Universitat de les Illes Balears

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

LA MATEMAGIA COMO ESTRATEGIA DE MEJORA DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

Javier Espinosa Montoya

Máster Universitario Formación del Profesorado

(Especialidad/Itinerario Matemáticas)

Centro de Estudios de Postgrado

Año Académico 2019-20

LA MATEMAGIA COMO ESTRATEGIA DE MEJORA DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

Javier Espinosa Montoya

Trabajo de Fin de Máster

Centro de Estudios de Postgrado

Universidad de las Illes Balears

Año Académico 2019-20

Palabras clave del trabajo:

Matemáticas, juegos, magia, matemagia, motivación

Nombre Tutor/Tutora del Trabajo: Daniel Ruíz Aguilera

Resumen

La falta de motivación por las matemáticas en la Educación Secundaria es un elemento recurrente desde hace años según indican los estudios. Este trabajo aborda cómo los juegos y, más concretamente, el uso de trucos matemáticos en las aulas (Matemagia) puede ser un elemento motivador para que los alumnos mejoren su conocimiento de la asignatura.

El estado actual de la Matemagia en las escuelas se analiza mediante entrevistas con docentes que acumulan años de experiencia en su uso y los resultados de dos encuestas, una dirigida a profesores y otra a alumnos.

Asimismo, se comentan los elementos necesarios para realizar de forma exitosa actividades de Matemagia y se proponen diversas actividades para facilitar su uso dentro de las aulas.

Palabras clave: matemáticas, juegos, magia, matemagia, motivación.

Abstract

Lack of motivation for mathematics in Secondary Education has been a recurring element for years according to studies. This work studies how games and, more specifically, the use of mathematical tricks in classrooms (Mathemagic) can be a motivating element for students to improve their knowledge of the subject.

The current state of Mathematics in the schools is analysed through interviews with teachers who have accumulated years of experience in its use and the results of two surveys, one addressed to teachers and the other to students.

Likewise, the necessary elements to carry out successfully mathemagic activities are discussed and several activities are proposed as a example to facilitate their use within the classroom.

Keywords: mathematics, games, magic, mathemagic, motivation.

Índice

Introducción ... 1
Objetivos ... 4
Metodología ... 5
ESTADO DE LA CUESTIÓN ... 6
Desarrollo cognitivo en la adolescencia: el pensamiento formal ... 6
El aprendizaje ... 8
Problemas en el aprendizaje de las matemáticas ... 10
La motivación de los alumnos ... 13
El juego como elemento motivador ... 16
La Matemagia ... 22
DESARROLLO ... 27
Entrevistas: la matemagia en primera persona ... 27
Encuesta a docentes sobre el uso de los juegos y la Matemagia en las aulas ... 33
Encuesta a alumnos sobre la asignatura de matemáticas ... 42
Actividades matemágicas ... 50
CONCLUSIONES ... 53
REFERENCIAS ... 56
BIBLIOGRAFÍA ... 63
ANEXOS ... 66
I. Actividades Matemágicas ... 66
i. La Tabla Mágica (Tabla Binaria) ... 66
ii. Misterios del 9 ... 68
iii. Matemáticas del Caribe ... 69
iv. Adivinación de números ... 71
v. El cuadrado perdido ... 72
vi. El primer trile ... 74
vii. Monedas ... 75
viii. Cuadrados mágicos: La Paradoja de Stovel ... 76
ix. Dados: Adivinar la suma ... 78
II. Cuestionario Juegos y Matemagia para docentes ... 79
III. Cuestionario Juegos y Matemagia para alumnos ... 84
IV. Entrevistas ... 89
i. Cuestionario de las Entrevistas ... 89
ii. Entrevista a Josep Lluís Pol i Llompart ... 90
iii. Entrevista a Sergio Belmonte ... 94
iv. Entrevista a Fernando Blasco ... 98

Introducción

Puede decirse sin lugar a dudas que el mundo está actualmente inmerso en la época de mayor cambio de su historia desde la revolución industrial: la llamada revolución digital. Todos los ámbitos de la sociedad están experimentando una profunda transformación basada en la tecnología, y para no perder el tren de esta revolución se necesitan perfiles profesionales con conocimientos adecuados (DigitalEs, 2019). Estos conocimientos se engloban bajo el acrónimo STEM (Science, Technology, Engineering & Mathematics) y en la actualidad en la Unión Europea en general y en España de forma más acusada existe un gran déficit de profesionales con estos conocimientos.

Cuando se analizan a nivel de nuestro país las estadísticas de estudiantes que escogen estudios de grado de este tipo (DigitalEs, 2019) puede verse como en el período 2011-2017 el número de alumnos universitarios de Ingenierías o Arquitectura descendió en un 28% y en un 3% en el caso de estudios de la rama de Ciencias. Profundizando en las causas, la principal es la dificultad académica que perciben los estudiantes, dificultad que está directamente relacionada con el nivel en Matemáticas y Ciencias que presentan los alumnos en la Educación Secundaria.

Este hecho se refleja en las pruebas PISA de Matemáticas, que se ocupan precisamente en analizar globalmente la capacidad que poseen los alumnos para formular, interpretar y utilizar las matemáticas en diferentes situaciones.

Cuando se analizan los resultados de las últimas pruebas PISA (OCDE, 2019) puede verse como en los resultados relativos a la prueba de Matemáticas España alcanza una puntuación de 481 puntos. Esta puntuación es 5 puntos inferior a la obtenida en la prueba anterior de 2015, aunque se mantiene bastante estable en las 4 pruebas realizadas en los últimos diez años.

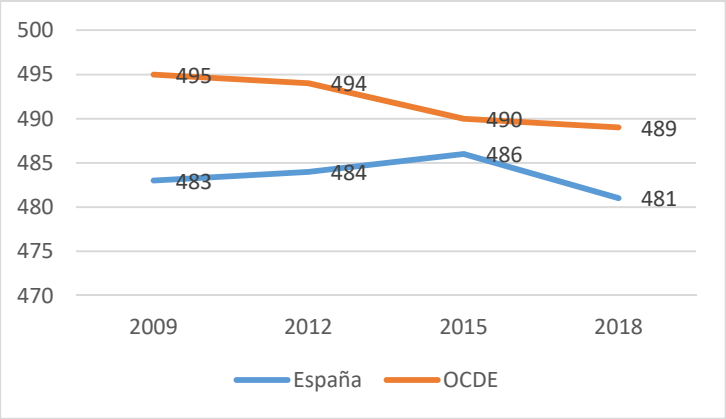


Figura 1. Resultados Matemáticas PISA

La puntuación obtenida por los estudiantes españoles sigue siendo inferior a la media de la OCDE (489 puntos) así como a la media de los países que integran la Unión Europea (494) y, desde luego, no resiste comparación alguna con la de los países que integran las primeras posiciones: Japón, Corea y Estonia con 527, 526 y 523 puntos respectivamente.

Si se analiza el rendimiento de los estudiantes en los 6 niveles de competencia de las pruebas, presentado en la Figura 2, puede verse que el 49,2% de los estudiantes se sitúa en los 2 primeros niveles y el 75,2% si se abarcan los 3 primeros, mientras que únicamente el 6,2% y el 1,1% se sitúan en los dos niveles más altos.

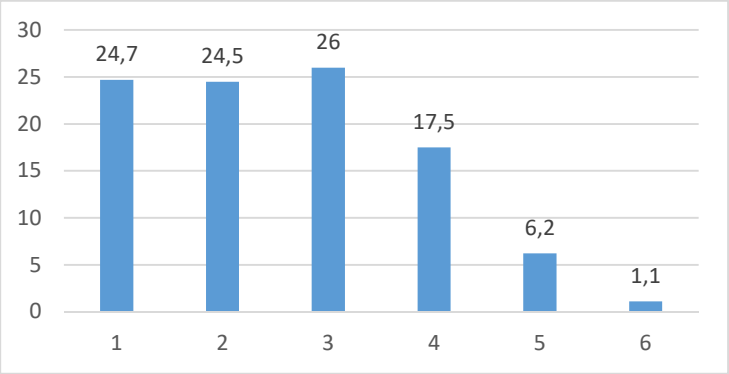


Figura 2. Porcentajes niveles de rendimiento en Matemáticas

A nivel local, si se analizan los resultados del Sistema Educativo de Baleares obtenidos en las pruebas IAQSE, existe una situación similar cuando se mide el grado de adquisición de la competencia matemática en 2º ESO con un 25% de

alumnos con adquisición baja o muy baja, un 33% de adquisición intermedia-baja, un 26% de adquisición intermedia y sólo un 16% de alumnos con adquisición alta o muy alta. (IAQSE, 2017)

No cabe duda de que el rendimiento en Matemáticas está directamente relacionado con el interés que se tiene por la asignatura. Un estudio de la Asociación Española para la Digitalización (DigitalEs, 2019) señala que en Educación Primaria un alto porcentaje de los alumnos tienen una buena o muy buena opinión de la asignatura y su enseñanza. Sin embargo, cuando hablamos de la Educación Secundaria un 19% de alumnos declaran que directamente no les gusta y no entienden la asignatura y otro 54% dice que aunque les gusta, tienen problemas para entenderla.

A la vista de los resultados, hay que reinterpretar la forma actual de enseñar las matemáticas, buscando formas de cambiar la percepción actual de los alumnos por la asignatura y de mejorar su comprensión de la misma. Dentro de esa reinterpretación se encuentran diversas iniciativas que se están poniendo en marcha: gamificación, aula invertida, trabajo basado en proyectos, aprendizaje basado en problemas, etc. Uno de estos métodos se basa en utilizar juegos como método de la enseñanza de las matemáticas ya que el juego, asociado siempre como diversión, hace que los estudiantes no perciban el esfuerzo que están llevando a cabo para su realización. Por tanto, escogiéndolos con precisión, los juegos pueden ayudar a incrementar la comprensión de la asignatura o a reforzar los conocimientos adquiridos, facilitando enormemente el aprendizaje.

Según Piaget (1985) *“los juegos ayudan a construir una amplia red de dispositivos que permiten al niño la asimilación total de la realidad, incorporándola para revivirla, dominarla, comprenderla y compensarla”*.

Avanzando un paso más, la magia siempre ha provocado fascinación entre la gente. Cuando un mago realiza trucos ante una audiencia consigue atraer completamente la atención y el interés del público, por lo que intuitivamente podría deducirse que los trucos de magia serían un buen recurso educativo.

Además muchos trucos de magia consisten en aplicar propiedades matemáticas de forma oculta, por lo que puede pensarse que además del aspecto motivador los trucos pueden servir para enseñar matemáticas como otra metodología más a las anteriormente comentadas. La Matemagia, entendida como la utilización de juegos de magia como medio para la enseñanza de las matemáticas, pretende utilizar el interés existente en la magia para mejorar la comprensión y el aprendizaje de las matemáticas.

El estudio de la utilización de las actividades mágicas en la enseñanza de las matemáticas aún no ha sido explorado tan en profundidad como otros métodos (aula invertida, gamificación, uso de juegos, etc.), lo cual ha sido el motivo principal (aparte de la curiosidad por la magia que siempre ha tenido el autor) de la realización de este trabajo.

Objetivos

Los objetivos a alcanzar en este trabajo son los siguientes:

- Estudiar el desarrollo cognitivo de los adolescentes, ver cómo se presenta en ellos el pensamiento formal y analizar sus principales características.
- Revisar las principales teorías existentes respecto al proceso del aprendizaje estudiando su impacto en la enseñanza de las matemáticas.
- Analizar las dificultades que existen en el aprendizaje de las matemáticas.
- Observar el mecanismo de la motivación y estudiar diferentes formas para incrementarla en el estudio de la asignatura.
- Realizar un estudio sobre la utilización de los juegos y la magia como metodología educativa en clase de matemáticas, estudiando los efectos favorables y desfavorables que tiene sobre el aprendizaje.
- Estudiar la situación actual de la Matemagia en las escuelas e institutos de nuestro país, analizar cómo potenciar su utilización y ver qué efectos sobre la motivación de los estudiantes tendría un mayor uso.

- Analizar la opinión sobre la Matemagia y cómo la utilizan algunos expertos. Asimismo, obtener su percepción acerca de la situación en nuestro país y las iniciativas existentes actualmente para fomentar su uso.
- Proponer un conjunto de actividades matemágicas para su utilización en las aulas analizando su encaje en el currículum de Matemáticas en la Educación Secundaria.

Metodología

Los objetivos descritos anteriormente se pretenden conseguir mediante varios métodos:

En primer lugar la realización de un estudio bibliográfico comparativo que analice la opinión de expertos en los temas tratados en este trabajo utilizando trabajos publicados en libros, revistas artículos, etc., a fin de poder contextualizar cuál es la situación actual.

Como parte esencial del estudio se van a presentar los resultados de tres entrevistas a expertos en el uso de la Matemagia en las aulas para que sean ellos los que presenten directamente su visión del tema.

Adicionalmente se analizarán los resultados de dos cuestionarios: uno dirigido a alumnos y un segundo dirigido a docentes de forma que se pueda tener una visión más global de la situación actual de la Matemagia.

Por último para aportar un grano de arena a facilitar la realización de actividades matemágicas en las aulas se incluye un pequeño conjunto de actividades listas para ser utilizadas por parte de los docentes siguiendo las pautas presentadas en capítulos anteriores.

ESTADO DE LA CUESTIÓN

Desarrollo cognitivo en la adolescencia: el pensamiento formal

En la adolescencia de las personas acontecen cambios que modifican de forma profunda la capacidad de pensamiento y el modelo de razonamiento que poseen. Los adolescentes ya no piensan exclusivamente en el aquí y ahora, sino que comienzan a desarrollar una nueva forma de pensar que les permite adaptarse en mejores condiciones al entorno que les rodea y encarar de forma más preparada la transición hacia la edad adulta (Cano, 2007). Esta forma de pensamiento es más compleja, abstracta y lógica y su principal característica es que no necesita la realidad para poder formar conclusiones sino que posibilita el razonamiento teniendo en cuenta todas las variables, tanto las reales como las posibles (Utrera 2012). Nos referimos al pensamiento formal, concepto desarrollado por Inhelder y Piaget a lo largo de toda su obra y considerados como referencia en la materia.

La adquisición del pensamiento formal se condiciona a la exposición a procesos educativos que faciliten su desarrollo mediante la utilización de contenidos, así como a propuestas didácticas que estimulen el aprendizaje desde este punto de vista. Debido a las características anteriormente mencionadas se considera que esta clase de pensamiento es la que forma el pensamiento matemático. Inhelder y Piaget (1955-1972), citados por Cano (2007), proponen que el pensamiento formal es universal, es decir, que todas las personas llegado el momento son capaces de razonar utilizando las operaciones formales.

En su obra, Inhelder y Piaget (1955-1972) describen las características de la nueva etapa de las operaciones formales que aparece entre los 11-12 años y se afianza hacia los 14-15 años. En la primera etapa los adolescentes muestran un manejo limitado y ocasional de algunas operaciones formales. En la segunda, el uso del pensamiento formal se consolida y su utilización es más general.

Posteriormente se ha demostrado la dificultad de la adquisición de esta clase de pensamiento y la escasa generalidad de su uso en los adolescentes (Carretero y León, 2002). El propio Piaget (1970), citado en Aguilar et al (2002), cambió su posición inicial concluyendo que la consolidación del pensamiento formal podía llevarse a cabo hasta la edad de 20 años.

Inhelder y Piaget (1955-1972), citados en el trabajo de Cano (2007), proponen la existencia de dos clases de características en el pensamiento formal: características funcionales que son orientaciones esenciales del pensamiento y características estructurales que emplean el lenguaje lógico-matemático para exponer el armazón que compone el comportamiento cognitivo.

La descripción de las características funcionales que realizan Henao y Solorciano (2012) es la siguiente:

- Lo real es un conjunto de lo posible: lo posible ya no es una prolongación de lo real, sino que la realidad se incluye dentro de lo posible.
- Carácter hipotético-deductivo: es la capacidad para elaborar y corroborar diversas hipótesis para verificar si se confirman o no de forma simultánea o sucesiva.
- Carácter proposicional: El pensamiento ya no tiene como punto de partida la realidad sino las proposiciones. Inhelder y Piaget defienden que la utilización de operaciones proposicionales o interproposicionales es una característica principal del pensamiento formal. Esta lógica asociada permite a las personas organizar la información disponible y predecir el resultado de sus acciones durante la resolución de sus tareas, siendo una de las herramientas fundamentales en la solución de tareas matemáticas.

Vygotski (1931 – 1996), citado por Cano (2007), va más allá de las teorías de Inhelder y Piaget considerando al lenguaje como uno de los factores más importantes del pensamiento adolescente. Incluso más primordial que el lenguaje para él es el factor social, considerado como un todo. La historia social

y cultural de las personas es la que les lleva al desarrollo del pensamiento conceptual y el dominio del pensamiento lógico.

Una vez analizadas las principales características del pensamiento formal y su influencia en la comprensión y el aprendizaje, el siguiente apartado se centra en este último concepto para conocer con más profundidad en qué forma se lleva a cabo.

El aprendizaje

La Oficina Internacional de la Educación, organismo dependiente de la UNESCO, define el aprendizaje como "*un proceso que reúne experiencias e influencias personales y ambientales para adquirir, enriquecer o modificar el conocimiento, las habilidades, los valores, las actitudes, el comportamiento y las visiones del mundo*". En esta definición se recogen las tres características principales del aprendizaje: que implica un cambio, que es fruto de la experiencia y que sus efectos son relativamente permanentes.

El estudio científico del aprendizaje comienza a desarrollarse a finales del siglo XIX, existiendo teorías muy diferentes relativas a cómo se lleva a cabo. Algunas de las principales son:

- Conductismo: iniciado a principios del siglo XX. El concepto principal es que el aprendizaje se basa en cambios del comportamiento debidos a la creación de asociaciones entre estímulos y las respuestas obtenidas (Romero, 2017). El aprendizaje es por tanto memorístico y sin comprensión (Pozo, 2013). Las respuestas a un estímulo se refuerzan cuando son seguidas de un efecto gratificante y se refuerzan mediante la repetición, a menudo asociadas a la utilización de castigos o recompensas. Algunos representantes del conductismo son: Watson, Pavlov, Skinner y Thorndike.

- Cognitivismo: iniciado a finales de la década de 1950. En él las personas se ven como sujetos activos que reciben la información y la procesan internamente, construyendo las respuestas (Romero, 2017). El aprendizaje se entiende como una emisión del conocimiento por parte del profesor y su adquisición pasiva por parte del alumno, siendo el proceso de adquisición más importante que la respuesta a él. Representantes del cognitivismo son Bartlett y Bruner entre otros.
- Constructivismo: surgido en los años setenta y ochenta del Siglo XX, en el constructivismo los alumnos ya no reciben pasivamente la información sino que construyen el conocimiento de forma activa a partir del entorno y de sus experiencias previas. En él, el maestro ya no es el transmisor del conocimiento sino que ayuda a aprender al alumno. Uno de sus máximos exponentes es Piaget (Pozo, 2017).
- Aprendizaje observacional: promovido por Albert Bandura, sugiere que el aprendizaje se realiza dentro del contexto social, y que este aprendizaje, aunque puede adquirirse de modo directo, se facilita enormemente si se realiza observando e imitando modelos como la familia, el profesor o compañeros (Oficina Internacional de la Educación, s.f.).
- Socio-constructivismo: en las postrimerías del siglo XX la perspectiva constructivista del aprendizaje se modifica con el surgimiento de la perspectiva de "cognición y aprendizaje situados" que subraya la importancia que tiene el contexto en el que se mueven las personas y en particular su interacción social (Romero, 2017).

En los últimos años han surgido nuevas teorías sobre el aprendizaje, algunas de ellas controvertidas, como *el aprendizaje experiencial* que destaca las experiencias más relevantes sufridas en nuestra vida como la base que conduce a los cambios en el comportamiento y en el conocimiento, o la *teoría del aprendizaje situado y la comunidad práctica* que afirma que dentro de las comunidades es donde el aprendizaje ocurre de manera más efectiva.

La conclusión final es que todas las teorías pueden ser visibles y aplicables en un momento u otro del aprendizaje en las aulas: el conductismo recompensando

esfuerzos y trabajo bien realizado, el cognitivismo en la adquisición directa de conocimientos, el aprendizaje observacional en las prácticas, etc, aunque quizás deba prevalecer una visión más constructivista en la que el profesor facilita la comprensión del conocimiento al estudiante, ayudando a su crecimiento y desarrollo.

Una vez conocidas algunas de las teorías sobre el aprendizaje toca profundizar sobre las dificultades concretas que presenta el aprendizaje de la asignatura de matemáticas, para después centrarnos en una de ellas y presentar finalmente soluciones que permitan mejorarla.

Problemas en el aprendizaje de las matemáticas

Si se hiciera una lista de las asignaturas que presentan más problemas de aprendizaje, las matemáticas sin duda estarían en los primeros lugares de la lista. En la introducción ya se ha presentado la mejorable realidad que presenta la educación española en las pruebas globales que se ocupan de analizar la capacidad que poseen los alumnos para formular, interpretar y utilizar las matemáticas en diferentes situaciones. Aunque en los resultados influyen factores de diferentes tipos (entorno sociofamiliar, inmigración, repeticiones de curso, etc.), está claro que las matemáticas en sí mismas presentan características que dificultan su aprendizaje, siendo responsables en parte de estos resultados.

Estas dificultades que tienen los alumnos para entender la asignatura están basadas en factores muy concretos como señalan entre otros Rivière (1990), Carrillo (2009), Fernández (2013) o Ricoy y Couto (2018). Debe hacerse hincapié en que el objetivo de este trabajo no consiste en entrar a valorar las dificultades del aprendizaje ligadas a las emociones o las actitudes ni tampoco las relacionadas con causas neurológicas o trastornos del aprendizaje como pueden

ser la discalculia, acalculia u otros problemas similares, sino centrarse solamente en los aspectos más tratables desde las aulas.

Algunos factores que dificultan el aprendizaje de la asignatura están basados en los propios alumnos; De Guzmán (2007) recuerda como los pitagóricos asignaban a las matemáticas un carácter divino, cuyo conocimiento no debía ser divulgado a todo el mundo sino solamente a los iniciados. Desgraciadamente, esta imagen ha perdurado hasta nuestros días rodeando a la asignatura de un aura de dificultad. Como señala Carrillo (2009), los alumnos frecuentemente describen las matemáticas como *"un conocimiento cuya comprensión está reservada a muy pocos, especialmente dotados".*

Otras dificultades están centradas en la naturaleza de las matemáticas en sí misma:

- El alto nivel de abstracción de las matemáticas es uno de los factores que entorpecen su aprendizaje. Para que los alumnos interioricen un conocimiento es necesario que perciban su utilidad. Si desligamos el aprendizaje de las matemáticas de la realidad, será extraordinariamente difícil motivar a los estudiantes para que aprendan.
- Como afirma Fernández (2013), las matemáticas son una cadena de conocimientos donde en muchas ocasiones para poder asimilar un nuevo concepto es necesario dominar otros anteriores. Por tanto, la dificultad no proviene solamente del propio concepto sino también de la comprensión previa necesaria, constituyendo otra dificultad para el aprendizaje.
- Otro factor adicional a considerar es la existencia de un lenguaje propio en las matemáticas que hay que entender y aprender a utilizar. Este lenguaje, al tener una estructura diferente al lenguaje hablado y un vocabulario propio, dificulta el trabajo con los conceptos de la asignatura.
- El carácter lógico de las matemáticas, es decir el hecho de que los contenidos de la asignatura se definen de forma deductiva y no inductiva, lo que implica la necesidad en los alumnos de tener un cierto desarrollo

del pensamiento formal, es otra de las dificultades encontradas para el aprendizaje de la materia (Carrillo, 2009).

Ricoy y Couto (2018) destacan como factores, además de alguno de los anteriores, la enseñanza mediante metodologías tradicionales por parte de los docentes, la poca perseverancia en el estudio de los alumnos, la leve exigencia en las escuelas, los programas extensos de la asignatura y el gran número de alumnos por clase.

Sin embargo, puede decirse como apunta Fernández (2013), que la dificultad para aprender matemáticas viene relacionada en gran medida con la falta de motivación, la forma de enseñar y la actitud que presentan ante la asignatura tanto profesor como alumno. El profesor no debe ser sólo un conocedor de la asignatura, sino que debe estar motivado para enseñarla desde diferentes puntos de vista y utilizando metodologías variadas. Desde la perspectiva del alumno, como afirma Font (1994), un alumno con motivación al encontrarse ante una dificultad buscará formas de superarla, preguntando a su profesor por ejemplo. Es decir, estará centrado en buscar la solución, pidiendo ayuda si lo considera necesario. En cambio, si el alumno está poco motivado, aumentará su nivel de angustia y adoptará una actitud defensiva que dificultará su aprendizaje.

Ahondando en esta perspectiva, Ahmed et al (2013), citados por Ricoy y Couto (2018), comentan que cualquier clase de cambio positivo en el aprendizaje ejerce un impacto provechoso en los alumnos, mientras que si no existe la motivación se puede llegar al fracaso, tanto en estudiantes como en docentes, al crearse las condiciones ideales para que se produzca un círculo vicioso de desmotivación.

A partir de este enfoque, en los siguientes apartados se va a profundizar en la motivación como principal elemento de mejora del aprendizaje de las matemáticas, explorando diferentes enfoques por parte de los docentes para fomentarla y mejorarla en los estudiantes.

