerca del punto crítico el sistema es extremadamente sensible a pequeños estímulos, de manera que cualquier perturbación es infinitamente amplificada. Es decir, el sistema responde con una respuesta infinita. Es por este motivo que las funciones que divergen en el punto crítico reciben el nombre de funciones respuesta.

En lo que respecta al modelo ruidoso del votante con envejecimiento, no podemos definir potenciales termodinámicos como la energía libre porque el problema no posee un hamiltoniano. Como ya sabemos, hemos identificado la magnetización del sistema con la porción de agentes en el estado 1 según la relación  $m = 2n/N - 1$ . Pero, ¿qué pasa con la susceptibilidad? En Física Estadística es habitual introducir las *relaciones de Einstein*, que establecen conexiones entre funciones respuesta y fluctuaciones de funciones dinámicas. Así, podemos identificar la susceptibilidad como las fluctuaciones de la magnetización:

$$\chi = N\sigma^2[m] = N(\langle m^2 \rangle_{st} - \langle m \rangle_{st}^2). \quad (36)$$

A continuación presentamos simulaciones numéricas de la magnetización y de la susceptibilidad con la finalidad de determinar el orden de la transición de fase inducida en el modelo ruidoso del votante con envejecimiento.

Las curvas numéricas del valor esperado de la magnetización estacionaria en función del ruido se muestran, junto con la curva teórica de la ecuación de estado, en la Figura 7. Las simulaciones, que se han realizado para tres sistemas de tamaños diferentes, se asemejan más a la solución teórica a medida que el número de agentes,  $N$ , aumenta. Este hecho refleja uno de los principios básicos de la Física Estadística, ya que esta disciplina requiere tratar con sistemas formados por un gran número de constituyentes. En cualquier caso, vemos que la magnetización es continua para todo el rango de valores del parámetro de ruido.

Por otra parte, en la Figura 8 se muestran las simulaciones numéricas de la susceptibilidad para cinco sistemas de diferente tamaño. Podemos observar que, a medida que el número de agentes aumenta, la susceptibilidad cerca del punto crítico crece. En el límite termodinámico,  $N \rightarrow \infty$ , tendremos que  $\chi$  diverge en  $a_c$ .

En definitiva, hemos podido comprobar mediante simulaciones numéricas que la magnetización es continua cerca del punto crítico, pero que la susceptibilidad diverge en el límite

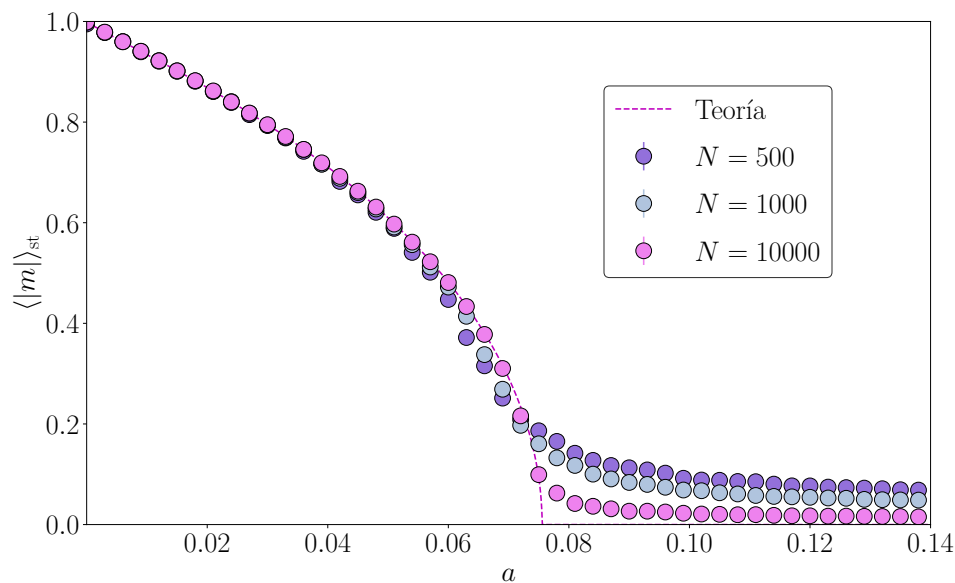


Figura 7: Magnetización estacionaria en función del parámetro de ruido. Los puntos provienen de las simulaciones numéricas para tres sistemas de tamaños diferentes, mientras que la línea discontinua es la solución analítica de la Ecuación (27). Las barras de error de los puntos numéricos corresponden a sus errores estándar, aunque son tan pequeñas que no pueden apreciarse.

termodinámico. Por lo tanto, la transición de fase inducida en el modelo ruidoso del votante con envejecimiento es continua o de segundo orden. Dicha transición de fase es análoga a la que se tiene en el modelo de Ising en la aproximación de campo medio, lo cual era de esperar al pertenecer ambos modelos a la misma clase de universalidad.

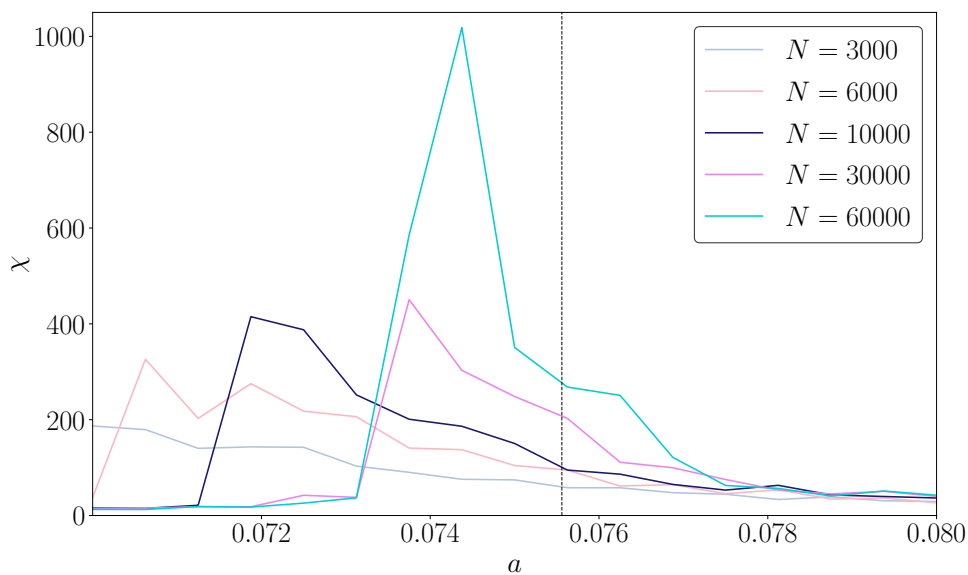


Figura 8: En el modelo ruidoso del votante con envejecimiento, susceptibilidad magnética para sistemas de diferente tamaño. La línea discontinua vertical indica la posición del ruido crítico,  $a_c$ .

### 3.6. Ruptura de simetría

Tal y como hemos mencionado anteriormente, la incorporación del efecto de envejecimiento en el modelo ruidoso del votante comporta una ruptura de simetría en el sistema, la cual es capaz de explicar el mecanismo tras la transición de fase inducida. De forma cualitativa, podemos argumentar que en la fase desordenada o paramagnética la dinámica del sistema está regida por el ruido al ser  $a > a_c$ . En esta región ninguno de los dos estados predomina sobre el otro, y todos los nodos tienen edad similar. En la fase ferromagnética ( $a < a_c$ ), el sistema está ordenado en uno de los dos estados dando lugar a una magnetización neta distinta de cero. En esta región las actualizaciones de estado por imitación son las más probables y, si hay una opinión global mayoritaria, los agentes que mantengan dicha opinión cambiarán menos de estado que aquellos que pertenezcan a la minoría. Como resultado de estos dos escenarios, en promedio tendremos que los nodos más viejos se encontrarán en la región  $a < a_c$ . Por lo tanto, vemos que el fenómeno de envejecimiento da lugar a una asimetría en la distribución de edad de los agentes.

