



Universitat
de les Illes Balears

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

MEJORANDO LOS RESULTADOS DE LA ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS PARA LOS PRIMEROS TRES PERÍODOS DE OBSERVACIÓN DE LIGO-VIRGO MEDIANTE LA ADICIÓN DE ARMÓNICOS MÁS ALTOS

Alicia Calafat Jaso

Máster Universitario Máster Universitario en Física Avanzada y

Matemática Aplicada

Centro de Estudios de Postgrado

Año Académico 2019-20

MEJORANDO LOS RESULTADOS DE LA ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS PARA LOS PRIMEROS TRES PERÍODOS DE OBSERVACIÓN DE LIGO-VIRGO MEDIANTE LA ADICIÓN DE ARMÓNICOS MÁS ALTOS

Alicia Calafat Jaso

Trabajo de Fin de Máster

Centro de Estudios de Postgrado

Universidad de las Illes Balears

Año Académico 2019-20

Palabras clave del trabajo:

ondas gravitacionales, agujeros negros, relatividad general, análisis de datos, estimación de parámetros, estadística bayesiana

Nombre Tutor/Tutora del Trabajo: Sascha Husa

Motivación

El 14 de septiembre de 2015, la colaboración científica LIGO y Virgo anunció la primera detección directa de ondas gravitacionales y la primera observación directa de la coalescencia de un sistema binario de agujeros negros [9]. Los detectores Advanced LIGO no sólo habían detectado por primera vez las ondas gravitacionales, sino que además se confirmaba la existencia directa de agujeros negros y cómo dos de ellos se fusionaban para convertirse en uno sólo. En un solo día se había producido un triple descubrimiento, procedente además de uno de los eventos catastróficos más potentes que existen en el universo. La fusión de ambos objetos fue tal, que la energía liberada en una fracción de segundo en forma de ondas gravitacionales, representaba diez veces la luminosidad combinada de todas las galaxias de todo el universo visible; mientras que en la Tierra lo que detectamos fueron dos espejos moviéndose en una milésima del ancho de un protón. Ese día marcó el inicio de una nueva era, al proporcionarnos una nueva ventana por la cual poder observar el cosmos a través de la astronomía de las ondas gravitacionales.

Todo empezó 100 años atrás, el 25 de noviembre de 1915, cuando Albert Einstein finalizó su jornada de cuatro conferencias realizadas en la Academia de Ciencias de Prusia, presentando al público las ecuaciones de la teoría de la relatividad [41], [42], [40]. Unas ecuaciones capaces de describir la relación simbiótica entre la curvatura del espacio-tiempo y el contenido que lo habita. Poco más de un mes después, Karl Schwarzschild publicó la primera solución no trivial de las ecuaciones de Einstein para una distribución esférica de materia, estática, invariante bajo inversión temporal y en el vacío [125]. Cincuenta años más tarde se comprendió que podía describir, entre otros objetos, un agujero negro.

Pocos meses después de presentar su teoría, Einstein (1916-1918) predijo la existencia de las ondas gravitacionales. Linealizando las ecuaciones que había acabado de formular el año anterior y considerando una situación de campo débil, descubrió que tenían como solución la ecuación de onda. Se trataban de unas ondulaciones en el espacio-tiempo que viajaban a la velocidad de la luz, producidas por variaciones temporales en el momento cuadrupolar de la fuente.

En la década de los años 60, Joseph Weber empezó a experimentar con detectores de masa resonante para detectar ondas gravitacionales. El estudio del rendimiento y ruido de dichos detectores, condujeron a propuestas de interferómetros láser con el potencial de aumentar significativamente la sensibilidad. De forma paralela, el avance teórico condujo a la comprensión de los modos cuasinormales de los agujeros negros. En los años 90, los cálculos post-Newtonianos de orden superior precedieron a los extensos estudios analíticos sobre la dinámica relativista de dos cuerpos. Estos avances, permitieron el modelado de fusiones binarias de agujeros negros y predicciones precisas de sus formas de onda.

En este caldo de cultivo, se agrupó la primera red interferométrica global de detectores de ondas gravitacionales que hicieron observaciones conjuntas desde 2002 hasta 2011, formada por TAMA 300 en Japón, GEO 600 en Alemania, Virgo en Italia y el Observatorio de ondas Gravitacionales por Interferometría Láser LIGO en los Estados Unidos. En 2015, los detectores Advanced LIGO se convirtieron en los primeros en

augmentar significativamente la sensibilidad, permitiendo detectar variaciones relativas en los brazos de los interferómetros de una diez miltrillonésima parte, es decir, una milésima del ancho de un protón. Cuatro días antes de que se iniciara el primer período de observación prolongado con estos nuevos detectores, se produjo la detección del primer evento GW150914 [9].

A día de hoy, de los cuatro tipos de eventos posibles, todos los detectados por Advanced LIGO y Virgo entran dentro de la categoría de ondas gravitacionales producidas al orbitar binarias compactas, es decir, formadas por dos estrellas de neutrones, dos agujeros negros o una estrella de neutrones y un agujero negro. La identificación de una señal de onda gravitacional en los datos del detector, se lleva a cabo a través de cadenas de procesos, hilos, corrutinas y subrutinas basadas en la técnica del filtrado adaptado, la cual exige unos modelos precisos de las formas de onda gravitacional que se esperan detectar. Hasta 2012, los modelos utilizados para tratar los datos incluían únicamente el armónico esférico dominante ($l = 2, |m| = 2$) ignorando los armónicos superiores, que se vuelven importantes cuando la binaria está formada por objetos de masa elevada o relaciones entre las masas elevadas. La no consideración de estos armónicos subdominantes implica una pérdida significativa de la tasa de detección, un sesgo sistemático en los parámetros de la fuente, e implica una degeneración en la estimación de parámetros de la inclinación de la binaria y la distancia luminosa. Con la finalidad de no limitar la búsqueda de ondas gravitacionales, a medida que la sensibilidad de los detectores vaya aumentando, se van a ir requiriendo modelos de formas de onda cada vez más precisos y computacionalmente eficientes que incluyan estos armónicos subdominantes. En este contexto surge en abril del 2020, el modelo IMRPhenomXPHM [108], un modelo fenomenológico desarrollado en la UIB por el Grupo de Física Gravitacional: teoría y observación, en colaboración con la Universidad de Birmingham, la Universidad de Zurich y la Universidad de Cardiff, construido sobre el dominio de frecuencias, con expresiones cerradas e incorporando armónicos subdominantes. Las dos primeras características proporcionan un bajo coste computacional, beneficiando el análisis posterior.

Esta tesis está enfocada en el estudio de la estimación de parámetros de ondas gravitacionales producidas al orbitar binarias compactas, poniendo a prueba el nuevo modelo IMRPhenomXPHM [108] con los eventos más desafiantes del catálogo de ondas gravitacionales GWTC-2 de las colaboraciones LIGO y Virgo, que cubre los dos primeros periodos de observación y la mitad del tercero.

UNIVERSITAT DE LES ILLES BALEARS

Abstract

La primera incorporación de los armónicos subdominantes en los modelos de ondas gravitacionales, se produjo en 2012 a través del modelo EOBNRv2HM [102]. Tres años más tarde, empezaron a aparecer en formas de onda híbridas PN/NR y en los primeros modelos fenomenológicos; además de múltiples estudios sobre su implicación en la estimación de parámetros. En 2018 se produjo la primera introducción de dichos armónicos subdominantes en binarias de agujeros negros con espín a través del modelo IMRPhenomHM [78], desarrollado por el Grupo de Física Gravitacional: teoría y observación de la UIB, en colaboración con la Universidad de Cardiff, el Instituto Max Planck de Física Gravitacional (Instituto Albert Einstein), la Universidad de Hannover y l'Institut d'Estudis Espacials de Catalunya, utilizando una aproximación basada en el comportamiento de estos armónicos con respecto al armónico dominante. No fue hasta enero del 2020, cuando el grupo de la UIB en colaboración con la Universidad de Birmingham, calibró directamente los armónicos subdominantes incluyéndolos en un nuevo modelo conocido como IMRPhenomXHM [50]. En este trabajo, utilizaremos una extensión de dicho modelo al añadir la precesión de la binaria, el modelo IMRPhenomXPHM [108], publicado el 14 de abril de 2020. Con el objetivo de poner a prueba el efecto de la precesión y los armónicos subdominantes, estudiaremos cómo se comporta dicho modelo en la estimación de parámetros de los eventos más desafiantes para el mismo, en los primeros tres períodos de observación de LIGO-Virgo; en concreto para los eventos GW150914, GW170729 y GW190814. Para ello, se ha empleado la inferencia bayesiana a través del algoritmo de muestreo anidado estático en paralelo. Un algoritmo estocástico introducido por Skilling en 2004 [128], presentado como una posible alternativa a los métodos MCMC, ampliamente utilizado en la astronomía de ondas gravitacionales. Su utilización en paralelo, permite reducir significativamente el tiempo de análisis implementándolo en un clúster CPU de alto rendimiento, como los manejados en esta tesis, integrantes de la Red Española de Supercomputación: Marenostrom (Barcelona Supercomputing Center) y Picasso (Universidad de Málaga). Utilizando los datos de los detectores LIGO-Hanford, LIGO-Livingston y Virgo disponibles en los catálogos de ondas gravitacionales GWTC-1 y GWTC-2 abiertos al público [34], el Grupo de Física Gravitacional: teoría y observación, realizó diferentes ejecuciones utilizando diferentes modelos que incluían o bien los efectos de la precesión o bien los armónicos subdominantes o ambos a la vez. Con los archivos resultantes,

primero se analizó la convergencia de cada ejecución para cada modelo en cada evento. Con estos resultados se realizó un estudio de cuál era la mejor versión de la precesión, de las dos que hay incluidas en IMRPhenomXPHM. Una vez fijos los parámetros del algoritmo y del modelo, se procedió a analizar los tres eventos, comparando el modelo escogido con los catálogos de ondas gravitacionales GWTC-1 y GWTC-2. El evento GW170729, se comparó además con el artículo de Katerina Chatziioannou et al publicado en noviembre de 2019 [13], que fue el primero en encargarse de estudiar un evento cuyo cociente de masas era alto, revelando de esta manera las contribuciones de los armónicos subdominantes y la precesión en la estimación de parámetros. En este mismo artículo se estudiaba el hecho de que el agujero negro primario de la binaria, pudiera haber sido formado en una fusión anterior. El modelo utilizado en esta tesis, apoya dicho escenario de formación. Por último, se determinó que la inclusión de los armónicos subdominantes y la precesión en el modelo, mejoran la estimación de parámetros sobretodo en eventos cuyo cociente de masas es elevado. En consecuencia, se ha establecido nuevas estimaciones para el cociente de masas y espín efectivo en los tres eventos estudiados.

Índice general

Motivación.	III
Abstract.	V
Índice de figuras	XI
Índice de abreviaturas	XIX
Prefacio	XXI
1. Epítome de la teoría de la relatividad.	1
1.1. Planteamiento inicial.	1
1.1.1. Incorporando la gravedad a la relatividad especial.	1
1.1.2. El principio de equivalencia.	2
1.1.2.1. Desde la universalidad de las interacciones gravitacio- nales a principio fundamental de equivalencia: Localidad.	3
1.1.2.2. Formulación moderna del principio de equivalencia de Einstein.	5
1.1.2.3. El corrimiento al rojo gravitacional implica que el espacio- tiempo es curvo.	5
1.1.3. El principio de Mach.	6
1.1.4. La relatividad general.	6
1.2. Conceptos básicos.	7
1.2.1. Variedad.	7
1.2.2. Tensor.	8
1.3. Geometría del espacio-tiempo.	9
1.3.1. La geometría euclidiana y la no-euclidiana.	9
1.3.2. Estructuras del espacio-tiempo: conexión, métrica y estructura spinorial.	10
1.3.2.1. Conexión.	10
1.3.2.2. Métrica.	10
1.3.2.2.1. Métrica de Minkowski.	11
1.3.2.2.2. Métrica de Friedmann-Robertson-Walker.	11
1.3.2.3. Estructura spinorial.	12
1.3.3. El espacio-tiempo como variedad.	12
1.3.3.1. Variedad Riemanniana.	12
1.3.3.2. Variedad pseudoriemanniana.	13
1.3.3.3. El espacio-tiempo: un modelo de variedad.	13
1.3.4. El tensor energía-momento.	14
1.3.5. Modelando la curvatura.	14
1.3.5.1. Tensor de Riemann.	14
1.3.5.2. Tensor de Ricci.	16
1.3.5.3. Escalar de Ricci.	16
1.3.6. Ecuación de las geodésicas y ecuación de desviación geodésica.	16
1.4. Derivación de las ecuaciones de campo de Einstein.	17
1.4.1. Variación del determinante del tensor métrico.	18
1.4.2. Variación del escalar de Ricci.	19
1.4.3. Ecuaciones de campo de Einstein.	20

2. Ondas gravitacionales: origen y características.	23
2.1. Geometría de Schwarzschild.	23
2.1.1. La singularidad de coordenadas $r_s = 2M$	24
2.1.2. La geometría de Schwarzschild con las coordenadas de Kruskal-Szekeres.	25
2.2. Colapso gravitatorio y el teorema sin pelo.	28
2.3. Evidencias directas e indirectas de agujeros negros.	31
2.4. Categorías de ondas gravitacionales.	33
2.4.1. Ondas gravitacionales producidas por CBCs.	35
2.4.1.1. Mecanismos de formación de binarias de agujeros negros observadas por LIGO.	35
2.4.1.2. Fases de la onda gravitacional.	36
2.5. Derivación de la solución de la ecuación de onda gravitacional en el vacío.	37
2.5.1. Ondas planas en la teoría linealizada de la gravedad.	38
2.5.2. Ondas gravitacionales en el vacío.	40
2.5.2.1. Polarización de una onda plana propagándose en la dirección z	41
2.6. Efecto de las ondas gravitacionales sobre masas de prueba.	41
2.6.1. Polarización h_+	42
2.6.2. Polarización h_\times	43
2.7. Emisión de ondas gravitacionales.	43
2.7.1. Desarrollo multipolar.	44
2.7.2. Formalismo cuadrupolar.	45
2.7.3. Magnitud de la perturbación de la onda gravitacional.	47
2.7.4. Ondas gravitacionales emitidas desde un sistema binario de estrellas.	47
3. Análisis de datos y estimación de parámetros para CBCs.	51
3.1. Los detectores Advanced LIGO.	51
3.1.1. Datos obtenidos por el detector.	55
3.2. Búsqueda de la señal de CBCs, a través de tuberías de filtrado adaptado.	59
3.3. Modelos de forma de onda para CBCs.	63
3.3.1. La importancia de los armónicos subdominantes.	65
3.3.2. El modelo IMRPhenomXPHM.	68
3.4. Estimación de parámetros por inferencia bayesiana.	71
3.4.1. El teorema de Bayes.	73
3.4.1.1. La función de verosimilitud.	74
3.4.1.2. La distribución de probabilidad a priori.	76
3.4.1.3. La evidencia bayesiana.	77
3.4.1.4. Intervalos de credibilidad.	77
3.4.1.5. La divergencia de Jensen-Shannon.	77
3.4.1.6. Calibración.	77
3.4.2. Muestreadores.	78
3.4.2.1. El algoritmo de muestreo anidado.	79
3.4.2.1.1. El algoritmo de muestreo anidado estático en paralelo.	82
4. Descripción y resultados de la tesis.	85
4.1. Descripción del proyecto.	85
4.1.1. Implementación.	85
4.1.2. Planteamiento.	86
4.2. Resultados obtenidos.	87
4.2.1. GW170729.	87
4.2.1.1. Estudio de la convergencia.	87

4.2.1.1.1. Resultados para el modelo IMRPhenomXHM.	87
4.2.1.1.2. Resultados para el modelo IMRPhenomXPHM y IMRPhenomXP.	89
4.2.1.1.3. Resultados para el modelo IMRPhenomXPHM y IMRPhenomXHM.	91
4.2.1.2. Estudio de la precesión.	92
4.2.1.3. Comparando los resultados obtenidos con la literatura y el catálogo GWTC-1.	93
4.2.1.3.1. Comparación con el catálogo GWTC-1 y el modelo IMRPhenomPv2 de la literatura.	95
4.2.1.3.2. Comparación con el modelo IMRPhenomHM.	95
4.2.1.3.3. Comparación con el modelo SEOBNRv4HM.	96
4.2.1.4. Mejorando la estimación de parámetros para q y χ_{eff}	96
4.2.2. GW150914.	98
4.2.2.1. Estudio de la convergencia.	98
4.2.2.1.1. Resultados para los modelos IMRPhenomXPHM y IMRPhenomXP.	98
4.2.2.1.2. Resultados para los modelos IMRPhenomXPHM y IMRPhenomXHM.	99
4.2.2.2. Comparación con el catálogo GWTC-1.	101
4.2.2.3. Mejorando la estimación de parámetros para q y χ_{eff}	101
4.2.3. GW190814.	101
4.2.3.1. Estudio de la convergencia.	102
4.2.3.1.1. Resultados para los modelos IMRPhenomXPHM y IMRPhenomXP.	102
4.2.3.2. Comparación con el catálogo GWTC-2.	103
4.2.3.3. Mejorando la estimación de parámetros para q y χ_{eff}	104
5. Conclusiones.	107
A. Ingredientes de la teoría linealizada de la gravedad.	109
A.1. Métrica inversa.	109
A.2. Símbolos de Christoffel linealizados.	110
A.3. Tensor de Riemann linealizado.	110
A.4. Tensor de Ricci linealizado.	111
A.5. Escalar de Ricci linealizado.	111
A.6. Tensor de Einstein linealizado.	111
B. Las transformaciones gauge e invarianza gauge.	113
B.1. Las ecuaciones básicas de la teoría linealizada.	113
B.1.1. Transformaciones globales de Lorentz	113
B.1.2. Transformaciones de coordenadas infinitesimales (creación de perturbaciones en el sistema de coordenadas).	113
B.2. Transformaciones gauge e invarianza gauge.	114
B.3. El gauge Transverse-traceless (TT).	115
C. Interacción de las ondas gravitacionales con masas de prueba.	117
C.1. La ecuación de desviación geodésica en términos de la derivada covariante.	117
C.2. Masas de prueba en el sistema de referencia TT y en el sistema de referencia del detector.	117
C.2.1. Masas de prueba en el sistema de referencia TT.	118
C.2.1.1. Distancia coordenada.	118
C.2.1.2. Distancia propia.	119