La motivación de los alumnos

Cuando se habla de motivación pueden encontrarse múltiples definiciones. La Real Academia Española de la Lengua (2014) define en su tercera acepción la palabra motivación como "*Conjunto de factores internos o externos que determinan en parte las acciones de una persona*". Normalmente al hablar de motivación se habla de los estados internos que guían la conducta de las personas hacia unos objetivos particulares. De la Torre (2000), citado por Romero (2005), define la motivación como el resultado de las fuerzas que actúan sobre las personas, llevándolas a través de un comportamiento determinado que las dirige hacia una meta.

Ausubel (1983), citado por Sabaté (2006), considera 3 factores en la motivación escolar:

- La necesidad y voluntad de adquirir conocimientos.
- La acentuación del yo, relacionada con el rendimiento y la competitividad.
- La búsqueda de la aprobación de sus modelos de referencia mediante el buen resultado.

Atendiendo a su origen, Gómez (2005) las divide en dos clases: la motivación interna que nace de forma espontánea dentro de la persona y la motivación externa que como contraposición es inducida por personas o factores externos. La motivación externa suele ser adquirida por la observación directa y la imitación de personas cercanas identificadas como referentes (familia, amigos, profesores, etc.) y por tanto es a través de ella donde el docente puede influir en el alumno. La motivación interna tiene como característica que es siempre más extensa en el tiempo. Naturalmente para que el aprendizaje sea un proceso integral y exitoso ambas motivaciones son necesarias ya que son complementarias.

Desde esta perspectiva y relacionándolas con el aprendizaje, Aparicio (2012) clasifica la motivación en intrínseca y extrínseca. La motivación intrínseca se

encuentra cuando un alumno muestra interés por el estudio, superándose para lograr alcanzar sus metas. Las actividades se realizan por el placer que las personas experimentan al hacerlas. El aprendizaje se consigue mediante la exploración y la curiosidad con el objetivo de aprender. La motivación extrínseca se encuentra cuando el alumno no muestra interés por el estudio por el placer que le provoca sino por las ventajas que puede obtener a través de él. Esta motivación es directamente opuesta a la motivación intrínseca y en ella el aprendizaje es solamente un medio utilizado para conseguir un objetivo y no el objetivo en sí mismo. A la vista de ambas motivaciones, en las aulas debe perseguirse por tanto el desarrollo de la motivación intrínseca.

Una vez comentado el concepto de la motivación y su particularización en el aprendizaje y la educación, hay que profundizar en cómo dirigirla hacia las matemáticas. No obstante, es importante recordar en todo momento que la motivación es simplemente una forma de conseguir que los estudiantes aprendan matemáticas, y que no debe ser nunca el fin en sí mismo.

Según Zemelman (1998) "*el objetivo principal al enseñar matemáticas es ayudar a que todos los estudiantes desarrollen su capacidad matemática*". Tradicionalmente el sistema educativo ha facilitado que los docentes utilicen un estilo basado en la memorización de los contenidos, sin tener en cuenta a los alumnos, facilitando así la pérdida de interés por la asignatura (García, 2011). Al preparar una clase una de las preocupaciones principales de cualquier docente debería consistir en pensar diferentes formas para lograr conservar el interés de los estudiantes. Para ello es sumamente importante la realización de actividades innovadoras que consigan mejorar la experiencia educativa de los alumnos. Posamentier (2013) propone diversas formas de lograr este objetivo:

- Llamar la atención al alumno acerca de lagunas en su conocimiento y conseguir así que este vacío promueva su deseo de aprender.
- Utilizar logros secuenciales enseñando nuevos conocimientos siguiendo una secuencia lógica a partir de lo ya conocido. Aunque

bastante parecido al método anterior, éste depende del deseo del alumno por aumentar y no por completar su conocimiento.

- Descubrir patrones estableciendo una situación artificial que lleve a los estudiantes a descubrir un patrón de forma guiada por el docente. A menudo este método puede ser bastante motivador ya que los alumnos disfrutan encontrando ideas.
- Presentar desafíos ya que cuando los estudiantes son desafiados intelectualmente suelen reaccionar con entusiasmo. No obstante, debe tenerse mucho cuidado al seleccionar los desafíos para que estén al alcance de las habilidades de los alumnos y conduzcan a la consecución del conocimiento.
- Presentar resultados matemáticos sorprendentes utilizando ejemplos que sean inesperados. Un ejemplo podría ser una discusión sobre la probabilidad, inesperadamente alta, de coincidencias de cumpleaños en grupos relativamente pequeños. Su sorprendente resultado dejará a la clase asombrada e interesada por comprender el concepto subyacente.
- Exponer la utilidad de un tema presentando una aplicación práctica de interés para la clase al comienzo de una lección.
- Enseñar matemáticas lúdicamente a través de materiales manipulativos, juegos, trucos, etc. Además de ser seleccionados por su ganancia motivacional específica, los mecanismos utilizados deben ser breves y simples. Debe tenerse en cuenta no obstante que la diversión generada por estos ejemplos no le reste importancia al conocimiento que se quiere transmitir.
- Contar historias explicando eventos históricos puede motivar asimismo a los estudiantes.
- Hacer participar activamente a los alumnos en la justificación de las fórmulas y resultados matemáticos. La justificación de cualquier axioma supone un desafío que estimulará la curiosidad de los estudiantes.

Es importante que los docentes comprendan los motivos para aprender de sus alumnos así como su carácter. Conociéndolos, el docente puede jugar con ambos elementos para maximizar la motivación y el compromiso y de esta forma lograr un aprendizaje más efectivo.

Los siguientes apartados de este trabajo van a centrarse en la motivación lúdica de los estudiantes, especialmente en el uso de juegos y trucos de magia dentro del aula como vehículo para fomentar el aprendizaje.

El juego como elemento motivador

Desde la niñez los juegos son parte de la vida de las personas. El deseo de jugar no se apaga en la adolescencia ni en la vida adulta, acompañándonos a lo largo de nuestra vida. De hecho, si prescindimos del aspecto económico, a menudo es complicado trazar una línea entre lo que puede ser un juego y lo que debe considerarse una obligación o un trabajo.

La palabra *juego* proviene de la palabra latina *iocus* que significa *broma*. El Diccionario de la Lengua Española (2014) define juego como "*Ejercicio recreativo o de competición sometido a reglas, y en el cual se gana o se pierde"*. Esta definición establece las características que debe tener cualquier juego (Salvador, 2011):

- Tener un componente lúdico, es decir, ser utilizado para la diversión.
- Tener reglas propias que han de ser aceptadas por todos los participantes en el juego.
- Poseer competitividad. En el juego habrá ganadores y/o perdedores aunque en ocasiones, el juego cooperativo por ejemplo, la clase entera funcione como un equipo siendo el docente el rival.

Chamoso et al (2004) resumen otras características que poseen los juegos:

- Es libre, es decir, practicado de forma voluntaria.

- Su duración está limitada en el espacio y el tiempo.
- Es improductivo, no generándose riqueza alguna en él.
- Genera tensión durante su duración y alegría en la victoria.
- Su resultado es incierto, no conociéndose cómo será su final.

La relación entre las matemáticas y el juego ha sido evidente a lo largo de toda la historia. Como resumen De Guzman (1989) y Muñiz-Rodríguez et al (2014) ya en la escuela pitagórica se realizaban estudios numéricos mediante configuraciones de piedras. Más adelante, Fibonacci utilizaba el juego como herramienta durante la Edad Media. En 1663 Cardano escribe el "*Liber de Ludo Alea",* considerado el primer libro sobre juegos de azar y así podría continuarse hasta nuestros días.

Relacionando el juego con el aprendizaje, los juegos pueden ser utilizados a cualquier edad. Corbalán y Deulofeu (1996) citados por Muñiz-Rodríguez et al (2014), afirman que "*mediante el juego se pueden crear situaciones de máximo valor educativo y cognitivo que permitan experimentar, investigar, resolver problemas, descubrir y reflexionar*". El carácter lúdico fomenta la motivación al facilitar una aproximación diferente el proceso de aprendizaje.

Como señala Sabaté (2006), en las clases en general las matemáticas lúdicas tradicionalmente se han utilizado como "*recurso decorativo",* aunque *"pueden ser un instrumento excelente para conseguir la mejora de la motivación del alumnado".* Gardner (1983) reafirma este concepto afirmando:

> "*Un buen rompecabezas matemático, una paradoja o un truco de apariencia mágica pueden excitar mucho más la imaginación de los niños que las aplicaciones «prácticas», sobre todo cuando estas aplicaciones se encuentran lejanas de las experiencias vividas por ellos. Y si el «juego» se elige y prepara con cuidado, puede llevarle casi insensiblemente hasta ideas matemáticas de importancia*."

Precisamente, esta facilidad de adaptación de los juegos a los contenidos que se desean transmitir y al nivel de los estudiantes a los que se dirige el juego, es una de las grandes ventajas que conlleva el empleo de juegos dentro del aula.

Existen numerosos aspectos positivos asociados al empleo de juegos para fomentar el aprendizaje en la asignatura de Matemáticas:

- La mayor motivación de los estudiantes a través de planteamientos atractivos y recreativos que forman parte de una actividad natural para ellos como es el juego.
- El aprendizaje a través de nuevas habilidades y destrezas.
- La ruptura con la enseñanza tradicional basada en la mecánica de teoría y ejercicios.
- La constatación de que los conceptos matemáticos pueden utilizarse en otras situaciones uniendo procedimientos informales con formales.
- La mayor inclusividad que presentan los juegos a través de la atención de las peculiaridades de los alumnos.
- Fomentar el trabajo en grupo así como la relación profesor – alumno.
- Fomentar un espíritu positivo ante el trabajo en las aulas.
- Estimular el desarrollo de la personalidad y la autonomía fomentando la confianza y la autoestima, así como la autocrítica.
- Incluso el perder es bueno educacionalmente, al poder adquirir conocimiento a través de la reflexión sobre los errores cometidos.
- Mayor facilidad para desarrollar el pensamiento matemático mediante aplicaciones prácticas.

Sin embargo, el uso de los juegos en clase también puede presentar dificultades si no se preparan y desarrollan de forma adecuada:

- La necesidad de recursos externos para la realización de los juegos, no siempre disponibles en el centro.
- Necesidad de una actitud proactiva por parte del docente.
- La utilización de juegos sin control puede retrasar el ritmo de las clases.

- Generación de rechazo hacia los medios tradicionales de enseñanza.
- Mayor distracción de los alumnos por el juego que desemboque en una pérdida de productividad.
- Los juegos pueden acabar fomentando una excesiva competitividad.
- El desarrollo de una motivación extrínseca temporal por parte del alumno basada exclusivamente en ganar el juego y ser recompensado.

Los juegos pueden ser introducidos por el docente en cualquier punto del proceso de aprendizaje: antes de introducir un nuevo concepto, durante su desarrollo o bien posteriormente para permitir consolidarlo.

Las actividades siempre deberán constar de dos partes: la realización de la actividad en sí misma por parte del estudiante y una posterior reflexión y discusión sobre la actividad realizada, relacionándola con los conceptos matemáticos que quieran transmitirse.

Diversos autores han establecido diferentes clasificaciones de los juegos entre las cuales puede nombrarse una de las establecidas por Corbalán (1994), que clasifica los juegos en tres clases según el grado de conocimiento previo y el objetivo del juego: de procedimiento conocido, de estrategia y de conocimiento.

Los juegos de procedimiento conocido son juegos tradicionales con los que el alumno suele estar familiarizado (parchís, ajedrez, damas, etc.). En la enseñanza podemos utilizarlos sin modificaciones o con cambios significativos (pocos o muchos) para adaptarlos al concepto que se quiere transmitir. Estos juegos son fáciles de utilizar en el aula al no tener que explicar detalladamente las reglas del juego por ser ya conocidas.

Los juegos de estrategia son juegos en los que el jugador debe escoger en cada momento una de las posibilidades existentes para lograr el objetivo de ganar el juego. No suelen estar asociados a conceptos matemáticos pero son un buen recurso para fomentar el razonamiento lógico y la capacidad de resolver problemas. Asimismo, fomentan una actitud positiva para estudiar modelos

matemáticos. Sin embargo, no están exentos de algunas dificultades como apuntan Muñoz et al (2017):

- Exigen un mayor tiempo de preparación de las clases.
- El proceso de aprendizaje es más lento.
- La percepción del éxito de su empleo no es inmediata.
- Al ser juegos muy abiertos, los alumnos pueden responder de formas no previstas.
- La evaluación es complicada.

Los juegos de conocimiento son aquellos que tienen aplicación más directa en el aprendizaje de las matemáticas, ya que introducen dentro del juego conceptos existentes dentro del currículum. Su objetivo por tanto es hacer más interesante la introducción o el repaso de algún concepto matemático (Chamoso et al, 2004). Una posible subclasificación señalada por Muñoz et al (2017) puede ser:

- Juegos numéricos.
- Juegos con calculadora.
- Juegos algebraicos.
- Juegos geométricos.
- Juegos de funciones.
- Juegos de azar y probabilidad.

Debemos preguntarnos acerca de cómo pueden evaluarse las actividades con juegos en el aula. Sanmartí (2007) califica la evaluación como un proceso que caracterizado por 3 aspectos:

- Recogida de información a través de diferentes medios (observación, diálogo con los alumnos, medios escritos, etc.).
- Análisis de dicha información y emisión de un juicio acerca de ella.
- Toma de decisiones a partir del juicio emitido anteriormente con una doble finalidad:
    - Social, para certificar el nivel de adquisición de conocimientos.

- Pedagógica, que permite identificar los cambios a efectuar en el proceso de aprendizaje para facilitar a los alumnos su adquisición del conocimiento.

En los juegos no siempre es fácil de evaluar el resultado con métodos tradicionales, aunque permiten la evaluación, por ejemplo, a través de rúbricas y fichas rellenadas por el docente partiendo de la observación del desarrollo de las actividades y en función de si se han conseguido los objetivos perseguidos, destacando asimismo propuestas de mejora para sucesivas repeticiones de la actividad.

No obstante, el método de evaluación preferido de los juegos debería ser la autoevaluación de los alumnos y la coevaluación de los grupos formados para la actividad, ya que ambas son herramientas facilitadoras del crecimiento personal. Para aprender, los alumnos deben ser capaces de ver por sí mismos las dificultades que encuentran, razonando la forma adecuada de encontrar y pedir ayuda para superarlas. La autoevaluación permitirá a los alumnos valorar sus aptitudes para ello. Por su parte, la coevaluación implica trabajar de forma cooperativa, permitiendo de esta forma adquirir los conocimientos mediante la discusión y el intercambio de ideas. Como dice Sanmartí (2007), ”*la evaluación, entendida como autoevaluación y coevaluación, constituye forzosamente el motor de todo el proceso de construcción de conocimiento”.*

Para analizar los juegos desde la atención a la diversidad hay que recordar que, aunque algunas metodologías no facilitan precisamente la atención de los estudiantes de forma individual, en el caso de los juegos sí que tenemos esa posibilidad, cumpliendo así con un principio fundamental de la atención a la diversidad (Sánchez, 2009).

Los elementos principales de la atención a la diversidad son:

- Inclusión: este principio parte de que es necesario adaptar la escuela de forma que ésta responda por igual a las necesidades de cada alumno en lugar de que los alumnos sean los que se adapten. La gran variedad de

juegos disponibles facilita la elección de aquellos que permiten la inclusividad de todo el alumnado.

- Compensación: establecimiento de medidas adecuadas de forma que cualquier elemento diferenciador no se transforme en una desventaja que penalice al alumno. La facilidad de adaptación de los juegos, mediante la modificación de las reglas o mediante la gradación de diferentes niveles de dificultad permite realizar con poco esfuerzo esta compensación.
- Interculturalidad: las diferencias deben ser tratadas como algo positivo, favoreciendo el diálogo e intercambio de experiencias. Desde este punto de vista, los juegos deberían tener orígenes culturales diversos y sus reglas deberían ser claras para todos, favoreciendo la participación global de la clase (Alsina y Planas, 2008).
- Normalización: favorecer que los alumnos con discapacidad vivan de forma tan normal como sea posible fomentando la relación con personas sin discapacidad. El carácter grupal de la mayoría de los juegos favorece este encuentro.

A continuación el estudio se centrará en una de las subcategorías de los juegos matemáticos, los trucos de magia, analizando sus características particulares y los beneficios de su utilización para la enseñanza de las matemáticas.

La Matemagia

La magia es algo normalmente relacionado con la niñez y la imaginación, con ver a magos realizar sus espectáculos en el circo o en la televisión. Sin embargo la magia, al igual que los juegos, puede emplearse en el aula con sus mismos objetivos y resultados. Como ya ha podido verse anteriormente por otro lado, la enseñanza de las matemáticas representa todo un desafío para los docentes, debiendo utilizar metodologías que ayuden a mejorar la motivación respecto a ellas a la vez que faciliten un aprendizaje significativo. En este sentido la utilización de la magia es un recurso más que permite conseguirlo.

La magia y las matemáticas han sido dos disciplinas íntimamente asociadas a lo largo de la historia. La escuela Pitagórica ya asociaba propiedades "*mágicas"* a ciertos números (De Guzman, 1989). El primer juego de magia del que existe constancia escrita fue elaborado en el Renacimiento por Luca Pacioli y Leonardo da Vinci mientras que el primer libro impreso, "*De Subtilitate rerum"* (1663), es obra de Gerolamo Cardamo (Maldonado, 2013). Posteriormente existen libros que conjugan la magia y las matemáticas, pudiendo destacar el escrito por Jacques Ozanam, "*Recréations Mathèmatiques et Phisiques" (1725)*, que incluye juegos científicos y de magia (Blasco, 2007). En el siglo XIX Lewis Carroll ya efectuaba trucos numéricos utilizados hoy en día por los magos. En el siglo pasado hemos de destacar la figura de Martin Gardner como pionero en la publicación de recopilaciones de trucos basados en efectos matemáticos. Su libro "*Mathematics, Magic and Mystery"* (1956) es el primer libro dedicado totalmente a la magia matemática (Fernández y Lahiguera, 2014). Hoy en día cualquier autor de libros relacionados con la magia incluye en ellos trucos que tienen bases matemáticas.

En nuestro país debemos destacar a Fernando Blasco, Pedro Alegría, el grupo Alquerque, Sergio Belmonte y algunos otros como divulgadores y escritores matemágicos a través de diversos libros y blogs, y a Juan Tamariz, famoso mago que además es un experto reconocido en el estudio y la creación de trucos de magia basados en propiedades matemáticas.

El origen de la palabra Matemagia es incierto. El Diccionario de la Lengua de la Real Academia Española (2014) define la magia como "*Arte o ciencia oculta con que se pretende producir, valiéndose de ciertos actos o palabras, o con la intervención de seres imaginables, resultados contrarios a las leyes naturales*". Sin embargo se suele preferir la definición, más antigua, del Diccionario de la Lengua Castellana (1803) que la define como "*la ciencia o arte que enseña a hacer cosas extraordinarias y admirables*". A partir de esta definición podríamos definir la Matemagia como "*la ciencia que utiliza las matemáticas para realizar cosas extraordinarias y asombrosas*" (Muñoz, 2004)

Blasco (2007) afirma que "*como elemento didáctico, la Matemagia es interesante, puesto que permite preguntar el porqué de algunos resultados*". Gardner (2011) comenta que "*la magia matemática combina la belleza de una estructura matemática con el entretenimiento que aporta un truco*".

La Matemagia puede utilizarse en diferentes momentos durante las clases:

- Al comienzo de un nuevo tema realizando trucos que estén relacionados con el mismo, facilitando así la motivación de los estudiantes para aprender los conceptos a introducir, así como para partir de una experiencia práctica como elemento catalizador del aprendizaje.
- Como elemento final que permita aplicar y consolidar mediante la práctica los conocimientos adquiridos previamente.
- Puede utilizarse también como herramienta de descanso entre otro tipo de actividades, permitiendo al alumno relajarse a la vez que sigue aprendiendo de forma inadvertida para él.
- De forma muy puntual, puede emplearse como una herramienta más de gestión de aula, anunciándose como premio de un trabajo bien efectuado o de un comportamiento adecuado (Ruiz, 2015). Al anunciarlo con antelación, los estudiantes mejorarán su actitud con el fin de conseguir el premio. Además, el premiar las actitudes correctas puede inducir que éstas se produzcan de forma natural más a menudo.

Ventajas de la utilización de la Matemagia en las aulas son:

- Implica salirse de la rutina normal de la clase, atrayendo la atención de los estudiantes, lo que podrá ser aprovechado también en los momentos posteriores a la finalización de la actividad.
- Ejerce un efecto fascinador (Ramírez, 2019), logrando que el desarrollo de la clase sea más divertido e incentivando en los alumnos una mayor atención e interés por la asignatura, así como una mayor participación.
- Se fomenta la creatividad de los estudiantes al darse la necesidad de elaborar ideas originales y discutirlas con el fin de hallar la solución.

Adicionalmente, el docente puede plantear como reto a los alumnos la elaboración propia de variaciones sobre el truco inicial, favoreciendo la interiorización de los conceptos y fomentando aún más esta creatividad.

- Durante esta discusión los estudiantes deben analizar y discriminar la validez de las soluciones presentadas, fomentándose el carácter hipotético-deductivo y proposicional de los adolescentes.
- Como los trucos de magia se fundamentan en propiedades muy simples, el seguimiento y el posterior análisis de los conceptos que se pretende introducir suelen estar al alcance de todos los alumnos.
- Al ser actividades que se realizan con el conjunto de la clase, o bien a través de grupos con la ayuda de ayudantes previamente aleccionados, se fomentan la comunicación y el desarrollo lingüístico de los alumnos así como su confianza (Fernández, 2017).
- Se favorece el desarrollo del pensamiento crítico en los alumnos. Como comenta Blasco (2007), en la enseñanza tradicional los estudiantes no muestran interés por conocer cómo se demuestran los conceptos teóricos mientras que durante la realización de los trucos de magia esos mismos alumnos están totalmente en alerta para captar el truco y posteriormente no paran de preguntarse cómo éste ha podido realizarse.
- Fomenta la relación entre el profesor y sus estudiantes al desarrollar actividades en un entorno lúdico que necesitan de la interacción constante entre todos los participantes. Adicionalmente, como apunta Ruiz (2015), la imagen del profesor mejora ante la clase al utilizar métodos que interesan a los estudiantes.
- Favorece la atención a la diversidad, ya que fomenta la normalización a través de actividades realizadas en grupo o por el total de la clase así como la inclusión y compensación al poderse escoger entre diferentes actividades, pudiendo establecer dificultades de varios niveles sobre un truco general de forma que podamos compensar cualquier elemento diferenciador que presente alguno de los alumnos.
- En lo referente a los docentes, la Matemagia contribuye a fomentar la capacidad innovadora, al tener que buscar o diseñar recursos para

efectuar los trucos, saliéndose de las metodologías tradicionales de la enseñanza. Asimismo, ante las respuestas positivas de los alumnos a la realización de los trucos, se refuerza la motivación del profesor.

No hay que olvidar sin embargo posibles riesgos del empleo de la Matemagia en las clases:

- La banalización de las actividades, si los estudiantes se centran únicamente en su aspecto lúdico y no en los conceptos matemáticos que pretenden enseñarse.
- La posible dificultad de su uso en clases donde los alumnos no muestran un comportamiento adecuado, si no se consigue atraer la atención de los estudiantes con la actividad.
- La necesidad de que los docentes se sientan cómodos en su papel de *"magos"* y consigan realizar con naturalidad los trucos de forma que se consiga el efecto planeado.
- El abuso de su utilización. Debe considerarse la Matemagia como una herramienta más, por lo que no conviene abusar de ella o los alumnos podrían perder la motivación que les causan las actividades.

En la legislación actual (*Ley Orgánica 8/2013 de 9 de diciembre para la mejora de la calidad educativa - LOMCE*), las competencias se definen como uno de los elementos integradores del currículum, en concreto como "*las capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos"* y se enumeran siete competencias clave. Al analizar las ventajas anteriormente mencionadas que aporta el uso de la Matemagia en las aulas, podemos ver que permite desarrollar cinco de ellas (Fernández, 2017): competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología, aprender a aprender, competencia lingüística, competencias sociales y cívicas y sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.

Con este apartado finaliza el marco teórico del trabajo, donde se ha estudiado cómo se produce el aprendizaje y la necesidad del desarrollo del pensamiento formal. Se ha reflejado también que la motivación es uno de los principales aspectos que permite mejorar el aprendizaje de las matemáticas y cómo la utilización en el aula de juegos y actividades matemágicas facilita precisamente esa motivación.

A continuación se va a analizar qué opinión se tiene sobre la matemagia, cómo se realizan las actividades, cuáles son su situación actual y sus perspectivas de futuro, todo ello visto desde el punto de vista de expertos matemagos, docentes y alumnos a través de entrevistas y encuestas realizadas.

DESARROLLO

Entrevistas: la matemagia en primera persona

Con el fin de complementar el estudio bibliográfico sobre la Matemagia se ha optado por realizar una serie de entrevistas a docentes que trabajan habitualmente con ella, para conocer de primera mano sus impresiones y conseguir una idea más exacta de su situación actual en nuestro país.

Se ha buscado que las entrevistas incluyan personas con perfiles matemágicos muy diferentes que nos permitan que la visión obtenida sea más amplia: un docente (Josep Lluís Pol i Llompart) con gran experiencia en las aulas pero relativamente poca experiencia en el uso de la Matemagia, otro docente (Sergio Belmonte) con 15 años de trabajo matemágico y finalmente alguien que es probablemente uno de los mayores expertos actuales en España en el uso de la magia en las aulas, siendo referente de cualquier nuevo iniciado (Fernando Blasco).