Para cuantificar este argumento, se puede definir el tiempo interno promedio de la población mayoritaria,  $\bar{\tau}_M = \sum_i i \langle n_i^M \rangle / \sum_i \langle n_i^M \rangle$ , donde el índice  $M$  es  $+$  o  $-$  dependiendo de qué población de las dos domine sobre la otra. El tiempo interno promedio de la población minoritaria,  $\bar{\tau}_m$ , se define de forma complementaria. Para calcular la diferencia de tiempos internos promedio de las poblaciones mayoritaria y minoritaria, podemos introducir el parámetro  $\Delta\tau = |\bar{\tau}_M - \bar{\tau}_m|$ . Aunque aquí no lo demostramos, el resultado que se obtiene mediante simulaciones numéricas [9, 17] es que en la fase paramagnética se tiene  $\Delta\tau = 0$ , mientras que la fase ferromagnética se caracteriza por  $\Delta\tau \neq 0$ . En consecuencia, la cantidad  $\Delta\tau$  también puede ser usada como un parámetro de orden del modelo.

## 4. Modelo ruidoso del votante con envejecimiento parcial

En la sección anterior hemos introducido el efecto no markoviano del envejecimiento y hemos asumido que todos los agentes de la población se ven afectados por él. Tal vez una descripción más realista de un sistema podría consistir en suponer que no todos los nodos tienen un reloj interno que mide su tiempo de persistencia y condiciona sus cambios de estado por imitación.

### 4.1. Descripción general del modelo

En esta sección presentamos el modelo ruidoso del votante con envejecimiento parcial. Este describe un sistema formado por  $N$  agentes, los cuales pueden dividirse en dos subpoblaciones. En primer lugar, tenemos nodos que solamente están caracterizados por su variable de estado y cuyos eventos de actualización no se ven influidos por el envejecimiento. En consecuencia, estos nodos interactúan como en el modelo ruidoso del votante estándar. Por otra parte, existen nodos que sí se ven afectados por su edad,  $\tau$ , de la misma forma que en el modelo ruidoso del votante con envejecimiento total. Es decir, estos agentes tienen que ser activados con una probabilidad  $P(\tau) = 1/(\tau + 2)$  antes de efectuar una actualización de estado por imitación.

En el modelo con envejecimiento parcial es conveniente introducir el parámetro  $b \in [0, 1]$ , que indica la fracción de agentes con edad en el sistema. De esta forma, el número total de nodos afectados por el envejecimiento es  $Nb$ , mientras que el número total de nodos sin edad es  $N(1 - b)$ . Del mismo modo que en el modelo con envejecimiento total, definimos  $n_\tau^+$  y  $n_\tau^-$  como el número de nodos de edad  $\tau$  en los estados 1 y 0, respectivamente. Por otra parte, introducimos las variables  $n^+$  y  $n^-$  para referirnos al número de agentes sin edad en los estados 1 y 0, respectivamente. Con esta información, podemos establecer las siguientes relaciones entre variables:

$$n = n^+ + \sum_{\tau=0}^{\infty} n_\tau^+, \quad N - n = n^- + \sum_{\tau=0}^{\infty} n_\tau^-, \quad (37)$$

$$Nb = \sum_{\tau=0}^{\infty} (n_{\tau}^{+} + n_{\tau}^{-}), \quad N(1-b) = n^{+} + n^{-}. \quad (38)$$

Es importante tener en cuenta que el parámetro  $b$  es una cantidad intrínseca del sistema. Si un agente está afectado por el envejecimiento, lo estará a lo largo de toda la historia del sistema. De la misma forma, un nodo sin edad en ningún momento se verá afectado por el envejecimiento. Por lo tanto, las dos subpoblaciones nunca podrán mezclarse.

## 4.2. Ecuación de estado y punto crítico

Las probabilidades de transición globales por unidad de tiempo en el modelo con envejecimiento parcial toman la siguiente forma:

$$\Omega_1(\tau) = n_{\tau}^{+} \left( \frac{a}{2} + \frac{1-a}{2+\tau} \frac{N-n}{N} \right), \quad (39)$$

$$\Omega_2(\tau) = n_{\tau}^{-} \left( \frac{a}{2} + \frac{1-a}{2+\tau} \frac{n}{N} \right), \quad (40)$$

$$\Omega_3(\tau) = n_{\tau}^{+} \left[ \frac{a}{2} + \frac{(1-a)(1+\tau)}{2+\tau} + \frac{1-a}{2+\tau} \frac{n}{N} \right], \quad (41)$$

$$\Omega_4(\tau) = n_{\tau}^{-} \left[ \frac{a}{2} + \frac{(1-a)(1+\tau)}{2+\tau} + \frac{1-a}{2+\tau} \frac{N-n}{N} \right], \quad (42)$$

$$\Omega_5 = n^{+} \left[ \frac{a}{2} + (1-a) \frac{N-n}{N} \right], \quad (43)$$

$$\Omega_6 = n^{-} \left[ \frac{a}{2} + (1-a) \frac{n}{N} \right]. \quad (44)$$

Los ritmos  $\Omega_1(\tau)$  a  $\Omega_4(\tau)$  describen los cuatro resultados posibles tras un evento de actualización en el caso de los nodos afectados por el envejecimiento. Son idénticos a los que teníamos en el modelo con envejecimiento total, por lo que coinciden con los de las Ecuaciones (11)–(14). En consecuencia, las relaciones  $\Omega_1(\tau) + \Omega_3(\tau) = n_{\tau}^{+}$  y  $\Omega_2(\tau) + \Omega_4(\tau) = n_{\tau}^{-}$  siguen siendo válidas. Por otra parte, los ritmos  $\Omega_5$  y  $\Omega_6$  corresponden a los agentes sin edad y son análogos a los del modelo ruidoso del votante estándar de las Ecuaciones (3) y (4).

Las ecuaciones de evolución temporal de  $\langle n_{\tau}^{\pm} \rangle$  y  $\langle n^{\pm} \rangle$ , que toman la misma forma que en sus respectivos modelos originales, son las siguientes:

$$\frac{d\langle n_{\tau}^{+} \rangle}{dt} = -\langle \Omega_1(\tau) \rangle + \langle \Omega_3(\tau-1) \rangle - \langle \Omega_3(\tau) \rangle, \quad (\tau \geq 1) \quad (45)$$

$$\frac{d\langle n_{\tau}^{-} \rangle}{dt} = -\langle \Omega_2(\tau) \rangle + \langle \Omega_4(\tau-1) \rangle - \langle \Omega_4(\tau) \rangle, \quad (\tau \geq 1) \quad (46)$$

$$\frac{d\langle n_0^{+} \rangle}{dt} = \sum_{\tau=0}^{\infty} \langle \Omega_2(\tau) \rangle - \langle \Omega_3(0) \rangle - \langle \Omega_1(0) \rangle, \quad (47)$$

$$\frac{d\langle n_0^{-} \rangle}{dt} = \sum_{\tau=0}^{\infty} \langle \Omega_1(\tau) \rangle - \langle \Omega_4(0) \rangle - \langle \Omega_2(0) \rangle, \quad (48)$$

$$\frac{d\langle n^{+} \rangle}{dt} = \langle \Omega_6 \rangle - \langle \Omega_5 \rangle, \quad (49)$$

$$\frac{d\langle n^{-} \rangle}{dt} = \langle \Omega_5 \rangle - \langle \Omega_6 \rangle. \quad (50)$$

La resolución analítica del problema es complicada, por lo que nos restringiremos al análisis de sus soluciones estacionarias.

En lo que respecta a la subpoblación con edad, nuevamente nos encontramos ante un conjunto de infinitas ecuaciones diferenciales acopladas. Al ser los ritmos de transición y sus respectivas ecuaciones de evolución idénticas a las del modelo con envejecimiento total, muchos de los resultados obtenidos en la Sección 3.3 también nos van a ser de utilidad en el modelo con envejecimiento parcial. Vamos a recordar los más importantes de ellos y que nos harán falta más adelante.

En primer lugar, combinando distintas ecuaciones de evolución temporal e igualando las derivadas temporales a 0 habíamos llegado a  $\langle n_0^+ \rangle = \langle n_0^- \rangle$ . A continuación, imponiendo estacionariedad en las ecuaciones de evolución temporal de  $\langle n_\tau^+ \rangle$  y  $\langle n_\tau^- \rangle$ , obteníamos relaciones recursivas para estas dos variables resolubles mediante cálculo simbólico. Una vez llegados a este punto, habíamos calculado los siguientes sumatorios en los que se introducía la variable  $x = \langle n \rangle / N$ :

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \langle n_\tau^+ \rangle = f(a, x) \langle n_0^+ \rangle, \quad \sum_{\tau=0}^{\infty} \langle n_\tau^- \rangle = f(a, 1-x) \langle n_0^- \rangle, \quad (51)$$

donde  $f(a, x)$  es la función definida en la Ecuación (26).