C.2.2. Masas de prueba en el sistema de referencia del detector.	119
D. Resultados obtenidos de los tres eventos.	123
D.1. GW170729.	123
D.1.1. Estudio de la convergencia.	123
D.1.1.1. Resultados para el modelo IMRPhenomXHM.	123
D.1.1.1.1. Resultados para el modelo IMRPhenomXP.	124
D.1.1.1.2. Resultados para el modelo IMRPhenomXPHM.	125
D.1.1.1.3. Resultados para el modelo IMRPhenomXHM y IMRP- henomHM.	126
D.1.2. Estudio de la precesión.	127
D.1.2.1. Comparación de las diversas opciones para el modelo IMRPhenomXPHM.	127
D.1.2.2. Comparación con el modelo por defecto.	128
D.2. GW150914.	129
D.2.1. Estudio de la convergencia.	129
D.2.1.1. Resultados para el modelo IMRPhenomXHM.	129
D.2.1.1.1. Resultados para el modelo IMRPhenomXP.	130
D.2.1.2. Resultados para el modelo IMRPhenomXPHM.	131
D.3. GW190814.	132
D.3.1. Estudio de la convergencia.	132
D.3.1.1. Resultados para el modelo IMRPhenomXPHM.	132
D.3.1.2. Resultados para el modelo IMRPhenomXP.	133
Bibliografía	135

Índice de figuras

1.1. Ilustración de la carta $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ que surge cuando los dos sistemas de coordenadas se solapan. Imagen del libro [144].	7
1.2. Espacio tangente a \mathcal{P} con una métrica $g(\mathcal{P})$ localmente plana. Imagen modificada del libro [116].	12
1.3. Concepto de variedad Riemanniana. Imagen del libro [116].	12
1.4. Conmutador de una derivada covariante. Imagen del artículo [105].	15
2.1. Imagen derecha: El cono de luz, muestra los caminos que pueden seguir los rayos de luz hacia delante y hacia atrás en el tiempo. Imagen izquierda: Conos de luz para distintas distancias del radio de Schwarzschild. Las trayectorias permitidas de las partículas, se encuentran en el cono de luz. Imagen derecha de [64]. Imagen izquierda modificada del libro [116].	24
2.2. Conos de luz para distintas distancias en el exterior y el interior de un agujero negro de Schwarzschild. Imagen del libro [116].	25
2.3. Geometría de Schwarzschild en las coordenadas de Kruskal-Szekeres. Las regiones <i>I</i> y <i>II</i> se corresponden al exterior e interior de un agujero negro y las regiones <i>III</i> y <i>IV</i> , al exterior e interior de un agujero blanco. En el plano de Kruskal-Szekeres XT, las curvas con $r = cte$ son hipérbolas cuyas asíntotas son $X = \pm T$; mientras que las curvas con $t = cte$ son las líneas rectas punteadas correspondientes al horizonte de sucesos. [116], [93]. Imagen del libro [116].	27
2.4. Puente de Einstein-Rosen. El agujero de gusano de Schwarzschild, conecta dos regiones distantes de un único universo asintóticamente plano. Imagen del libro [93].	27
2.5. Espacio-tiempo resultante del colapso gravitatorio de un cuerpo esférico. Figura izquierda: Las regiones <i>III</i> y <i>IV</i> son “cubiertas” por materia en colapso; mientras que parte del agujero negro de la región <i>II</i> es producido. Figura derecha: Captura de cualquier partícula o rayo de luz en la región $r < 2M$. En el horizonte de sucesos, el tiempo reemplaza al espacio apuntando hacia adelante. El flujo temporal lo vuelca todo hacia una singularidad más lejana dentro del agujero negro, donde la densidad se hace infinita y el tiempo termina. Cada triángulo se corresponde con una superficie esférica en un instante de tiempo determinado. Imagen izquierda del libro [144]. Imagen derecha de [64].	29
2.6. Exposición de 7 millones de segundos del Campo Profundo Sur de Chandra. Muestra cientos de agujeros negros supermasivos, cada uno situado en diferentes galaxias. Imagen de [6].	30
2.7. Imagen izquierda: Primera imagen de un agujero negro, utilizando las observaciones de Event Horizon Telescope en el centro de la galaxia M87. Fuente: [2]. Imagen derecha: Ubicación de HR 6819 en la constelación Telescopium. Fuente: [23].	31

2.8. Violeta: Agujeros negros de masa estelar detectados mediante observaciones electromagnéticas. Azul: Agujeros negros detectados mediante las ondas gravitacionales, desde la primera detección hasta los primeros meses de la primera mitad del tercer periodo de observación <i>O3a</i> . Amarillo: Estrellas de neutrones detectadas mediante observaciones electromagnéticas. Naranja: Estrellas de neutrones detectadas mediante las ondas gravitacionales, desde la primera detección hasta los primeros meses de la primera mitad del tercer periodo de observación <i>O3a</i> . En el centro podemos ver claramente el evento GW190521, resultando en un IMBH de $142M_{\odot}$. Imagen de [80].	32
2.9. Categorías de ondas gravitacionales. Fila superior, de izquierda a derecha: ondas gravitacionales de binarias compactas y ondas gravitacionales continuas. Fila inferior, de izquierda a derecha: ondas gravitacionales asociadas a estallidos cortos y radiación de fondo de microondas asociado a las ondas gravitacionales estocásticas. Imagen modificada de [111] y [44].	34
2.10. Comparación entre la señal reconstruida de la onda gravitacional del primer evento detectado GW150914 visto por el detector <i>H1</i> en Hanford con su señal numérica calculada a partir de la teoría de la relatividad, para las tres etapas del evento: fase de evolución suave, fase de fusión y fase de estabilización. Imagen de [84].	36
2.11. La línea discontinua muestra la región con un 90% de probabilidad de contener el valor real de masa y espín del agujero negro final, obtenido a partir de los datos en la fase de evolución suave. La línea discontinua punteada muestra la misma región, obtenida a partir de los datos en la fase de fusión y estabilización. La línea continua señala la región sobre ambos parámetros al utilizar la descripción basada en la teoría de la relatividad numérica en todas las fases de la onda gravitacional, IMR en inglés. Imagen de [86].	37
2.12. Deformación de un anillo de masas de prueba debido a las polarizaciones $+$ y \times de la onda gravitacional. Imagen del libro [88].	42
2.13. Regiones del espacio-tiempo alrededor de la fuente de ondas gravitacionales. Imagen de [134].	43

- 3.1. Evento GW150914 observado por Advanced LIGO Hanford (H1) y Advanced LIGO Livingston (L1). Las series temporales han sido filtradas con filtro pasa banda de 35 – 350 Hz para suprimir las fluctuaciones fuera de la banda de frecuencia más sensible de los detectores, y filtros elimina banda para suprimir las líneas espectrales de los instrumentos que podemos observar en la figura (3.5). Gráficos de la primera fila: Deformación de los brazos de ambos detectores. Como la señal llegó primero a *L1* y 6.9 ± 0.5 ms después a *H1*, se ha comparado en la figura de la derecha los datos de los detectores con *H1* desplazado -0.4 ms, para considerar la orientación relativa de ambos. Gráficos de la segunda fila: Deformación de las ondas gravitacionales aplicando la banda 35 – 350 Hz. La onda en rojo representa la forma de onda extraída de la relatividad numérica consistente con los parámetros obtenidos de este evento. Las áreas sombreadas representan regiones con un 90 % de credibilidad para dos reconstrucciones de formas de onda independientes. El primero, representado en gris oscuro, modela la señal utilizando plantillas de forma de onda. El otro, representado en gris claro, no utiliza un modelo astrofísico, sino que determina la señal como una combinación de ondas sinusoidales gaussianas. Gráficos de la tercera fila: Residuos que quedan al extraer la forma de onda numérica filtrada de la serie temporal del detector filtrado. Gráficos de la cuarta fila: Aumento de la frecuencia de los datos de la deformación con el tiempo. Imagen de [9]. 52
- 3.2. Esquema de un detector Advanced LIGO, que incluye las siguientes mejoras respecto a los detectores Initial LIGO: una cavidad óptica para reflejar la luz láser repetidamente en cada brazo, un espejo de reciclaje de potencia que incrementa la potencia del láser y un espejo de reciclaje de señal para optimizar la señal extraída en el fotodetector. Imagen de [10]. 54
- 3.3. Detectores interferométricos de ondas gravitacionales. De izquierda a derecha: Observatorio LIGO Livingston, Louisiana, Estados Unidos; Observatorio LIGO Hanford, Washington, Estados Unidos; Observatorio Virgo, Pisa, Italia. Imágenes de [25], [143]. 55
- 3.4. Gráficos del balance de ruido en los canales de ondas gravitacionales de los dos detectores Advanced LIGO: figura izquierda, detector L1 para bajas frecuencias; figura derecha, detector H1 para altas frecuencias. La suma del ruido de disparo junto con el ruido de presión de radiación, se conoce como ruido cuántico. El acoplamiento del movimiento residual de los grados de libertad Michelson (MICH) y los existentes en la cavidad de reciclaje de señal (SRCL) al canal de ondas gravitacionales, se reduce mediante una técnica de cancelación anticipada. En bajas frecuencias, actualmente existe una brecha significativa entre el ruido de deformación medido y la suma de la raíz cuadrada de los ruidos investigados. En altas frecuencias, la sensibilidad está limitada por el ruido de disparo y la fluctuación del haz en la entrada. Imágenes del artículo [10]. 56
- 3.5. Sensibilidad de deformación para el detector LIGO Livingston (L1) y el detector LIGO Hanford (H1) durante el primer periodo de observación. En la curva gris, se representa la sensibilidad en el diseño Advanced LIGO. La curva verde, señala la sensibilidad alcanzada durante las pruebas finales de recopilación de datos (S6) en initial LIGO. Imagen de [10]. 58

3.6. Pasos en el proceso de búsqueda de la señal en una tubería. Cuadrado azul: Los datos de los detectores son promediados para crear la PSD necesaria, para poder colocar el catálogo de plantillas de manera que cubran el espacio de parámetros de la búsqueda. Cuadrados amarillos: Los momentos en que los datos del detector contienen ruidos transitorios fuertes, se eliminan o se vetan. A continuación, los datos de cada detector se comparan, se filtran y los disparadores se generan mediante el establecimiento de umbrales y la agrupación de la serie temporal de la relación SNR. Se calcula una prueba χ^2 para cada disparador y la SNR se vuelve a ponderar por el valor de la estadística de χ^2 , para distinguir mejor entre señal y ruido. Cuadrados rojos: La tubería determina qué disparadores sobreviven a las pruebas de tiempo y coincidencia de la plantilla, descartando aquellos que se encuentren en momentos de mala calidad de los datos. Los disparadores que pasan las pruebas, son etiquetados como eventos candidatos. Finalmente, se realizan múltiples desplazamientos temporales para generar un ruido de fondo, que se utiliza para asignar una significancia estadística a los eventos candidatos. Imagen del artículo [137].	60
3.7. Forma de onda gravitacional típica procedente de la coalescencia de una binaria compacta indicando, en cada fase, el formalismo que puede ser utilizado para el modelado de la señal. Imagen modificada de [110].	64
3.8. Formas de onda generadas con el armónico dominante (izquierda) y los subdominantes (derecha), en función de la inclinación desde 0 a $\pi/2$, puesto que por simetría ecuatorial de $\pi/2$ a π , el efecto sería equivalente. Imagen de [115].	66
3.9. Amplitud de $Y_{l,m}^{-2}$ respecto la inclinación. Imagen de [115].	66
3.10. Región del espacio de parámetros donde las contribuciones de los modos subdominantes son importantes para la detección (izquierda) y para la estimación de parámetros (derecha). Imagen de [138].	67
3.11. Gráfico que muestra cómo se definen los ángulos de precesión. el vector normal indica la línea de visión del observador, \hat{L} y \hat{J} son los vectores de momento angular orbital y momento angular total respectivamente. Imagen de [46].	71
3.12. Esquema del método de Monte Carlo basado en cadenas de Márkov (MCMC) y del algoritmo de muestreo anidado, que muestrean la distribución de probabilidad a posteriori. Imagen del artículo [132].	78
3.13. Esquema del primer paso del algoritmo de muestreo anidado. Los contornos anidados, contienen el volumen de la distribución de probabilidad a priori. Imagen del artículo [128].	80
3.14. Las 5 primeras iteraciones para un conjunto de tres puntos. Los contornos de verosimilitud se van contrayendo un área $\exp -1/3$. Imagen del artículo [128].	80
4.1. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con las masas de la binaria, para el modelo IMRPhenomXHM, variando los parámetros del algoritmo.	87
4.2. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con las masas de la binaria, para el modelo IMRPhenomXP, variando los parámetros del algoritmo.	88

4.3. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con las masas de la binaria, para el modelo IMRPhenomXPHM, variando los parámetros del algoritmo. 89

4.4. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori unidimensional de los parámetros q y χ_{eff} , para los modelos IMRPhenomXPHM (fila inferior) y IMRPhenomXP (fila superior), variando los parámetros del algoritmo. 90

4.5. Evolución de las muestras del parámetro q para los modelos IMRPhenomXPHM (izquierda) y IMRPhenomXP (derecha) ambos con $N_{live} = 2048$ y $n_{act} = 10$ 90

4.6. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con las masas de la binaria, para los modelos IMRPhenomXPHM y IMRPhenomXP, con $N_{live} = 2048$ y $n_{act} = 10$ 91

4.7. Evolución de las muestras del parámetro q para los modelos IMRPhenomXPHM (izquierda) y IMRPhenomXHM (derecha) ambos con $N_{live} = 2048$ y $n_{act} = 10$ 92

4.8. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con las masas de la binaria, para IMRPhenomXPHM, con $N_{live} = 2048$ y $n_{act} = 10$, variando los parámetros del modelo. 92

4.9. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con las masas de la binaria, para el modelo por defecto y el modelo rojo, con $N_{live} = 2048$ y $n_{act} = 10$ 93

4.10. Distribuciones de probabilidad a posteriori unidimensionales de las masas de la binaria, el cociente de masas y el espín efectivo, para el modelo azul a estudiar, los dos modelos naranja y verde del catálogo GWTC-1 y el modelo IMRPhenomPv2 de la literatura en rojo y rosa para los escenarios $1g$ y $2g$ respectivamente. 94

4.11. Distribuciones de probabilidad a posteriori unidimensionales de las masas de la binaria, el cociente de masas y el espín efectivo, para el modelo azul a estudiar y el modelo IMRPhenomHM de la literatura con los mismos priors utilizados (naranja) y en rojo y rosa para los escenarios $1g$ y $2g$ respectivamente. 95

4.12. Distribuciones de probabilidad a posteriori unidimensionales de las masas de la binaria, el cociente de masas y el espín efectivo, para el modelo azul a estudiar y el modelo SEONRv4HM de la literatura con los mismos priors utilizados (naranja) y en rojo y rosa para los escenarios $1g$ y $2g$ respectivamente. 96

4.13. Distribuciones de probabilidad a posteriori unidimensionales para q y χ_{eff} 96

4.14. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con las masas de la binaria, para el modelo IMRPhenomXP, variando los parámetros del algoritmo. 97

4.15. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con las masas de la binaria, para el modelo IMRPhenomXPHM (izquierda) y IMRPhenomXP (derecha), variando los parámetros del algoritmo. 98

4.16. Distribuciones de probabilidad a posteriori unidimensionales para los parámetros q y χ_{eff} , para los modelos IMRPhenomXP (figura superior) y IMRPhenomXPHM (figura inferior), variando los parámetros del algoritmo.	99
4.17. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con las masas de la binaria, para el modelo IMRPhenomXPHM (izquierda) y IMRPhenomXHM (derecha), variando los parámetros del algoritmo.	100
4.18. Distribuciones de probabilidad a posteriori unidimensionales de las masas y espines de la binaria, para el modelo IMRPhenomXPHM y IMRPhenomXP con $N_{live} = 2048$ y $n_{act} = 10$, comparándolos con los modelos de la literatura.	100
4.19. Distribuciones de probabilidad a posteriori unidimensionales para q y χ_{eff}	101
4.20. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con las masas de la binaria para el modelo IMRPhenomXP, variando los parámetros del algoritmo.	102
4.21. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con las masas de la binaria para el modelo IMRPhenomXPHM, variando los parámetros del algoritmo.	103
4.22. Distribuciones de probabilidad a posteriori unidimensionales de las masas, espines de la binaria, el cociente de masas y el espín efectivo para el modelo IMRPhenomXPHM con $N_{live} = 2048$ y $n_{act} = 10$ comparándolo con los modelos del catálogo.	104
4.23. Distribuciones de probabilidad a posteriori unidimensionales para q y χ_{eff}	105
D.1. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con la ubicación de la fuente en la esfera celeste, el ángulo de polarización y la fase orbital, para el modelo IMRPhenomXHM, variando los parámetros del algoritmo.	123
D.2. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con los espines y la distancia luminosa, para el modelo IMRPhenomXHM, variando los parámetros del algoritmo.	124
D.3. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con la ubicación de la fuente en la esfera celeste, el ángulo de polarización y la fase orbital, para el modelo IMRPhenomXP, variando los parámetros del algoritmo.	124
D.4. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con los espines y la distancia luminosa, para el modelo IMRPhenomXP, variando los parámetros del algoritmo.	125
D.5. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con la ubicación de la fuente en la esfera celeste, el ángulo de polarización y la fase orbital, para el modelo IMRPhenomXPHM, variando los parámetros del algoritmo.	125