Josep Lluís Pol i Llompart es uno de los vocales de Societat Balear de Matemàtiques (SBM), asociación creada en 2005 con el propósito de promover

la divulgación de las matemáticas y mejorar los aspectos que influyen en su aprendizaje. Es profesor del Centre d'Aprenentatge CientíficoMatemàtic (CENTMAT) y anteriormente del Institut d'Educació Secundària Marratxí. Como apasionado divulgador de las matemáticas ha escrito o participado en cientos de artículos y libros sobre el tema.

Licenciado en matemáticas, especializado en investigación numérica y estadística, Sergio Belmonte se define a sí mismo en su cuenta de Twitter como "*Profesor de Matemáticas, vicepresidente del MMACA (Museu de Matemàtiques de Catalunya) y aprendiz de mago".* Profesor de Instituto y experto matemago con más de 15 años de trabajo en el tema, es asimismo un asiduo conferenciante y divulgador, con un blog propio especializado en Matemagia: *magia y matemáticas* (http://magiaymatematicas.blogspot.com/)

Fernando Blasco es una de las grandes referencias de la Matemagia en España. Doctor en Ciencias Matemáticas, es profesor titular de Matemática Aplicada en la Universidad Politécnica de Madrid. Es autor de varios libros para acercar las matemáticas a todos los públicos, entre ellos Matemagia (2007), convertido en libro de referencia de la Matemagia española. Fernando ha realizado un gran número de talleres, conferencias y actuaciones y lleva años acercando la magia y las matemáticas al público. Es colaborador habitual de medios de comunicación y ha sido reconocido con el premio *"Ciencia y Tecnología para la Sociedad"*, otorgado por la Universidad Politécnica de Madrid.

Para la realización de las entrevistas se realizó como base un cuestionario de 20 preguntas que puede encontrarse en el Anexo IV, aunque se les dio a todos los entrevistados la posibilidad de añadir cualquier otra información fuera del cuestionario que consideraran relevante. Las entrevistas se realizaron mediante correo electrónico y videoconferencia, según elección de los entrevistados, durante los meses de mayo y junio de 2020. En este apartado se resumen conjuntamente los aspectos más importantes obtenidos de las entrevistas, aunque si se desea un mayor detalle pueden consultarse los resultados individuales de cada entrevista en el Anexo IV.

Preguntados por cómo definirían la Matemagia, Pol i Llompart la define como "*el arte de utilizar las técnicas de la magia tradicional aplicada a los conocimientos matemáticos*". Para Belmonte es "*la magia que utiliza las matemáticas de algún modo"* aunque prefiere utilizar el término "*Magia y Matemáticas*". Blasco señala que "l*a matemagia es crear ilusiones a través de propiedades matemáticas".*

Cuestionados por cómo surgió su interés por ella, Pol i Llompart la conoció a través de una conferencia de Fernando Blasco donde presentaba su libro *Matemagia* y Belmonte, que desde la niñez ha estado muy interesado en la magia, a raíz de la búsqueda de material para una actividad en un curso de formación. En el caso de Blasco la afición le viene a partir de la lectura de artículos y libros de otros matemagos como Martin Gardner.

Al preguntarles por la justificación pedagógica de su utilización y sus aspectos más positivos, Pol i Llompart afirma que es un buen estímulo para hacer pensar a los alumnos, mientras que Belmonte destaca dos aspectos: su lado lúdico y el efecto motivador que provoca. Blasco destaca el interés que crea en los estudiantes, herramienta fundamental para el aprendizaje. Todos comentan la participación y curiosidad que despierta su uso y cómo puede aprovecharse para explicar conceptos matemáticos. Belmonte comenta adicionalmente que el hecho de hacer actividades no rutinarias acerca los alumnos al docente, mejorando su relación a través del cariño y no de la disciplina e imposición.

Hablando de las carencias o aspectos que pueden mejorarse en la Matemagia, Belmonte y Blasco comentan que, sobre todo las primeras veces que se practica en un aula, cuesta que los alumnos la vean más allá de su lado lúdico y no perciben la importancia de la actividad matemática posterior. En aulas especialmente revoltosas se va más allá y a veces es imposible utilizarla ya que los alumnos no se toman la actividad en serio.

A la pregunta de cómo creen que debe introducirse en las aulas todos destacan que la Matemagia es un recurso didáctico más, y como tal debe utilizarse puntualmente. Belmonte y Blasco destacan la importancia de hacer una buena

preparación de las actividades y ensayarlas para mejorar las probabilidades de éxito, siempre sin perder de vista el fin educativo de la actividad.

Interrogados por los niveles educativos donde le ven más posibilidades, Pol i Llompart destaca su uso en 6º de Educación Primaria y 1º y 2º de ESO. Belmonte la sitúa según la madurez de los alumnos, puntualizando que probablemente en 1º de ESO y 2º de Bachillerato es donde la agradecen más (en el último caso debido a que es una actividad práctica que les aleja de la gran abstracción de contenidos del curso). En cambio, conceptualmente la ve más en 3º y 4º de ESO, aunque reconoce que por la edad es donde le cuesta más. Blasco, aunque cree que puede utilizarse en todos los niveles, comenta la dificultad de hacer entender las matemáticas subyacentes a los más pequeños que se quedan más con el aspecto mágico de la actividad y destaca la importancia de emplearla más en 2º y 3º de ESO, cursos en los que la personalidad de los alumnos está evolucionando rápidamente.

Si hablamos de en qué Bloques de Matemáticas le ven más utilidad, todos mencionan en primer lugar el Álgebra como el más tradicional aunque Belmonte destaca que últimamente están elaborándose actividades en otras áreas como la topología, los grafos o la simetría. Blasco incide en la generalidad de su uso, dando ejemplos de muchas áreas y añadiendo la posibilidad de utilizarlas en "*disciplinas que están en la frontera con otras disciplinas, como las anamorfosis e ilusiones ópticas que se crean según algoritmos pero que inducen a fallos perceptivos por parte de nuestros sensores y el cerebro".*

Como requisitos que hacen que las actividades sean efectivas, todos destacan que lo importante no es el truco sino el trabajo posterior donde los alumnos analizan y reproducen el truco. Pol i Llompart concreta que los trucos no deben ser de larga realización y deben plantearse con objetos de uso común. Belmonte suele utilizar cartas, materiales de conteo y manualidades sencillas, destacando la necesidad de que los trucos tengan un largo recorrido de forma que permitan a los alumnos no sólo reproducirlos sino ir más allá y, por ejemplo, elaborar variaciones o investigar con más profundidad el concepto matemático

subyacente si están interesados. Blasco recuerda la importancia de que el truco sea atractivo, pero sin olvidar en ningún momento el aspecto matemático.

En lo relativo a la preparación, Pol i Llompart prepara los trucos a partir de videos en Internet o libros como el de Blasco (2007). Belmonte, al haberse formado como mago, dedica más tiempo a preparar la actividad posterior y no tanto a la presentación. Blasco destaca la necesidad de ensayar y de que el docente disfrute con la actividad, incluyendo la experiencia como factor de éxito.

Dentro de la realización de los trucos, todos destacan la necesidad de la participación activa de los alumnos. Se coincide asimismo en la necesidad de explicar a posteriori el funcionamiento del truco para que entiendan el concepto matemático que hay detrás, quizás no totalmente sino dando pistas en algún caso (Blasco). Pol i Llompart y Blasco mencionan la importancia de que los alumnos participen en el descubrimiento de la solución. Belmonte suele dividir a los alumnos en grupos para descubrir el truco y practicar posteriormente su realización. También destaca que el hecho de ser capaces de entender y reproducir las instrucciones para realizar ellos el truco ya de por sí tiene valor matemático, independientemente del nivel de entendimiento que se consiga del principio matemático que quiere enseñarse. Blasco destaca adicionalmente la utilidad de la Matemagia en el desarrollo de competencias, por ejemplo de las capacidades comunicativas de los alumnos y como puede utilizarse la Matemagia con otras metodologías como *Flipped Classroom* donde los propios estudiantes preparan la actividad y presentan los juegos relacionándolos con los conceptos matemáticos.

Respecto a la evaluación de las actividades, Belmonte utiliza normalmente fichas de autoevaluación y coevaluación dentro del trabajo en los grupos, además de valorar personalmente el trabajo individual de cada alumno con la práctica posterior al truco. Pol i Llompart por su parte evalúa mediante la observación del trabajo del alumno.

Al hablar del tratamiento de la inclusividad en las actividades, Pol i Llompart comenta la similitud con otras metodologías, es decir planteando diferentes

formatos, niveles y formas de participar y Belmonte se reafirma en la necesidad que las actividades tengan mucho recorrido de forma que cada alumno profundice de acuerdo con su nivel y capacidad, especificando además que en la realización de las actividades él apuesta porque los grupos sean heterogéneos, para que los alumnos colaboren y se ayuden entre ellos. Blasco comenta su experiencia particular con alumnos de altas capacidades y como la Matemagia suele funcionar muy bien con ellos.

Todos coinciden en que actualmente las actividades matemágicas se utilizan muy poco en el aula, aunque la situación va mejorando en los últimos años. Al ser preguntados por medidas que fomenten su uso Pol i Llompart destaca que hace falta un trabajo sistemático con los docentes. Belmonte afirma ver un mejor futuro para la Matemagia, dentro de la explosión general de interés por la magia que viene habiendo en los últimos años, con programas de TV específicos. Blasco destaca la necesidad de divulgar tanto la existencia de la Matemagia como metodología, como los medios existentes para fomentar el conocimiento de los docentes. Todos señalan que el número de actividades divulgativas va en aumento año tras año así como el número de Trabajos Fin de Grado y Fin de Máster sobre el tema.

Como iniciativas divulgativas que se estén llevando actualmente, además de los encuentros formativos con docentes, congresos o sesiones online, se comentan las actividades realizadas por asociaciones como el CentMat o el MMACA.

A nivel personal Pol i Llompart destaca sus espectáculos a multitud de alumnos y Belmonte su blog, activo ya durante 5 años, y con una muy buena aceptación, destacando por comentarios recibidos su utilidad al realizar una tarea previa de filtraje y selección de actividades, que facilita la elaboración posterior de las actividades por los docentes. Por su parte, Blasco participa activamente en multitud de actividades, entre otras: conferencias, programas de altas capacidades, encuentros de "*Magia, Ciencia y Educación",* campus y congresos, tanto nacionales como internacionales.

Como consejo a los docentes que quieran comenzar a practicarla, Pol i Llompart recuerda que el teatro es una parte importante de la Matemagia y recomienda despojarse de la vergüenza. Belmonte coincide y añade que como cualquier otra actividad, previamente hay que sentirse cómodo con su realización al igual que con cualquier otro recurso que quiera emplearse en el aula. No todo el mundo se encontrará a gusto con ella así que no hay que forzar su uso. Blasco sumariza perfectamente recomendando "*que ensayen, se ilusionen y disfruten. La magia y las matemáticas hay que disfrutarlas e intentar que otros disfruten con ellas*".

Como resumen de este apartado, puede decirse que los tres entrevistados coinciden en señalar la Matemagia como un recurso educativo lúdico, cuya utilización en las aulas va en aumento, que fomenta la curiosidad y motivación del alumno, debiendo ser utilizado siempre de forma puntual. Las actividades matemágicas deben diseñarse dándole la mayor importancia a la parte posterior al truco, donde los estudiantes trabajan la comprensión de los conceptos utilizados y van incluso más allá, diseñando variaciones, siempre teniendo cuidado en que los alumnos sólo perciban la parte lúdica de la actividad.

Encuesta a docentes sobre el uso de los juegos y la Matemagia en las aulas

Como complemento a las entrevistas realizadas se ha querido ofrecer en este trabajo el resultado de una encuesta diseñada para docentes en la que se indaga sobre la utilización que hacen de los juegos y la Matemagia en sus clases a fin de obtener una visión cercana del tema. La encuesta se diseñó utilizando la herramienta Google Forms y consta de 17 preguntas, 3 de ellas de respuesta opcional, pudiendo consultarse en el Anexo II. La encuesta se divide en 3 bloques: el primero que aborda la situación y los centros donde ejercen los docentes, el segundo que trata sobre la utilización de los juegos en el aula y el tercero, idéntico al segundo, relativo a la matemagia.

La encuesta se lanzó durante el mes de mayo de 2020 de forma abierta a través de todos los profesores de Instituto que han colaborado en el Máster de Formación del Profesorado en cuyo marco se incluye este trabajo, y a través de un grupo de Whatssap de profesores de Matemáticas de Baleares, en ambos casos con la petición de extenderla lo más posible entre profesores de otras comunidades. El resultado obtenido ha sido 60 respuestas de 12 comunidades autónomas diferentes que permiten aportar una mayor variedad a la encuesta de la que se hubiera obtenido al centrarla en una única comunidad, aunque el objetivo de la encuesta, dada su difusión limitada, nunca ha sido realizar una encuesta representativa sino tener una visión del tema.

En el ámbito de la participación puede verse que el 73% de los docentes enseñan en un centro público, un 25% en uno concertado y solamente 1 participante en un centro privado. Los docentes pertenecen a 35 centros diferentes aunque 23 de los 60 participantes han optado por no decir dónde ejercen.

De las 12 comunidades, solamente 5 de ellas superan el 5% de representatividad acerca del origen de los docentes. Son, por orden: Illes Balears con un 41,7%, Catalunya con un 18,3%, Madrid con un 11,7%, Andalucía con un 6,7% y la Comunidad Valenciana con un 5%. Por municipios, aunque 17 participantes han optado por no contestar, Palma de Mallorca destaca con 16 respuestas, a mucha distancia del segundo (L'Hospitalet con 3).

Si analizamos los cursos donde los docentes ejercen podemos ver en la figura adjunta que la muestra está muy repartida, siendo mayoría 4º de ESO, 1º de ESO y Educación Primaria. Aquí debe tenerse en cuenta que los profesores pueden enseñar en varios niveles, 2 de media ya que el número de respuestas totales es de 121 por 60 participantes.

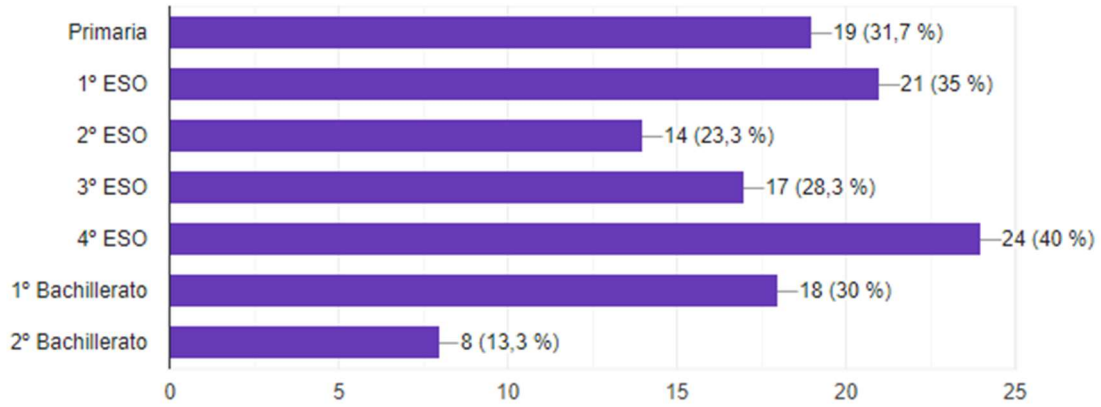


Figura 3. Cursos donde dan clase los docentes

Al preguntar por la utilización de los juegos como recurso en la clase de matemáticas puede verse que se utilizan de forma ocasional por el 40% de docentes, a menudo o muy a menudo por el 35%, con un 25% de docentes que la utilizan casi nunca o nunca, existiendo en este aspecto margen de mejora.

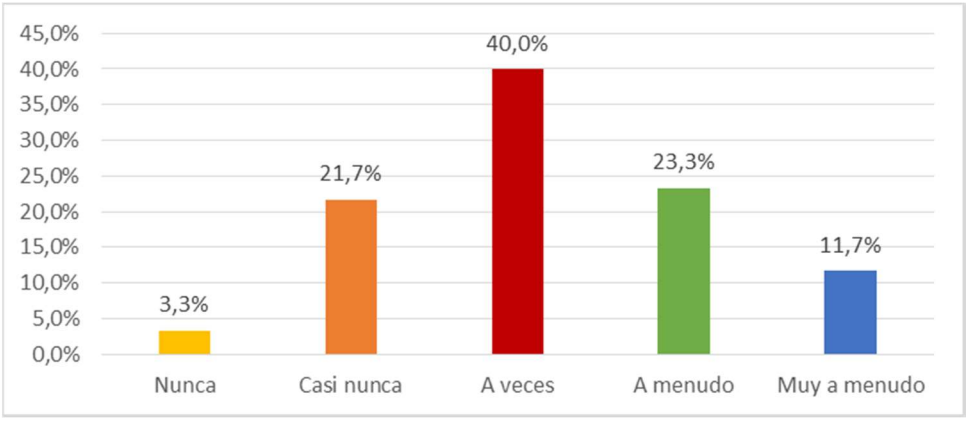


Figura 4. Utilización de juegos en clase de Matemáticas

Si analizamos la utilización por cursos, vemos que en Educación Primaria es donde los juegos se utilizan más, con un 79% de docentes que la utilizan a menudo o muy a menudo, mientras que en el resto de cursos la distribución de su uso es bastante regular, manteniéndose alrededor del 60% los docentes que la utilizan a veces, a menudo o muy a menudo.

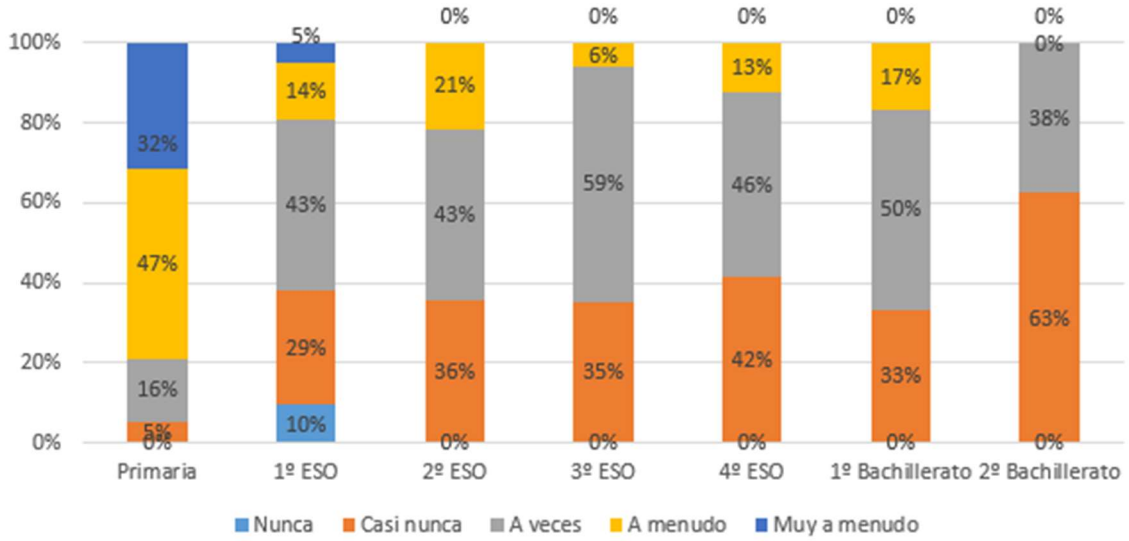


Figura 5. Grado de utilización de los juegos

La excepción es 2º de Bachillerato donde un 63% de docentes manifiesta que casi nunca la usa. Una explicación posible a esta caída es que se trata de un curso con un temario muy extenso y centrado en las Pruebas de Acceso a la Universidad, lo que hace que los profesores dispongan de poco tiempo para trabajar los diferentes temas en el aula, y por lo tanto prescinden de recursos que exigen más tiempo.

Preguntados por el tipo de juegos que utilizan en clase, sólo el 8,3% de los docentes manifiesta utilizar en exclusiva juegos individuales, por un 36,7% que utiliza juegos cooperativos y un 55% que utiliza ambos tipos.

Analizando el tipo de juegos que utilizan los docentes vemos que su uso está muy repartido, destacando la utilización de juegos de lógica y con materiales manipulativos, siendo los juegos online y de estrategia los que menos se utilizan, aunque realmente no puede decirse que haya una excesiva diferencia en cuanto a su utilización.

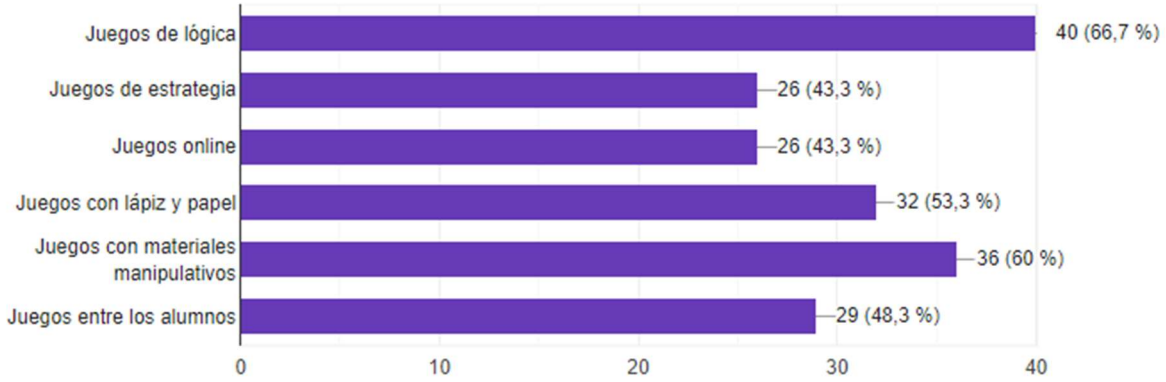


Figura 6. Clases de juegos utilizados

Por bloques temáticos, el 76,7% de los docentes utiliza los juegos en el Bloque de Números del Currículum, siendo seguido por los bloques de Geometría (53,3%) y Álgebra (45%). Sorprende de alguna manera la baja utilización en el bloque de Probabilidad, cuando materiales sencillos como las barajas de cartas o monedas se prestan mucho a ello.

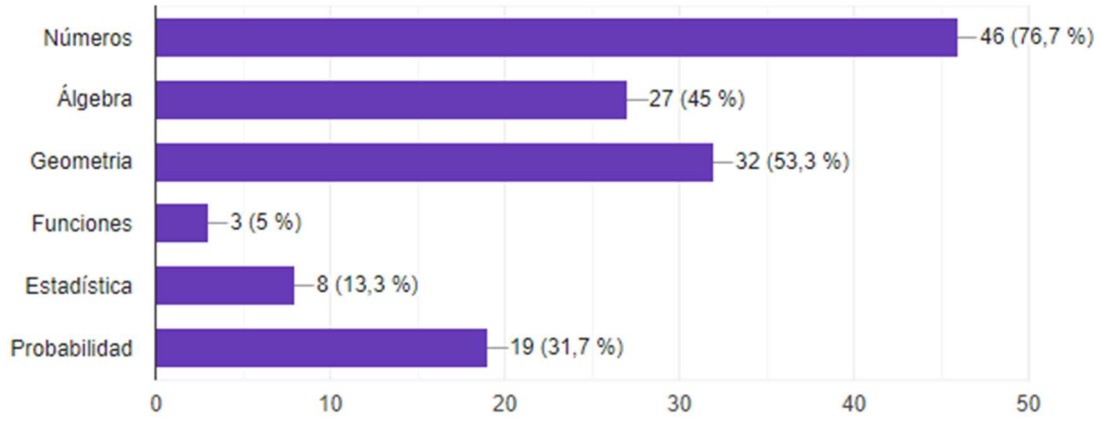


Figura 7. Bloques donde se emplean los juegos

Abordando el tercer bloque de la encuesta, relativo a la Matemagia, el 65% de los participantes conoce el significado del término, un 15% no está seguro y el restante 20% asegura desconocerlo.

Una vez aclarado el significado del término, un 63,3% confiesa no utilizarla nunca o casi nunca en clase y solamente un 26,7% la utiliza a veces o a menudo. Como puede observarse, los porcentajes de utilización son mucho menores que en el caso de los juegos.

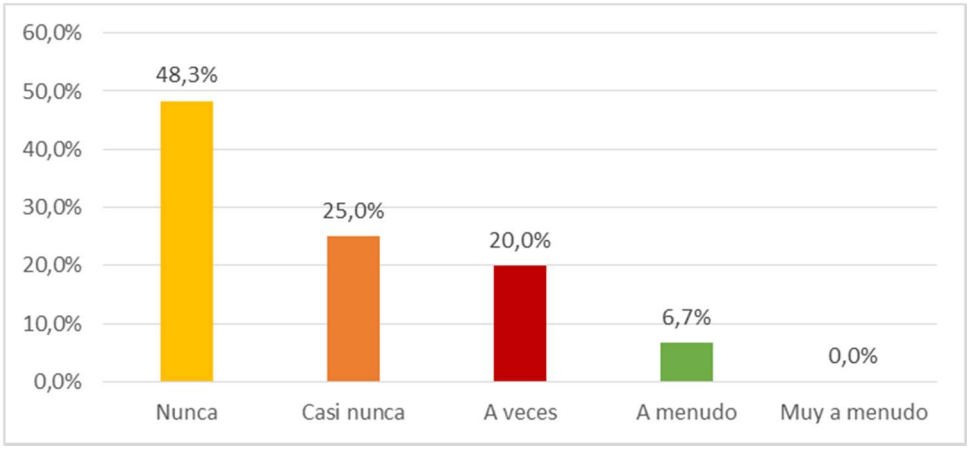


Figura 8. Utilización de la Matemagia

Analizando la distribución por cursos, se observa que el mayor uso es en 1º de Bachillerato, donde un 45% de los participantes afirma utilizarla a veces o a menudo, mientras en el resto el porcentaje se sitúa entre el 20% y el 30%, excepto en 2º de ESO y en 2º de Bachillerato donde es únicamente del 14% y del 13% respectivamente.