En el caso de los agentes que no están influidos por el envejecimiento, al igualar las derivadas temporales de las Ecuaciones (49) y (50) a cero obtenemos  $\langle \Omega_5 \rangle = \langle \Omega_6 \rangle$ . A partir de esta relación, y utilizando que  $n^- = N(1-b) - n^+$ , llegamos a:

$$\langle n^+ \rangle = N(1-b) \left[ \frac{a}{2} + (1-a)x \right]. \quad (52)$$

Con las relaciones de las que disponemos ya podemos calcular el valor promedio del número total de agentes en el estado 1:

$$\langle n \rangle = \sum_{\tau=0}^{\infty} \langle n_\tau^+ \rangle + \langle n^+ \rangle = f(a, x) \langle n_0^+ \rangle + N(1-b) \left[ \frac{a}{2} + (1-a)x \right]. \quad (53)$$

Nos gustaría tener una ecuación de estado en función únicamente de las variables  $x$  y  $N$  y de los parámetros  $a$  y  $b$ , pero la Ecuación (53) contiene un término con  $\langle n_0^+ \rangle$ . Sustituyendo las Ecuaciones (51) en la relación  $Nb = \sum_{\tau=0}^{\infty} (n_\tau^+ + n_\tau^-)$ , y utilizando que  $\langle n_0^+ \rangle = \langle n_0^- \rangle$ , llegamos a:

$$\langle n_0^+ \rangle = \frac{Nb}{f(a, x) + f(a, 1-x)}. \quad (54)$$

Sustituyendo esta relación en la Ecuación (53) y dividiendo la ecuación resultante entre el número total de agentes,  $N$ , llegamos a la ecuación de estado del sistema:

$$x = \frac{b}{1 + \frac{f(a, 1-x)}{f(a, x)}} + (1-b) \left[ \frac{a}{2} + (1-a)x \right]. \quad (55)$$

Las soluciones  $x(a, b)$  de la ecuación de estado proporcionan el perfil estacionario de la magnetización en función del ruido y de la porción de agentes afectados por envejecimiento. Es inmediato comprobar que  $x = 1/2$  es una solución de la ecuación, la cual corresponde al estado más desordenado posible con coexistencia de opiniones. Tal y como ocurría en el modelo con envejecimiento estándar, esta solución es estable para valores del ruido por encima de un valor crítico,  $a > a_c$ , e inestable para  $a < a_c$ . Existen otras dos soluciones simétricas que representan las dos ramas ferromagnéticas y que aparecen en el régimen  $a < a_c$ . La diferencia respecto del modelo con envejecimiento total reside en que ahora el valor crítico del ruido depende de la porción de agentes con edad, es decir:  $a_c = a_c(b)$ .

Podemos determinar el valor del parámetro crítico  $a_c(b)$  procediendo de la misma forma que en la sección anterior. Derivamos los dos lados de la Ecuación (55) respecto de  $x$ , sustituimos

$x = 1/2$  y, tras unas manipulaciones algebraicas sencillas pero laboriosas, llegamos a la siguiente expresión:

$$\frac{a_c}{1 - a_c} = b \left\{ \left[ \left( \frac{a_c}{2} \right)^{\frac{1}{2 - a_c}} - 1 \right]^{-1} \frac{\ln \left( \frac{2}{a_c} \right)}{-2 + a_c} - 2 \right\}, \quad (56)$$

ecuación que debe resolverse de forma numérica. La correspondiente curva del valor crítico del ruido en función de la fracción de agentes afectados por la edad se muestra en la Figura 9.

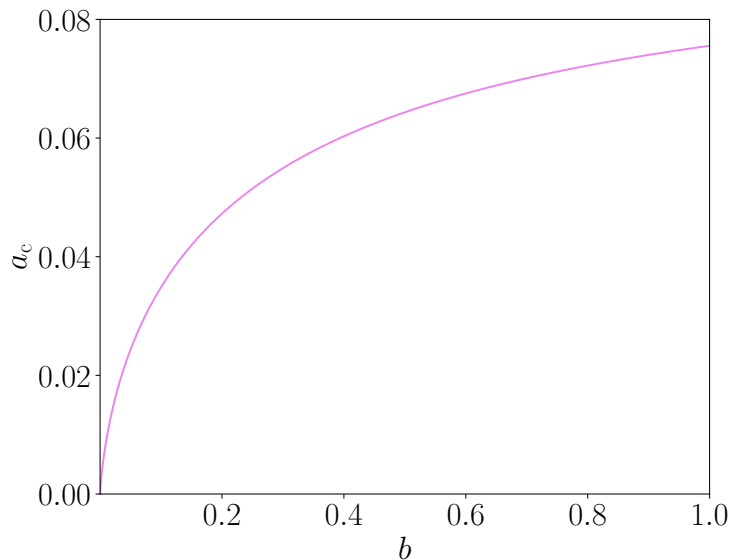


Figura 9: En el modelo ruidoso del votante con envejecimiento parcial, curva analítica del valor crítico del ruido,  $a_c$ , frente a la porción de agentes afectados por envejecimiento,  $b$ , obtenida a partir de la Ecuación (56).

Si en las Ecuaciones (55) y (56) imponemos  $b = 0$ , lo cual corresponde a la situación en la que ningún agente está afectado por envejecimiento, obtenemos  $x = 1/2$  y  $a_c = 0$ , respectivamente. Es decir, recuperamos el modelo de Kirman en el que no hay transición de fase posible al ser el valor del ruido crítico nulo y en el que, por lo tanto, siempre tenemos igual coexistencia de los dos estados. También podemos estudiar el límite opuesto en el que todos los nodos tienen edad sustituyendo  $b = 1$  en las dos ecuaciones. En tal caso, recuperamos las Ecuaciones (27) y (28), que corresponden a la ecuación de estado y a la expresión para el ruido crítico  $a_c$  obtenidas en el modelo ruidoso del votante con envejecimiento total.

### 4.3. Exponente crítico

Para determinar el exponente crítico de la magnetización,  $\beta$ , tal que  $m \propto (a_c - a)^\beta$ , podemos proceder de forma análoga a como se ha hecho en la Sección 3.4. Para visualizar más fácilmente la simetría  $x \rightarrow 1 - x$  de la ecuación de estado, podemos manipular algebraicamente la Ecuación (55) y dejarla escrita de la siguiente forma:

$$\frac{-\frac{a}{2}(1 - b) + [a(1 - b) + b](1 - x)}{-\frac{a}{2}(1 - b) + [a(1 - b) + b]x} = \frac{f(a, 1 - x)}{f(a, x)}. \quad (57)$$

A continuación hacemos el cambio  $x \rightarrow 1/2 + m$  (lo que implica  $1 - x \rightarrow 1/2 - m$ ) y definimos la función  $F(a, m)$ :

$$F(a, m) \equiv \left\{ -\frac{a}{2}(1-b) + [a(1-b) + b] \left( \frac{1}{2} - m \right) \right\} f \left( a, \frac{1}{2} + m \right) - \left\{ -\frac{a}{2}(1-b) + [a(1-b) + b] \left( \frac{1}{2} + m \right) \right\} f \left( a, \frac{1}{2} - m \right) = 0, \quad (58)$$

que es antisimétrica porque  $F(a, m) = -F(a, -m)$ . Vemos que el desarrollo realizado en la Sección 3.4 es, por lo tanto, idéntico al que deberíamos realizar en este caso. De esta manera, los resultados obtenidos en dicha sección son aplicables a este problema. De la Ecuación (34) sabemos que el exponente crítico de la magnetización es  $\beta = 1/2$ , por lo que la clase de universalidad del modelo de Ising también es un candidato razonable para el modelo ruidoso del votante con envejecimiento parcial.

#### 4.4. Caracterización de la transición de fase. Magnetización y susceptibilidad

Con la finalidad de caracterizar la transición de fase inducida en el modelo ruidoso del votante con envejecimiento parcial, procederemos de forma análoga a como se ha hecho en la Sección 3.5. Es decir, estudiaremos cómo se comportan la magnetización y la susceptibilidad cerca del punto crítico y determinaremos el orden de la transición. Llevaremos a cabo este análisis para sistemas con distintas fracciones de agentes con edad.

En lo que respecta a la magnetización, en la Figura 10 se pueden observar las curvas de la ecuación de estado de la magnetización estacionaria,  $\langle |m| \rangle_{st}$ , en función del parámetro de ruido,  $a$ , para diez valores diferentes de la porción de agentes con edad,  $b$ . En la gráfica aparecen tanto las simulaciones numéricas como las soluciones analíticas. Por otra parte, los mismos datos pueden representarse en gráficos de contorno, los cuales se muestran en la Figura 11. Ambas figuras indican que cuanto mayor es la porción de nodos con afectados por envejecimiento, mayor es la región de consenso, también llamada régimen bimodal.