D.6. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con los espines y la distancia luminosa, para el modelo IMRPhenomXPHM, variando los parámetros del algoritmo.	126
D.7. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con la ubicación de la fuente en la esfera celeste, el ángulo de polarización y la fase orbital, para los modelos IMRPhenomXHM y IMRPhenomHM.	126
D.8. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con los espines y la distancia luminosa, para los modelos IMRPhenomXHM y IMRPhenomHM.	127
D.9. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con la ubicación de la fuente en la esfera celeste, el ángulo de polarización y la fase orbital, para IMRPhenomXPHM, variando los parámetros del modelo.	127
D.10. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con los espines y la distancia luminosa, para IMRPhenomXPHM, variando los parámetros del modelo.	128
D.11. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con la ubicación de la fuente en la esfera celeste, el ángulo de polarización y la fase orbital, para el modelo por defecto y el modelo rojo, con $N_{live} = 2048$ y $n_{act} = 10$	128
D.12. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con los espines y la distancia luminosa, para el modelo por defecto y el modelo rojo, con $N_{live} = 2048$ y $n_{act} = 10$	129
D.13. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con la ubicación de la fuente en la esfera celeste, el ángulo de polarización y la fase orbital, para el modelo IMRPhenomXHM, variando los parámetros del algoritmo.	129
D.14. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con los espines y la distancia luminosa, para el modelo IMRPhenomXHM, variando los parámetros del algoritmo.	130
D.15. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con la ubicación de la fuente en la esfera celeste, el ángulo de polarización y la fase orbital, para el modelo IMRPhenomXP, variando los parámetros del algoritmo.	130
D.16. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con los espines y la distancia luminosa, para el modelo IMRPhenomXP, variando los parámetros del algoritmo.	131

D.17. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con la ubicación de la fuente en la esfera celeste, el ángulo de polarización y la fase orbital, para el modelo IMRPhenomXPHM, variando los parámetros del algoritmo.	131
D.18. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con los espines y la distancia luminosa, para el modelo IMRPhenomXPHM, variando los parámetros del algoritmo.	132
D.19. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con la ubicación de la fuente en la esfera celeste, el ángulo de polarización y la fase orbital, para el modelo IMRPhenomXPHM, variando los parámetros del algoritmo.	132
D.20. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con los espines y la distancia luminosa, para el modelo IMRPhenomXPHM, variando los parámetros del algoritmo.	133
D.21. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con la ubicación de la fuente en la esfera celeste, el ángulo de polarización y la fase orbital, para el modelo IMRPhenomXP, variando los parámetros del algoritmo.	133
D.22. Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con los espines y la distancia luminosa, para el modelo IMRPhenomXP, variando los parámetros del algoritmo.	134

Índice de abreviaturas

ADM	A rnowitz - D eser - M isner
BBH	B inary B lack H ole
BF	B ayes F actor
BH	B lack H ole
BNS	B inary N eutron S tar
CBC	C ompact B inary C oalescence
CLIO	C ryogenic L aser I nterferometer O bservatory
DECIGO	D eci-Hertz I nterferometer G ravitational wave O bservatory
EOB	E ffective O ne B ody
ESA	E uropean S pace A gency
FAR	F alse A larm R ate
HPDI	H ighest P osterior D ensity I nterval
IMBH	I ntermediate B lack H ole
IMR	I nspiral M erger R ingdown
KAGRA	K amioka G ravitational W ave D etector
LIGO	L aser I nterferometer G ravitational-Wave O bservatory
LISA	L arge I nterferometer S pace A ntenna
LSC	L IGO S cientific C ollaboration
LVC	L SC- V irgo C ollaboration
MCMC	M arkov C hain M onte C arlo
MPI	M essage P assing I nterface
MSA	M ultiple s cale a nalysis
NASA	N ational A eronautics and S pace A dmistration
NNLO	N ext-to- n ext-leading o rders
NR	N umerical R elativity
NSBH	N eutron S tar B lack H ole
PN	P ost- N ewtonian
PSD	P ower S pectral D ensity
SBH	S tellar B lack H ole
SMBH	S upermassive B lack H ole
SNR	S ignal-to- N oise R atio
SPA	S tationary P hase A pproximation
TT	T ransverse- T raceless

Prefacio

Albert Einstein publicó en 1915 la actual teoría de la gravedad, conocida como la teoría de la relatividad general, en un conjunto de cuatro artículos [41], [42], [40]. En ellos, describía que la curvatura del espacio-tiempo codificada en el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ se encuentra relacionada con el tensor energía-momento de la materia presente $T_{\mu\nu}$, a través de las ecuaciones,

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (1)$$

Esta teoría geométrica establece que el espacio-tiempo actúa sobre la materia diciéndole cómo moverse, mientras que la materia actúa sobre el espacio-tiempo diciéndole cómo curvarse. Hasta la fecha, la teoría de la relatividad ha descrito exitosamente el comportamiento de la gravedad, prediciendo la precesión anómala del perihelio de Mercurio, la desviación de la luz provocada por fuertes fuentes gravitacionales y la generación y propagación de las ondas gravitacionales a través del universo.

Las ondas gravitacionales conforman una de las predicciones comprobadas más recientes de la teoría. Cualquier cuerpo es capaz de producir estas deformaciones ondulatorias del espacio-tiempo, si sufren una aceleración repentina. Sin embargo, únicamente los eventos más violentos existentes en el universo son capaces de producir ondas gravitacionales que podamos detectar.

Uno de los pioneros en la búsqueda de las ondas gravitacionales fue Joseph Weber, quien en 1968 afirmó haber observado “una buena evidencia” de las ondas gravitacionales. No obstante, sus resultados fueron controvertidos al no haber podido ser replicados y al haberse encontrado errores en el código de su programa. En 1974, Hulse y Taylor proporcionaron la primera evidencia indirecta de la existencia de ondas gravitacionales al medir el efecto de su emisión en el periodo de la binaria de estrellas de neutrones *PSRB1913 + 16*. La colaboración LIGO, fundada en 1997, tiene como misión la detección directa de dichas ondas. Junto con la colaboración Virgo, desde la primera observación en 2015 hasta la primera mitad del tercer periodo de observación *O3a* (01/04/2019 - 01/10/2019), se han podido detectar 50 eventos de ondas gravitacionales procedentes de la coalescencia de binarias compactas de agujeros negros y estrellas de neutrones. La búsqueda de este tipo de ondas gravitacionales, se basa en el método del filtrado adaptado que requiere de modelos precisos de las señales que se esperan detectar. Sin embargo hasta 2012, dichas búsquedas se limitaron, a la utilización de modelos donde sólo se consideraba la parte dominante de la radiación gravitacional, despreciando los términos subdominantes. En esta tesis, pondremos a prueba el nuevo modelo IMRPhenomXPHM [108], que incluye el efecto de estos armónicos subdominantes, además de describir la onda con expresiones cerradas en el dominio de las frecuencias, a través de la estimación de parámetros de eventos de los tres periodos de observación LIGO-Virgo.

Estructura.

Esta tesis se compone de cinco capítulos, cuyo contenido es detallado a continuación.

- El primer capítulo constituye una introducción a la teoría de la relatividad general, necesaria para poder entender el concepto de onda gravitacional.
- El segundo capítulo está dedicado a la descripción de las ondas gravitacionales. Éste, puede dividirse en dos partes.
 - La primera parte explica el origen y formación de los objetos que originaron las ondas estudiadas, los agujeros negros. Concluyendo con algunas de las evidencias directas e indirectas más interesantes que conocemos de dichos objetos.
 - La segunda parte describe las ondas gravitacionales, introduciéndolas a través de la clasificación dada por los miembros de la colaboración científica LIGO, centrándonos en aquellas que resultan de nuestro interés: las producidas por la coalescencia de binarias compactas. A continuación, se deriva de forma general las ondas gravitacionales, a partir de los conceptos descritos en el capítulo anterior y se analiza el efecto de dichas ondas sobre masas de prueba. Finalmente se describe su emisión, producida por un sistema binario de estrellas a través del formalismo cuadrupolar.
- El tercer capítulo trata de explicar cómo se detectan y caracterizan las señales de ondas gravitacionales procedentes de la coalescencia de binarias compactas. Se detallará el funcionamiento de los detectores LIGO y de qué se componen los datos recibidos, así como un análisis del procedimiento seguido para tratarlos a través de tuberías de filtrado adaptado. En este análisis se hace necesario el uso de diversos catálogos de modelos de formas de onda de la señal, donde nos centraremos en nuestro modelo estudiado IMRPhenomXPHM [108] y en la importancia de los armónicos subdominantes. Finalmente, se describirán las herramientas necesarias para realizar mediciones astrofísicas: la inferencia bayesiana y la estimación de parámetros, utilizando el algoritmo de muestreo estocástico, anidado y estático en paralelo.
- El cuarto capítulo describe el trabajo original realizado en esta tesis, analizando los resultados.
- El quinto capítulo muestra las conclusiones obtenidas.

Los tres primeros capítulos proporcionan el conocimiento necesario fundamental para adentrarse en la astronomía de las ondas gravitacionales, intentando buscar el equilibrio justo entre el formalismo matemático y una interpretación intuitiva. Únicamente los dos últimos capítulos contienen resultados originales.

Capítulo 1

Epítome de la teoría de la relatividad.

Sección 1.1. Planteamiento inicial.

Sección 1.2. Conceptos básicos.

Sección 1.3. Geometría del espacio-tiempo.

Sección 1.4. Derivación de las ecuaciones de campo de Einstein.

Este capítulo constituye un breve resumen de la teoría de la relatividad en vista de que algunos conceptos importantes, tratados a lo largo del documento, son una consecuencia directa de nuestra actual teoría de la gravedad. El objetivo del texto no es el de pretender presentar una descripción matemática rigurosa, total y completa de la teoría, sino el de contener la profundidad y amplitud conceptual suficientes como para motivar dichas nociones.

1.1. Planteamiento inicial.

La gravedad es la fuerza fundamental más débil de las cuatro interacciones fundamentales existentes en la naturaleza. A gran escala, sin embargo, juega un papel fundamental en la construcción del universo [30]. Tras la ley de gravitación universal de Newton, el concepto de gravedad quedó adherido a Newton siendo una piedra angular incuestionable para muchos físicos hasta principios del siglo XX. En 1915 Albert Einstein publicó una nueva teoría gravitatoria, la teoría de la relatividad general, que describe geoméricamente la gravedad como un efecto de la curvatura del espacio-tiempo sobre la materia [93].

Esta teoría junto con la teoría de la relatividad especial publicada por Albert Einstein en 1905, conforman una única teoría de la relatividad que describe la gravedad. De hecho, la relatividad especial es una aproximación al espacio-tiempo curvo válida en regiones en las cuales la escala de los fenómenos estudiados es pequeña en comparación con la escala en la que empieza a notarse la curvatura del espacio-tiempo [145].

A continuación, presentaremos brevemente el planteamiento inicial que, durante un periodo de diez años, guió a Einstein en la construcción de una nueva teoría gravitatoria relativista métrica.

1.1.1. Incorporando la gravedad a la relatividad especial.

La teoría de la relatividad especial, proporcionó una formulación covariante de Lorentz¹ tanto para el campo electromagnético como para la dinámica de partículas [29]. Esta teoría introdujo conceptos nuevos sobre el espacio-tiempo, además de otros muchos fenómenos como la dilatación del tiempo, la contracción espacial, la equivalencia entre masa y energía o un límite universal de la velocidad, entre otros. Sin embargo, algunas teorías aceptadas hasta ese momento resultaban inconsistentes con el nuevo modelo. Concretamente, la relatividad especial fallaba al responder las siguiente pregunta: ¿Cómo debe conciliarse con la gravedad?

¹La covariancia de Lorentz o principio especial de la relatividad afirma que todas las leyes físicas y las ecuaciones que las describen, tienen la misma forma en cualquier sistema de referencia inercial [116].

Durante más 200 años, la ley de la Gravitación Universal de Newton había sido aceptada para describir la fuerza de la gravedad. En este modelo, donde el potencial gravitatorio Φ viene determinado por la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho, \quad (1.1)$$

la gravedad actúa a distancia instantáneamente, puesto que dicha ecuación (1.1) no tiene una dependencia explícita con el tiempo, violando la base de la relatividad especial por la cual ninguna señal física puede propagarse a velocidades más rápidas que la de la luz. Además, la densidad de materia ρ depende del sistema de referencia ² incumpliendo el requerimiento de covariancia de Lorentz [19], [29].

En 1907, Einstein inició sus estudios en la búsqueda de un nuevo sucesor de la relatividad especial. Utilizando su principio de equivalencia como guía, tardó 8 años en elaborar la nueva teoría.

1.1.2. El principio de equivalencia.

El principio de equivalencia en su forma débil, conocido simplemente como principio de equivalencia débil, fue establecido experimentalmente por Galileo Galilei en su obra “Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze” ³ [49] publicada en 1638, donde describe utilizando dos péndulos de diferente composición ⁴, que en un campo gravitatorio todos los cuerpos caen con la misma aceleración, independientemente de su masa y composición. En el año 1687, Newton formalizó este principio en el párrafo inicial de su obra “Philosophiæ naturalis principia mathematica” ⁵[96], donde asentó la equivalencia entre la masa inercial y la gravitacional, y dedujo las ecuaciones de movimiento mostrando que todas las masas caen con la misma aceleración bajo la atracción gravitatoria de la Tierra [99], [98].

Considerando la segunda ley de Newton, podemos ver que la masa inercial m_i ⁶ de una partícula:

$$\vec{F} = m_i\vec{a}, \quad (1.2)$$

donde \vec{F} es la suma de todas las fuerzas experimentadas por la partícula y \vec{a} es la aceleración de dicha partícula, es una cantidad independiente de la naturaleza de \vec{F} . Mientras que la masa gravitatoria m_g ⁷, aparece particularmente en la fuerza gravitatoria:

$$\vec{F}_g(\vec{x}) = -m_gU(\vec{x})\hat{r}, \quad (1.3)$$

² ρ depende del sistema de referencia, dado que depende a su vez de: la masa cuya medición depende del sistema, y del espacio perceptible a contracciones en sistemas que se mueven a altas velocidades [19].

³“Discurso y demostración matemática, en torno a dos nuevas ciencias”, donde pone fin a la física aristotélica dejando paso a los fundamentos de la mecánica como ciencia.

⁴La autenticidad del famoso experimento realizado por Galileo en el que deja caer esferas de diferente masa desde la torre de Pisa, está en duda. La historia se basaba en la frase de una biografía escrita por su asistente personal 60 años después del supuesto experimento. La veracidad de las biografías escritas en el contexto del siglo XVII, era menos importante que embellecer la imagen del personaje [21].

⁵“Principios matemáticos de la filosofía natural”, conocida también como “Principia”, es el pilar fundamental de la mecánica newtoniana.

⁶La masa inercial, en cierto sentido, mide la cantidad de inercia. En mecánica newtoniana, la inercia es una propiedad conocida como la resistencia a un cambio en la velocidad de una partícula [48].

⁷La masa gravitatoria, mide la carga gravitacional de la partícula.

donde $U(\vec{x})$ es el potencial gravitatorio [116]. Sin embargo, diversos experimentos llevados a cabo por Newton, demostraron que:

$$m_i = m_g. \quad (1.4)$$

En consecuencia, si la masa inercial y la gravitatoria son equivalentes, entonces el principio de equivalencia débil se mantiene. Por el contrario, si los experimentos invalidan este principio, también invalidarían la equivalencia entre ambas [98].

Una consecuencia inmediata del principio de equivalencia débil es que la ecuación de movimiento de una partícula con masa inercial m_i en un campo gravitatorio

$$\vec{a} = -\frac{m_g}{m_i}U(\vec{x})\hat{r}, \quad (1.5)$$

muestra que la trayectoria a seguir es independiente de la naturaleza de la partícula. Es decir, en caída libre el movimiento de las partículas es universal [116], [19].

Este fue el principio de equivalencia conocido, en su forma débil, desde 1687 hasta 1908 cuando Einstein lo redefinió elevando la idea de la universalidad de las interacciones gravitacionales al estatus de principio fundamental de equivalencia.

1.1.2.1. Desde la universalidad de las interacciones gravitacionales a principio fundamental de equivalencia: Localidad.

En la física aristotélica, podemos encontrar las primeras ideas sobre el concepto de espacio absoluto. Copérnico nos deja otro rastro de dicha noción en su obra “De revolutionibus orbium coelestium”⁸ [37] al utilizar el concepto de una esfera inmóvil de estrellas [62]. Formalmente el espacio y tiempo absolutos fueron introducidos por Newton en 1687 en su obra “Principia”, en la cual expone que el tiempo y espacio absolutos son aspectos independientes de la realidad objetiva. En concreto: “*El espacio absoluto, en su propia naturaleza, sin tener en cuenta nada externo, permanece siempre similar e inamovible.*” Este concepto fue clave para el desarrollo de su teoría de la gravedad; sin embargo, basado en múltiples evidencias, como por ejemplo la desviación de un cometa al pasar cerca del Sol, confirman el hecho de que dicha noción es inobservable e inexistente [93].

Einstein argumentó en contra de la existencia de un sistema de referencia ideal tal y como se asume en la teoría de Newton. De acuerdo con Einstein, la física es siempre y en todas partes localmente Lorentziana, es decir, localmente las leyes de la relatividad especial son válidas [93].

El corrimiento al rojo gravitacional conforma una evidencia clave para la formulación del principio de equivalencia de Einstein. Formulado con la teoría de Newton, Einstein logró demostrar en 1911 que, a partir de la ley de conservación de la energía, un fotón inicialmente en reposo que experimenta una caída libre dentro de un campo gravitatorio, se ve afectado por dicho campo. Sea una partícula inicialmente en reposo cuya masa en reposo es m , cae en caída libre desde una altura h dentro de un campo gravitatorio g desde un punto \mathcal{A} hasta un punto \mathcal{B} . Adquirirá una energía cinética mgh . Su energía total será entonces,

$$m + mgh. \quad (1.6)$$

En \mathcal{B} la partícula se aniquila convirtiendo su masa total en reposo más su energía cinética en un fotón cuya energía total es la misma. Supongamos que este fotón viaja

⁸“Sobre los giros de los orbes celestes”, publicada en el año 1543, es la obra donde expuso su teoría heliocéntrica.

de nuevo hacia arriba dentro del campo gravitatorio hasta llegar a \mathcal{A} . Si no interactúa con la gravedad, tendrá la energía inicial. En \mathcal{A} el fotón vuelve a convertirse en otra partícula de masa en reposo m , de manera que el proceso puede repetirse, más un exceso de energía mgh . Para evitar esta contradicción del principio de conservación de la energía, Einstein observó que el fotón debía entonces sufrir un corrimiento al rojo. Es decir, la energía del fotón debe de decrecer. La energía del fotón debe cumplir,

$$E_{abajo} = E_{arriba}(1 + gh). \quad (1.7)$$

La pérdida de energía debida al trabajo realizado en contra de la gravedad implica una caída en la frecuencia y en consecuencia, un incremento en la longitud de onda. Sea $z = \Delta\lambda/\lambda$ un parámetro conocido como el parámetro de corrimiento al rojo, entonces:

$$1 + z = \frac{\lambda_{arriba}}{\lambda_{abajo}} = \frac{h\nu_{abajo}}{h\nu_{arriba}} = \frac{E_{abajo}}{E_{arriba}} = 1 + gh. \quad (1.8)$$

El corrimiento hacia el rojo predicho por esta fórmula, ha sido verificado en múltiples ocasiones [93].