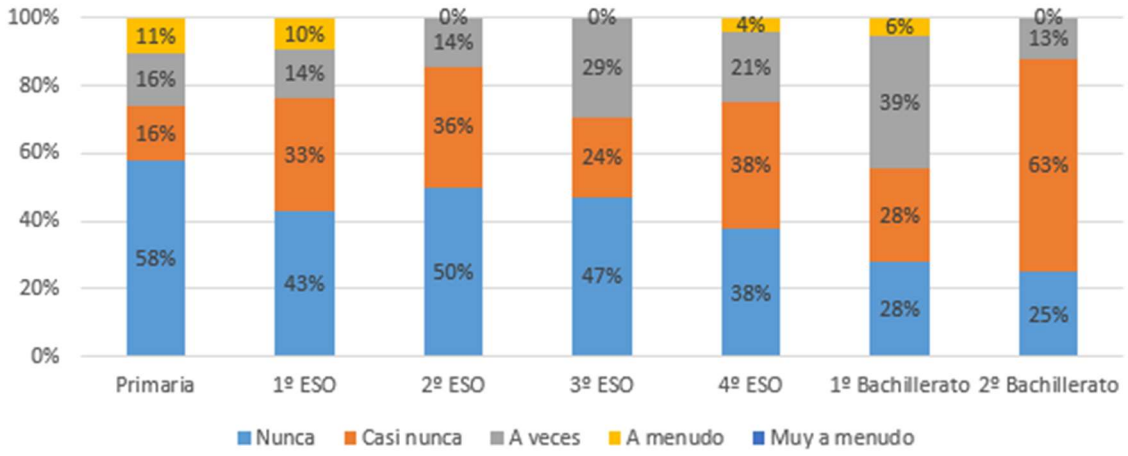


Figura 9. Grado de utilización por curso

Cuando se les pregunta a los participantes del estudio en qué Bloques utilizan la matemagia, vemos que mayoritariamente la utilizan con Números (36,7%) y Álgebra (38,3%). De nuevo sorprende, al igual que en los juegos, el poco uso que se hace de ella para el aprendizaje del bloque de Probabilidad. cuando numerosas actividades existentes permiten su aplicación directa.

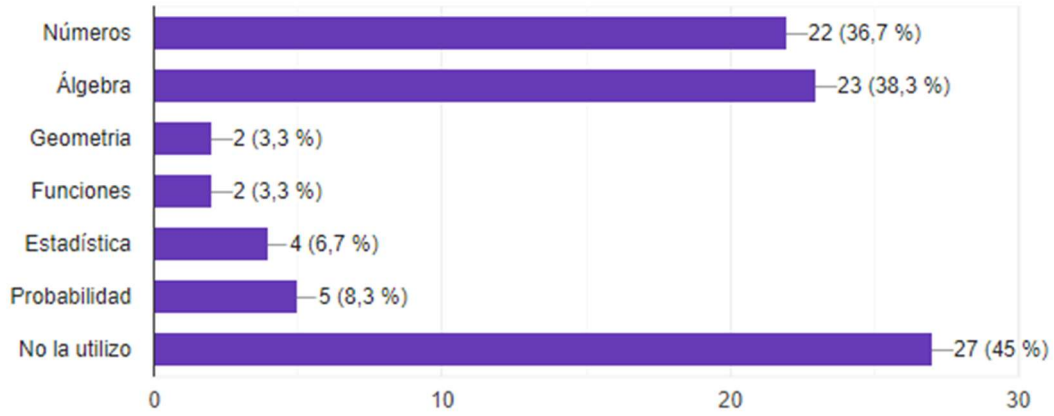


Figura 10. Bloques de utilización de la Matemagia

No obstante la baja utilización que tienen las actividades matemágicas, cuando se les pregunta a los participantes si creen que con su uso se acrecentaría el interés de los alumnos por la asignatura de matemáticas hay una respuesta positiva abrumadora (71,7%), mientras solamente una persona contesta negativamente y un 26,7% no está seguro.

Preguntados en qué cursos ven mayor potencial en su utilización, vemos como hay una clara línea descendente conforme vamos ascendiendo en los niveles educativos, siendo muy bajo el uso que los docentes le ven en los cursos de Bachillerato.

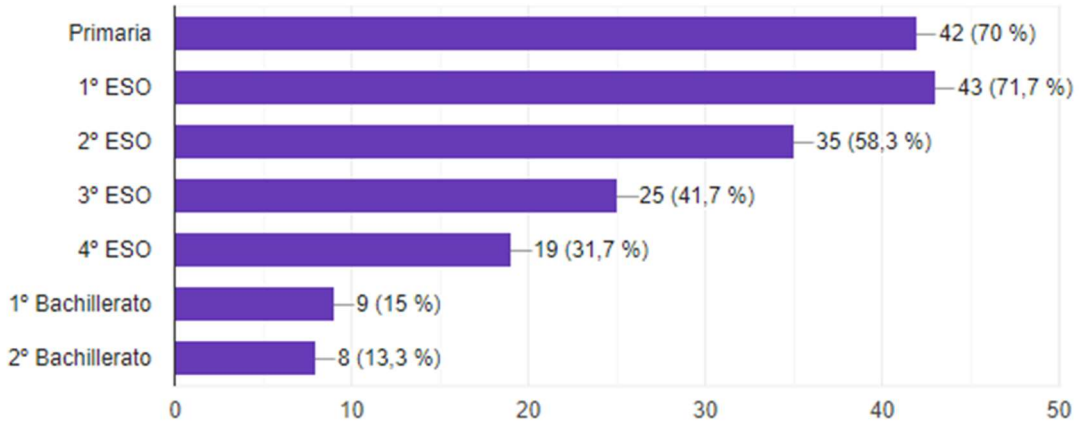


Figura 11. Potencial de uso de la Matemagia por cursos

Las causas para ello pueden ser múltiples: desde el mayor efecto que causa la magia cuanto menor es la edad, pasando por el desconocimiento de actividades

matemágicas utilizables en los niveles educativos avanzados, la mayor densidad del temario en Bachillerato que dificulta la utilización de actividades que demandan una cierta ralentización del ritmo (estas dos últimas causas son apuntadas directamente por los participantes) o bien otras causas.

Las áreas donde los docentes ven mayores posibilidades de utilización coinciden con aquellas en que se utilizan (Números con un alto 78,3% y Álgebra con el 56,7%). Sin embargo aquí sí que se eleva la creencia de que en los bloques de Probabilidad y Estadística puede ser de utilidad.

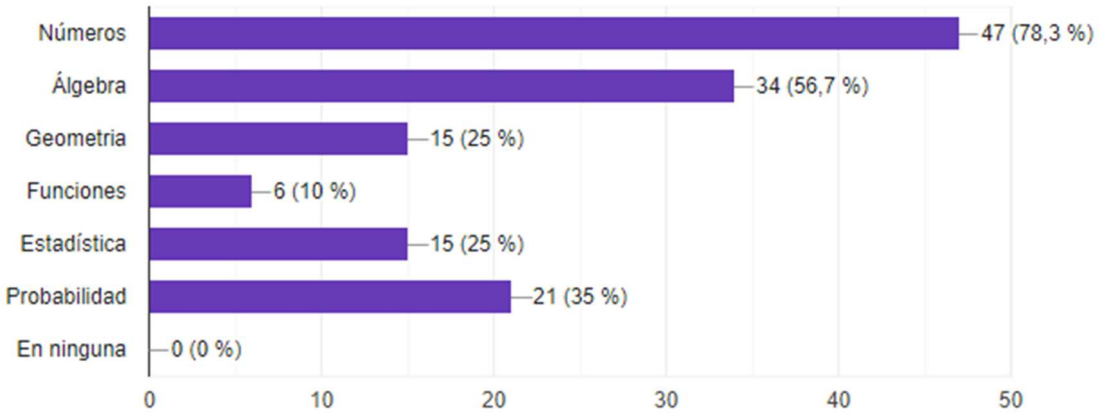


Figura 12. Potencial de uso de la Matemagia por áreas

Preguntados acerca de qué creen los docentes que les hace falta para potenciar la Matemagia en el aula, 30 de los 60 participantes apuntan a la falta de formación sobre el tema y 12 a la falta de tiempo para buscar actividades o para realizarlas en clase y a la falta de recursos (materiales). También existen algunos comentarios que comentan que los elevados ratios de alumnos dificultan su uso.

Las últimas preguntas animaban a realizar comentarios sobre la matemagia y, como se ha visto anteriormente, la mayoría encuentra positiva su utilización con comentarios como estos:

> *"Creo que es un tema apasionante. También uso la magia como 'premio', alumnos muy absentistas con mucha desmotivación para venir al cole y para hacer cualquier cosa, y con ellos, como*

recompensa/motivación utilizo los trucos de magia y les alucina, se motivan muchísimo (3ro de Primaria)"

"Creo que la matemática es un gran disparador de la atención y motivación en los alumnos. Ven un uso real de muchos conceptos matemáticos"

No obstante, han existido dos respuestas que alertan sobre posibles riesgos y que por ello merecen ser expuestas:

"Que fuera efectivo para mejorar el aprendizaje. Cuando lo he puesto en práctica no ha significado que los alumnos mejoren sus resultados en este bloque, ni que entiendan mejor los conceptos, ni que sepan razonar mejor, ni que pierdan el miedo a plantear problemas... A algunos alumnos sí les resulta curioso y divertido, y sólo por eso ya vale la pena hacerlo, pero no es la "panacea".

"Este tipo de técnicas de aprendizaje en mi opinión son efectivas con un alumnado que no está nada motivado con la materia, por ejemplo, Disabes (grupo absentistas). En otros grupos podría llegar a ser contraproducente, como mucho los usaría en 1o ESO a lo sumo"

Como conclusión, podemos decir que mientras los docentes suelen utilizar juegos en clase de Matemáticas, apenas utilizan la Matemagia como herramienta, sobre todo por falta de formación, aunque ven un claro potencial en su uso en las aulas, sobre todo en la Educación Primaria y primeros cursos de la Educación Secundaria, y en los Bloques de Números, Álgebra y Probabilidad.

Encuesta a alumnos sobre la asignatura de matemáticas

Como complemento a la encuesta realizada a los profesores se ha querido ofrecer otra encuesta, dirigida en este caso a alumnos. La encuesta se diseñó utilizando la herramienta Google Forms y consta de 16 preguntas, 3 de ellas de respuesta opcional, pudiendo ser consultada en el Anexo III.

La encuesta se divide en 3 bloques: el primero aborda la localización y los centros donde estudian los alumnos, el segundo pregunta su opinión acerca de la asignatura de matemáticas y el tercero versa sobre la utilización de juegos y actividades matemágicas así como su interés por ellas.

La encuesta se lanzó durante el mes de mayo de 2020 de forma abierta a través de los mismos canales de la encuesta anterior a docentes, con el objetivo de que ellos la enviaran de forma voluntaria a sus alumnos. En total se han obtenido 180 respuestas de 5 comunidades autónomas y 28 colegios diferentes, sin incluir 39 estudiantes que optaron por no poner el centro al que asisten.

Al analizar la distribución de las respuestas se encuentra que el 63,3% corresponde a alumnas y el 36,7% a alumnos. La participación desglosada por comunidades ha sido la siguiente: Catalunya (67%), Illes Balears (19,6%), Madrid (10,1%), Castilla y León (2,8%) y Aragón (0,6%). Aparte de los 39 alumnos que han optado por no comentar el centro en el que estudian, el colegio con mayor participación (situado en L'Hospitalet) ha tenido 64 respuestas y los dos siguientes 12 (Palma) y 11 (Barcelona) respectivamente, estando el resto de respuestas muy atomizadas.

Las respuestas han pertenecido mayoritariamente a la ESO (83,4%, destacando 1º ESO con un 34,4%), con un 8,3% correspondiente a Educación Primaria y el mismo porcentaje a Bachillerato (7,2% a 1º y 1,1% a 2º de Bachillerato).

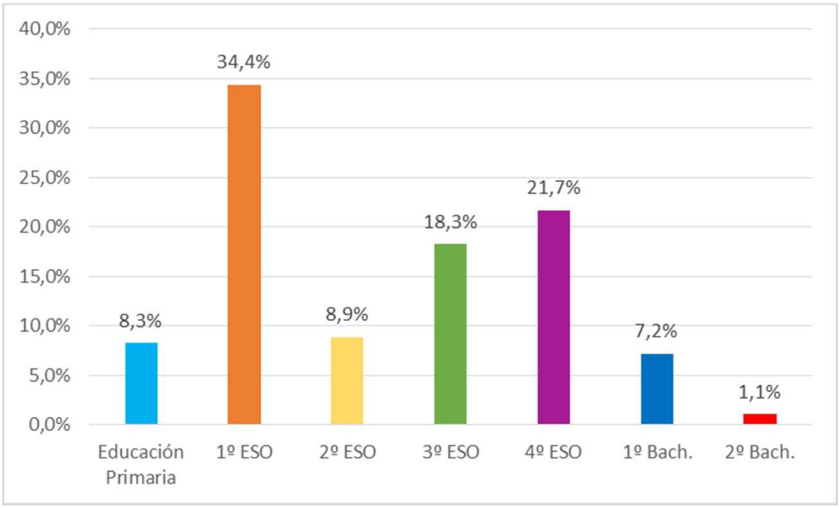


Figura 13. Curso actual de los alumnos

Preguntados por su nota de Matemáticas en la última evaluación, el 60,6% manifiesta haber obtenido un Notable o Excelente, con sólo un 9,4% de suspensos.

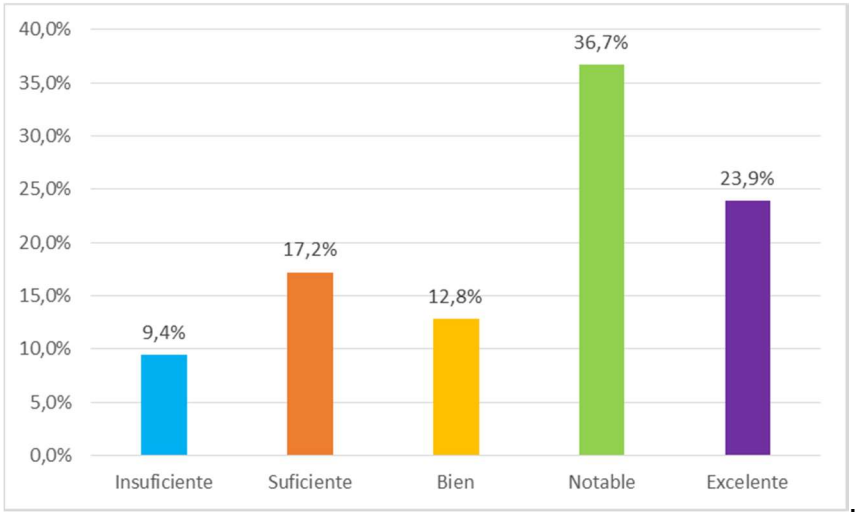


Figura 14. Nota de Matemáticas de la última Evaluación

Debe compararse este resultado con los resultados de pruebas externas comentados en la introducción de este trabajo, donde en las pruebas PISA (OCDE, 2019) el 49,2% de los alumnos estaba en los 2 niveles más bajos de competencia matemática (niveles 1 y 2) y sólo el 7,3% en los dos niveles más altos (niveles 5 y 6). Lo mismo sucede con las pruebas IAQSE (IAQSE, 2017) donde un 25% de alumnos obtiene resultados en los dos niveles inferiores y un

16% en los dos superiores (niveles 5 y 6). De estos hechos puede deducirse que los alumnos con mayor rendimiento en matemáticas han respondido en mayor medida a esta encuesta, por encima del porcentaje global que suponen, mientras que ha sucedido lo contrario en alumnos con menor rendimiento. Por tanto, habrá un cierto sesgo en las respuestas que deberá tenerse en consideración.

Cuando se les pide a los alumnos que puntúen en una escala de 1 a 10 su interés por la asignatura de matemáticas, la media resultante de las 180 respuestas es un 6,64, con la distribución que puede apreciarse en la siguiente figura. En este punto debe considerarse de nuevo el posible sesgo, ya comentado anteriormente, de sobreparticipación de alumnos con buenas notas en la asignatura, lo que puede haber elevado el resultado de esta pregunta.

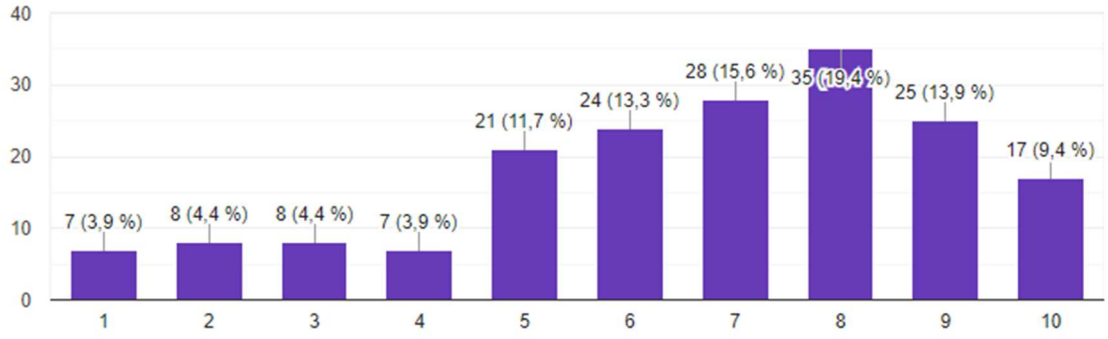


Figura 15. Interés por la asignatura

Si analizamos el interés por la asignatura de forma desglosada por cursos, vemos que en Educación Primaria y ESO en general el interés es bastante similar, incrementándose en los dos cursos de Bachillerato.

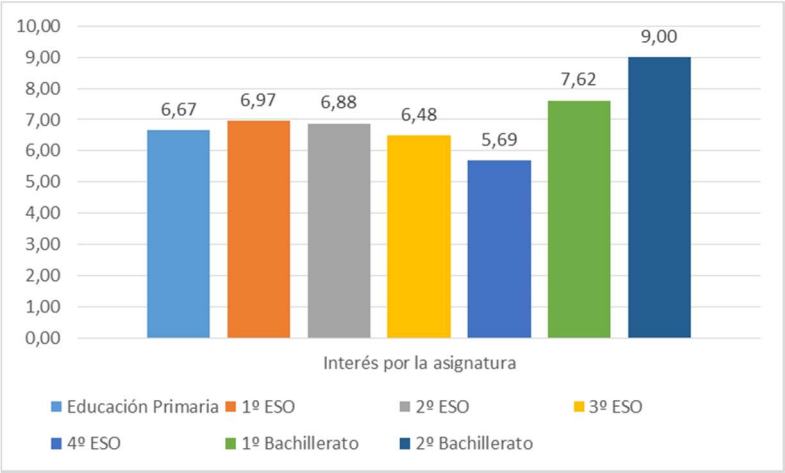


Figura 16. Interés por la asignatura por curso

Preguntados si su interés por la asignatura ha variado respecto al año pasado, el 54,4% responde que es el mismo mientras que el 25,6% responde que tiene mayor interés y el 20% que su interés es menor.

Interrogados acerca de la dificultad con la que perciben la asignatura, el 52,2% no la consideran ni fácil ni difícil, mientras un 37,8% la consideran una asignatura difícil o muy difícil y solamente un 10% la considera fácil o muy fácil.

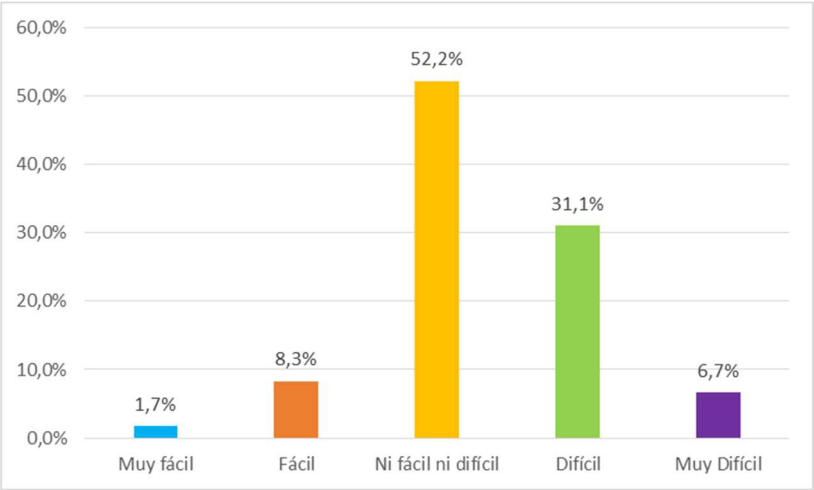


Figura 17. Nivel de dificultad de la asignatura para los alumnos

Cuando se les inquiere a los alumnos acerca de cuan a menudo se utilizan juegos en clase de matemáticas, el 60,6% responde que pocas veces o nunca,

el 30,6% que a veces y solamente un 8,9% responde que a menudo o muy a menudo.

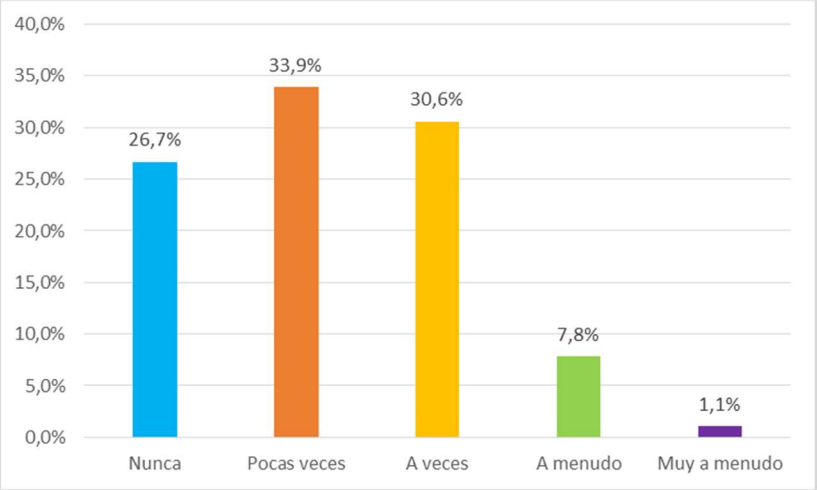


Figura 18. Grado de utilización de los juegos en clase de Matemáticas

Estos porcentajes son muy inferiores a los de la encuesta anterior a los docentes que eran los siguientes: 25% afirmaban utilizarlos casi nunca o nunca, de forma ocasional el 40% y a menudo o muy a menudo el 35%. Dado que el ámbito de la encuesta coincide sólo parcialmente es comprensible cierta discrepancia aunque la diferencia es significativa.

Cuestionados los estudiantes sobre su grado de interés en una escala de 1 a 10 por el mayor empleo de juegos en clase de matemáticas, la respuesta es abrumadora siendo la media de 7,69, más de un punto que el interés medio por la asignatura.

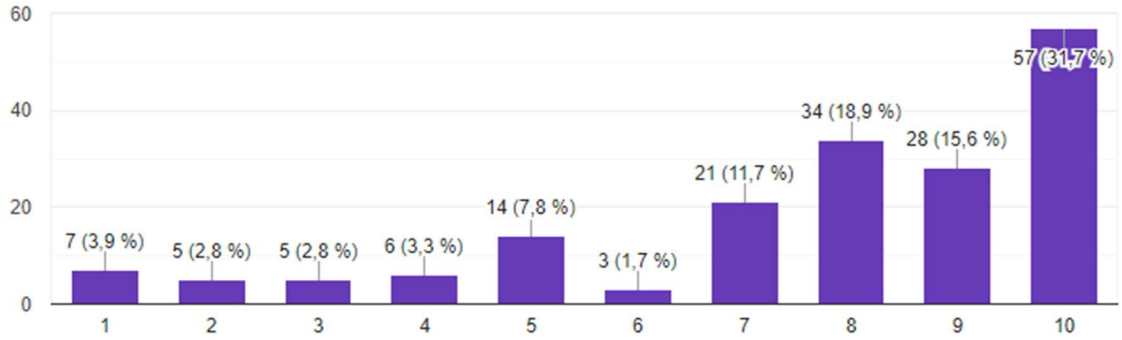


Figura 19. Interés por la utilización de juegos en clase

Si se analiza el interés por curso, puede verse como los más interesados son los alumnos de Educación Primaria, seguidos por 1ª ESO y 1º de Bachillerato, y los menos interesados con mucha diferencia sobre el resto los de 2º de Bachillerato, quizás por la proximidad de la Prueba de Acceso a la Universidad.