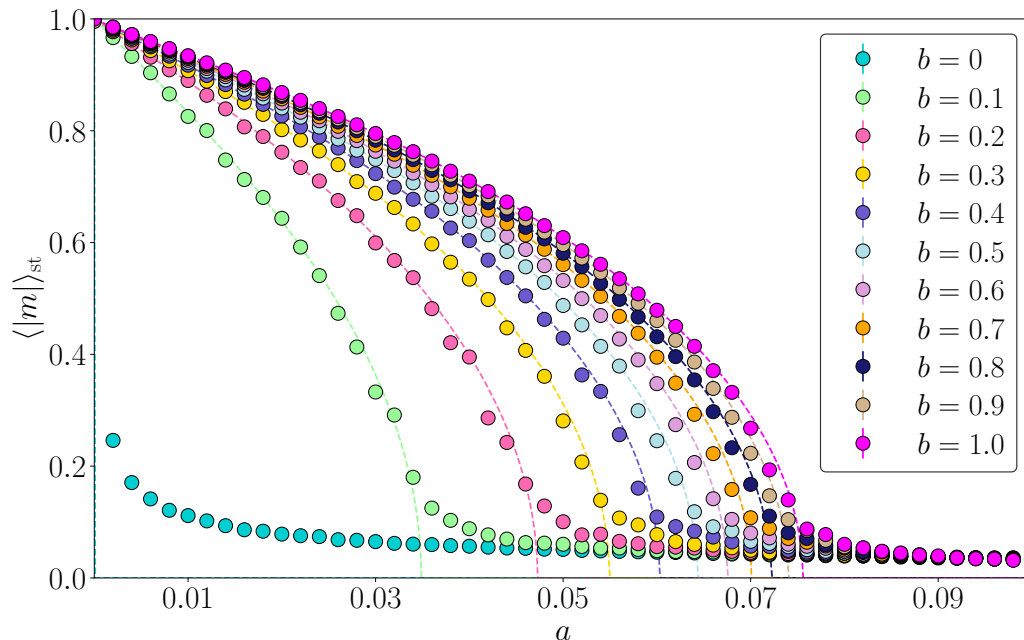


Figura 10: Ecuación de estado de la magnetización obtenida numéricamente (puntos) y analíticamente según la Ecuación (55) (líneas discontinuas) para diez valores distintos de  $b$ . Todas las simulaciones se han realizado con  $N = 5000$  agentes.

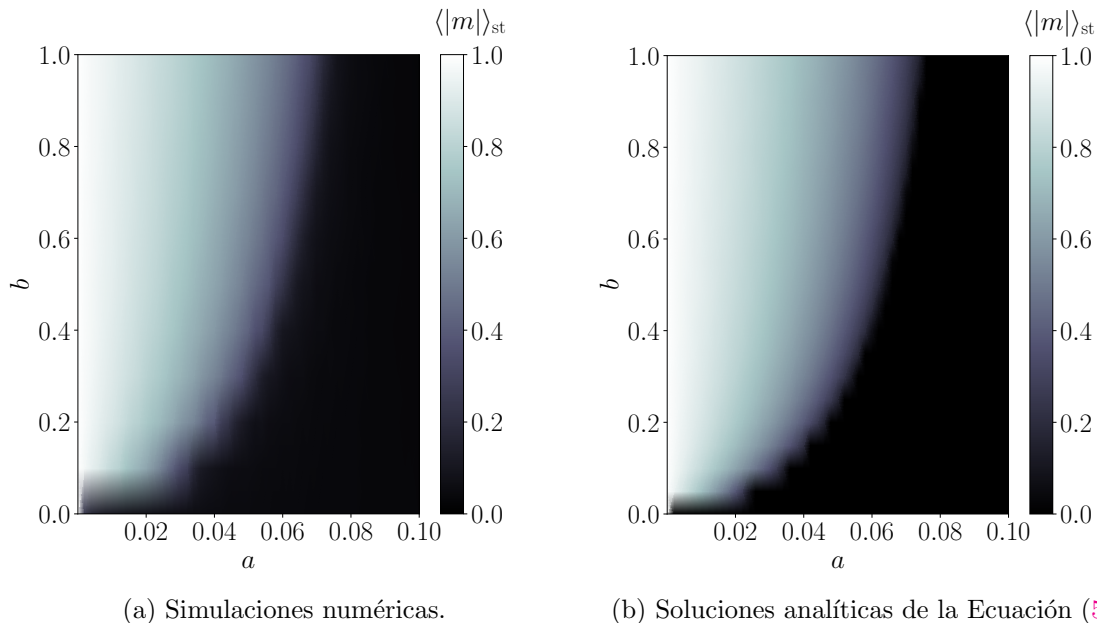


Figura 11: Gráficos de contorno de la magnetización en función del parámetro de ruido y la porción de agentes con edad para un sistema de tamaño  $N = 5000$ .

Tal y como podemos observar, la adición de agentes con edad en el sistema conduce a un parámetro crítico del ruido,  $a_c$ , distinto de cero. Además, vemos que la incorporación en el sistema de una pequeña porción de nodos afectados por envejecimiento (por ejemplo,  $b = 0.1$ ), ya es suficiente para presenciar dicho fenómeno. Este hecho encaja con la Figura 9, la cual muestra que para incluso pequeños valores de  $b$  el valor de  $a_c$  aumenta rápidamente alejándose del origen. Por otra parte, las Figuras 10 y 11 indican que las distintas magnetizaciones son continuas cerca de sus respectivos puntos críticos.

En lo que respecta a la susceptibilidad, nuevamente podemos indentificarla con las fluctuaciones de la magnetización según la Ecuación (36). En la Figura 12 presentamos simulaciones numéricas de la susceptibilidad para cuatro sistemas caracterizados por distintos valores de  $b$ . En cada caso se ha graficado la magnetización cerca del respectivo punto crítico considerando cuatro tamaños de sistema diferentes. Todas las figuras muestran que la susceptibilidad presenta muchas inestabilidades cerca del punto crítico y que crece para valores de  $N$  grandes. Por lo tanto, sabemos que en el límite termodinámico,  $N \rightarrow \infty$ , la susceptibilidad diverge en  $a_c$ .

Al ser la magnetización continua y la susceptibilidad divergente alrededor del punto crítico, las transiciones de fase inducidas son continuas o de segundo orden. Por lo tanto, concluimos que la incorporación del fenómeno de envejecimiento parcial en el modelo ruidoso del votante conduce a una transición de fase bien definida. La adición de una pequeña porción de nodos con un reloj interno es suficiente para que se produzca el fenómeno de ruptura de simetría en la distribución de edades de los agentes. Y, tal y como se ha discutido en la Sección 3.6, esta asimetría es la que da lugar a una transición de fase bien comportada.