Inspirado por sus estudios sobre el corrimiento al rojo gravitacional, por los experimentos llevados a cabo por Loránd Eötvös a finales del siglo XIX y principios del XX ⁹ [145], y tras el famoso experimento mental del ascensor en caída libre ¹⁰, Einstein (1908, 1911) tuvo las evidencias necesarias para postular que la “desaparición” de la gravedad en caída libre o su “presencia” en un marco acelerado se podía aplicar a todas las leyes de la física. En otras palabras, todos los efectos de un campo gravitacional uniforme son idénticos a los efectos de la aceleración uniforme de un sistema coordinado [93], [145], [15]. Este principio generaliza un resultado propio de la teoría de la gravedad de Newton aplicado únicamente a la mecánica de partículas, afirmando una correspondencia similar a todas las leyes de la física, incluidas las ecuaciones de Maxwell para el electromagnetismo [93].

La existencia del corrimiento al rojo gravitacional, puede deducirse utilizando el principio de equivalencia. Consideremos dos observadores situados dentro de un cohete en aceleración constante g , separados por una distancia h en la dirección de dicha aceleración. Supongamos que, cuando el cohete estaba en reposo en un sistema de coordenadas inercial, el observador situado en el suelo del cohete envía un fotón al que está en la parte superior. Para que el fotón llegue a su destino, será necesario un tiempo de $t = h$. En este tiempo, el observador receptor del fotón adquirirá una velocidad $v = gt = gh$. Al recibirlo, detectará el fotón observando un corrimiento al rojo Doppler $z = v = gh$; resultado idéntico al de la (1.8). El principio de equivalencia requiere que, si este corrimiento al rojo gravitacional es observado por un experimento llevado a cabo bajo condiciones de aceleración uniforme y en ausencia de campo gravitatorio, entonces el mismo corrimiento al rojo gravitacional debe ser observado por otro experimento llevado a cabo bajo unas condiciones en las que exista un campo gravitatorio uniforme pero no una aceleración. En consecuencia, por el principio de equivalencia, uno puede derivar la ecuación (1.8) aplicada a la situación con campo gravitatorio [93].

⁹Estos experimentos tenían como objetivo medir la correlación entre la masa inercial y la gravitatoria, demostrando su equivalencia. El experimento original obtuvo una precisión de $5 \cdot 10^{-9}$ que fueron perfeccionando hasta $3 \cdot 10^{-14}$ [15].

¹⁰Un observador viajando en un ascensor en caída libre dentro de un campo gravitatorio, ve que todos los cuerpos dentro del ascensor se mueven en línea recta uniformemente como si no hubiera gravedad. Por el contrario, sea un ascensor acelerando en el espacio, en ausencia de gravedad, los cuerpos caerán con la misma aceleración debido a su inercia como si hubiera un campo gravitatorio [145].

1.1.2.2. Formulaci3n moderna del principio de equivalencia de Einstein.

Una formulaci3n moderna del principio de equivalencia de Einstein, fue presentada por Robert Dicke en una serie de conferencias realizadas en Les Houches el a1o 1964 [145], en las cuales establece:

- El principio de equivalencia d3bil. Por el cual, cualquier cuerpo de prueba independientemente de su composici3n o estructura interna, cae con la misma aceleraci3n.
- El principio de invariancia local de Lorentz. El resultado realizado en un sistema de referencia en ca3da libre de cualquier experimento no gravitacional local ¹¹, es independiente de la velocidad de dicho sistema.
- El principio de invariancia a la posici3n local. El resultado realizado en el universo de cualquier experimento no gravitacional local, es independiente de d3nde y cu3ndo se realiza [145].

Este principio es una consecuencia directa de la naturaleza geom3trica de cualquier teor3a m3trica gravitatoria, que describa la gravedad como un efecto de la curvatura del espacio-tiempo sobre la materia [146]. De hecho, puede argumentarse ¹² que si el principio de equivalencia de Einstein es v3lido, entonces la gravedad debe satisfacer los siguientes postulados propios de teor3as m3tricas gravitatorias:

- El espacio-tiempo est3 dotado de una m3trica sim3trica.
- Las l3neas de universo de cuerpos de prueba son geod3sicas en esta m3trica.
- En sistemas de referencia locales en ca3da libre, las leyes no gravitacionales de la f3sica son las de la relatividad especial [145], [146].

1.1.2.3. El corrimiento al rojo gravitacional implica que el espacio-tiempo es curvo.

Mientras que Einstein realiz3 su demostraci3n del corrimiento al rojo gravitacional bas3ndose en la teor3a de Newton, Alfred Schild lo estudi3 en base a la relatividad especial analizando experimentos de corrimiento al rojo gravitacional en el campo de la Tierra utilizando un sistema de referencia global de Lorentz fijo al centro de la misma.

Schild argument3 (1960, 1962, 1967) que la existencia del corrimiento al rojo gravitacional mostraba que la relatividad especial no pod3a ser v3lida sobre una regi3n suficientemente extensa [93]. As3 como lo probaron sus experimentos con rayos de luz y part3culas de prueba, globalmente el espacio-tiempo se “aparta” del brillo a pesar del ajuste fino que proporciona la planitud de Lorentz-Minkowski localmente a la f3sica. No especifica qu3 tipo de curvatura existe o si existe en la vecindad de los equipos de observaci3n que utiliz3 o lejos de ellos. Sin embargo, s3 especifica el hecho de que el espacio-tiempo plano de la relatividad especial es inadecuado para describir sus experimentos, motivando por tanto un an3lisis matem3tico de una posible curvatura [93].

¹¹Un experimento no gravitacional local, es aquel realizado en un laboratorio sellado en ca3da libre lo suficientemente peque1o como para que las inhomogeneidades de los campos externos puedan ignorarse en todo su volumen. Adem3s, los efectos de autogravitaci3n deben ser despreciables [146].

¹²Para una mayor discusi3n ver el libro de Clifford M. Will [146], concretamente la p3gina 22.

1.1.3. El principio de Mach.

El principio de equivalencia sugirió la posibilidad de atribuir propiedades del campo gravitatorio a la propia estructura del espacio-tiempo. Los caminos seguidos por cuerpos en un sistema de referencia inercial son geodésicas de la métrica del espacio-tiempo, pero esta métrica no tiene por qué ser siempre la dada por la teoría especial de la relatividad. Quizás el concepto de campo gravitacional no sea realmente un campo en sí mismo, sino una desviación de la geometría del espacio-tiempo proveniente de la geometría plana de la relatividad especial [144].

Ernst Mach y Bernhard Riemann, fueron dos de los científicos más influyentes en la época a favor de una reformulación de la mecánica newtoniana, siendo un factor clave en el desarrollo de la teoría general de la relatividad. En concreto, Ernst Mach, realizaba una crítica sobre los conceptos de espacio y tiempo absolutos publicados en 1883 en su obra “Die Mechanik in ihrer Entwicklung”¹³ [87], que más tarde fue reformulada por Einstein como el principio de Mach [73].

Antes de la formulación de la relatividad general, la relatividad especial, así como otros conceptos del espacio-tiempo previos a ésta, sostenían que la estructura del espacio-tiempo no estaba afectada por los cuerpos presentes en ella. En concreto, el “movimiento inercial” y la “no rotación”, no debían estar influenciadas por la materia en el universo [144]. Argumentando en contra de esta idea, el principio de Mach sustenta que las leyes locales están determinadas por la estructura a gran escala del universo [60]. Toda la materia del universo tenía que contribuir a la definición local de “no aceleración” y “no rotación”; de manera que en un universo desprovisto de materia no debería haber significado alguno para estos conceptos [144].

Aceptando este principio por el cual el espacio-tiempo está influenciado por la presencia de materia, Einstein se embarcó en la búsqueda de una teoría que incorporase además su principio de equivalencia y que fuera compatible con la covariancia de Lorentz.

1.1.4. La relatividad general.

La actual teoría de la gravedad, conocida como la teoría de la relatividad general, fue desarrollada por Einstein entre 1907 y 1915. Fue publicada en 1915 como un conjunto de cuatro artículos “Grundgedanken der allgemeinen Relativitätstheorie und Anwendung dieser Theorie in der Astronomie”¹⁴ [41], “Zur allgemeinen Relativitätstheorie”¹⁵ [42], “Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie”¹⁶ y “Die Feldgleichungen der Gravitation”¹⁷[40], [101].

La nueva teoría propone que las propiedades intrínsecas del espacio-tiempo, independientes del observador, vienen descritas por una métrica que no tiene porqué ser la plana dada por la teoría especial de la relatividad; en realidad, la desviación de la métrica del espacio-tiempo de dicha planitud, es decir, la curvatura del espacio-tiempo, debe tenerse en cuenta para estudiar los efectos físicos que usualmente son atribuidos

¹³“Mecánica y su evolución”, conocida por su traducción realizada en 1893 por Thomas J. McCormick como “Desarrollo histórico-crítico de la mecánica”.

¹⁴“Ideas fundamentales de la teoría general de la relatividad y aplicación de esta teoría en la astronomía”

¹⁵“Sobre la teoría general de la relatividad”

¹⁶“Explicación del movimiento del perihelio de Mercurio a partir de la teoría general de la relatividad”, donde además de explicar la precesión anómala de Mercurio, se introdujo la expansión postnewtoniana.

¹⁷“Las ecuaciones de campo de la gravitación”, donde en este último Einstein expuso las ecuaciones de campo de Einstein.

al campo gravitatorio. De hecho, la curvatura del espacio-tiempo se encuentra relacionada con el tensor energía-momento de la materia presente a través de las ecuaciones de campo de Einstein [144].

1.2. Conceptos básicos.

El campo de la geometría diferencial y de la topología, en concreto el concepto de variedad diferenciable, adquiere gran importancia en el estudio de la estructura del espacio-tiempo. De hecho la variedad que lo describe, la variedad Lorentziana, es un caso especial de una variedad diferenciable llamada variedad pseudoriemanniana.

1.2.1. Variedad.

De manera intuitiva, podemos definir una variedad como un conjunto en el cual la vecindad de cada punto “parece” \mathbb{R}^n , pero con propiedades muy diferentes a nivel global [144]. Formalmente, se define una variedad real, n-dimensional y C^∞ a un conjunto \mathcal{M} formado por una colección de subconjuntos $\{O_\alpha\}$ que satisfacen las siguientes propiedades [144]:

- $\{O_\alpha\}$ cubre \mathcal{M} , es decir cada $p \in \mathcal{M}$ se encuentra en al menos un $\{O_\alpha\}$.
- Para cada α , existe una carta $\Psi_\alpha : O_\alpha \rightarrow U_\alpha$ ¹⁸, donde U_α es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n .
- Tal y como vemos en la siguiente imagen, si cualquiera de los conjuntos O_α y O_β se solapan, $O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$ ¹⁹, entonces podemos considerar que la carta $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ coge puntos en $\psi_\alpha[O_\alpha \cap O_\beta] \in U_\alpha \in \mathbb{R}^n$ a puntos en $\psi_\beta[O_\alpha \cap O_\beta] \in U_\beta \in \mathbb{R}^n$. Requeriremos que estos subconjuntos de \mathbb{R}^n sean abiertos y que esta carta sea C^∞ .

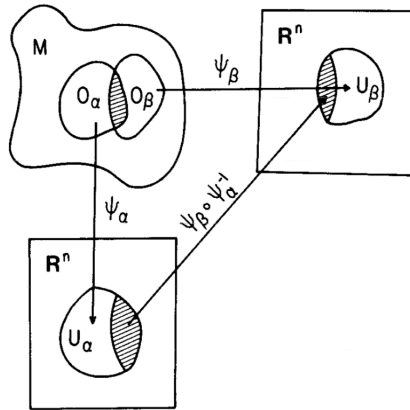


FIGURA 1.1: Ilustración de la carta $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ que surge cuando los dos sistemas de coordenadas se solapan. Imagen del libro [144].

Definimos la topología de una variedad \mathcal{M} imponiendo que todas las cartas Ψ_α sean homeomorfismos²⁰. De manera más precisa, podríamos definir una variedad como un espacio topológico que satisface las propiedades anteriores, donde cada Ψ_α es un homeomorfismo [144].

¹⁸ Ψ_α se le conoce también como mapa o físicamente como sistema de coordenadas, cubre un entorno topológico asignando coordenadas a los puntos dentro de dicho entorno. Un atlas es una colección de cartas que cubre la totalidad de un espacio topológico.

¹⁹ \emptyset es el conjunto vacío.

²⁰Es decir, que Ψ_α sea biyectiva, continua y cuya inversa también sea continua.

Dicho de otra manera, una variedad n -dimensional \mathcal{M} es un espacio topológico cubierto por un conjunto de subconjuntos abiertos $\{O_\alpha\}$, tales que $\cup_\alpha O_\alpha = \mathcal{M}$, donde definimos un homeomorfismo Ψ entre O_α y un subconjunto de \mathbb{R}^n [116].

Si el espacio permite el cálculo diferencial en cada abierto $\{O_\alpha\}$, entonces tenemos una variedad diferenciable [116]. Intuitivamente, una variedad diferenciable es un conjunto de puntos “cosidos” entre sí continua y diferenciablemente, de forma que los puntos en cualquier región suficientemente pequeña puedan ponerse en correspondencia uno a uno con un conjunto abierto de puntos de \mathbb{R}^n . La diferenciabilidad de una variedad, permite introducir sistemas de coordenadas locales, así como curvas, espacios tangentes, vectores tangentes, 1-formas y tensores. El hecho de introducir dichas nociones, no implica que dentro de la variedad diferenciable existan ya conceptos como el de geodésicas, el transporte paralelo, la curvatura o la métrica; se necesita una estructura adicional para definirlos. La rama que introduce las geodésicas, el transporte paralelo y la curvatura se conoce como geometría afín; aquella encargada de introducir además la métrica se conoce como geometría de Riemann [93].

1.2.2. Tensor.

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita cuyos elementos son conocidos como vectores o, si estamos en el espacio tangente V_p ,²¹ como vectores contravariantes $\vec{u} = u^a \partial_a$; y sea V^* su respectivo espacio dual²² cuyos elementos son los conocidos como vectores duales o, si estamos en el espacio cotangente V_p^* ²³ como vectores covariantes o 1-formas $\vec{\theta} = \theta_a dx^a$. Se define un tensor T , de tipo (k, l) sobre V a una aplicación multilineal²⁴ desde los l vectores y k vectores duales a escalares; es decir [144],

$$T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_k \times \underbrace{V \times \dots \times V}_l \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.9)$$

Con las reglas de la adición y del producto escalar, la colección de todos los tensores $\mathcal{T}(k, l)$ de tipo (k, l) tiene la estructura de espacio vectorial. Siendo $n = \dim V = \dim V^*$, la dimensión de $\mathcal{T}(k, l)$ es n^{k+l} .

Definiendo el producto externo entre vectores y vectores duales, y siendo $\{v_\mu\}$ la base de V y $\{v^{\nu^*}\}$ la base de su dual, entonces podemos describir el tensor T del tipo (k, l) como la suma de tensores simples de la siguiente manera [144]:

$$T = \sum_{\mu_1, \dots, \nu_1=1}^n T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v^{\nu_l^*}, \quad (1.10)$$

donde $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$ son las componentes del tensor T con respecto a la base $\{v_\mu\}$.

La asignación de un tensor sobre V_p para cada punto p de una variedad \mathcal{M} se denomina campo tensorial.

²¹Llamamos V_p al espacio tangente V en un punto p de una variedad \mathcal{M} .

²²Conjunto de todas las aplicaciones lineales $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ junto con las operaciones de adición y producto escalar [144].

²³Espacio dual del espacio tangente en p .

²⁴Lineal en cada argumento.

1.3. Geometría del espacio-tiempo.

Lejos de pretender ser un libro de texto y suponiendo un conocimiento previo de geometría diferencial y topología, esta sección tratará de presentar al lector las nociones básicas para poder entender más adelante las ecuaciones de campo de Einstein y sus implicaciones, como los agujeros negros o las ondas gravitacionales.

1.3.1. La geometría euclidiana y la no-euclidiana.

El primer sistema geométrico existente es la geometría euclidiana, origen además de todas las geometrías no-euclidianas y en consecuencia un pilar fundamental para el desarrollo de la teoría de la relatividad. El matemático griego Euclides la formalizó en su obra “Elementos” [45], escrita en el año 300 a.C., a través de cinco postulados:

- Para cada punto P y para cada punto $Q \neq P$, existe una única línea l que pasa a través de P y Q [53].
- Cualquier segmento AB puede ser extendido por un segmento BE congruente al segmento dado CD [53].
- Para cada punto O y cada punto $A \neq O$, existe un círculo con centro O y radio OA [53].
- Todos los ángulos rectos son congruentes entre sí [53].
- Postulado de las paralelas. Para cada línea l y para cada punto P que no pertenece a l , existe una única línea m que pasa a través de P y que es paralela a l [53]. Este postulado es la base de la geometría euclídea, si no se satisface, la geometría se denomina geometría no euclidiana.

El criterio utilizado por Euclides para justificar el postulado de las paralelas es el siguiente. Sea una línea transversal t , que intersecte l y m en puntos diferentes; si medimos los grados de los ángulos α y β interiores a t entonces la suma de dichos ángulos tiene que ser menor que 180° , de manera que l y m se podrán encontrar extendiéndolas lo suficientemente. No podemos utilizar este criterio para convencernos de la veracidad del quinto postulado, puesto que al ser equivalente al postulado, la lógica sería circular [53].