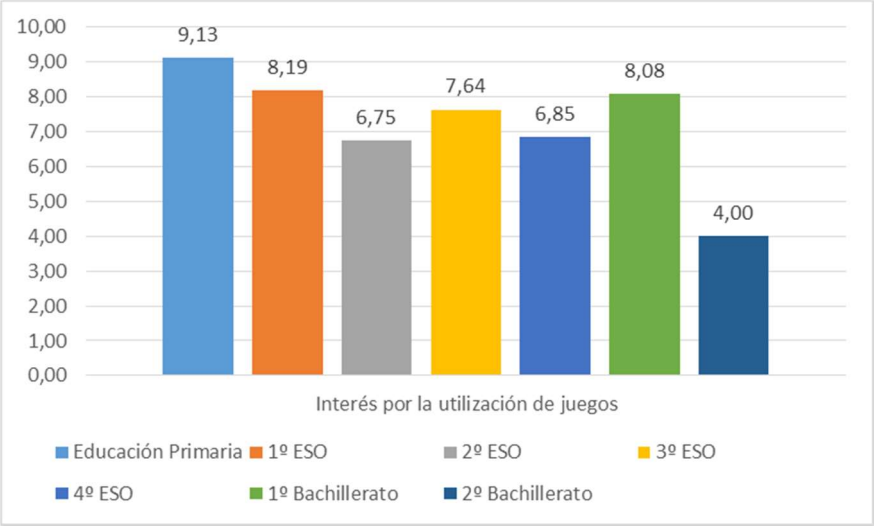


Figura 20. Interés por la utilización de juegos en clase por curso

Cuestionados sobre su conocimiento del término Matemagia, sólo un 7,8% afirma saber su significado mientras un 66,7% lo desconoce y el resto no está seguro. Si se les pregunta a los alumnos acerca de si sus profesores de matemáticas han utilizado trucos de magia en clase, un abrumador 90% responde que nunca y un 8,3% que pocas veces, por sólo un 1,7% que afirma un uso ocasional. Comparando de nuevo con el 63,3% de docentes que confiesa no utilizarla nunca o casi nunca en clase y el 26,7% que afirma utilizarla a veces o a menudo, puede verse que aquí también existe una gran discrepancia como sucedía con los juegos.

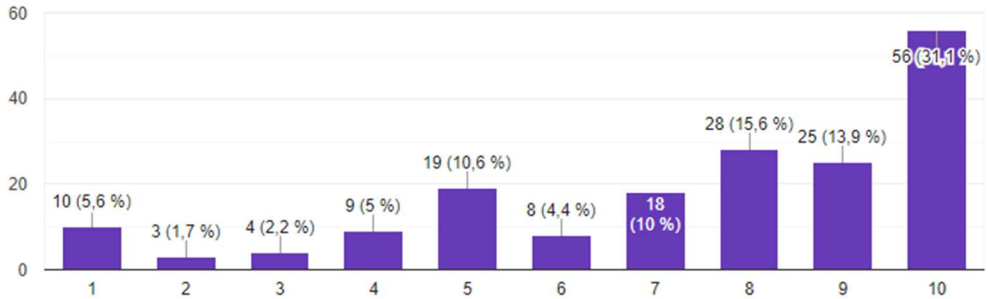


Figura 21. Interés por la Matemagia

Como en el caso de los juegos, se les ha preguntado a los participantes sobre su grado de interés por una mayor utilización de trucos de magia en clase, resultando un interés ligeramente inferior (7,46 de media por 7,69 en los juegos). Analizando el grado de interés según la nota de la asignatura vemos que los alumnos que muestran más interés por su uso son los que tienen una nota de insuficiente, seguidos por los de excelente y a distancia por el resto.

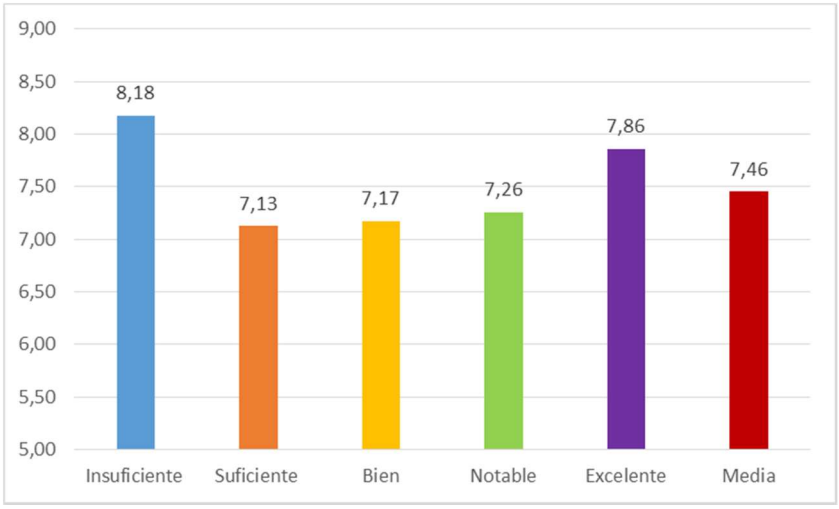


Figura 22. Interés por la Magia según nota

En ambos casos, recordando que hay una participación de alumnos con notas altas por encima de la media, debería realizarse un estudio con más participación para ver con más detalle qué sucede con los alumnos de notas más bajas.

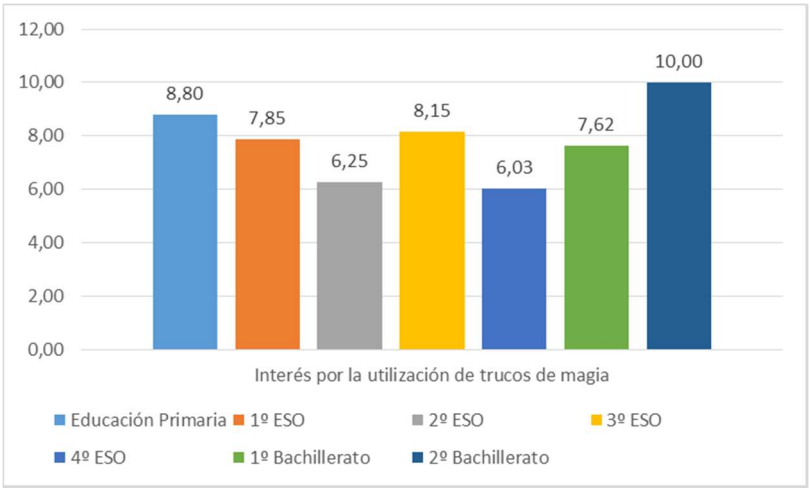


Figura 23. Interés por la Magia por curso

Si se analiza el interés por curso, puede verse como los más interesados son los alumnos de 2º de Bachillerato con un 10 de media aunque el hecho de que sólo haya habido 2 respuestas de este curso puede desvirtuar la media. Puede verse también que tanto en Educación Primaria como en 3º de ESO el interés medio supera el 8 mientras que en 2º y 4º de ESO está ligeramente por encima de 6.

Preguntados acerca de si la asignatura de Matemáticas sería más fácil de comprender si se utilizaran más juegos y trucos de magia en el aula, un 65% de alumnos responde positivamente, por sólo un 6,1% que lo hace negativamente y un 28,9% que afirma no estar seguro.

Para concluir, se preguntaba cómo sería su interés por la asignatura con una mayor utilización de juegos y trucos de magia, y de nuevo mayoritariamente se muestran de acuerdo con un 68,9% de respuestas afirmativas, un 10,6% de negativas y un 20,6% que no se pronuncia en ninguno de los dos sentidos.

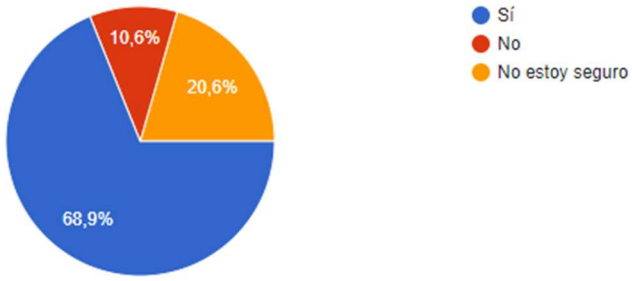


Figura 24. ¿Mayor interés por la asignatura si se utilizaran juegos y trucos de magia?

Resumiendo los resultados obtenidos en la encuesta, puede verse que para los alumnos tanto la Matemagia como los juegos son escasamente utilizados en clase de Matemáticas y que estarían muy interesados en su empleo, manifestando además que su uso incrementaría su interés por la asignatura.

A continuación se va a comentar con detalle cómo deben plantearse y realizarse las actividades de Matemagia dentro del aula, no sólo la realización del truco de magia sino la actividad en su conjunto, de forma previa a presentar algunas actividades matemágicas concretas.

Actividades matemágicas

Aunque también es posible realizar los trucos matemágicos como distracción para captar la atención o recompensa ante el buen comportamiento del alumnado, el mayor provecho se obtiene utilizándolos para desarrollar el aprendizaje en el marco del currículum, definido en el Decreto 34/2015 de 15 de Mayo, en el que se fija el currículum de la Educación Secundaria obligatoria en Baleares y las competencias definidas en el marco educativo de la Ley Orgánica 8/2013 de 9 de diciembre para la mejora de la calidad educativa (LOMCE).

En la Matemagia, los trucos están basados mayormente en conceptos matemáticos sencillos, aptos para su empleo en los últimos cursos de Educación Primaria, en ESO y Bachillerato. Se relacionan con el Cálculo, la Geometría, el Álgebra y la Probabilidad mayoritariamente, todas ellas áreas dentro del marco curricular por lo que no suele haber problema en utilizarlos de forma que los alumnos comprendan después el concepto subyacente.

Si se piensa en la preparación de los trucos hay una serie de consejos que resultan fundamentales:

- Emplear materiales con los que los alumnos se encuentren familiarizados y que tengan a su alcance para poder experimentar con ellos. Así se consigue una mayor ilusión por parte de los alumnos (Ruíz, 2015).
- Realizar juegos con ideas sencillas que puedan reconocer sin dificultades, adaptándolos a la dinámica normal del aula y al nivel de la clase e incluyendo, si es posible, variaciones del truco que permitan su entendimiento y posterior repetición por parte de todos los alumnos fomentando la diversidad e inclusión.
- Realizar el truco únicamente cuando se domine su realización, mostrando naturalidad y confianza en la ejecución e intentando crear una atmosfera de magia y misterio.

- Requerir siempre que sea posible la colaboración de algún alumno en la realización de los trucos para fomentar sus habilidades sociales y su inclusión dentro del grupo.
- Las actividades no deben ser muy habituales. Hay que espaciarlas para que no se pierda el interés por ellas y así su efecto sea mayor.

Como afirma Muñoz (2004):

> *"La puesta en escena es fundamental, es conveniente crear el ambiente mágico adecuado para atraer la atención y motivar al alumno, pero no debemos quedarnos ahí. Debemos posteriormente hacer que el alumno estudie porqué resulta siempre el truco que proponemos, e investigue otras formas de presentar esos mismos trucos".*

Existe una cierta controversia entre los expertos acerca de si es bueno explicar los trucos a posteriori para enlazar con los conceptos que quieren introducirse, como opina la mayoría de matemagos (entre ellos los tres entrevistados para este trabajo), o no hacerlo, para que de esta manera no se rompa el efecto mágico y así el alumno no pierda la fascinación por la magia reduciéndola a meras matemáticas (Fernández y Lahiguera, 2014). Parece recomendable la primera opción, aunque en algunos casos se opte por la segunda como motivación para que los alumnos indaguen por sí mismos fuera del aula o en el caso de que la actividad sólo sea realizada como distracción o recompensa.

Después de la actividad siempre debe realizarse un trabajo adicional por parte de los alumnos, normalmente la comprensión del truco y del concepto matemático que hay detrás. Además, se recomienda que los alumnos practiquen la repetición del truco ante sus compañeros para contribuir a la fijación del concepto que se quiere transmitir.

La evaluación de las actividades matemágicas puede realizarse de varias maneras, dependiendo de cómo se presente la actividad y cuál sea el trabajo posterior a ella, aunque se recomienda que además del uso de rúbricas por parte del docente se fomente la utilización de fichas de coevaluación y autoevaluación;

de esta forma será los propios alumnos los que se evalúen, con las ventajas ya comentadas anteriormente que eso conlleva.

Como parte este trabajo se han incluido nueve actividades matemágicas para realizar en el aula, descritas con detalle en el Anexo I. Algunas de ellas provienen de artículos y libros clásicos sobre el tema y otras son de realización propia. La elección pretende tener variedad acerca del concepto matemático tratado, así como del tipo de actividad y los materiales utilizados. En cada una se indica el bloque en el que puede usarse, además de los materiales necesarios. También se comentan los principios matemáticos en los que se basan de forma que puedan explicarse en el aula. En algunos trucos se proponen alternativas de realización, aunque por supuesto cada uno debe adaptarse a la mecánica de cada clase y a las facultades y carácter del docente que las lleve a cabo.

A continuación se expone un breve resumen de cada una de las nueve actividades:

- *La Tabla Mágica (Tabla Binaria):* utilizando una tabla numérica de 16 filas y 5 columnas con números del 1 al 31 como herramienta para adivinar días del mes se trabajan conceptos de sistemas de numeración diferentes a base 10 y sucesiones de potencias.
- *Misterios del 9*: actividad que a partir de operaciones numéricas que explotan propiedades del número 9 permite explorar conceptos numéricos y algebraicos.
- *Matemáticas del Caribe*: empleando un mapa previamente preparado y tarjetas dibujadas se comprueba con esta actividad, eminentemente visual, una propiedad de los vectores, en concreto la propiedad conmutativa de su suma.
- *Adivinación de números*: actividad basada en la adivinación simultánea de dos números mediante el resultado final de operaciones numéricas, que permite profundizar en el cálculo numérico y ecuaciones.
- *El cuadrado perdido*: paradoja que mediante la manipulación de figuras geométricas permite construir triángulos teóricamente iguales pero que en

la práctica presentan una diferencia en cuanto a su área. Trabaja conceptos geométricos y trigonométricos.

- *El primer trile*: actividad que permite trabajar conceptos de combinatoria, probabilidad y grafos utilizando una baraja de cartas.
- *Monedas*: actividad de adivinación que profundiza en el concepto de la paridad y los estados binarios utilizando monedas.
- *Cuadrados mágicos. La Paradoja de Stovel*: utilizando una cuadrícula 4x4 en un calendario y a través de la adivinación esta actividad puede utilizarse para hablar de matrices, combinatoria o cálculos algebraicos.
- *Dados. Adivinar la suma*: las tiradas de dados son perfectas para hablar de probabilidades pero las propiedades de las caras de un dado pueden utilizarse también como en este caso para trabajar el cálculo mental.

Con estas actividades se intentan cubrir los principales puntos del currículum que pueden ser trabajados más fácilmente con actividades matemáticas (Álgebra, Números, Geometría, Probabilidad, etc) aunque existen numerosas actividades que permiten trabajar otros contenidos.

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha realizado un estudio acerca de cómo mejorar el aprendizaje de las matemáticas en las aulas a través de la utilización de actividades basadas en juegos y más específicamente en trucos de magia. El estudio se ha basado en un análisis bibliográfico analizando la opinión de expertos en la materia, pero también ha perseguido estudiar la situación actual a través del contacto con especialistas en el tema, así como con docentes y alumnos, mediante la realización de entrevistas y encuestas.

Al inicio del trabajo se han examinado las características del pensamiento formal en los adolescentes y cómo éste forma la base sobre la que se produce el aprendizaje matemático. Asimismo, se han analizado las principales teorías sobre el aprendizaje y la forma en que cada una de ellas son visibles y pueden

aplicarse en diferentes momentos en el aula, prevaleciendo la visión constructivista donde el docente facilita al estudiante la adquisición del conocimiento.

A partir de los datos objetivos existentes sobre el mal desempeño de los estudiantes en los estudios evaluadores del nivel de Matemáticas y de la propia opinión de los alumnos en la encuesta realizada sobre su interés por ella, se han revisado algunas de las causas que dificultan el aprendizaje de la asignatura, señalando la falta de motivación y de actitud de los alumnos, así como la forma de enseñar de los docentes, como algunas de las principales razones.

Una de las posibilidades que permite mejorar el interés y la motivación de los estudiantes, a la que vez que el docente emplea metodologías más innovadoras, es utilizar actividades lúdicas en el aula. En este sentido la utilización de juegos y trucos de magia son recursos que facilitan esta mejora.

El empleo de juegos y actividades matemágicas en el aula debe ser mesurado, presentando algunos riesgos si no se plantea correctamente, ya que los alumnos pueden centrarse en el lado lúdico dejando de lado la parte del aprendizaje.

Sin embargo, los riesgos son menores que las ventajas que presenta su uso, ya que refuerzan la motivación de los alumnos, fomentan su creatividad, sus habilidades sociales y el desarrollo del pensamiento formal en ellos, así como su participación en clase. Asimismo, las actividades matemágicas facilitan la inclusión de los alumnos dentro del aula, adaptándose fácilmente al nivel de diversidad existente en ellas. En paralelo, los docentes adquieren metodologías nuevas que permiten fortalecer la relación profesor-alumno

La Matemagia es apta para todos los niveles de la Educación Secundaria y en todos los bloques del currículum, aunque las actividades se centran mayormente en Álgebra, Números, Geometría y Probabilidad. En este sentido, en el estudio se han presentado diversas actividades que mediante la utilización de diversos materiales abarcan estos bloques, constituyendo ejemplos concretos listos para su utilización en el aula.

Debe tenerse en cuenta no obstante que la realización de juegos de magia matemática no es algo que un docente deba plantearse de un día para otro ya que, al igual que sucede con otras metodologías, es necesario que el profesor se sienta cómodo con ellas para que su realización tenga un efecto positivo.

Es importante recalcar que en las actividades lo primordial no es el truco en sí mismo, sino la actividad posterior que debe permitir a los estudiantes comprender el truco y las matemáticas subyacentes, siendo la base para profundizar en el tema que se desea comentar.

En lo referente a la evaluación de las actividades, se recomienda introducir en ellas tanto la autoevaluación como la coevaluación, permitiendo así fomentar la confianza y el pensamiento crítico en los estudiantes.

Sin embargo, todos estos beneficios de la Matemagia en las aulas chocan con la realidad, señalada por expertos y encuestas, que coinciden en apuntar su escasa utilización en las aulas. Esto contrasta con el hecho de que la gran mayoría de alumnos encuestados (así como los docentes) manifiestan que con el empleo de más juegos y actividades matemágicas tendrían una mayor comprensión de la asignatura y se incrementaría su interés por ella.

Estos mismos docentes proponen como principal causa de su no utilización la escasa información que tienen sobre la Matemagia y sus actividades, por lo que se impone reforzar la divulgación que ya se viene efectuando en talleres y actividades dirigidas a docentes, facilitando así el uso de esta metodología.

Como conclusión de este estudio, puede destacarse que todos los factores analizados, así como la opinión de las personas que han participado en él, apuntan en la misma dirección: el empleo de juegos y actividades matemágicas como metodología en la Educación Secundaria es un elemento aún no demasiado utilizado aunque presenta múltiples ventajas, permitiendo mejorar la motivación de los alumnos y facilitando de esta forma el aprendizaje de las matemáticas.

REFERENCIAS

[1] Aguilar, M. & Navarro, J.I. & López, J. M. & Alcalde, C. (2002). Pensamiento formal y resolución de problemas matemáticos. Psicothema, 14 (Alegría 2), 382-386. ISSN: 0214-9915. [Fecha de Consulta 3 de Mayo de 2020]. Recuperado de: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=727/72714230

[2] Alsina, A. & Planas, N. (2008). Matemática Inclusiva. Propuesta para una educación matemática accesible. Madrid: Narcea, S.A.

[3] Aparicio, G. (2012). La motivación en el aula de matemáticas a través del uso de las TIC (Trabajo Fin de Máster). Universidad de Almería. Almería. [Fecha de Consulta 10 de Mayo de 2020]. Recuperado de: http://repositorio.ual.es/bitstream/handle/10835/1990/874.pdf?sequence=1&isAllowed=y

[4] Blasco, F. (2007). Matemagia: los mejores trucos para entender los números. Madrid: Temas de hoy.

[5] Cano, A. (2007). Cognición en el adolescente según Piaget y Vygotski: ¿Dos caras de la misma moneda?. Bol. Acad. Paul. Psicol., 27(2),148-166. ISSN 1415-711X. [Fecha de Consulta 3 de Mayo de 2020]. Recuperado de: http://pepsic.bvsalud.org/pdf/bapp/v27n2/v27n2a13.pdf

[6] Carretero, M. & León, J.A. (2002). Del pensamiento formal al cambio conceptual en la adolescencia. En Palacios, J, Marchesi, A. y & Coll, C. (Comps). Desarrollo psicológico y educación. Vol.1 Psicología evolutiva. (2da edición). Madrid: Alianza [Fecha de Consulta 7 de Mayo de 2020]. Recuperado de: https://www.monografias.com/docs/Del-Pensamiento-Formal-Al-Cambio-Conceptual-En-FKCPNTNCBY

[7] Carrillo, B. (2009). Dificultades en el aprendizaje matemático. Innovación y experiencias educativas, 16. [Fecha de Consulta 7 de Junio de 2020]. Recuperado de: https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Numero_16/BEATRIZ_CARRILLO_2.pdf

[8] Chamoso, J. M. & Durán, J. & García, J. & Martín & J. Rodríguez, M. (2004). Análisis y experimentación de juegos como instrumentos para enseñar

matemáticas. SUMA, 47, 47-58. [Fecha de Consulta 12 de Mayo de 2020]. Recuperado de: https://revistasuma.es/IMG/pdf/47/047-058.pdf

[9] Centre d'Aprenentatge Cientificomatemàtic - CentMat. (2009). Màgia Algebraica. [Fecha de Consulta 2 de Abril de 2020]. Recuperado de: http://www.xeix.org/Centre-Aprenentatge-Cientificomatematic/oferta-educativa/activitats-a-centres/Magiaalgebraica

[10] Corbalán, F. (1994). Juegos matemáticos para Secundaria y Bachillerato. Madrid: Síntesis.

[11] Corbalán, F. & Deulofeu, J. (1996). Juegos manipulativos en la enseñanza de las matemáticas. Uno, 7, 71-80.

[12] De Guzmán, M. (1989). Juegos y matemáticas. SUMA, 4, 61-64. [Fecha de Consulta 9 de Mayo de 2020]. Recuperado de: https://revistasuma.es/IMG/pdf/4/061-064.pdf

[13] De Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Revista Iberoamericana de Educación, 43, 19-58. [Fecha de Consulta 12 de Mayo de 2020]. Recuperado de: https://rieoei.org/historico/documentos/rie43a02.pdf

[14] Decreto 34/2015, de 15 de mayo, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en las Islas Baleares. Publicado en BOIB núm. 73 de 16 de Mayo de 2015.

[15] DigitalES. (2019). El desafío de las vocaciones STEM. Asociación Española para la Digitalización. [Fecha de Consulta 15 de Abril de 2020]. Recuperado de: https://www.digitales.es/wp-content/uploads/2019/09/Informe-EL-DESAFIO-DE-LAS-VOCACIONES-STEM-DIGITAL-AF-1.pdf

[16] Fernández, C. (2013). Principales dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. Pautas para maestros de Educación Primaria (Trabajo Fin de Grado). Universidad Internacional de la Rioja. [Fecha de Consulta 23 de Abril de 2020]. Recuperado de: https://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/1588/2013_02_04_tfm_estudio_del_trabajo.pdf?sequence=1

[17] Fernández, C. (2017). Matemáticas a través de la magia (Trabajo Fin de Máster). Universidad de Cantabria. [Fecha de Consulta 1 de Mayo de 2020]. Recuperado de: https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/13145/FernandezCimianoCarlos.pdf?sequence=1&isAllowed=y

[18] Fernández, R. & Lahiguera, F. J. (2014). Matemagia y su influencia en la actitud hacia las matemáticas en la escuela rural. Números, 89, 33-53. [Fecha de Consulta 28 de Abril de 2020]. Recuperado de: https://ruidera.uclm.es/xmlui/bitstream/handle/10578/9832/fi_1452806218-articulos02matemagia.pdf?sequence=1&isAllowed=y

[19] Font, V. (1994*).* Motivación y dificultades de aprendizaje en Matemáticas*.* SUMA, 17, 10-16. [Fecha de Consulta 3 de Mayo de 2020]. Recuperado de: https://revistasuma.es/IMG/pdf/17/010-016.pdf

[20] García, M. (2011). La enseñanza tradicional de la Matemática y su influencia en el aprovechamiento escolar de los alumnos de nivel primaria (Tesina). Campeche: [Fecha de Consulta 08 de Junio de 2020]. Recuperado de: http://200.23.113.51/pdf/28757.pdf

[21] Gardner, M. (1983). Circo Matemático. Barcelona: Alianza Editorial.

[22] Gardner, M. (2011). Matemática, magia y misterio. Barcelona: RBA.

[23] Giraldo, T. (2019). Matemáticas del Caribe, nueva versión cuadriculada. Divertimates. [Fecha de Consulta 25 de Mayo de 2020]. Recuperado de: http://divermates.es/blog/matematicas-caribe-2/

[24] Gómez, I. M. (2005). Motivar a los alumnos de secundaria para hacer matemáticas. Matemáticas: Pisa en la práctica. [Fecha de Consulta 12 de Mayo de 2020]. Recuperado de: http://www.mat.ucm.es/~imgomezc/almacen/pisa-motivar

[25] Grupo Alquerque (2011). Lanzar 3 dados. [Fecha de Consulta 26 de Mayo de 2020]. Recuperado de: http://www.grupoalquerque.es/ferias/2011/archivos/dados/lanzar_3_dados.pdf

[26] Henao, M. & Solórzano, B. (2012). Una aproximación al desarrollo del pensamiento en el adolescente. Universidad EAFIT, 31(100), 53-60. [Fecha de Consulta 14 de Mayo de 2020]. Recuperado de:

http://publicaciones.eafit.edu.co/index.php/revista-universidad-eafit/article/view/1225

[27] IAQSE. (2017). Indicadors del sistema educatiu. Illes Balears 2017. Conselleria d'Educació i Universitat del Govern de les Illes Balears. [Fecha de Consulta 05 de Junio de 2020]. Recuperado de: http://iaqse.caib.es/documentos/indicadors/2017/Indicadors_2017.pdf

[28] Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. Publicada en Boletín Oficial del Estado, No. 295, del 10 de diciembre de 2013.