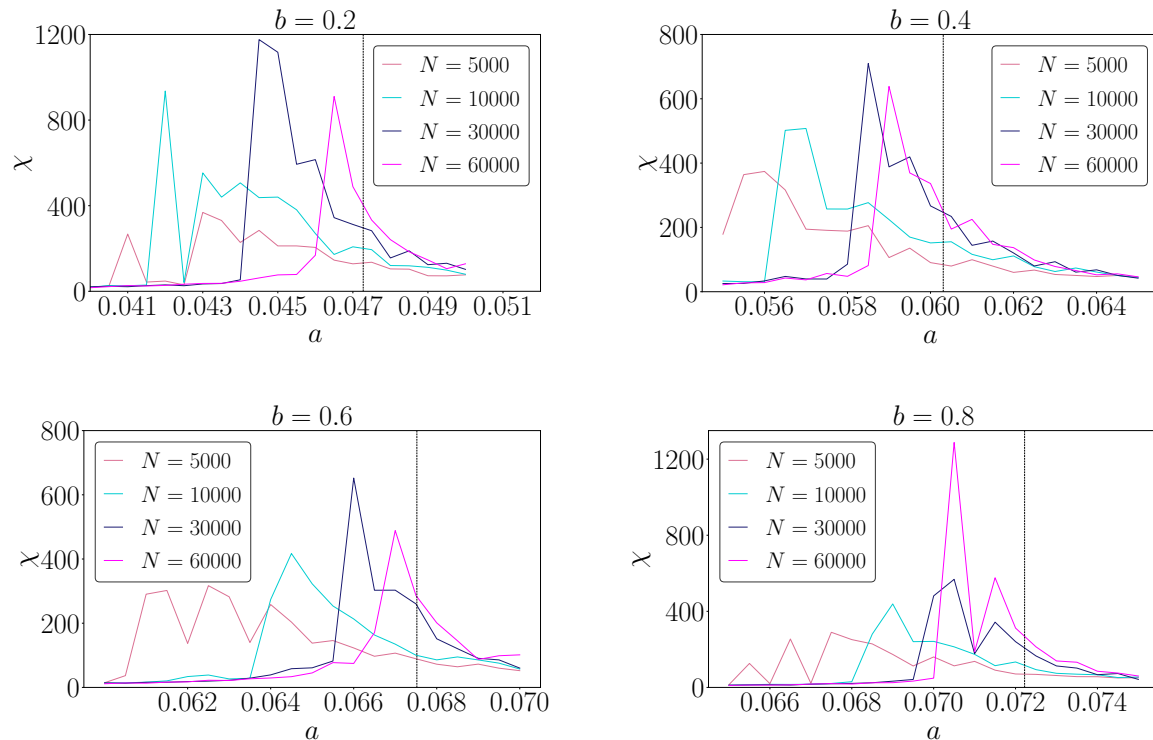


Figura 12: En el modelo ruidoso del votante con envejecimiento parcial, susceptibilidad magnética para sistemas con diferente porción de agentes con edad y para diferentes tamaños. Para cada una de las figuras, la línea vertical discontinua representa la posición del ruido crítico.

## 5. Modelo ruidoso del votante con envejecimiento parcial afectando a ambos mecanismos

En el modelo ruidoso del votante con envejecimiento estándar la edad de un agente sólo influye sobre sus cambios de estado por imitación, pero no sobre los que son debidos al ruido. Cuando un nodo es seleccionado para llevar a cabo un cambio de estado por copia a uno de sus vecinos, la actualización primero tiene que activarse con una probabilidad  $P(\tau) = 1/(\tau + 2)$ . Ahora bien, siempre que se escoge un nodo para actualizar su estado por efecto del ruido, el proceso se ejecuta con probabilidad 1.

### 5.1. Descripción del modelo

En esta sección estudiaremos cómo se modifican los resultados del modelo ruidoso del votante en el caso de que el mecanismo de cambio de estado por ruido también tenga que ser activado con probabilidad  $P(\tau)$  antes de ser llevado a cabo. Por otra parte, también consideraremos el efecto de envejecimiento y mantendremos el parámetro  $b$  para permitir que sólo una fracción de agentes de la población total tenga edad.

Recordamos que, en tal escenario, el número total de agentes con edad es  $Nb$ , mientras que el número total de nodos sin edad es  $N(1 - b)$ . Las variables  $n_\tau^+$  y  $n_\tau^-$  indican el número de nodos de edad  $\tau$  en los estados 1 y 0, respectivamente. Por otra parte, las variables  $n^+$  y  $n^-$  hacen referencia al número de agentes sin edad en los estados 1 y 0, respectivamente. Las relaciones entre variables dadas por las Ecuaciones (37) y (38) también son válidas en este problema y nos van a servir de ayuda en su descripción.

En este modelo los ritmos de transición globales pueden expresarse de la siguiente manera:

$$\Omega_1(\tau) = \frac{n_\tau^+}{2 + \tau} \left[ \frac{a}{2} + (1 - a) \frac{N - n}{N} \right], \quad (59)$$

$$\Omega_2(\tau) = \frac{n_\tau^-}{2 + \tau} \left[ \frac{a}{2} + (1 - a) \frac{n}{N} \right], \quad (60)$$

$$\Omega_3(\tau) = \frac{n_\tau^+}{2 + \tau} \left[ \frac{a}{2} + (1 - a)(1 + \tau) + (1 - a) \frac{n}{N} \right], \quad (61)$$

$$\Omega_4(\tau) = \frac{n_\tau^-}{2 + \tau} \left[ \frac{a}{2} + (1 - a)(1 + \tau) + (1 - a) \frac{N - n}{N} \right], \quad (62)$$

$$\Omega_5 = n^+ \left[ \frac{a}{2} + (1 - a) \frac{N - n}{N} \right], \quad (63)$$

$$\Omega_6 = n^- \left[ \frac{a}{2} + (1 - a) \frac{n}{N} \right]. \quad (64)$$

Los ritmos  $\Omega_1(\tau)$  a  $\Omega_4(\tau)$  son los correspondientes a los de las Ecuaciones (39)–(42) con la diferencia de que en este caso el factor  $1/(\tau + 2)$  afecta tanto a la contribución de copia como a la de ruido. Por otra parte, al corresponder los ritmos  $\Omega_5$  y  $\Omega_6$  a los agentes sin edad, son exactamente iguales a los de las Ecuaciones (43) y (44). Es inmediato comprobar que se verifican las siguientes relaciones:

$$\Omega_1(\tau) + \Omega_3(\tau) = n_\tau^+ \left( \frac{a}{2 + \tau} + 1 - a \right), \quad \Omega_2(\tau) + \Omega_4(\tau) = n_\tau^- \left( \frac{a}{2 + \tau} + 1 - a \right). \quad (65)$$

Las ecuaciones de evolución temporal para este modelo son idénticas a las del modelo del votante con envejecimiento parcial estándar (ver Ecuaciones (45)–(50)):

$$\frac{d\langle n_\tau^+ \rangle}{dt} = -\langle \Omega_1(\tau) \rangle + \langle \Omega_3(\tau - 1) \rangle - \langle \Omega_3(\tau) \rangle, \quad (\tau \geq 1) \quad (66)$$

$$\frac{d\langle n_\tau^- \rangle}{dt} = -\langle \Omega_2(\tau) \rangle + \langle \Omega_4(\tau - 1) \rangle - \langle \Omega_4(\tau) \rangle, \quad (\tau \geq 1) \quad (67)$$

$$\frac{d\langle n_0^+ \rangle}{dt} = \sum_{\tau=0}^{\infty} \langle \Omega_2(\tau) \rangle - \langle \Omega_3(0) \rangle - \langle \Omega_1(0) \rangle, \quad (68)$$

$$\frac{d\langle n_0^- \rangle}{dt} = \sum_{\tau=0}^{\infty} \langle \Omega_1(\tau) \rangle - \langle \Omega_4(0) \rangle - \langle \Omega_2(0) \rangle, \quad (69)$$

$$\frac{d\langle n^+ \rangle}{dt} = \langle \Omega_6 \rangle - \langle \Omega_5 \rangle, \quad (70)$$

$$\frac{d\langle n^- \rangle}{dt} = \langle \Omega_5 \rangle - \langle \Omega_6 \rangle. \quad (71)$$

Las Ecuaciones (66)–(69) constituyen un conjunto infinito de ecuaciones diferenciales acopladas, de forma la resolución analítica del problema es bastante compleja. Por lo tanto, y siguiendo con el procedimiento habitual, nos restringiremos al análisis de las soluciones estacionarias.

Sumando las Ecuaciones (66) y (68) e imponiendo que la solución sea estacionaria, obtenemos la siguiente relación:

$$\frac{d\langle n_0^+ \rangle}{dt} + \sum_{\tau=1}^{\infty} \frac{d\langle n_\tau^+ \rangle}{dt} = \frac{d\langle n^+ \rangle}{dt} = 0 = \langle \Omega_2(0) \rangle - \langle \Omega_1(0) \rangle + \sum_{\tau=1}^{\infty} \langle \Omega_2(\tau) \rangle - \sum_{\tau=1}^{\infty} \langle \Omega_1(\tau) \rangle. \quad (72)$$