Para los griegos el espacio euclídeo era limitado y finito, de forma que las líneas eran tratadas como segmentos finitos; el concepto matemático de infinito no se desarrolló hasta el siglo XIX con el matemático ruso Cantor [103]. Numerosos intentos de sustituir dicho postulado condujeron al desarrollo, en el siglo XIX, de las geometrías hiperbólicas (Gauss, Lobachevski, Bolyai, Beltrami y Schweickard) y esférica o elíptica (Riemann), en las cuales, por un punto exterior a una recta se pueden trazar dos rectas paralelas o ninguna paralela a la dada [103]. Restringiéndonos a los espacios homogéneos, en los que la curvatura es constante, podemos clasificar tres tipos de geometrías, englobadas a su vez como casos particulares de las geometrías Riemannianas:

- Geometría euclidiana, de curvatura cero, cumple con los cinco postulados de Euclides ²⁵.
- Geometría hiperbólica, de curvatura negativa, cumple con los cuatro primeros postulados de Euclides.
- Geometría elíptica, de curvatura positiva, cumple con los cuatro primeros postulados de Euclides.

²⁵El espacio-tiempo de Minkowski admite una representación pseudoeuclídea.

Admitiendo además la posibilidad de una curvatura no homogénea, tenemos la geometría típica de la teoría de la relatividad.

1.3.2. Estructuras del espacio-tiempo: conexión, métrica y estructura spinorial.

1.3.2.1. Conexión.

La conexión es un objeto matemático que proporciona un método de diferenciación de la geometría de la variedad espacio-temporal. Al introducirlo, obtenemos la capacidad de comparar direcciones y transportar la información local (formas, vectores y tensores) a lo largo de cualquier curva; “conectamos” la geometría local de un punto a la de otro definiendo una geometría determinada. En nuestra variedad pseudoriemanniana, el método de diferenciación introducido a través de una conexión afín es la conexión Levi-Civita, conocida como derivada covariante; cuya expresión en términos de coordenadas espaciales se denomina símbolos de Christoffel [103].

Sin introducir la conexión, existen otros dos procesos de diferenciación, como la derivada de Lie o la derivada exterior.

1.3.2.2. Métrica.

En geometría diferencial, podemos decir intuitivamente que la métrica, denominada también como tensor métrico, describe “ el cuadrado de una distancia infinitesimal” asociada con un “desplazamiento infinitesimal”, que viene relacionada por el vector tangente. Formalmente, un tensor métrico en una variedad \mathcal{M} se define como un campo tensorial covariante de orden 2, simétrico y no degenerado que describe la siguiente aplicación lineal para cada punto p [144],

$$g : V_p \times V_p \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.11)$$

La métrica g expandida en términos de sus componentes $g_{\mu\nu}$, se escribe como

$$g = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu. \quad (1.12)$$

Favoreciendo el concepto intuitivo de “ el cuadrado de una distancia infinitesimal”, también se puede escribir la métrica como elemento de línea:

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.13)$$

Dada una métrica g , siempre podemos encontrar una base ortonormal v_1, \dots, v_n del espacio tangente a cada punto p , es decir una base tal que $g(v_\mu, v_\nu) = 0$ si $\mu \neq \nu$ y $g(v_\mu, v_\mu) = \pm 1$. El número de $+1$ menos el número de -1 en la diagonal de la métrica, se denomina signatura. También se conoce como signatura a los signos de la diagonal de la métrica. Las métricas Riemannianas son aquellas definidas positivas. Las métricas con signaturas propias del espacio-tiempo, un $-$ y el resto $+$, son las conocidas como métricas Lorentzianas o pseudo- (o semi) riemannianas ²⁶.

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales de campo de Einstein son las métricas g de estructura pseudoriemanniana, que en general deben cumplir a priori ciertos requerimientos sobre las posibles simetrías del espacio-tiempo.

²⁶La notación de la signatura de dichas métricas también puede verse en la literatura como $(n-1, 1)$ o $(1, n-1)$, siendo n la dimensión de la variedad.

1.3.2.2.1 Métrica de Minkowski.

El espacio-tiempo de Minkowski es una variedad 4-dimensional Lorentziana de curvatura nula, cuya métrica expresada en coordenadas cartesianas es [116],

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

El espacio-tiempo de Minkowski proporciona una buena descripción para cada punto del espacio tangente dentro de la variedad pseudoriemanniana del espacio-tiempo, en concreto dentro de la variedad de Lorentz.

1.3.2.2.2 Métrica de Friedmann-Robertson-Walker.

Una métrica muy importante en cosmología es la conocida como métrica de Friedmann-Robertson-Walker, por la cual se basa el modelo Lambda-CDM o modelo estándar del Big Bang. Este modelo, describe una parametrización del modelo del Big Bang en el cual el universo contiene mayoritariamente tres componentes: energía oscura, asociado con la constante cosmológica Λ , la postulada materia oscura fría, abreviado como CDM por sus siglas en inglés, cold dark matter, y la materia ordinaria [133].

Para describir las métricas candidatas de todo el espacio-tiempo, es decir del universo en su totalidad, se debe transcribir la “gran escala” a la escala local. Podemos inferir a través de la isotropía de la radiación de fondo de microondas, que el universo es isótropo (invariancia bajo $SO(3)$) en espacio-tiempo y homogéneo espacialmente (invariancia bajo traslaciones espaciales). La hipótesis de homogeneidad temporal no es cierta, puesto que nuestra variedad pseudoriemanniana ha cambiado en su evolución temporal. Sin embargo, si la suponemos cierta, existen únicamente cuatro tipos de espacio-tiempo homogéneos, es decir cuatro tipos de espacio-tiempo de curvatura espacio-temporal constante K [103]:

- $K = 0$, geometría plana, conocida como espacio-tiempo de Minkowski.
- $K = +1$, geometría elíptica, conocida como espacio-tiempo de De Sitter.
- $K = -1$, geometría hiperbólica, conocida como espacio-tiempo de anti De Sitter.
- $K = -1$, geometría hiperbólica, conocida como espacio-tiempo estático de Einstein.

El espacio-tiempo no es homogéneo localmente puesto que por el efecto Doppler la densidad de masa está disminuyendo con el transcurso del tiempo. Sin embargo, sí se puede considerar espacialmente localmente homogéneo.

Se conoce como métrica estándar o Friedmann-Robertson-Walker a aquella por la cual el universo es considerado como isótropo en espacio-tiempo y homogéneo espacialmente:

$$ds^2 = R^2(t)d\phi^2 - dt^2 = g_{ij}dx^i dx^j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad (1.15)$$

donde $d\phi^2$ es la métrica de los 3-espacios (el *tiempo = cte*) descritos $K = +1, 0, -1$.

Los tres modelos describen un espacio-tiempo en expansión y evolución. El primero de ellos $K = +1$ es conocido como modelo de universo cerrado, donde el tiempo es finito y en consecuencia el universo comenzará a contraerse. En los otros dos casos $K = 0, -1$ el universo permanecerá en expansión perpetua. En base a los datos experimentales,

el más realista de ellos es el tercer caso $K = -1$, denominado modelo de universo abierto [103], [119].

1.3.2.3. Estructura spinorial.

Además de una conexión y de una métrica, al espacio-tiempo también se le asigna una estructura spinorial permitiendo definir campos de espinores. En concreto, permite definir, además de los campos tensoriales o bosónicos (spin entero), otro tipo de campos físicos que no son objetos geométricos de la variedad espacio-tiempo, conocidos como campos fermiónicos o espinores (spin semi-impar) [103].

1.3.3. El espacio-tiempo como variedad.

1.3.3.1. Variedad Riemanniana.

En la sección (1.3.1), introdujimos el concepto de geometría Riemanniana. Como consecuencia del abandono o no del postulado de paralelismo, podíamos distinguir entre espacios curvos y espacios planos. La geometría de Riemann, propuesta por Riemann en el siglo XIX, estudia variedades diferenciables denominadas variedades de Riemann, a las cuales se les asigna la métrica de Riemann.

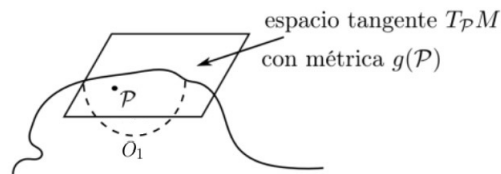


FIGURA 1.2: Espacio tangente a \mathcal{P} con una métrica $g(\mathcal{P})$ localmente plana. Imagen modificada del libro [116].

Una variedad Riemanniana \mathcal{M} se define como una variedad diferenciable, por lo tanto dotada de conexión, que posee una métrica $g(\mathcal{P})$ ²⁷ asociada a cada espacio tangente $T_{\mathcal{P}}\mathcal{M}$ de todos sus puntos²⁸, compatible con la conexión y localmente plana.



FIGURA 1.3: Concepto de variedad Riemanniana. Imagen del libro [116].

Los símbolos de Christoffel que aparecen en la derivada covariante, hacen el papel de dicha conexión en el espacio-tiempo curvo, es decir, se ocupan de la contribución de la curvatura en la derivada [116].

Decimos que la métrica es localmente plana si para cada \mathcal{P} de la variedad, podemos elegir un sistema de coordenadas tales que,

$$g_{\mu\nu}(\mathcal{P}) = \delta_{\mu\nu} + \mathcal{O}((x^\mu)^2) \sim \delta_{\mu\nu}, \quad (1.16)$$

siendo $\delta_{\mu\nu}$ la métrica euclídea hasta primer orden en sus derivadas [116].

²⁷Puesto que la variedad es localmente plana, $g(\mathcal{P})$ también lo será en cada \mathcal{P} de la variedad. Notar que a pesar de ello, $T_{\mathcal{P}}\mathcal{M}$ no son los mismos para cada \mathcal{P} .

²⁸En cada punto \mathcal{P} de una variedad diferenciable \mathcal{M} , es posible definir un espacio tangente $T_{\mathcal{P}}\mathcal{M}$ [116].

1.3.3.2. Variedad pseudoriemanniana.

Una variedad pseudoriemanniana (\mathcal{M}, g) es una variedad diferencial \mathcal{M} equipada con un tensor métrico simétrico, no degenerado g ²⁹. Esta variedad es una de las generalizaciones posibles de la variedad Riemanniana, surgida al relajar la característica de la métrica positivo-definida. En las variedades pseudoriemannianas se les exige que su métrica sea únicamente no-degenerada de signatura (p, q) , donde p y q son el número de positivos y negativos en la diagonal; la forma positivo-definida es también no degenerada, englobando las métricas Riemannianas [72].

Junto con las variedades de Riemann, otra subclase importante de las variedades pseudoriemannianas son las variedades de Lorentz, propias de la teoría de la relatividad. Una variedad de Lorentz es aquella equipada por una métrica de Lorentz de signatura $(p, 1)$ o $(1, q)$ o simplemente $(1, n-1)$ o $(n-1, 1)$, siendo n la dimensión de la variedad; en el espacio-tiempo la signatura es $(1, 3)$ ³⁰.

Decimos que la variedad de Lorentz es localmente plana si para cada \mathcal{P} , podemos elegir un sistema de coordenadas tales que,

$$g_{\mu\nu}(\mathcal{P}) = \eta_{\mu\nu} + \mathcal{O}((x^\mu)^2) \sim \eta_{\mu\nu}, \quad (1.17)$$

siendo $\eta_{\mu\nu}$ la métrica de Minkowski [116].

La métrica de Minkowski es uno de los ejemplos más importantes de métrica de Lorentz. En nuestro espacio-tiempo \mathbb{R}^4 , la métrica de Minkowski es un invariante fundamental de la teoría de la relatividad especial. En ausencia de curvatura, las leyes de la física adquieren el mismo comportamiento en cualquier sistema de coordenadas en los que la métrica de Minkowski tiene la expresión (1.14). En la teoría general de la relatividad, se incluyen además los efectos de la curvatura permitiendo que la métrica de Lorentz varíe de un punto a otro [72].

1.3.3.3. El espacio-tiempo: un modelo de variedad.

Podemos definir el espacio-tiempo como una variedad Lorentziana, en concreto una variedad Hausdorff ³¹, paracompacta ³², conexa ³³, sin borde ³⁴, orientable ³⁵, C^∞ ³⁶ y 4-dimensional ³⁷, dotada de una estructura causal, en la cual podemos caracterizar con cuatro coordenadas cada punto de la misma llamándolos sucesos o eventos [93], [103]. Para definir un evento \mathcal{P} , se necesitan tres coordenadas espaciales y una temporal:

$$x^0(\mathcal{P}) = t(\mathcal{P}), x^1(\mathcal{P}) = x(\mathcal{P}), x^2(\mathcal{P}) = y(\mathcal{P}), x^3(\mathcal{P}) = z(\mathcal{P}). \quad (1.18)$$

²⁹Es decir, el único vector ortogonal a todo es el vector nulo [72].

³⁰Dicha signatura nos permite definir los vectores tangentes en cada punto de la variedad temporal ($g < 0$), espacial ($g > 0$) o nula o de tipo luz ($g = 0$); además con dicha signatura, la variedad se dice que es localmente orientable temporalmente.

³¹Un espacio de Hausdorff o $T2$ es un espacio topológico en el cual la vecindad de puntos distintos es disjunta. Esta condición de Hausdorff debe cumplirse en una variedad Hausdorff.

³²Si y solo si dicha variedad es la unión de variedades Hausdorff doblemente contables; es decir, si la topología de la variedad tiene un atlas contable (finito o numerable) [103].

³³Una variedad es conexa, si podemos conectar dos elementos cualesquiera a través de una curva.

³⁴El borde de un espacio topológico es el conjunto de puntos cuya imagen bajo las cartas del mismo es un punto de la frontera del semiplano superior de \mathbb{R}^n

³⁵Una variedad orientable se define como aquella cuyo par de cartas locales de la estructura diferencial están orientadas con la misma orientación.

³⁶Infinitamente diferenciable.

³⁷Si nos adentramos en la física microscópica del espacio-tiempo, nos encontramos con las dimensiones métricas, la de Lyapunov y las probabilística, donde se generaliza el concepto de dimensión como número entero admitiendo dimensiones no enteras [103].

El tiempo y el espacio ya no son ni absolutos ni independientes, forman un continuo inseparable. Un mínimo cambio en el sistema de referencias del observador implicará un cambio de coordenadas en el espacio-tiempo del evento de estudio; la transformación entre ambos sistemas se llevará a cabo a través de la transformación de Lorentz. De manera muy idealizada, podemos visualizar que el espacio-tiempo se compone de una densa colección de rayos de luz y de líneas de universo de partículas de prueba que definen todos los puntos de la variedad [93].

1.3.4. El tensor energía-momento.

Muchas partículas, situadas en líneas de universo, podemos verlas como un flujo continuo de cuádrimomentos. Para cuantificar este flujo de energía y momento lineal, se utiliza el tensor de energía-momento [93].

En general, podemos describir el momento y la energía de una partícula aislada que se mueve en alguna dirección como $p = p^\mu e_\mu$. En un medio continuo, necesitamos 6 grados de libertad más para poder describir todas las componentes del tensor energía-momento. Estos 6 grados de libertad extra vienen de 3 componentes de esfuerzos cortantes en 4 dimensiones y las 3 direcciones de la presión debida al momento de todas las partículas. En total, se agrupan estos 10 grados de libertad en una matriz simétrica cuatridimensional, conduciendo a la definición del tensor de energía-momento [116].

El tensor de energía-momento T , cuyas componentes son $T^{\mu\nu}$, describe el flujo de las componentes del cuádrimomento a través de una superficie x^ν constante [116].

Considerando un fluido perfecto como aquel compuesto de partículas que en reposo no intercambian momento a través de conducción de calor ni esfuerzos de corte, definamos las componentes del tensor de energía-momento de este fluido. Sea P la presión de dicho fluido perfecto, ρ la densidad de energía, U la 4-velocidad del fluido y η el tensor métrico de Minkowski; se definen las componentes del tensor de energía-momento válido para marcos de referencia en movimiento en espacio-tiempo de Minkowski como [116]

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2}(\rho + P)U^\mu U^\nu - P\eta^{\mu\nu} \quad (1.19)$$

Esta expresión puede generalizarse para un espacio-tiempo no plano reemplazando η por g . El tensor de energía-momento actúa como fuente de la curvatura del espacio-tiempo.

Puede demostrarse que este tensor se conserva:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}{}_{,\mu}. \quad (1.20)$$

1.3.5. Modelando la curvatura.

1.3.5.1. Tensor de Riemann.

Como consecuencia del cumplimiento del postulado de las paralelas, en el espacio euclídeo se da el caso en que dos líneas rectas paralelas mantienen la distancia entre ellas constante. Para formalizar esta idea de curvatura nula podemos decir que, en el espacio euclídeo, el transporte paralelo de un vector alrededor de lazos cerrados tendrá el mismo punto inicial y final. El tensor de curvatura de Riemann “mide” el fallo de esta propiedad en la variedad Riemanniana; dicho fallo es conocido como la no holonomía de la variedad.

Podríamos obtener el tensor de curvatura transportando paralelamente un vector V^σ alrededor de un lazo cerrado en una variedad Riemanniana, obteniendo dicho tensor en función de los símbolos de Christoffel. Sin embargo, optaremos por un camino más rápido calculando el conmutador de dos derivadas covariantes.

La derivada covariante de un vector en una dirección determinada, mide cuánto cambia el vector en relación con lo que habría sido si hubiera sido transportado paralelamente³⁸. Por lo tanto, el conmutador de dos derivadas covariantes mide la diferencia entre transportar paralelamente un tensor en una dirección y después en otra dirección, versus la ordenación opuesta.

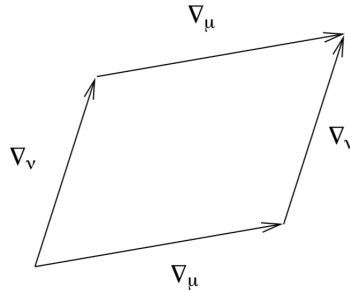


FIGURA 1.4: Conmutador de una derivada covariante. Imagen del artículo [105].