[29] Maldonado, M. A. (2013). La magia como recurso educativo en el aula de matemáticas de 1º de ESO. La Matemagia (Trabajo Fin de Máster). Universidad Internacional de la Rioja. [Fecha de Consulta 05 de Mayo de 2020]. Recuperado de:https://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/2189/TFM_Maldonado_Silva.pdf?sequence=1&isAllowed=y

[30] Muñiz-Rodríguez, L. & Alonso, P. & Rodríguez-Muñiz, L.J. (2014). El uso de los juegos como recurso didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas: estudio de una experiencia innovadora. Unión, 33, 19-33. [Fecha de Consulta 08 de Mayo de 2020]. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/308048768_El_uso_de_los_juegos_como_recurso_didactico_para_la_ensenanza_y_el_aprendizaje_de_las_Matematicas_estudio_de_una_experiencia_innovadora

[31] Muñoz, J. (2004). Una matemática motivadora: La Matemagia. Actas VI Jornadas de Educación Matemática de la Comunidad Valenciana. [Fecha de Consulta 15 de Abril de 2020]. Recuperado de: https://thales.cica.es/~estalmat/Actividades-ejemplos/MatemagiaEstalmat.pdf

[32] Muñoz, J. & Hans, J. A. & Fernández-Aliseda, A. (2017). Muchas matemáticas se pueden aprender con un juego. VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Libro de Actas. 80-92. [Fecha de Consulta 15 de Mayo de 2020]. Recuperado de: http://matematicasentumundo.es/JUEGOS/Alquerque1.pdf

[33] OCDE. (2019). PISA 2018. Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes. Informe español. Madrid: Ministerio de Educación y Formación

Profesional. [Fecha de Consulta 19 de Abril de 2020]. Recuperado de: https://www.educacionyfp.gob.es/dam/jcr:e2be368b-f08c-4ab8-8fd9-eb93b76c6bf2/pisa-2018-programa-para-la-evaluaci-n-online.pdf

[34] Oficina Internacional de Educación. (Sin fecha). Most influential theories of learning. UNESCO. [Fecha de Consulta 02 de Mayo de 2020]. Recuperado de: http://www.ibe.unesco.org/es/node/9767

[35] Piaget, J. (1985). Seis estudios de Psicología. Barcelona: Planeta.

[36] Posamentier, A. (2013). 9 Strategies for Motivating Students in Mathematics. [Fecha de Consulta 19 de Abril de 2020]. Recuperado de: https://www.edutopia.org/blog/9-strategies-motivating-students-mathematics-alfred-posamentier

[37] Pozo, D.J. (2013). Metodologías de la enseñanza de las matemáticas (Trabajo Fin de Grado). Universidad de la Rioja.

[38] Ramírez, T. (2019). Matemáticas con magia en el aula de secundaria. [Fecha de Consulta 20 de Mayo de 2020]. Recuperado de: https://redsocial.rededuca.net/matematicas-magia-aula-secundaria

[39] Real Academia Española. (1803). Diccionario de la Lengua Castellana Madrid: Viuda de Don Joaquín Ibarra. [Fecha de Consulta 22 de Mayo de 2020]. Recuperado de: https://books.google.es/books?id=tZNaAAAAYAAJ&pg=PA528#v=onepage&q&f=false

[40] Real Academia Española. (2014) Diccionario de la Lengua Española. Madrid: Planeta Publishing Corporation. [Fecha de Consulta 22 de Mayo de 2020]. Recuperado de: https://dle.rae.es/magia?m=form

[41] Ricoy, M. C. & Couto, M. J. (2018). Desmotivación del alumnado de secundaria en la materia de matemáticas *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 20*(3), 69-79. [Fecha de Consulta 08 de Mayo de 2020]. Recuperado de: https://redie.uabc.mx/redie/article/view/1650

[42] Rivière, A. (1990). Problemas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva cognitiva. En Marches, A., y Palacios, J. Desarrollo psicológico y educación, III. Necesidades educativas especiales y

aprendizaje escolar, Capítulo 9. Madrid: Alianza. [Fecha de Consulta 26 de Mayo de 2020]. Recuperado de: http://www.cucs.udg.mx/avisos/Martha_Pacheco/Software%20e%20hipertexto/Antologia_Electronica_pa121/Palacios-cap9.PDF

[43] Romero, D. (2005). La motivación en el trabajo. [Fecha de Consulta 19 de Mayo de 2020]. Recuperado de: https://www.gestiopolis.com/la-motivacion-en-el-trabajo/

[44] Romero, G. (2017). 9 Teorías de Aprendizaje más Influyentes. EDUCAR21. [Fecha de Consulta 02 de Mayo de 2020]. Recuperado de: https://educar21.com/inicio/2017/09/27/teorias-de-aprendizaje-mas-influyentes/

[45] Ruiz, X. (2015). Educando con magia: el ilusionismo como recurso didáctico. Madrid: Narcea.

[46] Sabaté, D. (2006). La motivació: un factor clau per a l'ensenyament i l'aprenentatge de les competències matemàtiques a Secundària. Xtec.cat. [Fecha de Consulta 08 de Junio de 2020]. Recuperado de: http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200506/memories/1069m.pdf

[47] Salvador, A. (2011). El juego como recurso didáctico en el aula de Matemáticas. Madrid: Universidad Politécnica de Madrid. [Fecha de Consulta 04 de Mayo de 2020]. Recuperado de: http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/grupomaic/conferencias/12.Juego.pdf

[48] Sánchez, M. A. (2009). El juego y la atención a la diversidad. Revista Digital Innovación y experiencias educativas, 16. [Fecha de Consulta 21 de Mayo de 2020]. Recuperado de: https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Numero_16/MARIA%20ANGELES_SANCHEZ_2.pdf

[49] Sanmartí N. (2007). 10 ideas clave. Evaluar para aprender. Col. Ideas clave, 1. Ed. Graó. Barcelona. [Fecha de Consulta 21 de Mayo de 2020]. Resumen Recuperado de: http://www.xtec.cat/~ilopez15/materials/ambitpedagogic/avaluacio/evaluarparaaprender.pdf

[50] Utrera, M. (2012). *El desarrollo del pensamiento en la adolescencia, Apuntes de Psicología del Desarrollo.* Madrid: UNED. [Fecha de Consulta 23 de Mayo de 2020]. Recuperado de: https://www.docsity.com/es/el-desarrollo-del-pensamiento-en-la-adolescencia/2955544/

[51] Wikipedia (2017). *Paradoja del cuadrado perdido.* [Fecha de Consulta 26 de Mayo de 2020]. Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Discusi%C3%B3n:Paradoja_del_cuadrado_perdido

[52] Zemelman, S. (1998). Best Practice: New Standards for Teaching and Learning in America's Schools, 2*a ed*. U.K: Editorial Hinemann. [Fecha de Consulta 21 de Mayo de 2020]. Recuperado de: https://openlibrary.org/books/OL357141M/Best_practice

BIBLIOGRAFÍA

[1] Adrián, J. E. (2012). El desarrollo cognitivo del adolescente. Apuntes de la asignatura Aprendizaje y Personalidad. Universitat Jaume I. [Fecha de Consulta 23 de Mayo de 2020]. Recuperado de: https://www.docsity.com/es/desarrollo-cognitivo-adolescente/2792272/

[2] Alegría, P. & Ruiz de Arcaute, J.C. (2002). La matemagia desvelada. Sigma, 21, 145-174. [Fecha de Consulta 5 de Mayo de 2020]. Recuperado de: http://www.ehu.eus/~mtpalezp/descargas/lamat.pdf

[3] Alsina, C. (2007). Educación Matemática e Imaginación. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 11, 9-17. [Fecha de Consulta 20 de Mayo de 2020]. Recuperado de: http://x.edu.uy/alsina.pdf

[4] Angulo, P. J. (2006). La enseñanza de la matemática: proceso versus resultado.[Fecha de Consulta 24 de Mayo de 2020]. Recuperado de: http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1316-49102006000200018&lng=es&nrm=iso

[5] Cabanne, N. (2007). Didáctica de la Matemática. Buenos Aires: Bonum.

[6] Carretero, M., León, J.A. (2002). Desarrollo cognitivo y aprendizaje en la adolescencia. [Fecha de Consulta 18 de Mayo de 2020]. Recuperado de: https://mcesuvaq.files.wordpress.com/2013/08/8-desarrollo-cognitivo-y-aprendizaje-en-la-adolescencia.pdf

[7] Corbalán, F. (1992). Los juegos en la enseñanza de las matemáticas. Aula de Innovación Educativa: Aula de Innovación Educativa, 7. [Fecha de Consulta 22 de Mayo de 2020]. Recuperado de: https://www.academia.edu/8825900/Los_juegos_en_la_ense%C3%B1anza_de_las_matem%C3%A1ticas

[8] Corbalán, F. (1998). Juegos de estrategia en la enseñanza secundaria. Uno, 18, 59-71.

[9] Cuadrado A., Gamificación educativa, Universidad Rey Juan Carlos. [Fecha de Consulta 12 de Mayo de 2020]. Recuperado de: https://urjconline.atavist.com/gamificacion-educativa

[10] Deulofeu, J. (2003). Juegos y recreaciones para la enseñanza de las matemáticas: diversidad de opciones y de recursos. En Azcárate, C. & Deulofeu,

J. (Eds.), Guías para el profesorado: Matemáticas ESO (115-125). Barcelona: Cisspraxis. [Fecha de Consulta 13 de Mayo de 2020]. Recuperado de: https://www.scribd.com/document/151788400/Lecturamod-6

[11] Entwistle, N. (1998). La comprensión del aprendizaje en el aula. *Barcelona:* Paidós / MEC.

[12] Fernández, C. (2013). Principales dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. Pautas para maestros de Educación Primaria (Trabajo Fin de Grado). Universidad Internacional de La Rioja. [Fecha de Consulta 01 de Mayo de 2020]. Recuperado de: https://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/1588/2013_02_04_tfm_estudio_del_trabajo.pdf?sequence=1

[13] Gardner, H. (1998). Inteligencias múltiples. Barcelona. Paidós.

[14] Gayá, V. (2019). Matemagia en clase: el truco para que las matemáticas sean más divertidas. Diario El Mundo. [Fecha de Consulta 10 de Abril de 2020]. Recuperado de: http://www.divulgamat.net/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=18115:matemagia-en-clase-el-truco-para-que-las-matematicas-sean-mas-divertidas&catid=55:matemcas-en-los-medios-de-comunicaci&Itemid=35

[15] Hardy, T. (1998). Historia de la Psicología Principales corrientes en el pensamiento psicológico. Madrid: Prentice Hall.

[16] Maris S. (1990). Rendimiento escolar, estilos cognitivos y pensamiento formal. Revista Española de Pedagogía, 48(187), 461-479. Universidad Internacional de la Rioja. [Fecha de Consulta 28 de Abril de 2020]. Recuperado de:https://www.jstor.org/stable/23764611?read-now=1&seq=19#page_scan_tab_contents

[17] Moreno, L. & Waldegg, G. (1992). Constructivismo y educación matemática. Educación Matemática, 04(02), 7-15. [Fecha de Consulta 08 de Mayo de 2020]. Recuperado de: http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol4/vol4-2/vol4-2-1.pdf

[18] Muñoz, J. (2018). Trucos mágicos con 9 cartas (I). Divulgamat. [Fecha de Consulta 25 de Mayo de 2020]. Recuperado de:

http://www.divulgamat.net/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=18005:noviembre-2018-trucos-magicos-con-9-cartas-i&catid=77:juegos-matemcos&Itemid=48

[19] Navas, J. M. (2012). Juegos Matemáticos. Un poco de Matemagia. Pensamiento Matemático, 2(2), 209-216. [Fecha de Consulta 02 de Mayo de 2020]. Recuperado de: http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/revistapm/revista_impresa/vol_II_num_2/juegos_matemagia.pdf

[20] Paenza, A. (2013). Matemagia. Buenos Aires. Sudamericana.

[21] Sánchez, N. (2013*).* El juego y la Matemática. Juegos de Matemáticas para el alumnado del primer ciclo de E. Primaria. (Trabajo Fin de Grado). Universidad de Valladolid. [Fecha de Consulta 21 de Mayo de 2020]. Recuperado de: https://uvadoc.uva.es/bitstream/handle/10324/4809/TFG-L395.pdf?sequence=1

[22] Valle, A. & Barca, A. & González, R. & Núñez, J. C. (1999). Las estrategias de aprendizaje, revisión teórica y conceptual. Revista Latinoamericana de Psicología, 31(3),425-461. [Fecha de Consulta 05 de Mayo de 2020]. Recuperado de: https://www.redalyc.org/pdf/805/80531302.pdf

[23] Vázquez, M. J. (2013). La motivación en el aprendizaje de las matemáticas con PDI. Percepción de los estudiantes. Barcelona: Edicions de la Universitat Oberta de Catalunya (UOC). [Fecha de Consulta 14 de Mayo de 2020]. Recuperado de: http://openaccess.uoc.edu/webapps/o2/bitstream/10609/22164/6/mjvcanceloTFM0113memoria.pdf

[24] Vinuesa, C. (2011). Matemagia básica. La Gaceta de la RSME, 14(1), 133–147. [Fecha de Consulta 21 de Mayo de 2020]. Recuperado de: https://carlosvinuesa.com/wp-content/uploads/2019/03/Carlos-Vinuesa-Matemagia-basica-Gaceta-RSME.pdf

ANEXOS

I. Actividades Matemágicas

A continuación se presentan con más detalle las nueve actividades matemágicas preparadas para este trabajo ya descritas de forma breve en el capítulo de *Actividades matemágicas* dentro del trabajo. La elección de las actividades se ha realizado intentando abarcar bloques matemáticos diferentes así como diferentes materiales. En cada actividad se indica su área de utilidad, los recursos que son necesarios para realizarla, su origen, así como el desarrollo de la actividad y su explicación matemática.

i. La Tabla Mágica (Tabla Binaria)

Área: Potencias, Sistemas de Numeración y Sucesiones.

Materiales: Lápiz y papel / Proyector.

Origen: Existen innumerables ejemplos de trucos matemáticos que utilizan tablas especialmente preparadas para conseguir efectos de adivinación. Éste en concreto se ha extraído de la web del CENTMAT (2009) y puede servir como introducción del trabajo con potencias y sistemas de numeración.

Desarrollo: Mostrando mediante un proyector a la clase la tabla de la imagen donde están presentes los números del 1 al 31, el matemago pedirá a los alumnos que piensen en un número especial para ellos (el día de su cumpleaños, la edad de un hermano, un día cualquiera del mes, etc.). A continuación el docente pedirá a un alumno que le diga en qué columnas de la tabla está presente el número pensado y con esta información el matemago adivinará con precisión cuál es dicho número. Para ello basta sumar los números de la primera fila de aquellas columnas que contienen el número a adivinar.

Posteriormente el docente debe trabajar con los números de la primera fila para que los alumnos deduzcan cuál es la relación entre ellos (corresponden a 2^n con n=0,..,4) lo que introduce en la clase el tema de potenciación.

Este ejercicio puede también servir para hablar de la numeración binaria y a partir de aquí de la existencia de otros sistemas de numeración diferentes a la base 10.

Otro posible trabajo deductivo a realizar con la clase consiste en descubrir el patrón que siguen los números de las diferentes columnas y el porqué de ese patrón, introduciendo el tema de las sucesiones numéricas. Si consideramos la columna de la derecha como columna 0 vemos que la columna *n* estará formada por grupos de 2^n números comenzando por 2^n donde cada número se forma sumando 1 al anterior. Una vez compuesto el primer grupo de *n* números, el siguiente grupo se forma sumando 2^n+1 al último número del grupo anterior. Así hasta alcanzar los 16 números que componen cada columna. Así por ejemplo, la columna intermedia de la tabla (*n*=2) está formada por grupos de 2^2 números consecutivos comenzando por 2^2 (4, 5, 6 y 7) y para formar el primer número del siguiente grupo de 2^2 números (12) sumamos 2^2+1 al último número del grupo anterior.

16	8	4	2	1
17	9	5	3	3
18	10	6	6	5
19	11	7	7	7
20	12	12	10	9
21	13	13	11	11
22	14	14	14	13
23	15	15	15	15
24	24	20	18	17
25	25	21	19	19
26	26	22	22	21
27	27	23	23	23
28	28	28	26	25
29	29	29	27	27
30	30	30	30	29
31	31	31	31	31

Figura 25. Tabla Mágica

ii. Misterios del 9

Área: Números y Álgebra.

Materiales: Lápiz y papel.

Origen: Aunque este truco puede encontrarse en diferentes recopilaciones de trucos y se puede realizar con diferentes variaciones, se ha optado por la versión de Gardner (2011) en su obra *Matemática, magia y misterio,* realizando una pequeña modificación para incrementar su espectacularidad.

Desarrollo: Existen numerosos trucos que explotan propiedades del número 9. Para la realización de éste, en primer lugar el mago habrá anunciado que va a introducirse en la mente de toda la clase y habrá pedido silencio total para realizar una pausa dramática donde simulará concentrase profundamente.

A continuación cada alumno escribirá de forma individual (debe hacerse énfasis en que los alumnos no miren los números de los otros) un número de 3 cifras no capicúa (donde el primer y el último dígito no sean el mismo). En nuestro ejemplo utilizaremos el número 653.

El siguiente paso es obtener un nuevo número intercambiando la primera y la última cifra. El número obtenido sería el 356.

A continuación se restan los dos números entre sí. (653 – 356 = 297)

Al nuevo número se le intercambian de nuevo el primer y tercer dígitos (792)

El último paso consiste en sumar estos dos números. El resultado siempre es 1089.

El matemago anunciará dramáticamente que ha conseguido influenciar a todos los alumnos para que el resultado final y escribirá 6801 en una hoja de papel. A continuación lo mostrará a los estudiantes y cuando estos le comenten que se ha equivocado sencillamente girará la hoja mostrando el resultado correcto (1089). Esta actuación final aporta un toque divertido al truco.

Para explicar el truco considérese un número *abc* que puede descomponerse como $1000a+100b+c$. A efectos de realizar una resta en la demostración se supondrá que $a > c$.

Al intercambiar los dígitos se obtiene *cba* y el resultado de la resta de ambos es:

(100a+10b+c) – (100c+10b+a) = 100(a−c) + (c−a)

Para expresarlo algebraicamente en un número de 3 cifras se suma y se resta 100 y al agrupar se obtiene:

100(a−c) + (c−a) +100 -100 = 100 (a-c-1) + 90 + (10+c-a)

Recuérdese que *a* > *c* por lo que tanto *a-c-1* como *10+c-a* estarán comprendidos entre 0 y 9 demostrando que se trata de un número de 3 cifras cuya cifra central es 9.

En los dos últimos pasos al intercambiar entre sí el primer y tercer dígito y sumar los 2 números se obtiene el resultado esperado:

[100(a−c−1) + 90 + (10+c−a)] + [100(10+c−a) + 90 + (a−c−1)] =

= 100a -100c-100+90+10+c-a+1000+100c-100a+90+a-c-1 =

= -100+90+10+1000+90-1 = 1089

Esta larga explicación algebraica puede ser complicada de entender por los alumnos por lo que deberá realizarse de forma pausada, intentando aclarar cada paso.

iii. Matemáticas del Caribe

Área: Geometría (vectores).

Materiales: Materiales impresos del juego (http://divermates.es/blog/wp-content/uploads/2019/11/Matematicas-del-Caribe.pdf).

Origen: Este truco puede realizarse de diferentes formas por ejemplo con instrucciones verbales, con cartas o con tarjetas preparadas como en esta versión, tematizada con una ambientación ‘pirata’ realizada por Giraldó (2019) para el blog *divertimates.*

Desarrollo: En primer lugar hay que imprimir y recortar el mapa con 9 islas del Caribe colocadas en posiciones concretas para conseguir el efecto final del juego y las 9 tarjetas con las islas en una cara y vectores dibujados en la otra. Las

tarjetas se imprimen a doble cara y se comprueba que se han impreso correctamente si a Dominica le corresponde el vector horizontal de longitud 1.

Figura 26. Matemáticas del Caribe

Al comenzar el truco el matemago pone las cartas boca abajo y pide a un alumno que escoja la tarjeta correspondiente a una isla y la guarde. A continuación comienza el juego extrayendo una tarjeta del montón restante y, partiendo del centro del mapa, desplazándose con el vector indicado en la tarjeta escogida.

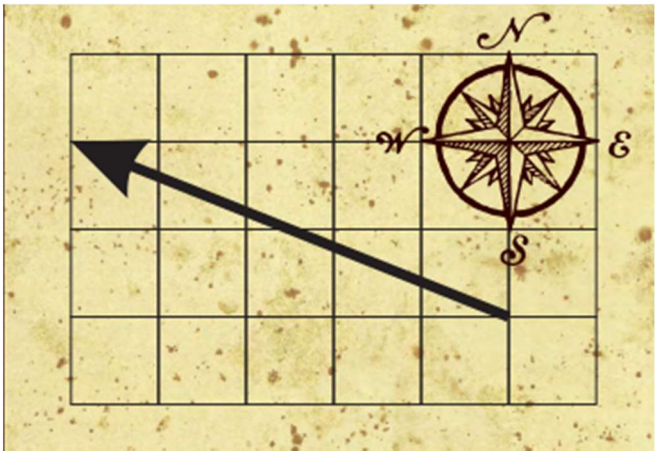


Figura 27. Ejemplo de ficha

El procedimiento se repite con el resto de las tarjetas y después de realizar los 8 desplazamientos puede comprobarse que se llega a la isla escogida por el alumno.

El truco se basa en la propiedad conmutativa de la suma de vectores. Partiendo de un punto inicial (el centro del mapa) se han dibujado 9 vectores diferentes y se llega a un punto final que siempre será el mismo independientemente del orden de la suma. A partir de aquí, para colocar en el mapa cada isla se le resta al punto final el vector asociado a la tarjeta de la isla y el resultado será el punto donde hay que dibujar en el mapa la isla asociada.

iv. Adivinación de números

Área: Álgebra.

Materiales: Lápiz y papel / Calculadora.

Origen: La adivinación de números significativos para los alumnos utilizando operaciones matemáticas es usada desde hace muchos años sin que sea posible especificar un origen determinado, existiendo numerosos ejemplos al respecto. Éste en concreto se ha construido para averiguar el número de familiares del alumno y su edad (o el de alguno de sus hermanos u otros familiares), aunque está inspirada en la versión recogida por Muñoz (2004)

Desarrollo: La adivinación se fundamenta en que un número *N* de 3 cifras (*abc*) puede representarse como *N = 100*a + 10*b + c*. Una vez escogido el alumno éste debe pensar en el número de hermanos que tiene (*x*) y en su año de nacimiento (*y*). Se plantea el ejemplo de un alumno con 3 hermanos que haya nacido el 01/01/2005 por lo que ya habrá cumplido años y su edad será de 15 años en 2020. La cadena de operaciones a efectuar (con el resultado entre paréntesis) sería:

1. Sumar 2 al número de hermanos (para que el truco final sea más difícil de apreciar) (*x+2,* que llamaremos *a = 5*).
2. Multiplicar por 4 (*4a=20*).

3. Sumar 8 (*4a+8=28*).
4. Preguntar al alumno si ya ha celebrado su cumpleaños este año (sí).
5. Multiplicar por 25 (*100a+200=700*).
6. Sumar 1880 (el turrón más caro del mundo) (*100a+2080=2580*).
7. Restar el año en que nació (*y*) (*100a+2080-y=575*).
8. Escribir el resultado en la pizarra.

El mago adivinará entonces los dos números. Al hablar de alumnos en edad escolar, habrán nacido posteriormente a 1980 por lo que siempre *2080-y < 100.* Por ello, las 2 últimas cifras del número se referirán a la edad y el resto al número de hermanos. Para calcular la edad a las 2 últimas cifras (75) se les restará 60 o 61 según haya cumplido o no años en 2020 respectivamente, en el ejemplo 60 (*2080-60-y = 2020-y = edad)*. El número de hermanos será el obtenido de restar 2 al resto de cifras del resultado (5). Si el alumno tiene más de 8 hermanos, cosa poco probable estos días, este número sería de 2 cifras. En el ejemplo la edad será 75-60=15 y el número de hermanos 5-2=3. Es importante darse cuenta que las operaciones de este truco están pensadas para 2020 y hay que irlas adaptando cada año que pase.

v. El cuadrado perdido

Área: Geometría.

Materiales: Plantilla adjunta y tijeras.

Origen: Paul Curry inventó en 1953 esta paradoja que como muchas otras paradojas geométricas se basan en pequeñas discrepancias casi inapreciables al ojo humano que aparecen al combinar figuras geométricas. La más conocida quizás de todas es la de Sam Loyd, padre, uno de los grandes inventores de acertijos de toda la historia, La paradoja de Loyd se basa en un cuadrado de 8x8 descompuesto en 4 figuras y fue presentada en 1858. Como dicha paradoja ha sido reproducida y citada en innumerables situaciones, se opta por presentar ésta, algo menos frecuente adaptando una de sus versiones (Wikipedia, 2017).