Si le restamos la Ecuación (68) a la Ecuación (69), igualamos las derivadas temporales a cero y utilizamos el resultado de la Ecuación (72), llegamos a la siguiente relación para promedios temporales:  $\langle \Omega_1(0) \rangle + \langle \Omega_3(0) \rangle = \langle \Omega_2(0) \rangle + \langle \Omega_4(0) \rangle$ . Esta expresión implica, según las Ecuaciones (65):

$$\langle n_0^+ \rangle = \langle n_0^- \rangle. \quad (73)$$

A continuación, si igualamos a cero la derivada temporal de la Ecuación (66) y usamos que  $\Omega_1(\tau) + \Omega_3(\tau) = n_\tau^+ [a/(2 + \tau) + 1 - a]$ , obtenemos la siguiente relación:

$$\langle n_\tau^+ \rangle \left( \frac{a}{2 + \tau} + 1 - a \right) = \left[ \frac{a}{2} + (1 - a) \left( \tau + \frac{\langle n \rangle}{N} \right) \right] \langle n_{\tau-1}^+ \rangle, \quad (74)$$

que es una relación recursiva para  $\langle n_\tau^+ \rangle$ . Simplificándola, obtenemos:

$$\langle n_\tau^+ \rangle = \prod_{k=1}^{\tau} \frac{2 + k}{1 + k} \frac{k + x - \frac{a}{2(a-1)}}{k + \frac{a-2}{a-1}} \langle n_0^+ \rangle, \quad (75)$$

donde se ha introducido la variable  $x = \langle n \rangle / N$ . Este productorio, que puede resolverse mediante cálculo simbólico, da como resultado:

$$\langle n_\tau^+ \rangle = \frac{2 + \tau}{2} \frac{\left[ x + \frac{a-2}{2(a-1)} \right]_\tau}{\left( 2 + \frac{1}{1-a} \right)_\tau} \langle n_0^+ \rangle = \frac{2 + \tau}{2} \frac{(\alpha)_\tau}{(\beta)_\tau} \langle n_0^+ \rangle, \quad (76)$$

donde se han definido la variable  $\alpha(a, x)$  y el parámetro  $\beta(a)$ :

$$\alpha \equiv x + \frac{a-2}{2(a-1)}, \quad \beta \equiv 2 + \frac{1}{1-a}. \quad (77)$$

La suma de las Ecuaciones (76) nos da el número total de nodos con edad en el estado 1:

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \langle n_\tau^+ \rangle = \frac{(4 + \alpha - 2\beta)(1 - \beta)}{2(1 + \alpha - \beta)(2 + \alpha - \beta)} \langle n_0^+ \rangle \equiv w(a, x) \langle n_0^+ \rangle. \quad (78)$$

Repetiendo el procedimiento para los agentes en el estado 0 se llega a la misma ecuación pero con las variables  $\langle n_0^- \rangle$  y  $1 - x$  en lugar de  $\langle n_0^+ \rangle$ . Es decir:

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \langle n_\tau^- \rangle = w(a, 1 - x) \langle n_0^- \rangle. \quad (79)$$

Estas ecuaciones nos permiten encontrar una expresión para  $\langle n_0^+ \rangle = \langle n_0^- \rangle$ . Para ello, utilizamos que  $Nb = \sum_{\tau=0}^{\infty} \langle n_\tau^+ \rangle + \sum_{\tau=0}^{\infty} \langle n_\tau^- \rangle$  y llegamos al resultado:

$$\langle n_0^+ \rangle = \frac{Nb}{w(a, x) + w(a, 1 - x)}. \quad (80)$$

En lo que respecta a los nodos sin edad, si igualamos a cero las derivadas temporales de las Ecuaciones (70) y (71) obtenemos que  $\langle \Omega_5 \rangle = \langle \Omega_6 \rangle$ . A partir de esta relación, y teniendo en cuenta que  $n^- = N(1 - b) - n^+$ , llegamos a:

$$\langle n^+ \rangle = N(1 - b) \left[ \frac{a}{2} + (1 - a)x \right]. \quad (81)$$

Ya somos capaces de escribir una ecuación para el número total de agentes en el estado 1:

$$\langle n \rangle = \langle n^+ \rangle + \sum_{\tau=0}^{\infty} \langle n_\tau^+ \rangle = w(a, x) \langle n_0^+ \rangle + N(1 - b) \left[ \frac{a}{2} + (1 - a)x \right]. \quad (82)$$

Dividiendo la ecuación entre el tamaño del sistema,  $N$ , y escribiendo explícitamente la cantidad  $\langle n_0^+ \rangle$ , obtenemos la ecuación de estado del sistema:

$$x = \frac{b}{1 + \frac{w(a,1-x)}{w(a,x)}} + (1-b) \left[ \frac{a}{2} + (1-a)x \right]. \quad (83)$$

Es trivial comprobar que  $x = 1/2$  es una solución de la ecuación anterior. Ahora bien, la existencia y estabilidad de otras soluciones está condicionada a un análisis más detallado de las propiedades de convergencia de la serie dada por la Ecuación (78), lo que dejamos para un futuro estudio.

## 5.2. Caracterización cualitativa de la transición de fase

Lo que sí presentamos es el resultado de las simulaciones numéricas para la magnetización estacionaria,  $\langle |m| \rangle_{st}$ , en función del parámetro de ruido,  $a$ , para distintos valores de la porción de agentes con edad,  $b$ . Los resultados de las simulaciones pueden observarse en las Figuras 13 y 14, las cuales se han representado a partir del mismo conjunto de datos.

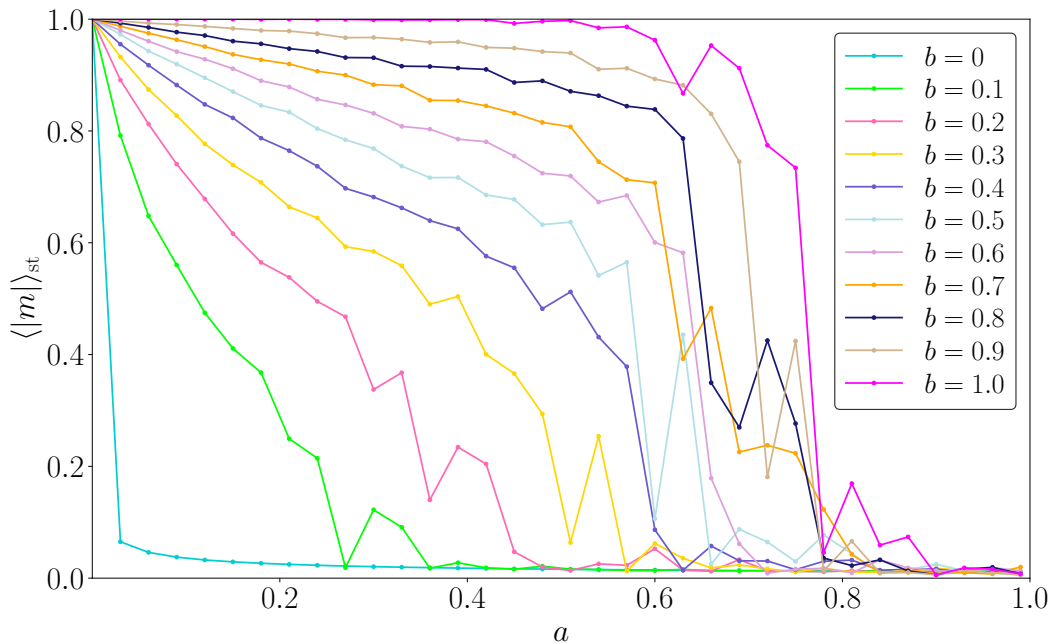


Figura 13: Curvas numéricas de la magnetización estacionaria en función del parámetro de ruido para diez valores distintos de  $b$ . Todas las simulaciones se han realizado con  $N = 5000$  agentes.

En la Figura 13 los puntos provenientes de las simulaciones numéricas se han unido con líneas para facilitar la asimilación de la información de la gráfica. Las curvas resultantes de dichas uniones presentan fluctuaciones estadísticas que no se habían presenciado en los modelos anteriores. Este hecho puede deberse a que en esta formulación el tiempo de termalización sea más elevado, lo cual requeriría realizar más iteraciones en las ejecuciones del programa numérico. Ahora bien, esto comportaría un gasto computacional demasiado elevado y, de todas formas, las figuras de las que disponemos son suficientes para analizar el comportamiento cualitativo del sistema.