Sea un campo vectorial V^ρ , entonces

$$\begin{aligned}
 \nabla_\mu(\nabla_\nu V^\rho) &= (V^\rho_{;\nu})_{;\mu} = \\
 &= \nabla_\mu \left(\frac{\partial V^\rho}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\sigma}^\rho V^\sigma \right) = \\
 &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial V^\rho}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\sigma}^\rho V^\sigma \right) + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \left(\frac{\partial V^\sigma}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma V^\lambda \right) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \left(\frac{\partial V^\rho}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho V^\sigma \right) = \\
 &= \partial_\mu \partial_\nu V^\rho + (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho) V^\sigma + \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \partial_\mu V^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \partial_\nu V^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma V^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda V^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho V^\sigma.
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

Para calcular el conmutador, realizamos la misma operación intercambiando los índices $\mu \leftrightarrow \nu$. Todos los términos menos el segundo y el quinto se cancelan en la conmutación, quedando:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda) V^\sigma. \tag{1.22}$$

Como la expresión de la izquierda del igual es un tensor, la expresión entre paréntesis también tiene que serlo,

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma, \tag{1.23}$$

donde $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ es conocido como el tensor de Riemann,

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda, \tag{1.24}$$

siendo los símbolos de Christoffel,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} (g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}). \tag{1.25}$$

Una observación interesante para aclarar el significado del tensor de Riemann es que

³⁸La derivada covariante de un vector en una dirección por la cual es paralelamente transportada es cero [105].

la expansión de la métrica hasta segundo orden en x^μ , centrando el sistema de coordenadas en un punto \mathcal{P} de una variedad Riemanniana, puede escribirse como [116]

$$g_{\mu\nu} \sim \delta_{\mu\nu} - \frac{1}{3}R_{\mu\nu\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + \mathcal{O}(|x|^3), \quad (1.26)$$

con

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\lambda}R_{\nu\alpha\beta}{}^\lambda. \quad (1.27)$$

Aplicado en variedades Lorentzianas, sólo hay que reemplazar $\delta_{\mu\nu}$ por Minkowski $\eta_{\mu\nu}$,

$$g_{\mu\nu} \sim \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{3}R_{\mu\nu\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + \mathcal{O}(|x|^3). \quad (1.28)$$

Es decir, el tensor de Riemann “mide” qué tan grandes son las desviaciones de la métrica curva con respecto a la plana [116].

1.3.5.2. Tensor de Ricci.

Se define el tensor de Ricci como la traza del tensor de curvatura de Riemann, [116]

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\mu\beta}{}^\mu = g^{\mu\nu}R_{\nu\alpha\mu\beta}. \quad (1.29)$$

Sustituyendo el tensor de Riemann en esta expresión, podemos escribir el tensor de Ricci explícitamente,

$$R_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta,\mu}^\mu - \Gamma_{\gamma\beta}^\mu\Gamma_{\alpha\mu}^\gamma - \Gamma_{\alpha\mu,\beta}^\mu + \Gamma_{\gamma\mu}^\mu\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma. \quad (1.30)$$

1.3.5.3. Escalar de Ricci.

Se define el escalar de Ricci como la traza del tensor de Ricci,

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R_\mu{}^\mu = g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu}. \quad (1.31)$$

1.3.6. Ecuación de las geodésicas y ecuación de desviación geodésica.

La geodésica es una generalización de “línea recta” entre dos puntos en el espacio-tiempo curvo, correspondiente a la trayectoria de partículas no aceleradas ³⁹ [116], [106]. Sea una línea de universo $x^\mu = x^\mu(\tau)$ parametrizada por $\lambda = a\tau + b$, donde τ es el tiempo propio de la trayectoria, a y b unas constantes y μ un índice que indexa la componente temporal como 0 y las espaciales como 1, 2, 3. Se puede demostrar que $x^\mu(\lambda)$ sigue la ecuación clásica de movimiento de una masa de prueba en un espacio-tiempo curvado descrito por la métrica $g_{\mu\nu}$, en ausencia de fuerzas no-gravitacionales externas:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu(x)\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0, \quad (1.32)$$

es decir, la ecuación de las geodésicas. Esta ecuación puede reescribirse en términos de la cuadrivelocidad u^μ , definida como el vector tangente a la línea de universo

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \quad (1.33)$$

³⁹Las geodésicas son las trayectorias más cortas posibles localmente. Sin embargo, son las más largas posibles en una variedad Lorentziana.

De esta manera, (1.32) se reescribe trivialmente como

$$\frac{du^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu u^\nu u^\rho = 0. \quad (1.34)$$

En un espacio-tiempo plano si $\lambda = \tau$, identificamos el primer término como la 4-aceleración $\mathcal{A}^\mu = d^2x^\mu/d\tau^2$, mientras que el segundo es la 4-fuerza de componentes $f^\mu = m\mathcal{A}^\mu$. Es decir, obtenemos una generalización de la segunda ley de Newton.

La variación de la separación entre las geodésicas por los efectos de marea debidos a la curvatura del espacio-tiempo, quedan determinadas en la ecuación de la desviación geodésica [119]. Consideremos dos geodésicas cercanas, una parametrizada por $x^\mu(\lambda)$ y la otra por $x^\mu(\lambda) + \xi^\mu(\lambda)$, donde cada geodésica viene parametrizada según su tiempo propio τ y $\xi^\mu(\lambda)$ une puntos entre ambas geodésicas con el mismo valor de tiempo propio τ ; además se tomará esta $|\xi^\mu(\lambda)|$ mucho menor que la longitud característica de variación de la geometría del espacio-tiempo. De esta manera, mientras que $x^\mu(\lambda)$ satisface (1.32), $x^\mu(\lambda) + \xi^\mu(\lambda)$ satisface

$$\frac{d^2(x^\mu + \xi^\mu)}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu(x + \xi) \frac{d(x^\nu + \xi^\nu)}{d\lambda} \frac{d(x^\rho + \xi^\rho)}{d\lambda} = 0. \quad (1.35)$$

Expandiendo alrededor de la geodésica $x^\mu(\lambda)$ a primer orden en ξ :

$$\frac{d^2(x^\mu + \xi^\mu)}{d\lambda^2} = \frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \frac{d^2\xi^\mu}{d\lambda^2}; \quad (1.36)$$

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu(x + \xi) \simeq \Gamma_{\nu\rho}^\mu(x) + \xi^\sigma \partial_\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\mu(x) + \mathcal{O}(\xi^2); \quad (1.37)$$

$$\frac{d(x^\nu + \xi^\nu)}{d\lambda} \frac{d(x^\rho + \xi^\rho)}{d\lambda} \simeq \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} + \frac{d\xi^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} + \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{d\xi^\rho}{d\lambda} + \mathcal{O}(\xi^2). \quad (1.38)$$

Obtenemos la ecuación de desviación geodésica,

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\lambda^2} + 2\Gamma_{\nu\rho}^\mu(x) \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{d\xi^\rho}{d\lambda} + \xi^\sigma \partial_\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\mu(x) \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0. \quad (1.39)$$

1.4. Derivación de las ecuaciones de campo de Einstein.

Todas las ecuaciones fundamentales clásicas de la física, incluidas las ecuaciones de campo de Einstein, pueden derivarse a partir de un principio variacional. El principio variacional de Hilbert se define como [93]

$$S_{EH} = \int \mathcal{L} d^4x = \int L(-g)^{1/2} d^4x = \int L d(4 - \text{volumen propio}) = \text{extremo}, \quad (1.40)$$

siendo los límites de la integral una hipersuperficie inicial y otra final de tipo espacial fijas, con ⁴⁰ $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{geom} + \mathcal{L}_{campo} = (-g)^{1/2} L$ la densidad lagrangiana, g el determinante del tensor métrico y L una función escalar conocida como la función de Lagrange: $L = L_{geom} + L_{campo}$ [93]. El signo negativo del término $(-g)^{1/2}$ surge porque en el espacio-tiempo, la métrica corresponde a un producto escalar no positivo-definido [116].

Cinco días antes de que Einstein presentara sus ecuaciones de campo en su forma estándar, Hilbert descubrió independientemente cómo formularlas como consecuencia

⁴⁰Es decir, una subvariedad tridimensional de la variedad que define el espacio-tiempo, cuyo vector normal es de tipo temporal.

del principio de acción más simple posible [93]:

$$L_{geom} = (1/2\kappa)R, \quad (1.41)$$

con $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ el escalar de curvatura de Ricci donde $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico y $R_{\mu\nu}$ el tensor de Ricci y $\kappa = 8\pi Gc^{-4}$, donde G es la constante de gravitación universal y c la velocidad de la luz en el vacío.

La integral de acción Einstein-Hilbert para el campo gravitatorio queda [104], [93]:

$$S_{EH} = \int d^4x \left(\frac{1}{2\kappa}R + \mathcal{L}_{campo} \right) (-g)^{1/2}. \quad (1.42)$$

La condición requerida para determinar las ecuaciones de campo de Einstein a través del principio variacional, es imponiendo que la acción sea un extremo: $\delta S_{EH} = 0$. Sea $S_{EH} \rightarrow S'_{EH} = S_{EH} + \delta S_{EH}$, la variación de la acción debe cumplir [104]:

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} &= \int d^4x \delta \left[\frac{1}{2\kappa} \sqrt{-g} R + \sqrt{-g} \mathcal{L}_{campo} \right] = \\ &= \int d^4x \left[\frac{1}{2\kappa} \delta(\sqrt{-g} R) + \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{campo}) \right] = \\ &= \int d^4x \left[\frac{1}{2\kappa} \frac{\delta(\sqrt{-g} R)}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{campo})}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} = \\ &= \int d^4x \left[\frac{1}{2\kappa} \left(\frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} R + \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} \sqrt{-g} \right) + \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{campo})}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} = \\ &= \int d^4x \left[\frac{1}{2\kappa} \left(\frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{campo})}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} = 0. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Puesto que la variación del determinante del tensor métrico $\delta g^{\mu\nu}$ es una cantidad completamente arbitraria, la expresión dentro de los corchetes tiene que ser igual a cero. De esta forma, la ecuación de movimiento es [104]:

$$\frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = - \frac{2\kappa}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{campo})}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (1.44)$$

1.4.1. Variación del determinante del tensor métrico.

Busquemos una relación para $\delta(\sqrt{-g})/\delta g^{\mu\nu}$. Sea la fórmula de Jacobi sobre el diferencial de una matriz $A(t)$,

$$d(\det A(t)) = \text{tr}(\text{adj}(A(t))dA(t)), \quad (1.45)$$

aplicándola a la variación del determinante del tensor métrico, obtenemos [104]

$$\delta g = \delta(\det(g)) = \text{tr}[\text{adj}(g)\delta g] = \text{tr}[\det(g)g^{-1}\delta g] = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (1.46)$$

Conociendo que la derivada de la matriz inversa cumple

$$\frac{dA^{ik}}{dt} = -A^{ij} \frac{dA_{jl}}{dt} A^{lk}, \quad (1.47)$$

extraemos la siguiente relación

$$g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}; \quad (1.48)$$

de la cual, podemos obtener [104]:

$$\delta g = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (1.49)$$

Utilizando (C.3), obtenemos la siguiente expresión

$$\frac{\delta(\sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}. \quad (1.50)$$

Sustituyéndola en nuestra ecuación de movimiento

$$-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = \kappa \left[\mathcal{L}_{campo} g_{\mu\nu} - 2 \frac{\delta \mathcal{L}_{campo}}{\delta g^{\mu\nu}} \right], \quad (1.51)$$

donde, por definición, la expresión entre corchetes es el tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$. La ecuación puede reescribirse como [104]

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (1.52)$$

1.4.2. Variación del escalar de Ricci.

El último paso que nos queda, es calcular la derivada funcional del escalar de Ricci con respecto al tensor métrico. El escalar de Ricci se define como

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.53)$$

Siguiendo la regla del producto, la variación del escalar de Ricci puede escribirse como

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}. \quad (1.54)$$

A continuación veremos cómo el segundo término se anula. Siempre podemos escoger un sistema de coordenadas que sea localmente plano, es decir $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 0$ en un punto específico. Sea el tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^{\rho} = \Gamma_{\nu\mu,\rho}^{\rho} - \Gamma_{\rho\mu,\nu}^{\rho} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\rho} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\rho\mu}^{\lambda}, \quad (1.55)$$

en ese punto será [104]:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\nu\mu,\rho}^{\rho} - \Gamma_{\rho\mu,\nu}^{\rho}. \quad (1.56)$$

Como el espacio-tiempo es localmente plano en ese punto, es decir no tenemos curvatura, entonces las derivadas del tensor métrico tendrán que anularse. En consecuencia, los símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}), \quad (1.57)$$

tendrán que ser cero siempre y cuando $\lambda \neq \alpha$. Si $\lambda = \alpha$, los términos dentro del paréntesis tendrán que sumar cero. Examinando el tensor métrico, todos los elementos fuera de la diagonal son cero, por lo tanto también lo serán sus derivadas. Observemos las componentes de la diagonal, si $\mu = \nu$ con $\lambda = \alpha$ el único término que nos queda es $-g_{\mu\nu,\alpha}$, que tendrá que ser igual a cero

$$g_{\mu\nu,\alpha} = 0. \quad (1.58)$$

Sea la expresión (1.56), entonces el segundo término de la ecuación (1.64) se puede escribir como

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} (\delta \Gamma_{\nu\mu,\rho}^{\rho} - \delta \Gamma_{\rho\mu,\nu}^{\rho}). \quad (1.59)$$

Definiendo la variación de un cuadvivector de forma parecida a la parte derecha de esta ecuación (1.59),

$$\delta w^k = g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^k - g^{\mu k} \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda, \quad (1.60)$$

y utilizando (1.58) en el último paso, podemos reescribir (1.59) como

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^k} \delta w^k = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} \delta w^k). \quad (1.61)$$

Recordemos que este término $g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$ viene de (1.64) que a su vez forma parte de la integral 4-dimensional (1.42). Puesto que la integral de dicho término contiene una 4-divergencia, podemos reescribirla utilizando el teorema de la divergencia como una integral de superficie. Además el vector δw^k no varía en el infinito, en consecuencia este término no contribuye al total de la variación de la acción. Por lo tanto, despreciando $g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$, obtenemos de la expresión (1.64) [104],

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (1.62)$$

1.4.3. Ecuaciones de campo de Einstein.

De manera que de nuestra ecuación de movimiento (1.52), obtenemos las ecuaciones de campo de Einstein para cualquier sistema de coordenadas arbitrario

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (1.63)$$

donde la parte izquierda de la ecuación es el conocido tensor de Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$,

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (1.64)$$

Antes de pasar al siguiente capítulo, reflexionemos sobre la naturaleza de estas ecuaciones. La primera observación es que, dado que $R_{\mu\nu}$ depende de las derivadas de $g_{\mu\nu}$ hasta segundo orden, las ecuaciones de Einstein forman un sistema acoplado de 10 ecuaciones diferenciales parciales no lineales de segundo orden para las componentes de la métrica $g_{\mu\nu}$ [144].

Una segunda observación es que la ecuación de campo muestra la conexión existente entre materia/energía y geometría. El tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$, que codifica la descripción del contenido que habita en el espacio-tiempo, genera una curvatura en su vecindad dada por el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ [93], [116]. Al mismo tiempo, esta ecuación de campo es una ecuación de propagación que describe la anisotrópica parte del resto de la curvatura, por ejemplo, gobierna el espacio-tiempo externo de la curvatura estática de cualquier fuente (como la Tierra) y gobierna la generación y propagación de las ondas gravitacionales a través del universo. Además contiene las ecuaciones de movimiento para la materia cuyo tensor de energía-momento genera la curvatura; por ejemplo, gobierna el movimiento de los planetas en el sistema solar, gobierna la desviación de la luz por el Sol, gobierna el colapso de una estrella para formar un agujero negro, determina la geometría del espacio-tiempo externo de un agujero negro o gobierna la expansión y contracción del universo, entre otros [93]. Podemos resumir la teoría geométrica de Einstein en tres ideas fundamentales:

- Localmente, las geodésicas son rectas en el espacio-tiempo. Mientras que en regiones más extensas, las geodésicas que originalmente se alejaban las unas de las otras se acercan a una velocidad gobernada por la curvatura del espacio-tiempo [93].

- Este efecto de la geometría del espacio-tiempo sobre la materia es lo que conocemos como gravedad [93].
- La estructura geométrica del espacio-tiempo gobierna la dinámica del contenido del universo; y a su vez, dicho contenido es fuente de las deformaciones del espacio-tiempo [116].

De manera más compacta, el libro [93] describe dicha geometría de la siguiente forma: *“El espacio-tiempo actúa sobre la materia diciéndole cómo moverse; y a su vez, la materia actúa sobre el espacio-tiempo diciéndole cómo curvarse.”*

Capítulo 2

Ondas gravitacionales: origen y características.

Sección 2.1. Geometría de Schwarzschild.

Sección 2.2. Colapso gravitatorio y el teorema sin pelo.

Sección 2.3. Evidencias directas e indirectas de agujeros negros.

Sección 2.4. Categorías de ondas gravitacionales.

Sección 2.5. Derivación de la solución de la ecuación de onda gravitacional en el vacío.

Sección 2.6. Efecto de las ondas gravitacionales sobre masas de prueba.

Sección 2.7. Emisión de ondas gravitacionales.

Las ondas gravitacionales conforman el objeto principal de estudio de esta tesis, en concreto las señales GW150914, GW170729 y GW190814; en consecuencia, se ha dedicado un capítulo entero para describir dichas perturbaciones espacio-temporales, así como los objetos que las produjeron, los agujeros negros. Por consiguiente, este capítulo se divide en dos grandes secciones:

- Primero, estudiaremos la geometría de Schwarzschild que describe, entre otros objetos, los agujeros negros. En la siguiente sección, describiremos el colapso gravitatorio de una estrella, origen de los agujeros negros. A continuación, describiremos las evidencias más importantes que tenemos sobre la existencia de los agujeros negros; e introduciremos las diferentes clases de ondas gravitacionales según los objetos que las producen y las técnicas utilizadas en su detección para enlazar con la siguiente parte.
- En esta segunda parte, linearizaremos la teoría de la relatividad con el objetivo de describir la ecuación de onda de la perturbación de la métrica con el gauge de Lorentz, para así poder identificar su solución en el vacío con las ondas gravitacionales. Analizaremos el efecto de dichas ondas sobre masas de prueba y finalmente describiremos la emisión de las ondas gravitacionales desde un sistema binario de estrellas a través del formalismo cuadrupolar.

2.1. Geometría de Schwarzschild.

La geometría de Schwarzschild es de gran relevancia en la teoría de la relatividad, puesto que ilustra de forma precisa el carácter no-euclídeo del espacio-tiempo cuando la gravedad domina. En concreto, describe el espacio-tiempo en el exterior de un objeto simétricamente esférico sin carga eléctrica ni momento angular, siendo una buena aproximación para la descripción de objetos que rotan lentamente, como la Tierra. Además describe la geometría de una estrella en colapso y de un agujero negro, fuente de las ondas gravitacionales detectadas.