Desarrollo: La paradoja presenta un triángulo de base 13 y altura 5 formado por 4 piezas. Según se distribuyan las piezas puede formarse otro triángulo con la misma base y altura pero de donde ha desaparecido un cuadrado, dando lugar a la paradoja.

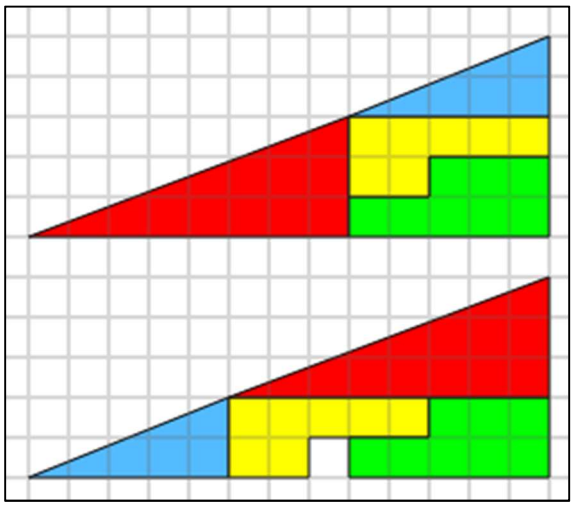


Figura 28. Paradoja del cuadrado perdido

La pieza roja (P1) es un triángulo rectángulo de base 8 y altura 3.

La pieza azul (P2) es también un triángulo rectángulo, de base 5 y altura 2.

La pieza verde (P3) es un rectángulo de base 5 y altura 2 al que se le ha quitado un rectángulo de 1 por 2 cuadros.

La pieza amarilla (P4) es un rectángulo de base 5 y altura 2 al que se le ha quitado un rectángulo de 1 por 3 cuadros

La explicación de la paradoja es la siguiente: si se calcula el área del triángulo global de la figura superior (P5), que mide 13 cuadrados de base y 5 de altura, su área sería $A_5 = (13*5)/2 = 32{,}5$.

Sin embargo si se calcula el área de las piezas individualmente puede verse que:

$A_1 = (8*3)/2 = 12$; $A_2 = (5*2)/2 = 5$; $A_3 = 8$ y $A_4 = 7$ lo que sumado da un $A_{total} = 32$.

La diferencia se produce porque en la figura superior la hipotenusa de la figura grande no es realmente una línea recta ya que la pendiente de los 2 triángulos que la forman es diferente, aunque la diferencia, de apenas 1º, es inapreciable al ojo. Por tanto no puede calcularse el área de la figura superior como si fuera un triángulo ya que realmente es un trapecio.

Para demostrarlo, a continuación se calcula el ángulo de la hipotenusa respecto de la base en los dos triángulos:

En el triángulo rojo la tangente es: $T_r = 3/8$ lo que da un ángulo de 21,80º.

En el triángulo azul la tangente es: $T_a = 2/5$ lo que da un ángulo de 20,56º.

La diferencia de superficie entre el triángulo azul y otro con la misma base pero con un ángulo igual al del triángulo rojo es lo que da el cuadrado que desaparece.

vi. El primer trile

Área: Combinatoria.

Materiales: Una baraja, tarjetas de instrucciones.

Origen: Este truco corresponde a Marco Auriel y aparece en el *Libro Primero de Arithmetica Algebratica*, publicado en 1552 y que es el primer libro de álgebra escrito en castellano. La versión citada en este trabajo corresponde a Fernando Blasco (2007).

Desarrollo: El truco involucra a 3 alumnos. Antes de comenzar deben imprimirse 3 tarjetas de instrucciones, una para jugador, con el detalle de la imagen.

JUGADOR 1	JUGADOR 2	JUGADOR 3
Si tu carta es **J** retira **1 carta**	Si tu carta es **J** retira **2 cartas**	Si tu carta es **J** retira **4 cartas**
Si tu carta es **Q** retira **2 cartas**	Si tu carta es **Q** retira **4 cartas**	Si tu carta es **Q** retira **8 cartas**
Si tu carta es **K** retira **3 cartas**	Si tu carta es **K** retira **6 cartas**	Si tu carta es **K** retira **12 cartas**

Figura 29. Instrucciones para los alumnos

A continuación se siguen los siguientes pasos:

1. Sacar una J, una Q y una K de una baraja y ponerlas boca arriba.
2. Dejar sobre la mesa un montón de 18 fichas (o cartas o cualquier otro elemento contable).

3. Mientras el matemago da la espalda a los jugadores pide que cada uno de ellos escoja una carta y que la conserve oculta.
4. De nuevo de espaldas, se le pide a cada alumno que siga las instrucciones de la ficha y coja las fichas que ésta le diga según sea su carta escogida.
5. Finalmente el matemago se da la vuelta y dice qué carta ha escogido cada jugador.

Este truco se basa en que con cada permutación posible y siguiendo las instrucciones de las fichas queda un número diferente de fichas sobre la mesa. Las combinaciones según el número de fichas que quedan se muestran en la siguiente tabla:

1: JQK	2: QJK	4: JKQ
5: KQJ	6:QKJ	7: KQJ

Por tanto, al matemago le basta con aprenderse las combinaciones o simular que abre la cartera para buscar un billete y apostar que acierta para echarle una mirada a una tarjeta oculta.

Este truco puede utilizarse para introducir por ejemplo el cálculo de combinaciones posibles en un escenario. También puede utilizarse para hablar de grafos y de sucesos dependientes de elecciones anteriores.

vii. Monedas

Área: Aritmética, Paridad, Combinatoria.

Materiales: Monedas.

Origen: El origen de los trucos con monedas se pierde en los anales de la historia. Casi todos ellos se basan en la paridad de las monedas (cara o cruz). Este truco en concreto se adapta a partir de la recopilación de Gardner (2011) aunque se ha encontrado en diferentes fuentes consultadas durante el trabajo.

Desarrollo: El matemago pone varias monedas en una mesa y escoge a un alumno como ayudante en la realización del truco dándole las siguientes instrucciones:

1. Puede ir dándole vueltas las veces que quiera a cualquier moneda que desee.
2. Cada vez que gire una moneda debe decir en voz alta 'Giro'.
3. Cuando acabe de dar las vueltas que quiera debe tapar una moneda con una cartulina u otro objeto cualquiera.
4. A continuación el matemago se dará la vuelta y anunciará si la moneda tapada es cara o cruz.

Antes de girarse por primera vez el mago debe contar el número de caras sobre la mesa. Un número de caras par se asociará a 0 y un número impar a 1. Cada vez que se gira una moneda el matemago irá cambiando el valor ya que la paridad del total de las monedas cambia con cada giro.

Si al final la paridad (el número de caras de las monedas visibles) coincide con el cálculo mental del mago la moneda oculta será una cruz y en caso contrario una cara.

El truco puede ejecutarse utilizando 2 alumnos que girarán una moneda cada uno en cada turno. Al girarse dos monedas la paridad siempre se conserva así que el mago no necesita realizar cálculos ni los alumnos necesitan anunciar los giros. El matemago sólo debe recordar la paridad inicial y obrar como en el primer caso.

viii. Cuadrados mágicos: La Paradoja de Stovel

Área: Matrices y Combinatoria.

Materiales: Calendario.

Origen: Este truco fue inventado por Mel Stover aunque la fuente para este trabajo es Blasco (2007).

Desarrollo: Con un calendario donde aparece un mes entero debe escogerse una cuadrícula de 4x4 días cualesquiera. A continuación el matemago se sitúa de espaldas y uno de los alumnos sigue las siguientes instrucciones:

1. Escoger un número del interior del cuadrado, rodearlo con un círculo y tachar el resto de números de su fila y columna.
2. Escoger otro número sin tachar y repetir el proceso.
3. De nuevo seleccionar un tercer número y repetir el proceso. Al final habrá quedado un solo número sin escoger que también debe seleccionarse.
4. Sumar los 4 números escogidos y apuntar el resultado en un papel.
5. El matemago, después de recordar a la clase que no ha podido ver en ningún momento la elección de los números escribirá un resultado en el papel y al mostrar ambos simultáneamente se comprobará el acierto.

Para comprender el truco, puede verse que si se analiza la disposición de cualquier cuadrícula 4x4 los números que aparecen pueden mostrarse como:

A	A + 1	A + 2	A + 3
B	B + 1	B + 2	B + 3
C	C + 1	C + 2	C + 3
D	D + 1	D + 2	D + 3

Al ir escogiendo un número y tachar toda su fila y columna se fuerza a que los 4 números escogidos estén en filas y columnas diferentes por lo que independientemente de cuáles sean su suma siempre será:

$S = A + B + C + D + 1 + 2 + 3$

Además al ser un calendario se cumple: $D = C + 7 = B + 14 = A + 21$. *Al* sustituir queda $S = 4A + 48 = 2(2A + 24) = 2(A + (A + 21) + 3) = 2(A + D + 3)$. O sea, al sumar mentalmente las 2 esquinas opuestas del cuadrado 4x4 y multiplicar por 2 se obtiene de forma fácil y rápida la suma total.

La disposición de elementos en filas y columnas puede dar pie a introducir las matrices aunque la actividad también puede usarse para que los alumnos calculen las posibilidades de escoger 4 números que están en filas y columnas diferentes (24).

ix. Dados: Adivinar la suma

Área: Cálculo mental.

Materiales: Dados.

Origen: Como se ha podido ver anteriormente el 9 es un número *mágico* por lo que se va a cerrar la propuesta de actividades matemágicas con este noveno juego. Se ha dejado para el final un sencillo truco de cálculo mental que por su facilidad de ejecución permite que el matemago se ayude de un alumno cómplice al que por cualquier motivo (inclusividad, falta de desarrollo de habilidades sociales, etc.) se le quiera dar protagonismo en clase. El truco ha sido adaptado para un mayor efecto a partir de otro original del Grupo Alquerque (2011) aunque puede encontrarse en otras fuentes por ser muy conocido.

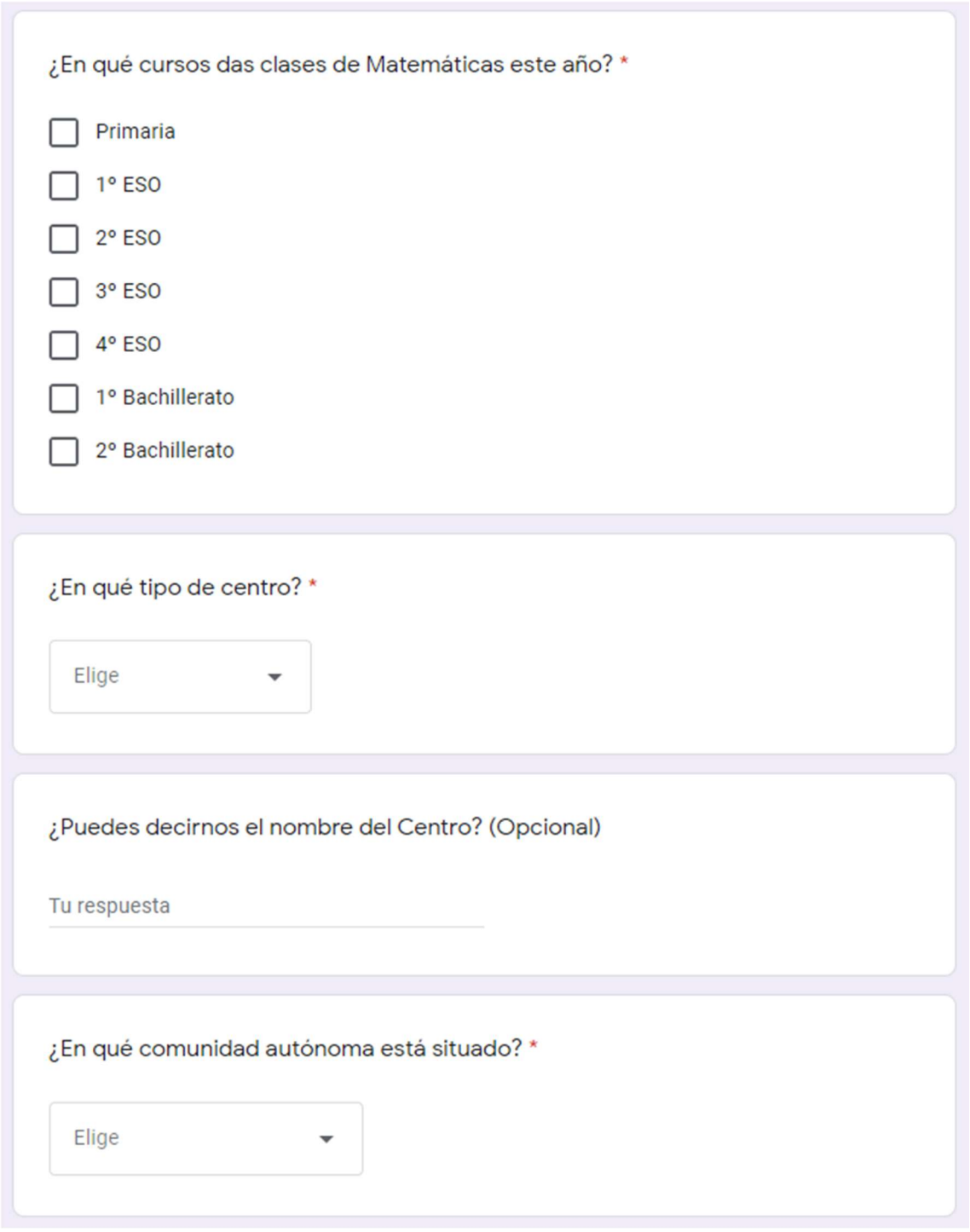
Desarrollo: Previamente al inicio del truco, el matemago se lo habrá explicado a un alumno que actuará como ayudante secreto, dándole instrucciones sobre lo que tiene que hacer para colaborar. De cara al público se escoge a un alumno y se le dan las siguientes instrucciones mientras el matemago está de espaldas:

1. Tirar 3 dados y sumar los resultados.
2. Coger uno cualquiera de los dados y sumar la cara oculta.
3. Tirar ese mismo dado y agregar de nuevo el resultado.
4. Apuntar el número total en un papel.
5. A continuación el matemago se gira, dice de modo casual el valor de los dados que hay sobre la mesa y comenta que es imposible saber qué dado se ha tirado 2 veces. Continúa afirmando que usando sus capacidades telepáticas va a transmitir el número a adivinar a otro alumno y de forma "*casual*" escoge al ayudante secreto que anunciará el resultado correcto.

El truco se basa en la propiedad de que 2 caras opuestas de un dado suman siempre siete, por lo que el ayudante secreto sólo tiene que sumar este número a los resultados obtenidos de los 3 dados. Este truco puede repetirse con más dados o tirando más veces los dados utilizando la misma propiedad. Por cada vez que se sume una cara oculta y vuelva a tirarse un dado hay que sumar 7 adicionalmente.

II. Cuestionario Juegos y Matemagia para docentes

En este punto del anexo se detallan las preguntas que formaban parte de la encuesta realizada a docentes sobre su utilización de los juegos y la Matemagia en las aulas.



¿En qué municipio? (Opcional)

Tu respuesta

¿Utilizas juegos en clase como parte de la enseñanza de las Matemáticas? *

- ◯ Nunca
- ◯ Casi nunca
- ◯ A veces
- ◯ A menudo
- ◯ Muy a menudo

Si la respuesta anterior es positiva, ¿cómo son los juegos que acostumbras a utilizar mayoritariamente? *

- ◯ Individuales
- ◯ Cooperativos
- ◯ Ambos de forma indistinta

Y en cuanto al tipo de juegos, ¿cuáles acostumbras a utilizar? (respuesta múltiple) *

- ☐ Juegos de lógica
- ☐ Juegos de estrategia
- ☐ Juegos online
- ☐ Juegos con lápiz y papel
- ☐ Juegos con materiales manipulativos
- ☐ Juegos entre los alumnos

¿En qué bloques acostumbras a utilizar más los juegos en clase? (Señalar máximo 2 respuestas) *

- [ ] Números
- [ ] Álgebra
- [ ] Geometria
- [ ] Funciones
- [ ] Estadística
- [ ] Probabilidad

¿Sabes lo que es la Matemagia? *

- ◯ Sí
- ◯ No
- ◯ No estoy seguro

Matemagia = Juegos de magia utilizados en el aprendizaje de las Matemáticas.
¿Con qué frecuencia la utilizas en clase de Matemáticas? *

- ◯ Nunca
- ◯ Casi nunca
- ◯ A veces
- ◯ A menudo
- ◯ Muy a menudo

¿En qué bloques acostumbras a utilizarla más a menudo? (Señalar máximo 2 respuestas) *

- [ ] Números
- [ ] Álgebra
- [ ] Geometria
- [ ] Funciones
- [ ] Estadística
- [ ] Probabilidad
- [ ] No la utilizo

¿Crees que con un mayor uso de la Matemagia se acrecentaría el interés de los alumnos por la asignatura? *

- ◯ Sí
- ◯ No
- ◯ No estoy seguro

¿En qué cursos piensas que tiene mayor potencial su aplicación? (Respuesta múltiple) *

- [ ] Primaria
- [ ] 1º ESO
- [ ] 2º ESO
- [ ] 3º ESO
- [ ] 4º ESO
- [ ] 1º Bachillerato
- [ ] 2º Bachillerato

¿Y en qué áreas crees que sería más útil? (Señalar máximo 2 respuestas) *

- [ ] Números
- [ ] Álgebra
- [ ] Geometria
- [ ] Funciones
- [ ] Estadística
- [ ] Probabilidad
- [ ] En ninguna

¿Qué crees que te haría falta para potenciar su uso en el aula? (*

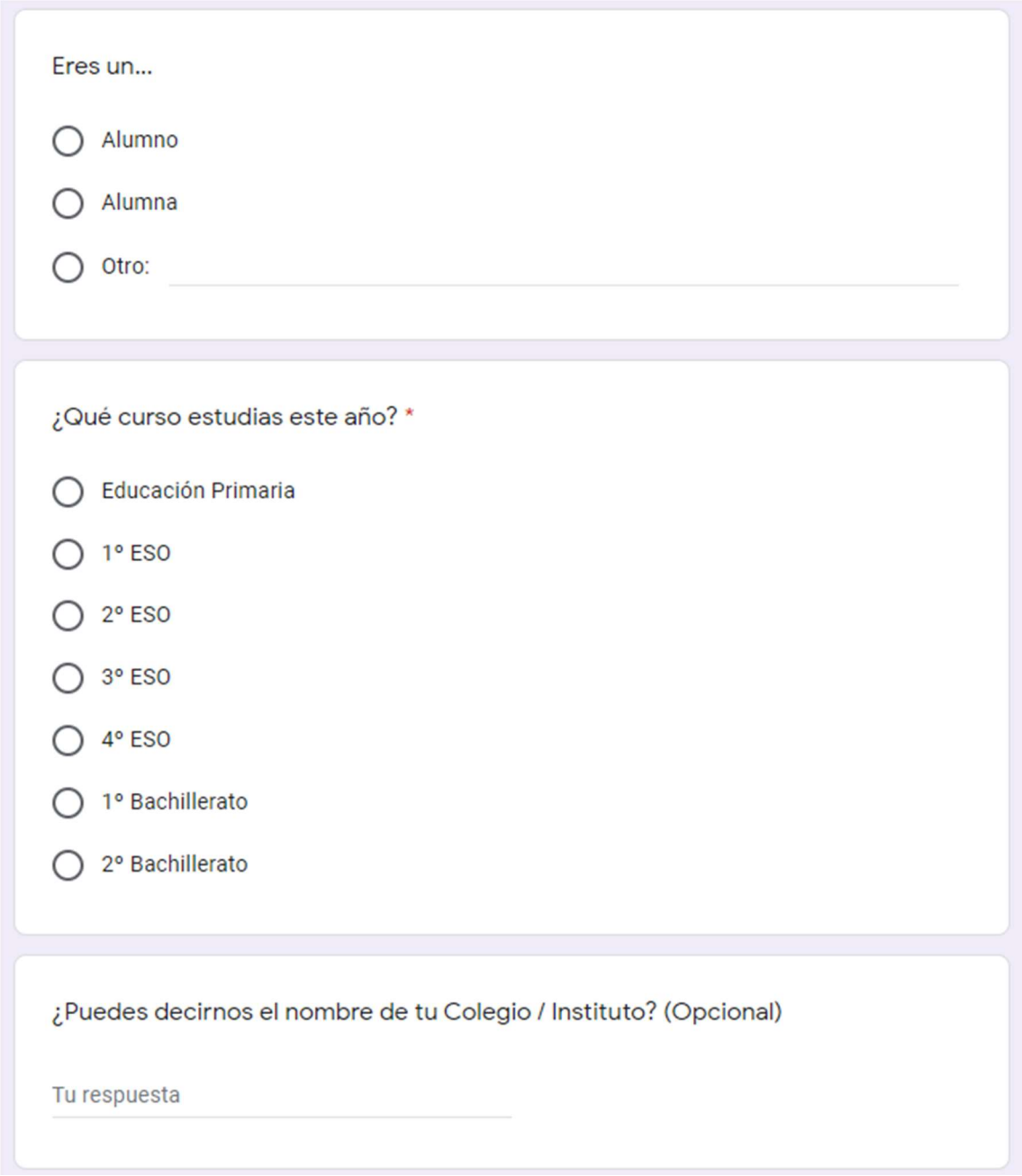
Tu respuesta

¿Te gustaría añadir algún comentario adicional sobre el tema? (Opcional)

Tu respuesta

III. Cuestionario Juegos y Matemagia para alumnos

En este punto se detallan las cuestiones que formaban parte de la encuesta realizada a alumnos de diferentes centros sobre su experiencia con la asignatura de Matemáticas y la utilización que hacían sus profesores de juegos y actividades de magia en clase para enseñar la asignatura.



¿En qué Comunidad Autónoma está situado? *

Elige

¿En qué municipio está situado? (Opcional)

Tu respuesta

¿Qué nota has sacado en la asignatura de Matemáticas en la pasada evaluación? *

- ◯ Insuficiente / No logro (NA)
- ◯ Suficiente / Logro satisfactorio (AS)
- ◯ Bien
- ◯ Notable / Logro Notable (AN)
- ◯ Excelente / Logro Sobresaliente (AE)

Puntúa de 1 (mínimo) a 10 (máximo) el interés que tienes por la asignatura de matemáticas *

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
No tengo ningún interés	◯	◯	◯	◯	◯	◯	◯	◯	◯	◯	Me encanta la asignatura

Como es tu interés respecto al año pasado por la asignatura? *

- ◯ Me interesa menos que el año pasado
- ◯ Me interesa igual
- ◯ Me interesa más que el año pasado

¿Qué nivel de dificultad le encuentras a la asignatura de Matemáticas? *

- ◯ Muy fácil
- ◯ Fácil
- ◯ Ni fácil ni difícil
- ◯ Difícil
- ◯ Muy difícil

¿Tu profesor de matemáticas utiliza juegos en clase de matemáticas? *

- ◯ Nunca
- ◯ Pocas veces
- ◯ A veces
- ◯ A menudo
- ◯ Muy a menudo

Puntúa de 1 (mínimo) a 10 (máximo) el interés que tienes porque se utilicen más juegos en clase de matemáticas para aprender *

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
No tengo ningún interés	◯	◯	◯	◯	◯	◯	◯	◯	◯	◯	Me encantaría

¿Sabes lo que es la Matemagia? *

- ◯ Sí
- ◯ No
- ◯ No estoy seguro

¿Han realizado a veces tus profesores de matemáticas trucos de magia en clase? *

- ◯ Nunca
- ◯ Pocas veces
- ◯ A veces
- ◯ A menudo
- ◯ Muy a menudo

Puntúa de 1 (mínimo) a 10 (máximo) el interés que tienes porque se realicen más trucos de magia en clase de matemáticas para aprender *

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
No tengo ningún interés	◯	◯	◯	◯	◯	◯	◯	◯	◯	◯	Me encantaría

¿Crees que la asignatura de Matemáticas sería más fácil de comprender si se utilizaran más juegos y trucos de magia en clase? *

- ◯ Sí
- ◯ No
- ◯ No estoy seguro

Crees que mejoraría tu interés por la asignatura de Matemáticas si se utilizaran más a menudo en clase juegos matemáticos y trucos de magia? *

- ◯ Sí
- ◯ No
- ◯ No estoy seguro

IV. Entrevistas

i. Cuestionario de las Entrevistas

En este apartado se detallan las preguntas planteadas a los entrevistados en el curso de las entrevistas realizadas para este Trabajo Fin de Máster. En cada entrevista se dejó a elección de cada entrevistado el medio para realizarla, a fin de facilitar su realización: correo electrónico, teléfono, videoconferencia, etc. En algunos casos se utilizaron varios de los métodos propuestos. Debe remarcarse el gran agradecimiento que siente el autor de este trabajo hacia los entrevistados, que mostraron en todo momento una gran colaboración e interés por ayudar a la realización del trabajo.

Aunque las entrevistas tenían un guión previamente definido, éste era flexible para ir adaptándose al desarrollo de las entrevistas y abierto en caso de que surgiera la oportunidad de tratar algún aspecto no considerado inicialmente.