Ambas figuras muestran que la transición de fase de régimen bimodal a régimen unimodal está bien definida. En lo que respecta al orden de la transición, hay dos motivos por los que parece ser de primer orden. En primer lugar, porque la magnetización presenta caídas bruscas

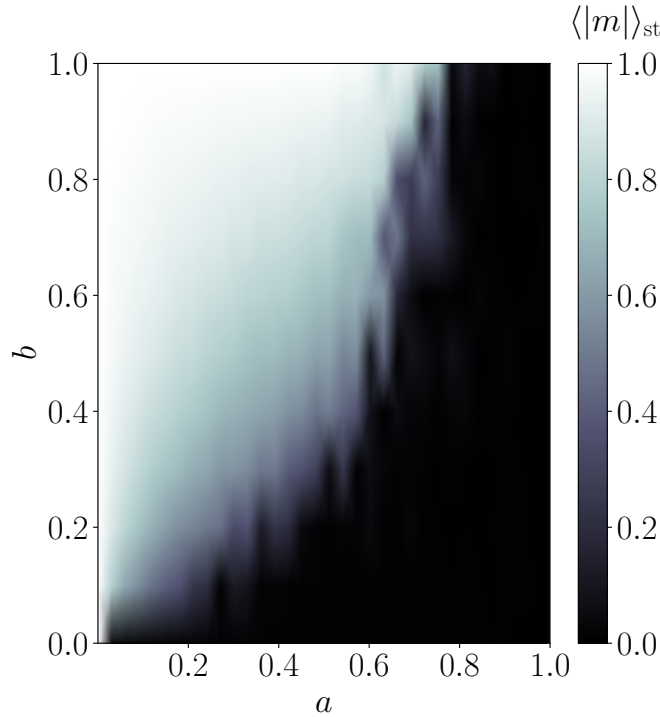


Figura 14: Gráfico de contorno de la magnetización estacionaria en función del parámetro de ruido y la fracción de agentes con edad para un sistema de tamaño  $N = 5000$ .

que podrían venir dadas por una discontinuidad de la variable en el punto crítico. En segundo lugar, porque en una transición de fase de primer orden se produce un ciclo de histéresis cerca del punto crítico. La forma de las caídas abruptas de la magnetización podría deberse, por lo tanto, a un ciclo de histéresis impulsado por una transición de fase de primer orden. Este último argumento es más razonable para valores de  $b$  grandes, ya que para ellos las caídas de la magnetización son muy pronunciadas y preceden una ligera subida de la variable. De todas formas, este análisis sobre el orden de la transición de fase inducida en el modelo es puramente cualitativo. Una correcta caracterización de la transición de fase requeriría un análisis teórico completo del problema.

Podemos comparar las figuras obtenidas en este modelo con las correspondientes al modelo ruidoso del votante con envejecimiento parcial estándar (Figuras 10 y 11). Al igual que antes, en este caso también nos encontramos con que el régimen bimodal aumenta a medida que el número de agentes con edad crece. No obstante, ahora las zonas de consenso abarcan mucho más espacio que en el modelo anterior. Para ello, debemos fijarnos en que en las Figuras 13 y 14 el eje horizontal recorre valores del parámetro de ruido comprendidos entre 0 y 1, mientras que en las Figuras 10 y 11 el eje horizontal solamente llega hasta una décima parte.

En definitiva, en un modelo en el que ambos mecanismos de actualización de estado (imitación y ruido) deben ser activados con una probabilidad  $P(\tau)$  antes de ser ejecutados, se reducen las zonas de desorden y se favorecen las de orden. En consecuencia, este modelo puede ser un buen candidato para el estudio de sistemas en los que los agentes tengan tendencia a ponerse de acuerdo entre sí.

## 6. Conclusiones

En este trabajo hemos aplicado los principios de la Física Estadística al estudio de modelos estocásticos binarios de agentes en una conexión *all-to-all*. En todas las formulaciones presentadas existen dos mecanismos por los que un agente puede cambiar de estado: el ruido y la imitación. Partiendo de estas dos premisas microscópicas básicas, nuestro objetivo siempre ha sido determinar el comportamiento macroscópico cualitativo del sistema. Hemos podido comprobar que bajo determinadas condiciones el sistema alcanza un estado de consenso global, llamado régimen bimodal, mientras que en otros casos se llega a la coexistencia de opiniones, o régimen unimodal.

En primer lugar hemos analizado el modelo ruidoso del votante o de Kirman, cuyo único parámetro de control es el parámetro de ruido. En este modelo la transición de régimen bimodal a régimen unimodal es discontinua y dependiente del tamaño del sistema. Por otra parte, en el límite termodinámico el parámetro de ruido crítico tiende a cero, por lo que no hay transición posible y el sistema queda atrapado en el régimen unimodal.

Existen numerosas modificaciones del modelo de Kirman que se han propuesto con la finalidad de obtener una transición de fase bien definida. En este trabajo nos hemos centrado en el estudio de modelos que contemplan el efecto no markoviano del envejecimiento por el cual los nodos más jóvenes tienen una mayor tendencia a cambiar de estado. La incorporación de este fenómeno en los modelos conlleva la aparición de un nuevo parámetro de control, la fracción de agentes que obedecen el mecanismo no markoviano. Así mismo, se observa la rotura de la simetría dada por la diferencia de tiempos internos promedio de las poblaciones mayoritaria y minoritaria.

En primera instancia hemos analizado el modelo ruidoso del votante con envejecimiento total, en el cual todos los nodos tienen un reloj interno que condiciona sus cambios de estado por imitación. En esta formulación se obtiene una transición de fase de segundo orden bien definida en el límite termodinámico. Hemos argumentado de forma cualitativa que la asimetría en la distribución de edad de los agentes puede ser la responsable de la aparición de una transición de fase bien comportada. Por otro lado, el cálculo del exponente crítico de la magnetización indica que la transición de fase pertenece a la clase de universalidad del modelo de Ising.

A continuación, hemos añadido un parámetro al modelo que permite variar la porción de agentes con edad en el sistema. En esta formulación, llamada modelo ruidoso del votante con envejecimiento parcial, también se llega a una transición de fase de segundo orden y a un exponente crítico compatible con el del modelo de Ising. Hemos podido comprobar que este fenómeno se da incluso para sistemas que cuentan con una pequeña porción de agentes, de lo que se deduce que el fenómeno de envejecimiento es dominante.

En los tres modelos mencionados hemos podido contrastar nuestras simulaciones numéricas con las soluciones analíticas. Todos nuestros resultados encajan bastante bien con las predicciones teóricas, siendo mayor la coincidencia a medida que el número de agentes considerados para llevar a cabo las simulaciones aumenta.

Por último, hemos modificado el modelo ruidoso del votante con envejecimiento parcial imponiendo que las actualizaciones de estado por ruido también estén condicionadas por la edad de los nodos. Aunque en este caso no hayamos podido realizar un análisis teórico completo del problema por falta de tiempo y debido a dificultades en el tratamiento analítico, las simulaciones numéricas indican que la transición de fase está bien definida y que parece ser de primer orden. Aún así, una conclusión definitiva requeriría de un análisis más profundo del problema. Por otro lado, este modelo da lugar a regiones de orden mucho mayores que las de los modelos anteriores, por lo que puede ser un buen candidato si lo que se desea es estudiar sistemas regidos principalmente por el consenso. De esta forma, creemos que esta formulación puede ser muy eficaz para la descripción de algunos sistemas reales, por lo que sería bastante interesante analizar el modelo con más profundidad en un futuro.

Como posibles extensiones de nuestro trabajo, debemos estudiar en detalle la cuestión del

orden de la transición en el caso de que el envejecimiento afecte a ambos mecanismos de evolución. Para ello, en el desarrollo analítico tenemos que analizar las propiedades de convergencia de las series (una primera aplicación de los criterios básicos de convergencia, como el criterio del cociente, es inconclusiva). Una manera de caracterizar el orden de la transición de fase es la de determinar las distribuciones de probabilidad de la magnetización, para lo que deberíamos mejorar la estadística de las simulaciones numéricas empleando más tiempo computacional. Por otra parte, en este trabajo no hemos hecho referencia a ninguna aplicación concreta, aunque en general hemos hablado de consenso entre la población. Sería interesante poder identificar situaciones en las que el efecto del envejecimiento pueda ser importante. Casos que se nos ocurren incluyen la resistencia adquirida a algunas enfermedades a lo largo de la existencia, así como efectos de memoria que se dan en la recuperación de una infección donde no puede suponerse que la probabilidad de dicha recuperación sea independiente del tiempo que se haya padecido la infección. Este último caso sería un efecto opuesto al de envejecimiento, donde la probabilidad de transitar de un estado infeccioso a un estado sano aumenta con el tiempo transcurrido desde el inicio de la infección.