Poco más de un mes después de que Einstein publicara la teoría de la relatividad, en enero de 1916 el astrónomo alemán Karl Schwarzschild encontró la primera solución exacta, no trivial, de las ecuaciones de Einstein [125], [121]. La solución de Schwarzschild, es decir, su métrica o elemento de línea

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.1)$$

describe un sistema con las siguientes propiedades:

- ocurre en el vacío, es decir $T_{\mu\nu} = 0$,
- está dotado de simetría esférica, y
- es estático e invariante bajo inversión temporal ($t \rightarrow -t$) [116].

Enseguida nos fijamos en la patología existente en el conocido como radio de Schwarzschild o horizonte de Schwarzschild $r_s = 2M$. Sin embargo, sin un estudio previo, no se puede asegurar si la singularidad es debida a la geometría del espacio-tiempo en sí mismo, donde la curvatura diverge, o al sistema de coordenadas (t, r, θ, ϕ) elegido cerca de $r = 2M$ ¹ [93], [116]. Verificando si las siguientes combinaciones escalares del tensor de Riemann o Ricci divergen, podremos identificar qué tipo de singularidad es el radio de Schwarzschild;

$$R, \quad R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, \quad R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu}R^{\alpha\beta}. \quad (2.2)$$

Para el elemento de línea de Schwarzschild obtenemos

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{12r_s^2}{r^6}, \quad (2.3)$$

es decir, diverge sólo en $r = 0$. Se puede demostrar que ningún escalar de curvatura diverge en $r = r_s$, por lo tanto esta singularidad debe ser debida a la elección del sistema de coordenadas de Schwarzschild. En cada sistema de coordenadas local de Lorentz, el tensor de Riemann tendrá una o infinitas componentes a medida que $r \rightarrow 0$, las fuerzas de marea se volverán infinitas [93], [116].

2.1.1. La singularidad de coordenadas $r_s = 2M$.

Los agujeros negros de Schwarzschild, son los objetos descritos por la métrica de Schwarzschild tal que $T^{\mu\nu} = 0$ en $r \leq r_s$. Estos agujeros negros se describen como estructuras esféricas, estáticas y sin carga eléctrica ni momento angular. Para comprenderlos mejor, estudiemos su estructura causal.

Fijando $d\theta = d\phi = 0$ en la solución de Schwarzschild (2.1), obtenemos

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 \rightarrow \frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}, \quad (2.4)$$

en el plano $t - r$, que se corresponde con las pendientes del cono de luz.

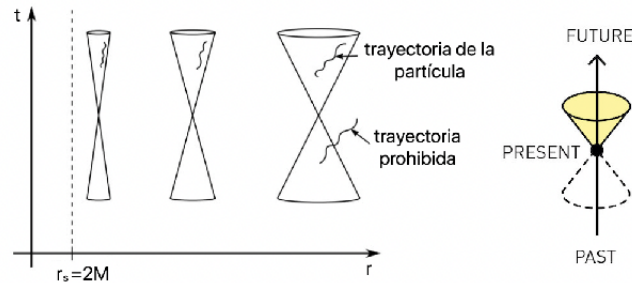


FIGURA 2.1: Imagen derecha: El cono de luz, muestra los caminos que pueden seguir los rayos de luz hacia delante y hacia atrás en el tiempo. Imagen izquierda: Conos de luz para distintas distancias del radio de Schwarzschild. Las trayectorias permitidas de las partículas, se encuentran en el cono de luz. Imagen derecha de [64]. Imagen izquierda modificada del libro [116].

¹Este tipo de singularidades desaparecen con un cambio de coordenadas adecuado [116].

Como podemos observar en la figura (2.1), a medida que nos aproximamos desde r grande hasta $r = r_s$ las pendientes van creciendo, de manera que las partículas irán tardando más tiempo en intentar casi alcanzar r_s . Las pendientes del cono de luz divergen en $r = r_s$.

Introduciendo la variable $\rho = r_s - r$,

$$r_s > r \geq 0 \rightarrow 0 < \rho \leq r_s \quad (2.5)$$

en el elemento de línea (2.1), podemos explorar qué sucede en $r < r_s$, es decir, en el interior del agujero negro;

$$ds^2 = \frac{\rho}{r_s - \rho} dt^2 - \frac{r_s - \rho}{\rho} d\rho^2 + (r_s - \rho)^2 d\Omega^2. \quad (2.6)$$

Con este cambio de variable, como observamos en la figura (2.2), la coordenada ρ se convierte en una tipo temporal, mientras que t se convierte en una tipo espacial. Para ir hacia el futuro deberemos incrementar ρ , es decir, reducir r ; llevando todas las trayectorias inevitablemente hacia $r = 0$. Es decir, todos los eventos en $r < r_s$ quedan atrapados en el interior del agujero negro; razón por la cual $r = r_s$ se le conoce como el horizonte de sucesos o horizonte de eventos. Incluso los fotones no pueden escapar, siendo éste el origen del carácter oscuro de los agujeros negros [116].

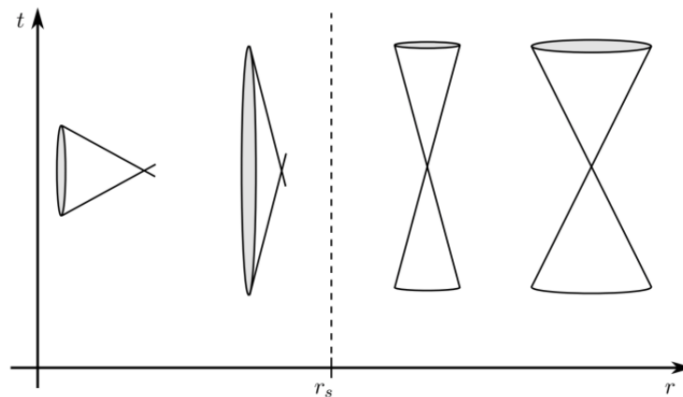


FIGURA 2.2: Conos de luz para distintas distancias en el exterior y el interior de un agujero negro de Schwarzschild. Imagen del libro [116].

2.1.2. La geometría de Schwarzschild con las coordenadas de Kruskal-Szekeres.

Como ya mencionamos anteriormente, $r = r_s$ es una singularidad de coordenadas, es decir, debida a la elección del sistema de coordenadas. Con un cambio de coordenadas adecuado podríamos remover dicha singularidad, proporcionando una descripción completa del espacio-tiempo de Schwarzschild [116]. En la literatura tenemos varios casos que proporcionan esta propiedad, como las coordenadas de Gullstrand-Painlevé (1921, 1922), las coordenadas de Lemaitre (1932), las coordenadas de Novikov (1963) o las coordenadas de Eddington-Finkelstein, derivadas por Eddington (1924) y redescubiertas por Finkelstein (1958). Todas ellas nos proporcionan información relevante acerca de la geometría de Schwarzschild, por ejemplo, en las coordenadas de Gullstrand-Painlevé se puede demostrar la existencia de una foliación² de hipersuperficies planas en un espacio-tiempo esféricamente simétrico y estático [5]. El sistema

²Partición de una variedad diferenciable en varias subvariedades diferenciables.

de coordenadas que proporciona una descripción capaz de cubrir la variedad espacio-tiempo de la solución de Schwarzschild máximamente extendida³ de la forma analítica más simple posible, se conoce como coordenadas de Kruskal-Szekeres (1960).

Las coordenadas de Kruskal-Szekeres, utilizan una coordenada radial X adimensional relacionada con la de Schwarzschild r y una coordenada temporal T adimensional relacionada con la de Schwarzschild t [116],[93],

$$\left. \begin{aligned} X &= \left(\frac{r}{r_s} - 1\right)^{1/2} e^{r/2r_s} \cosh\left(\frac{t}{2r_s}\right) \\ T &= \left(\frac{r}{r_s} - 1\right)^{1/2} e^{r/2r_s} \sinh\left(\frac{t}{2r_s}\right) \end{aligned} \right\} \quad \text{si } r > r_s, \quad (2.7)$$

$$\left. \begin{aligned} X &= \left(1 - \frac{r}{r_s}\right)^{1/2} e^{r/2r_s} \sinh\left(\frac{t}{2r_s}\right) \\ T &= \left(1 - \frac{r}{r_s}\right)^{1/2} e^{r/2r_s} \cosh\left(\frac{t}{2r_s}\right) \end{aligned} \right\} \quad \text{si } r < r_s. \quad (2.8)$$

Realizando este cambio de coordenadas en el elemento de línea de Schwarzschild, obtenemos

$$ds^2 = \frac{4r_s^3}{r} e^{-r/r_s} (-dT^2 + dX^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (2.9)$$

donde r se considera una función de X y T definida por

$$(r/r_s - 1)e^{r/r_s} = X^2 - T^2. \quad (2.10)$$

En estas coordenadas, una superficie con $r = cte$ vendrá dada por la hipérbola

$$X^2 - T^2 = (r/r_s - 1)e^{r/r_s} = cte; \quad (2.11)$$

mientras que la de $t = cte$, vendrá dada por las rectas

$$T/X = \tanh(t/2r_s) = cte, \quad r > r_s. \quad (2.12)$$

Notemos además que el horizonte de sucesos

$$X^2 - T^2 = 0 \rightarrow T = \pm X, \quad (2.13)$$

coincide justo con la superficie temporal para $t \rightarrow \pm\infty$; de manera que un observador en reposo verá que una partícula no podrá alcanzar nunca dicho horizonte [116].

Observamos que $r = r_s$ ya no es una singularidad; sólo $r = 0$ correspondiente a la hipérbola $X^2 - T^2 = -1$ lo es. Por lo tanto, tenemos dos singularidades en $r = 0$, no solo una

$$T = +(1 + X^2)^{1/2}, \quad T = -(1 + X^2)^{1/2}. \quad (2.14)$$

Una segunda observación es el hecho de que la región del espacio-tiempo situada lejos del radio de Schwarzschild $r \gg 2M$ viene dada por $X^2 \gg T^2$. De manera que tenemos además dos regiones exteriores $r \rightarrow \infty$,⁴

$$X \gg +|T|, \quad X \ll -|T|. \quad (2.15)$$

Ambas propiedades son síntomas de que las coordenadas de Schwarzschild cubrían solamente una parte de la variedad espacio-temporal. Utilizando las coordenadas de Kruskal-Szekeres, hemos extendido analíticamente la solución limitada de Schwarzschild para cubrir toda la variedad [93].

³Es decir, geodésicamente completa en el sentido de que el espacio-tiempo no debe tener bordes, a no ser que se encuentre con una singularidad.

⁴Estas dos observaciones fueron descubiertas por Synge en 1950 [93].

Llegados a este punto podemos trazar el diagrama de Kruskal-Szekeres (2.3), en el cual se han omitido las coordenadas angulares de manera que cada punto representa los eventos que ocurren en una esfera de radio r .

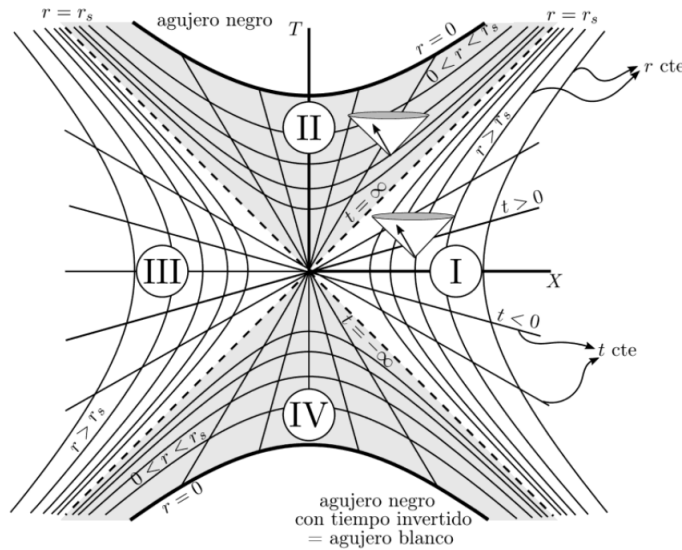


FIGURA 2.3: Geometría de Schwarzschild en las coordenadas de Kruskal-Szekeres. Las regiones I y II se corresponden al exterior e interior de un agujero negro y las regiones III y IV , al exterior e interior de un agujero blanco. En el plano de Kruskal-Szekeres XT , las curvas con $r = cte$ son hipérbolas cuyas asíntotas son $X = \pm T$; mientras que las curvas con $t = cte$ son las líneas rectas punteadas correspondientes al horizonte de sucesos. [116], [93]. Imagen del libro [116].

Como podemos observar en la figura (2.3), la región I ($r > 2M$) y la región II ($r < 2M$) se corresponden al exterior e interior de un agujero negro [93]. De la misma forma, las regiones III y IV representan una región exterior y otra interior, respectivamente; sin embargo el comportamiento de las partículas difiere al de las regiones I y II . El cono de luz de una partícula viajando desde la singularidad en la región IV , recorrerá cada vez valores de r más grandes hasta ser expulsada en la región III , a través del horizonte de sucesos. Debido a este comportamiento contrario al de un agujero negro, a las regiones III y IV se les denomina como agujero blanco.

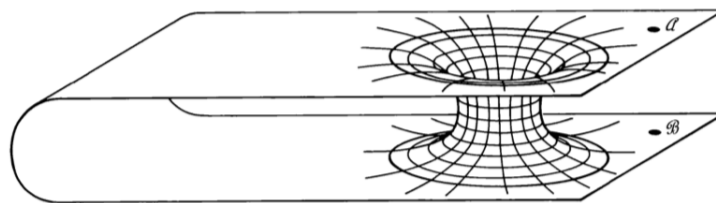


FIGURA 2.4: Puente de Einstein-Rosen. El agujero de gusano de Schwarzschild, conecta dos regiones distantes de un único universo asintóticamente plano. Imagen del libro [93].

Las ecuaciones de campo de Einstein fijan la geometría local del espacio-tiempo, pero no su topología [93]. De manera que, observando la figura (2.4), si en vez de suponer que las singularidades en las regiones II y IV son independientes, supusiéramos que solamente existe una singularidad y que las parábolas de las regiones II y IV son el mismo espacio-tiempo, entonces tendríamos una conexión entre I y III pudiendo ir por un camino de tipo espacial desde \mathcal{A} hasta \mathcal{B} , convirtiendo al agujero negro/blanco en lo que se conoce como agujero de gusano o puente de Einstein-Rosen [116], [93]. La naturaleza de estos objetos no ha sido evidenciada, quedándose meramente en una hipotética característica topológica. De hecho, si la conexión ocurriese entre dos regiones del mismo universo, entonces las singularidades de este tipo se desintegrarían

antes de que cualquier partícula, incluido el fotón, pudiera atravesarlo. Para lograr la estabilidad de dicha conexión, se debería incluir materia formada por partículas de masa negativa; o bien que la conexión se diera a cabo en dos universos diferentes, abriendo la posibilidad de que nuestro universo fuese uno de muchos dentro de un multiverso [116].

2.2. Colapso gravitatorio y el teorema sin pelo.

El proceso por el cual se forma un agujero negro, es el colapso gravitatorio descrito por la teoría de la relatividad.

Uno de los posibles mecanismos de formación, es a través del colapso gravitatorio de una estrella, es decir, cuando la presión interna se vuelve insuficiente como para poder contrarrestar la propia gravedad. Normalmente esto ocurre al final de la vida evolutiva de una estrella cuando no puede mantener su temperatura interna a través de la nucleosíntesis estelar, o bien porque recibe materia extra de manera que no puede elevar la temperatura de su núcleo. En ambos casos, cuando la presión interna se vuelve insuficiente, se produce una explosión violenta de la capa exterior de la estrella, originando una supernova ⁵ y dejando un objeto denso ($10^3 - 10^{11} \text{kg/cm}^3$) el cual, dependiendo de la masa original puede ser una enana blanca o una estrella de neutrones. Por el principio de exclusión de Pauli, la degeneración cuántica impide el colapso total en $r = 0$. Sin embargo, esta estabilidad se vuelve insostenible si la masa total es mayor o bien al límite de Chandrasekhar equivalente a $1.44M_{\odot}$ en el caso de las enanas blancas, o bien al límite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff equivalente a $2M_{\odot}$ en el caso de las estrellas de neutrones. Al superar estos límites, se produce el colapso gravitatorio de la estrella que, según la relatividad general, producirá un agujero negro de espacio-tiempo [65], [116], [90], [144], [135].

Los agujeros negros también pueden formarse en cúmulos estelares, como los núcleos de las galaxias, donde las estrellas pueden intercambiar energía. Al intercambiar energía, algunas la adquieren de manera que se forma de halo alrededor de la estrella y otras la pierden haciendo que el cúmulo se compacte más. Este proceso perdurará hasta que el cúmulo se vuelva tan compacto, que se produzcan colisiones entre las estrellas y se expulse gas. El gas se moverá hacia el centro del pozo de potencial gravitacional, donde se generarán nuevas estrellas. Llegados a este punto, dichas colisiones pueden volverse lo suficientemente energéticas e inelásticas como para que los centros de las estrellas en colisión se fusionen, generando objetos supermasivos [93]. En estos casos, se distinguen tres escenarios posibles:

- Muchas estrellas pequeñas colapsan entre sí para formar pequeños agujeros negros ($M \sim M_{\odot}$) [93].
- Una o más estrellas supermasivas colapsan para formar enormes agujeros negros ($M \sim 10^4 M_{\odot} - 10^9 M_{\odot}$) [93].
- Todo el conglomerado de estrellas, gas y agujeros negros se vuelve tan denso que colapsa, dando como resultado un único agujero negro de proporciones descomunales [93].

Las perturbaciones en la distribución de densidad inicial del universo en expansión también pueden producir un colapso gravitatorio, dando como resultado los conocidos como agujeros negros primordiales. Estos agujeros negros, se desarrollarían posteriormente por acumulación de radiación y materia. Hoy en día, este tipo de agujeros

⁵Que puede desarrollarse hasta convertirse en una nebulosa planetaria.

negros podrían haberse convertido en objetos enormes, aunque algunos de ellos pueden haber evitado dicho crecimiento llegando a ser tan pequeños con masas de hasta 10^{-5} gramos [93].