Las preguntas propuestas fueron las siguientes:

1. ¿Cómo definirías la Matemagia?
2. ¿Cómo te surge el interés por ella?
3. ¿Cómo la justificas pedagógicamente para su utilización en la educación?
4. ¿Cuáles crees que son sus aspectos más positivos?
5. ¿Y crees que tiene alguna carencia o aspecto que puede mejorarse?
6. ¿Cómo crees que debe introducirse en las aulas?
7. ¿En qué niveles educativos la ves con más posibilidades?
8. ¿Y en qué áreas de las matemáticas?
9. ¿Qué requisitos dirías que tiene que cumplir un truco para ser efectivo?
10. ¿Qué preparación recomiendas realizar antes de efectuar los trucos?
11. ¿Utilizas alguna estrategia para su realización?
12. ¿Cómo fomentas la participación activa de los alumnos?

13. ¿Y cómo planteas lo qué sucede después? ¿Recomiendas explicar el truco?
14. ¿Cómo relacionas los trucos con los conceptos matemáticos que quieres exponer?
15. ¿Cómo tratas la inclusividad en las actividades?
16. ¿Cuál crees que es la situación actual de la Matemagia en las aulas?
17. ¿Con qué medidas crees que podría fomentarse su uso?
18. ¿En qué experiencias has participado personalmente?
19. ¿Conoces alguna iniciativa que se esté llevando a cabo actualmente?
20. ¿Qué recomendaciones sugieres a docentes que quieran comenzar a practicarla?

ii. Entrevista a Josep Lluís Pol i Llompart

La entrevista con Josep Lluís se llevó a cabo por correo electrónico exclusivamente. Sus respuestas a las preguntas y las aclaraciones posteriores se realizaron en catalán, optándose por mantener el idioma original, transcribiéndose sus respuestas a continuación:

1. ¿Cómo definirías la Matemagia?

Dins l'àmbit educatiu, la matemàgia és l'art de fer servir les tècniques de la màgia tradicional aplicats als coneixements matemàtics per provocar la sorpresa i el conseqüent interès de l'alumne.

2. ¿Cómo te surge el interés por ella?

A partir d'una conferència del professor Fernando Blasco en la que presentava el seu llibre Matemagia.

3. ¿Cómo la justificas pedagógicamente para su utilización en la educación?

4. ¿Cuáles crees que son sus aspectos más positivos?

És un bon estímul per fer pensar els alumnes. La sorpresa, la participació, la curiositat que desperta...

5. ¿Y crees que tiene alguna carencia o aspecto que puede mejorarse?

Com qualsevol enfocament didàctic, no es pot fer tot a partir de la matemàgia. És una eina més. Pràcticament qualsevol coneixement matemàtic es pot dotar d'aquest format.

6. ¿Cómo crees que debe introducirse en las aulas?

7. ¿En qué niveles educativos la ves con más posibilidades?

8. ¿Y en qué áreas de las matemáticas?

La meva experiència se centra en la introducció a l'àlgebra i, per tant, és molt útil en el darrer curs de Primària i els dos primers de Secundària.

9. ¿Qué requisitos dirías que tiene que cumplir un truco para ser efectivo?

En general, un truc no ha de ser llarg de plantejament, ha de fer servir objectes quotidians (un calendari, un rellotge, unes monedes...), i l'ha de poder reproduir l'alumne/a.

10. ¿Qué preparación recomiendas realizar antes de efectuar los trucos?

Avui en dia és senzill. Hi ha molts vídeos a la xarxa, però els llibres de Blasco són molt recomanables.

11. ¿Utilizas alguna estrategia para su realización?

Hi ha tècniques que són estàndard. Per exemple, si hem de fer un truc de monedes a una classe, no ho podem fer talment, i no cal utilitzar un projector. Basta treure alumnes i veure que ells també tenen cara i creu. Així tothom ho veu.

12. ¿Cómo fomentas la participación activa de los alumnos?

En general, les tècniques de truc de màgia ja duen intrínsecament la participació. Demanar què han pensat, què els ha sortit, treure ajudants...

13. ¿Y cómo planteas lo qué sucede después? ¿Recomiendas explicar el truco?

En la matemàgia sempre s'ha d'explicar el truc. És més apassionant que el truc en si mateix. Però si ets professor, trobes la manera de no explicar-lo sense més, sinó de que també participin els alumnes en la solució.

14. ¿Cómo relacionas los trucos con los conceptos matemáticos que quieres exponer?

En realitat el més bonic és crear el truc de màgia a partir dels conceptes que vulguis explicar. Si dius a una classe de 5è que mesurin circumferències i diàmetres i, després, quan arribes a classe els fas dividir les dades, és espectacular veure les seves cares quan troben que a tots els surt un resultat molt semblant. Això ja és màgia en si mateixa.

15. ¿Cómo tratas la inclusividad en las actividades?

Com en qualsevol altre enfocament. Amb trucs diversos per atendre la diversitat. Diversos formats, diverses maneres de participar, diversos nivells...

16. ¿Cuál crees que es la situación actual de la Matemagia en las aulas?

En general no es fa servir.

17. ¿Con qué medidas crees que podría fomentarse su uso?

Hi ha pendent una feina sistemàtica per envestir aquest plantejament.

18. ¿En qué experiencias has participado personalmente?

Com he dit abans, sobre tot en el tema de l'àlgebra. També en espectacles per a molts d'alumnes, com en les proves Cangur a Menorca. Però el truc només és una part de l'aprenentatge en el dia a dia dins classe. No ens podem quedar amb els focs d'artifici.

19. ¿Conoces alguna iniciativa que se esté llevando a cabo actualmente?

És una de les activitats que ofertem al CentMat.

20. ¿Qué recomendaciones sugieres a docentes que quieran comenzar a practicarla?

La matemàgia, com la docència, i tal com diu Claudi Alsina, és un 40% de coneixement i un 60% de teatre. Fora vergonya.

Posteriormente se le pregunta qué herramientas de evaluación utiliza:

L'avaluació del treball algebraic a partir de la matemàgia normalment la faig a través de tres línies per ordre de dificultat:

1. Canviï una operació del joc i deman a l'alumne quin seria el nou resultat (l'estratègia per saber el nombre pensat).

2. Faig un altre joc semblant i li deman a l'alumne que em digui què ha de fer el màgic per saber el nombre pensat.

3. Deman a l'alumne que canviï alguna cosa d'un dels jocs treballats perquè el resultat sigui un altre que jo defineix.

En aquest procés, l'observació és molt important, com sempre, perquè surgeixen dificultats, preguntes... Les preguntes que fan els alumnes són una de les millors eines d'avaluació.

Preguntado sobre si utiliza autoevaluación y coevaluación su respuesta es:

En aquest tipus d'activitat, no.

iii. Entrevista a Sergio Belmonte

La entrevista con Sergio se llevó a cabo mediante videoconferencia, grabada con el consentimiento mutuo de ambas partes. El audio de la grabación no se incluye dentro de este trabajo por motivos de privacidad aunque en este anexo se muestran los principales contenidos de la misma.

1. ¿Cómo definirías la Matemagia?

La palabra matemagia particularmente no me gusta mucho. Es un término acuñado hace muchos años pero yo prefiero llamarlo Magia y Matemáticas. Podría definirse como la Magia que utiliza las matemáticas de algún modo

2. ¿Cómo te surge el interés por ella?

Desde pequeño la magia me ha gustado siempre. Tenía conocimientos muy ligeros pero a raíz de un curso de formación de profesorado nos pidieron utilizar una herramienta cuotidiana para montar una actividad. Intentando salir de lo más convencional estuve buscando por Internet temas de magia y allí me encontré con algunos artículos interesantes que explicaban trucos de magia. Convertí aquellos trucos en una actividad y a todos les encantó. Y a partir de ahí me entró el gusanillo.

3. ¿Cómo la justificas pedagógicamente para su utilización en la educación?

4. ¿Cuáles crees que son sus aspectos más positivos?

Creo que le aporta 2 cosas: la primera es ver las matemáticas desde un ángulo completamente diferente: un lado lúdico. La segunda es que es un gran elemento motivador de cara al alumno. Al hacer un truco de magia se produce un efecto inmediato e innato para saber cómo se hace. Si esto implica explicar un concepto matemático lo podemos aprovechar inmediatamente

5. ¿Y crees que tiene alguna carencia o aspecto que puede mejorarse?

Cuesta que los alumnos vean el truco algo más allá de una actividad lúdica. Sobre todo la primera vez. Cuesta convencerlos de que lo importante es la actividad matemática posterior.

6. ¿Cómo crees que debe introducirse en las aulas?

Yo hago mucha formación a través de talleres y siempre les digo que éste es un recurso más y que a clase hay que ir con una batería de recursos. Creo que éste no es un recurso para todos los profesores. Hay que darlo a conocer y luego ver si esto se adecúa a tus capacidades. La magia es un arte teatral y si no va contigo no hace falta que lo hagas aunque los profesores tenemos un cierto arte teatral. Es importante que lo conozcan luego que cada uno decida. Es muy importante sobre todo elaborar una buena actividad. Puede ser que no te funcione si no preparas bien la actividad.

Como recurso los utilizo muy puntualmente, 3 ó 4 al año. La magia es un recurso puntual como puede ser utilizar policubos. Si no, los alumnos estarían esperando todos los días un truco de magia. Y tampoco creo que sea un recurso que dé para tanto.

7. ¿En qué niveles educativos la ves con más posibilidades?

Va acorde con la madurez del alumno. En 1º de ESO son muy agradecidos y también en 2º de Bachillerato donde la matemática es muy abstracta y cuando presentas un recurso más tangible se sorprenden y tiene muy buena acogida. Por conceptos 3º y 4º de ESO son los ideales pero es donde cuesta más por la edad. También en algunas aulas es imposible usarla si se toman la clase a cachondeo.

8. ¿Y en qué áreas de las matemáticas?

No todo se puede explicar con magia. Ahora estoy investigando otros temas: topológicos, grafos…. No sólo algebraicos que es lo más tradicional de magia y matemáticas. Últimamente están saliendo cosas interesantes en temas como la simetría, topología…

9. ¿Qué requisitos dirías que tiene que cumplir un truco para ser efectivo?

Intento siempre que tenga recorrido como recurso. Que pueda dar respuesta a las necesidades de los alumnos a nivel de saber más. A veces se quedan sólo con el truco y la explicación y a veces quieren investigar más y probar qué pasa si realizan cambios y el truco debe permitirlo.

El objetivo de la actividad siempre es el trabajo posterior. Además del truco en sí y su explicación, siempre les digo que cojan el efecto explicado y creen el suyo

propio. Normalmente les digo que lo graben en casa y lo envíen por video y si hay alguien que quiere presentarlo a la clase pues se presenta.

10. ¿Qué preparación recomiendas realizar antes de efectuar los trucos?

Yo soy mago así que en lo que gasto más tiempo es en preparar la actividad matemática y no el efecto. Leo muchos libros y a veces descubro cosas nuevas. Como muchos trucos son automáticos y no se necesita manipulación, lo practico a ver qué tal resulta y luego preparo una presentación

11. ¿Utilizas alguna estrategia para su realización?

Yo siempre lo hago primero para que vean el impacto que produce. Con la magia cuando sabes cómo se hace el truco la sorpresa viene del. Ah! ¿Pero es esto?. Entonces necesitan experimentarlo para ver que funciona. Siempre los pongo después en grupos de 2 ó 3 para descubrir dónde está el efecto y para practicarlo entre ellos.

Las actividades las evalúo yo con una rúbrica con el video que me presentan y normalmente utilizo rúbricas estándares de autoevaluación y coevaluación. Los alumnos siempre acaban aprendiendo el truco. .El poder seguir las instrucciones para repetir el truco ya tiene valor matemático y luego el concepto matemático que hay detrás algunos lo entenderán y otros no, como si lo hubiera explicado en la pizarra. Y como te has portado bien con ellos al hacer el truco te tratan un poco mejor en la explicación. Es una manera de ganártelos acercándote a ellos, a través del cariño y no de la disciplina e imposición

Como materiales utilizo cartas y cualquier cosa que se pueda contar. A veces alguna cuadrícula que llevo montada pero las manualidades no son mi fuerte así que los materiales que llevo intento que sean simples.

12. ¿Cómo fomentas la participación activa de los alumnos?

13. ¿Y cómo planteas lo qué sucede después? ¿Recomiendas explicar el truco?

Tal y como lo utilizo en el aula el truco es la actividad matemática. En ellos la magia se convierte en un recurso didáctico. La parte del divertimento no es el objetivo de la actividad.

14. ¿Cómo relacionas los trucos con los conceptos matemáticos que quieres exponer?

15. ¿Cómo tratas la inclusividad en las actividades?

Los alumnos a los que les cuesta más llegan al nivel que son capaces y los evalúo de acuerdo a ello. Por eso utilizo trucos con mucho recorrido. Para que si alguien quiere llegar más allá pueda hacerlo.

No suelo hacer grupos por nivel, suelo hacerlos heterogéneos así uno puede ayudar a otro y no me necesitan tanto como si montas grupos por niveles. A niveles que les cuesta más son muy demandantes. El inconveniente es que haya alumnos del grupo que no trabajen pero la perfección no existe

16. ¿Cuál crees que es la situación actual de la Matemagia en las aulas?

Me resulta difícil porque no tengo estadísticas. Cuando yo empecé éramos 4 en España pero últimamente se ha ido dando a conocer y profesores me dicen que la están utilizando. Tampoco pretendo que sea un recurso para todas las aulas con lo que he comentado anteriormente.

17. ¿Con qué medidas crees que podría fomentarse su uso?

No le veo un mal futuro. En los últimos años ha habido una explosión de la magia muy grande con trucos en Youtube, programas de TV dedicados a magia y eso ayuda a que el recurso encuentre su hueco. En libros de texto en algunos ya aparece algún ejemplo de magia y matemáticas cuando antes era impensable. Llevo ya años también haciendo entrevistas para trabajos de grado, 3 ó 4 este año.

18. ¿En qué experiencias has participado personalmente?

Tengo el blog desde hace 4 ó 5 años y la buena aceptación que he tenido ha sido por el filtraje y por estar hecho por un mago. Yo hago el trabajo de filtraje y selecciono ya cosas interesantes con criterio mágico y matemático.

19. ¿Conoces alguna iniciativa que se esté llevando a cabo actualmente?

Hago mil cosas. Formación en encuentros de profesores, con asociaciones de matemáticas. Con el museo de matemáticas organizamos charlas, exposiciones

20. ¿Qué recomendaciones sugieres a docentes que quieran comenzar a practicarla?

Primero conocerla y sentirte cómodo con ella. No probarlo directamente. Las primeras veces que presentas un recurso, cualquiera, no funciona como habías esperado. Y no es que esté mal hecho. Es que hay que acabar de adaptarlo.

iv. Entrevista a Fernando Blasco

La entrevista con Fernando se llevó a cabo por correo electrónico exclusivamente. Sus respuestas a la batería de preguntas se transcriben literalmente a continuación:

1. ¿Cómo definirías la Matemagia?

Magia es ilusión y sorpresa. La matemagia es crear ilusiones a través de propiedades matemáticas.

2. ¿Cómo te surge el interés por ella?

Conocí la matemagia a través de los libros de Martin Gardner. Posteriormente leí artículos de Colm Mulcahy y de Venancio Álvarez. Me pidieron colaborar en un Stand en la feria Madrid Por la Ciencia (hasta entonces yo era aficionado a la cartomagia pero no únicamente a la magia matemática) y a partir de ahí empecé a introducirme en el mundo de la divulgación. Siempre en la frontera entre divulgación y educación. La verdad es que me interesaba como lector y un poco como "mago" pero ahí ya surgió un interés profesional.

3. ¿Cómo la justificas pedagógicamente para su utilización en la educación?

Normalmente los espectadores quieren conocer las trampas que hacen los magos (cosa que no recomiendo: a un espectáculo de magia hay que ir a disfrutar). En matemáticas pasa lo contrario: los estudiantes quieren ver pocas demostraciones y se suelen "creer" el por qué ocurre un determinado resultado.

Con la magia matemática esas dos cosas se conjugan y, en algunos estudiantes, aparece un nuevo interés por la materia. El hecho de crear interés es fundamental para el aprendizaje.

4. ¿Cuáles crees que son sus aspectos más positivos?

Hay una parte importante que es que los estudiantes hagan el juego, que entiendan por qué funciona y que después lo adapten a otras situaciones. Para ello necesitan, por ejemplo, desarrollar ecuaciones que les digan cómo deben cambiar la forma habitual en la que se realiza el juego. O, con los más pequeños, puede que hacer un juego implique que tengan que realizar cálculos de cabeza. Eso les ayuda a que estén "entrenando" (sí, haciendo cálculo mental) de una forma más placentera que con una batería de operaciones que realizar.

En clase suelo hacer algún juego para introducir nuevos conceptos: cuando aparecen los determinantes puedo construir un "cuadrado mágico". Si explicara teoría de códigos podría hacer juegos de adivinación, al explicar métodos de resolución de ecuaciones se puede ilustrar una bipartición con barajas o para hablar de probabilidad también son muy útiles las cartas. Prácticamente para casi todos los conceptos matemáticos se puede hacer un juego de magia que los ilustre.

5. ¿Y crees que tiene alguna carencia o aspecto que puede mejorarse?

Al introducir la magia matemática en el aula hay que tener cuidado porque el efecto mágico puede ser tan grande que oculte lo que realmente queremos enseñar. Para nosotros la magia representa una forma de ganar la atención y el interés de los estudiantes. Pero siempre con un objetivo científico o educativo. Se puede usar para introducir un nuevo tema o como premio el día que los estudiantes han trabajado bien en clase. Pero se debe hacer a pequeñas dosis. Los currícula van bastante justos y no podemos dedicarnos a entretener, sino a formar.

6. ¿Cómo crees que debe introducirse en las aulas?

Como todo, debe hacerse con mucha precaución. La innovación es buena pero debe hacerse de forma controlada. Para eso el profesor también debe estar preparado. Y no es fácil. Un mago ensaya mucho. Un profesor que use magia en sus clases debe tener muy claro qué va a hacer, por qué va a usar un determinado juego, qué va a obtener con ese juego y en qué momento lo va a hacer. Si la "parte mágica" se ejecuta mal va a perder todo el encanto que tiene para poder conectar con parte del alumnado. Por otra parte, estamos pensando que esta actividad tiene un fin educativo: no se hace para entretener.

7. ¿En qué niveles educativos la ves con más posibilidades?

La magia es muy buen instrumento para crear asombro e interés. Así que, en principio, en casi cualquier nivel educativo la podemos utilizar. Pero siempre con precaución: los niños muy pequeños creen en la magia (objetos que aparecen o se transforman) y es más difícil hacerles comprender que la magia en realidad se ha nutrido de resultados científicos (espejos, materiales especiales, aparatos mecánicos,…) para poder asombrarnos. Por otra parte con los más mayores es complicado el que piensen que, por ejemplo, el álgebra "tiene truco". En cualquier nivel funciona como motivación y para captar atención, pero luego hay que trabajar las matemáticas que hay debajo. Y hay que hacerlo con cuidado porque los efectos de ilusionismo pueden ser tan grandes que escondan lo que queremos enseñar. Yo creo que, con juegos a diferentes niveles, la magia funciona bien en las diferentes etapas educativas. Pero quizás es más importante en los "cursos difíciles de ESO", como 2º y 3º en los que la personalidad está cambiando.

8. ¿Y en qué áreas de las matemáticas?

La magia matemática se puede usar para explicar conceptos en muchas partes. Desde cuestiones de aritmética en primaria hasta ejemplos donde aparecen matrices de números. Podemos tocar cuestiones sobre criptografía y códigos, combinatoria, probabilidad, geometría (pensando en objetos imposibles). Hay juegos que se basan en sistemas de numeración (además del decimal hay juegos muy conocidos que tienen que ver con binario y ternario). También hay

muchos juegos que se basan en el criterio de divisibilidad entre 9, con lo que entramos en el terreno de múltiplos, divisores o aritmética modular. Luego ya podemos relacionar la magia con disciplinas que están en la frontera con otras disciplinas, como las anamorfosis e ilusiones ópticas que se crean según algoritmos pero que inducen a fallos perceptivos por parte de nuestros sensores y el cerebro.

9. ¿Qué requisitos dirías que tiene que cumplir un truco para ser efectivo?

En primer lugar que sea atractivo, pero tampoco debe serlo hasta el extremo de que nos haga olvidar las matemáticas que lleva dentro. Es diferente montar un espectáculo que montar una sesión de magia matemática en un aula o en una conferencia.

10. ¿Qué preparación recomiendas realizar antes de efectuar los trucos?

Que estudie matemáticas, que ensaye, que el juego que vaya a realizar sea uno que aporte algo. No debe hacerlo por hacer, sin un motivo. Igual la motivación es estética (el día de antes de las vacaciones o después de un trimestre duro se puede hacer un juego para rebajar tensión o enfrentarse al nuevo periodo) o práctica (la clave por la que funciona el juego es algo que se está estudiando en ese momento). Y, sobre todo, que disfrute con ello: si lo hace de forma forzada el auditorio lo percibe y esta técnica se volverá contra quien la usa.

11. ¿Utilizas alguna estrategia para su realización?

Un poco lo que hemos dicho antes. Hay que pensar los contenidos, pero después la cosa suele fluir bien. También es importante la experiencia. Hay juegos que ya los tengo muy rodados y sé cómo van a funcionar. Quizás también es importante cambiar los estímulos, elegir para una misma sesión juegos de distinto tipo.

12. ¿Cómo fomentas la participación activa de los alumnos?

En todos los juegos los estudiantes salen a colaborar, como si estuvieran en un espectáculo de magia y el mago los invitara a participar. Ese es un tipo de participación. Otro tipo de participación es la participación "activa" en la que el estudiante debe desentrañar el fundamento matemático que tiene un juego y, quizás, adaptarlo a otra situación. Es importante que trabajen las matemáticas que hay debajo de los juegos pero también se pueden trabajar competencias distintas. Sobre todo el poder hacer un juego de magia ayuda mucho a que estudiantes más introvertidos puedan mejorar sus capacidades comunicativas.

13. ¿Y cómo planteas lo qué sucede después? ¿Recomiendas explicar el truco?

Sí. En clase se debe explicar todo. Quizás no explicarlo completamente sino usar estrategias para que ellos descubran cómo y por qué se hace, dándoles pistas. En el mundo del ilusionismo sí hay (y tiene que haber) un cierto secreto. En el mundo de la ciencia y la educación lo que hacemos es fomentar el conocimiento. Desde luego, que pueden considerarse diferentes estrategias para esto.

14. ¿Cómo relacionas los trucos con los conceptos matemáticos que quieres exponer?

Más o menos en la misma línea de lo que ya he explicado antes: los efectos matemágicos tienen que ver con algunos temas del currículo. En ese punto pueden introducirse como ejemplo a la hora de introducir el tema. También hay que tener en cuenta la metodología que se usa en la clase. Por ejemplo, en un modelo de clase invertida pueden presentar los propios estudiantes los juegos y relacionarlos con esos conceptos. En ese sentido hay experiencias positivas de aplicación de estas técnicas.

15. ¿Cómo tratas la inclusividad en las actividades?

Al hablar de los casos especiales hay que mirar los dos extremos de la campana de Gauss: los más capaces y los menos capaces. Con estudiantes de alta capacidad tengo experiencia y les tengo que decir que funcionan bien y en más de una ocasión el grupo nos ha sorprendido a mí y a sus educadores.Juegos de

magia matemática suelen funcionar muy bien y desentrañan lo que ocurre en ellos. Desafortunadamente no tengo experiencia de aula con estudiantes con otro tipo de problemas de aprendizaje. Sin embargo sí que he tratado con personas con discapacidad en otros escenarios: colaboro con la Fundación Abracadabra de Magos Solidarios y en ese contexto he impartido talleres y conferencias sobre magia matemática.

16. ¿Cuál crees que es la situación actual de la Matemagia en las aulas?

Desde hace unos años he encontrado que hay muchos profesionales que se están aproximando a la magia matemática como recurso didáctico. En colaboración con Miquel Duran, Catedrático de Química Física de la Universitat de Girona y también mago aficionado, hemos organizado dos encuentros de magia, Ciencia y Educación. En el segundo completamos el aforo de la actividad, que estaba fijado en 70 participantes. Poco a poco se está entrando.

17. ¿Con qué medidas crees que podría fomentarse su uso?

Justo como decía antes: a través de congresos, cursos de formación de profesorado, sesiones online, Lo primero que hace falta es que el profesorado conozca el recurso. Hay libros escritos sobre el tema. Y no es nuevo: en el primer libro sobre álgebra editado en España ya aparecía el uso de ecuaciones como algo "mágico" que permitía obtener un resultado. Como con todo lo fundamental es la formación del profesorado, que puede ser autoformación o formación más o menos reglada.

18. ¿En qué experiencias has participado personalmente?

En muchas conferencias y actividades en centros culturales dentro y fuera de España, Programas de Altas Capacidades (PEAC, Fanjac, Estalmat, …), Congreso de Magia, Ciencia y Educación, Campus de Verano de Magia y Ciencia para estudiantes de Secundaria, Congresos en los que hemos expuesto esta metodología, Congresos como Gathering for Gardner donde se juntan aficionados a la magia, los puzles y la matemática recreativa, libros, ...

19. ¿Conoces alguna iniciativa que se esté llevando a cabo actualmente?

Prácticamente todas las cosas que he comentado en el punto anterior se llevan a cabo actualmente. A esas iniciativas habría que sumar otras, como MathJam, webinarios, … Muchos TFGs y TFMs que relacionan la magia con la ciencia y la educación. Se están llevando a cabo cursos de formación de profesorado en esta línea. Lo bueno es que hay mucha actividad.

20. ¿Qué recomendaciones sugieres a docentes que quieran comenzar a practicarla?

Que ensayen, se ilusionen y disfruten. La magia y las matemáticas hay que disfrutarlas e intentar que otros disfruten con ellas.