## Referencias

- [1] R. K. Pathria and Paul D. Beale. *Statistical Mechanics*. Academic Press, 3rd edition, 2011.
- [2] Raúl Toral. *Apuntes de Física Estadística*, Curso 2018-19.
- [3] John W. Clark. Statistical mechanics of neural networks. *Physics Reports*, 158(2):91–157, 1988.
- [4] Claudio Castellano, Santo Fortunato, and Vittorio Loreto. Statistical physics of social dynamics. *Reviews of Modern Physics*, 81(2):591, 2009.
- [5] Peter Clifford and Aidan Sudbury. A model for spatial conflict. *Biometrika*, 60(3):581–588, 1973.
- [6] Richard A Holley and Thomas M Liggett. Ergodic theorems for weakly interacting infinite systems and the voter model. *The annals of probability*, pages 643–663, 1975.
- [7] Alan Kirman. Ants, rationality, and recruitment. *The Quarterly Journal of Economics*, 108(1):137–156, 1993.
- [8] Adrián Carro, Raúl Toral, and Maxi San Miguel. The noisy voter model on complex networks. *Scientific Reports*, 6, 2016.
- [9] Oriol Artime, Adrián Carro, Antonio F. Peralta, José J. Ramasco, Maxi San Miguel, and Raúl Toral. Herding and idiosyncratic choices: Nonlinearity and aging-induced transitions in the noisy voter model. *Comptes Rendus Physique*, 20:262, 2019.
- [10] Hans-Ulrich Stark, Claudio J Tessone, and Frank Schweitzer. Decelerating microdynamics can accelerate macrodynamics in the voter model. *Physical Review Letters*, 101(1):018701, 2008.
- [11] Juan Ozaita. Noisy voter model with partial aging and anti-aging. Master’s thesis, Master’s degree in Physics of Complex Systems, IFISC (UIB-CSIC), curso 2017-18.
- [12] Raúl Toral and Pere Colet. *Stochastic Numerical Methods: An Introduction for Students and Scientists*. Wiley, 2014.
- [13] N.G. van Kampen. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. North-Holland, Amsterdam, third edition, 2007.
- [14] Raúl Toral. *Apuntes del curso Stochastic Processes*, Curso 2020-21.
- [15] S. Alfarano and M. Milaković. Network structure and n-dependence in agent-based herding models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 33:78, 2009.
- [16] N. Khalil, M. San Miguel, and R. Toral. Zealots in the mean-field noisy voter model. *Physical Review*, 97, 2018.
- [17] Oriol Artime, Antonio F. Peralta, Raúl Toral, José J. Ramasco, and Maxi San Miguel. Aging-induced continuous phase transition. *Physical Review E*, 98:032104, 2018.
- [18] Wolfram Research, Inc. Mathematica, Version 12.3. Champaign, IL, 2021.



## A. Apéndices

### A.1. Obtención de la ecuación de Fokker-Planck a partir de la ecuación maestra

En la Sección 1 hemos introducido la ecuación maestra para un sistema de dos estados con ritmos de transición constantes:

$$\frac{\partial P(n; t)}{\partial t} = (E - 1)[\Omega^-(n)P(n; t)] + (E^{-1} - 1)[\Omega^+(n)P(n; t)], \quad (84)$$

con  $P(n; t)$  la probabilidad de que el sistema tenga  $n$  nodos en el estado 1 a tiempo  $t$  y  $E^l$  un operador escalera tal que  $E^l[f(n)] = f(n + l)$ .

Para llegar al resultado deseado, hacemos el cambio de variables  $n = N(m + 1)/2$  para tener la ecuación escrita en función de la magnetización. Como  $P(n; t)dn = P(m; t)dm$ , tenemos que  $P(n; t) = 2P(m; t)/N$ . Así, la ecuación maestra queda:

$$\frac{\partial P(m; t)}{\partial t} = (E - 1) \left[ \Omega^- \left( \frac{N}{2}(m + 1) \right) P(m; t) \right] + (E^{-1} - 1) \left[ \Omega^+ \left( \frac{N}{2}(m + 1) \right) P(m; t) \right], \quad (85)$$

A continuación, desarrollamos los operadores escalera  $E^{\pm 1}[f(n)]$  en potencias negativas de  $N$ . Para ello, introducimos la notación  $D^k \equiv \partial^k / \partial n^k$  y realizamos el desarrollo en serie de la función  $f(n \pm 1)$ :

$$\begin{aligned} E^{\pm 1}[f(n)] &= f(n \pm 1) = f(n) \pm f'(n) + \frac{f''(n)}{2!} + \dots = f(n) \pm Df(n) + \frac{D^2 f(n)}{2!} + \dots = \\ &= \left( 1 \pm D + \frac{D^2}{2!} + \dots \right) f(n) = \exp \left( \pm \frac{\partial}{\partial n} \right) f(n). \end{aligned} \quad (86)$$

De esta manera, tenemos:

$$E^{\pm 1} - 1 = \exp \left( \pm \frac{\partial}{\partial n} \right) - 1 = \exp \left( \pm \frac{2}{N} \frac{\partial}{\partial m} \right) - 1 = \pm \frac{2}{N} \frac{\partial}{\partial m} + \frac{2}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial m^2} + O \left( \frac{1}{N^3} \right). \quad (87)$$

Si suponemos que  $N$  es suficientemente grande, podemos quedarnos sólo con dos términos del desarrollo. Esta aproximación es bastante razonable ya que la Física Estadística está destinada al estudio de sistemas compuestos por un gran número constituyentes.

Aplicando los operadores escalera de la Ecuación (87) en la Ecuación (85), llegamos a la ecuación de Fokker-Planck:

$$\frac{\partial P(m; t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial m}[F(m)P(m; t)] + \frac{\partial^2}{\partial m^2}[D(m)P(m; t)], \quad (88)$$

con los siguientes términos de deriva,  $F(m)$ , y de difusión,  $D(m)$ :

$$\begin{aligned} F(m) &= -am, \\ D(m) &= \frac{a + (1 - a)(1 - m^2)}{N}. \end{aligned} \quad (89)$$

## A.2. Obtención de la solución estacionaria de la ecuación de Fokker-Planck

Podemos encontrar la solución estacionaria de la ecuación de Fokker-Planck,  $P_{\text{st}}(m)$ , igualando la derivada temporal de la Ecuación (7) a cero. En tal caso, obtenemos:

$$-F(m)P_{\text{st}}(m) + \frac{d}{dm}[D(m)P_{\text{st}}(m)] = C. \quad (90)$$

Para determinar la constante de integración,  $C$ , nos podemos centrar en el caso  $m = 0$ . Como  $F(0) = 0$ , es inmediato comprobar que primer término de la ecuación se anula. Para el segundo término, notamos que la Ecuación (7), junto con las definiciones de  $F(m)$  y  $D(m)$  dadas por las Ecuaciones (8), muestra que el problema tiene simetría  $m \leftrightarrow -m$ . Por lo tanto,  $P_{\text{st}}(m)$  debe ser una función par de  $m$ . Como  $D(m)$  también es una función par de  $m$ , el producto  $D(m)P_{\text{st}}(m)$  es, a su vez, una función par, por lo que su derivada evaluada en el origen vale cero. En consecuencia, vemos que  $C = 0$ . Una vez anulada la constante de integración en la Ecuación (90), mediante unas manipulaciones sencillas llegamos a la siguiente expresión:

$$\frac{dP_{\text{st}}(m)}{dm} = P_{\text{st}}(m) \frac{F(m) - D'(m)}{D(m)}, \quad (91)$$

la cual indica que la solución estacionaria puede expresarse en forma de una función exponencial:

$$P_{\text{st}}(m) = \mathcal{Z}^{-1} \exp[-V(m)], \quad (92)$$

donde  $\mathcal{Z}$  es una constante de normalización y  $V(m)$  es una función dada por:

$$V(m) = \int^m \frac{-F(z) + D'(z)}{D(z)} dz. \quad (93)$$

Utilizando los términos de deriva y de difusión dados por las Ecuaciones (8), la resolución de la integral de  $V(m)$  da como resultado:

$$V(m) = \frac{2 - a(N + 2)}{2(1 - a)} \ln[1 + (a - 1)m^2]. \quad (94)$$

Introduciendo esta expresión en la Ecuación (92), de forma inmediata se obtiene:

$$P_{\text{st}}(m) = \mathcal{Z}^{-1} [1 + (a - 1)m^2]^{\frac{2 - a(N + 2)}{2(a - 1)}}. \quad (95)$$

La constante de normalización,  $\mathcal{Z}$ , se puede calcular imponiendo la siguiente condición:

$$\int_{-1}^1 P_{\text{st}}(m) dm = 1, \quad (96)$$

la cual conduce al resultado  $\mathcal{Z} = {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1 + \frac{aN}{2(a-1)}, \frac{3}{2}, 1 - a\right)$ , donde  ${}_2F_1$  es la función hipergeométrica.