Otro tipo de formación sería el de los microagujeros negros, donde los efectos cuánticos de la gravedad se vuelven importantes. Los microagujeros negros son objetos hipotéticos formados en colisiones de alta energía, como los llevados a cabo en el LHC, que se evaporan inmediatamente después de su formación [142].

El teorema de Birkhoff adquiere un papel relevante al relacionar el colapso gravitatorio con la geometría de Schwarzschild: *Sea la geometría de una región dada del espacio-tiempo esféricamente simétrica y solución de las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío. Entonces, dicha geometría, formará parte de la geometría de Schwarzschild.* Es decir, el campo externo de cualquier estrella eléctricamente neutra y esférica, sea cual sea su estado, ya sea colapsando, estática o vibrando, satisficará el teorema de Birkhoff [93].

Sea una estrella estática que empieza a colapsar, su geometría espacio-tiempo en el momento inicial $t = 0$, tiene dos partes:

- En el exterior, por el teorema de Birkhoff, tenemos la métrica de Schwarzschild;
- en el interior, tendremos una geometría totalmente diferente puesto que $T_{\mu\nu} \neq 0$.

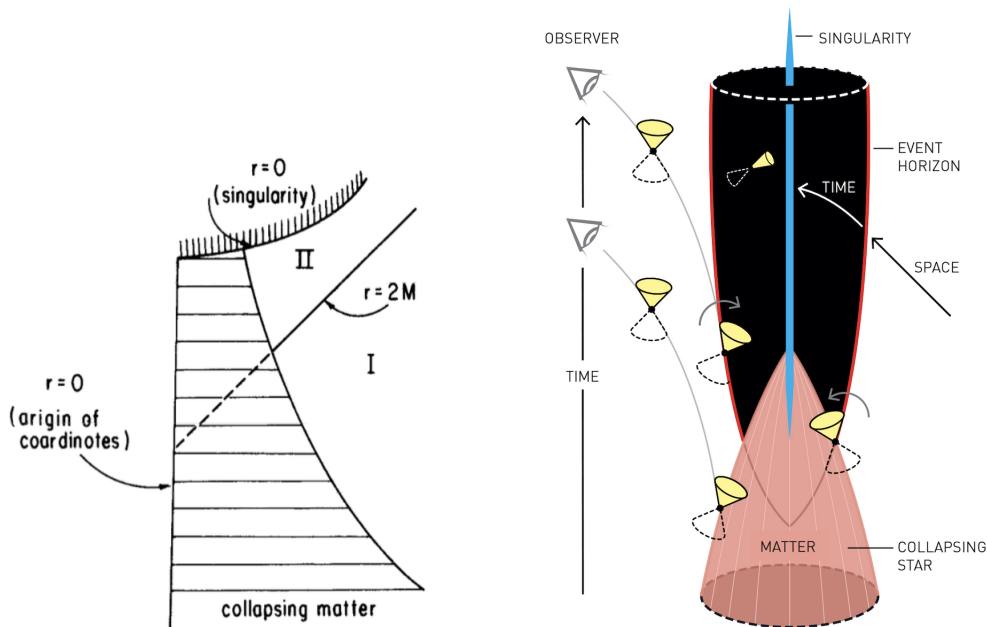


FIGURA 2.5: Espacio-tiempo resultante del colapso gravitatorio de un cuerpo esférico. Figura izquierda: Las regiones III y IV son “cubiertas” por materia en colapso; mientras que parte del agujero negro de la región II es producido. Figura derecha: Captura de cualquier partícula o rayo de luz en la región $r < 2M$. En el horizonte de sucesos, el tiempo reemplaza al espacio apuntando hacia adelante. El flujo temporal lo vuelca todo hacia una singularidad más lejana dentro del agujero negro, donde la densidad se hace infinita y el tiempo termina. Cada triángulo se corresponde con una superficie esférica en un instante de tiempo determinado. Imagen izquierda del libro [144]. Imagen derecha de [64].

En la figura (2.5) podemos observar el colapso gravitacional de un cuerpo esférico. Parte de las regiones I y II, y las regiones completas III y IV, empezarán a “cubrirse” de materia. Una región del espacio-tiempo correspondiente a la región II, empezará a producirse cuando la coordenada radial del objeto en colapso sea menor que $2M$. De

manera que las regiones *III* y *IV* de la solución Kruskal-Szekeres probablemente no se correspondan a ninguna ley o principio físico conocido hasta el momento, como un agujero blanco; sin embargo, la región *II* se vuelve físicamente importante, citando el libro [144]: “El colapso gravitacional completo de un cuerpo esférico, siempre producirá un región espacio-temporal de agujero negro de Schwarzschild.”

Hasta ahora, hemos considerado únicamente el colapso gravitacional de una estrella ideal, es decir, el caso esféricamente simétrico donde el espacio-tiempo fuera de la estrella viene descrito por la solución de Schwarzschild máximamente extendida, de manera que el estado final del colapso gravitacional sea un agujero negro de Schwarzschild. Sin embargo, éste no suele ser el más realista. En el caso no esférico, la geometría del espacio-tiempo fuera del cuerpo en colapso varía con el tiempo y depende en gran medida de los detalles del colapso. En particular, mientras que en el espacio-tiempo simétricamente esférico no puede producirse radiación gravitacional, en el colapso no esférico sí que pueden producirse grandes cantidades de energía. Varios teoremas enunciados por Werner Israel (1967, 1968), Stephen Hawking (1971, 1972) y Brandon Carter (1970) demostraron que tanto si el colapso tiene pequeñas asimetrías y carga pequeña, como si tiene grandes asimetrías y cargas mayores, los campos electromagnéticos y gravitacionales externos del agujero negro quedan caracterizados completamente por tres propiedades: la masa M , la carga eléctrica Q y el momento angular o espín J de la estrella colapsante [93], [144]. Este teorema es conocido como el teorema sin pelo o de no pelo, que como vemos, limita las cantidades físicas necesarias para describir un agujero negro [116]. El pelo del agujero negro, apodado de esta forma por el físico John Wheeler en los años sesenta, hace referencia a la información que desaparece dentro del horizonte de sucesos cuando la estrella colapsa, como las cargas de color y sabor, los números bariónico y leptónico o el espín. De acuerdo con este teorema, sólo existen cuatro métricas posibles que describen a los agujeros negros clasificadas de acuerdo con su momento angular J y carga Q [116]:

- Agujero negro de Schwarzschild de simetría esférica, sin carga $Q = 0$ ni rotación $J = 0$.
- Agujero negro de Reissner-Nordström de simetría esférica, con carga $Q \neq 0$ y sin rotación $J = 0$.
- Agujero negro de Kerr de simetría axial, sin carga $Q = 0$ y con rotación $J \neq 0$.
- Agujero negro de Kerr-Newman de simetría axial, con carga $Q \neq 0$ y rotación $J \neq 0$.

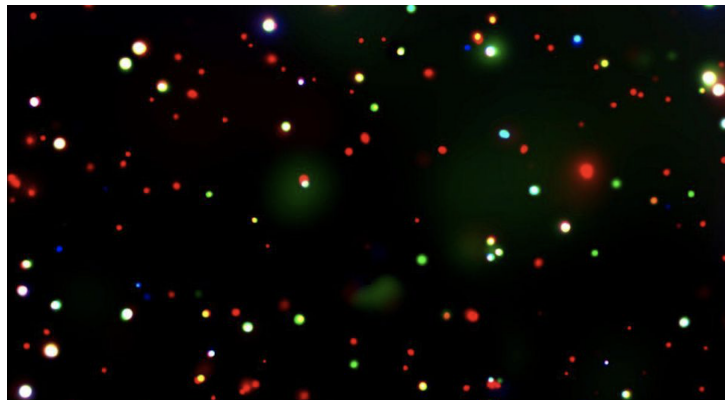


FIGURA 2.6: Exposición de 7 millones de segundos del Campo Profundo Sur de Chandra. Muestra cientos de agujeros negros supermasivos, cada uno situado en diferentes galaxias. Imagen de [6].

2.3. Evidencias directas e indirectas de agujeros negros.

Existe otro tipo de clasificación de agujeros negros según su masa M :

- Agujeros negros supermasivos (SMBHs), cuyas masas son $10^6 M_\odot \leq M \leq 10^{10} M_\odot$. Suelen observarse en el centro de casi todas las galaxias, en núcleos activos de galaxias ⁶ y en cuásares ⁷ [31], [65].
- Agujeros negros de masa intermedia (IMBHs), cuyas masas comprenden el rango $10^2 M_\odot \leq M \leq 10^6 M_\odot$ [31], [65]. Pueden formarse o bien como remanentes de estrellas de la población III ⁸ o bien mediante el colapso de un disco protogaláctico estable ⁹ o mediante procesos dinámicos en cúmulos de estrellas masivas.
- Agujeros negros de masa estelar (SBHs), cuyas masas comprenden el rango $10 M_\odot \leq M \leq 100 M_\odot$ [31], [65]. Son los remanentes de estrellas con $M \geq 20 M_\odot$. Se han observado principalmente en sistemas binarios de rayos X y como fuentes de las ondas gravitacionales.
- Microagujeros negros, son objetos hipotéticos que tras formarse se evaporan inmediatamente a través de la emisión de radiación de Hawking [141], [65].

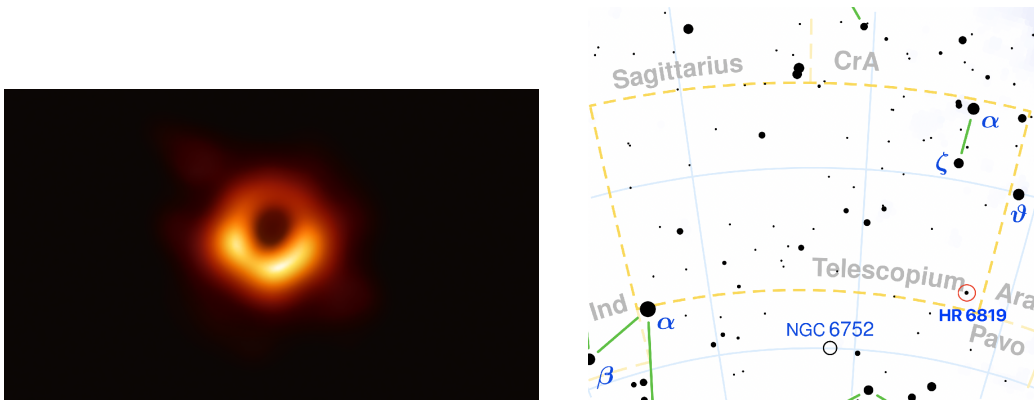


FIGURA 2.7: Imagen izquierda: Primera imagen de un agujero negro, utilizando las observaciones de Event Horizon Telescope en el centro de la galaxia M87. Fuente: [2]. Imagen derecha: Ubicación de HR 6819 en la constelación Telescopium. Fuente: [23].

Son conocidas numerosas evidencias tanto de agujeros negros supermasivos (SMBHs) como de agujeros negros de masa estelar (SBHs). El 10 de abril de 2019 fue publicada la primera imagen de la historia de un agujero negro [35], en concreto de uno supermasivo, localizado a 55 millones de años luz en la galaxia M87, utilizando el Event Horizon Telescope ¹⁰, [4], [71]. Entre otras evidencias de SMBHs, como TON 618 el agujero negro más masivo del que se tiene constancia con $6.6 \cdot 10^{10} M_\odot$ [126] o la cavidad de $100 \cdot 10^6$ años luz en el Supercúmulo del Serpentario descubierta el 4 de febrero de 2020 originada por la mayor explosión conocida después del Big Bang provocada por la eyección de $270 \cdot 10^6 M_\odot$ de un SMBH [51], se incluye Sagittarius A* localizado en el centro de nuestra galaxia y cuyo descubrimiento fue galardonado con el premio Nobel de Física 2020 para Reinhard Genzel y Andrea Ghez, junto con Roger Penrose por sus estudios sobre los agujeros negros como predicción sólida para la teoría de la

⁶ Región compacta que tiene una luminosidad más alta de la normal en el centro de una galaxia, cuyas características indican que no ha sido producida por estrellas.

⁷Núcleo activo de una galaxia extremadamente luminoso, en el cual un agujero negro supermasivo se encuentra rodeado por un disco de acreción gaseoso.

⁸Primera generación de estrellas formadas tras el Big Bang.

⁹Galaxia en proceso de formación.

¹⁰Una colaboración internacional que trabaja con ocho radiotelescopios ubicados alrededor de la Tierra conectados en una red global.

relatividad [64]. Respecto los SBHs, además de las 50 detecciones llevadas a cabo por las colaboraciones LIGO y Virgo desde la primera detección 2015 hasta la primera mitad del tercer periodo de observación *O3a* (01/04/2019 - 01/10/2019), destaca GRO J0422 + 32 por ser el más pequeño encontrado hasta la fecha con una masa de $2.1M_{\odot}$ [58]¹¹; y HR 6819 conocido también como QV Telescopii, cuyo descubrimiento el 6 de mayo de 2020 lo convierte en el más cercano al Sistema Solar y en el único sistema de agujero negro visible a simple vista¹² [117].

Existen muchas menos evidencias para los agujeros negros de masa intermedia (IMBH), la mayoría procedentes de núcleos de galaxias activas de baja luminosidad, cúmulos globulares o fuentes X ultraluminosas. La única evidencia directa de la existencia de los IMBHs, procede de la señal de onda gravitacional GW190521 resultado de la coalescencia de dos agujeros negros de $85M_{\odot}$ y $65M_{\odot}$ para formar un único IMBH de $142M_{\odot}$ [75], [65].

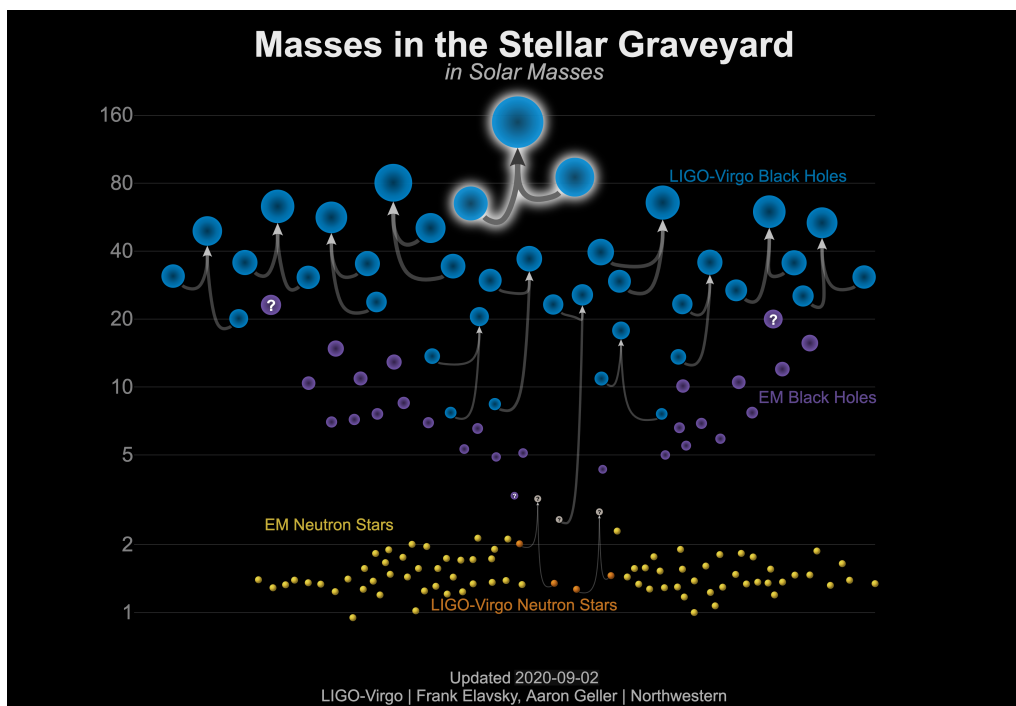


FIGURA 2.8: Violeta: Agujeros negros de masa estelar detectados mediante observaciones electromagnéticas. Azul: Agujeros negros detectados mediante las ondas gravitacionales, desde la primera detección hasta los primeros meses de la primera mitad del tercer periodo de observación *O3a*. Amarillo: Estrellas de neutrones detectadas mediante observaciones electromagnéticas. Naranja: Estrellas de neutrones detectadas mediante las ondas gravitacionales, desde la primera detección hasta los primeros meses de la primera mitad del tercer periodo de observación *O3a*. En el centro podemos ver claramente el evento GW190521, resultando en un IMBH de $142M_{\odot}$. Imagen de [80].

La astronomía de ondas gravitacionales está abriendo una nueva ventana para entender el universo. Previamente, la astronomía estaba basada únicamente en la radiación electromagnética. De manera que, a medida que la tecnología avanzaba, se iban pudiendo observar cada vez más bandas de frecuencia del espectro electromagnético, adquiriendo nuevas perspectivas y nuevos descubrimientos. La observación de ondas gravitacionales nos proporciona un medio adicional para estudiar el universo, puesto

¹¹Puesto que el límite superior de masa para una estrella de neutrones es $2.7M_{\odot}$, la naturaleza de este objeto compacto sigue siendo cuestionada [58]

¹²Situado en la esquina suroeste de la constelación Telescopium, cerca de Pavo y Ara.

que nos permiten observar sistemas no detectables a través de la radiación electromagnética. Combinando las observaciones para un solo evento a través de diferentes medios, podemos obtener una visión más completa de las propiedades de la fuente, marcando una nueva era en la astronomía de multi-mensajeros.

2.4. Categorías de ondas gravitacionales.

De acuerdo con la teoría de la relatividad, cualquier objeto en aceleración que tenga masa produce ondas gravitacionales, incluso un aplauso. Sin embargo, solo los eventos más violentos existentes en el universo son capaces de producir ondas gravitacionales que podamos detectar a través de los instrumentos con base en la Tierra, capaces de medir deformaciones del espacio-tiempo de una milésima del ancho de un protón [116]. Los miembros que componen la colaboración científica LIGO, han definido cuatro clases de ondas gravitacionales basadas en los objetos que las generan y las técnicas utilizadas para su detección:

- Ondas gravitacionales continuas, son aquellas producidas
 - o bien por un solo objeto masivo que rota con imperfecciones en su simetría esférica, como una estrella de neutrones;
 - o bien al orbitar una binaria compacta cuyos objetos, como enanas blancas, estrellas de neutrones o agujeros negros, se encuentran muy alejados el uno del otro.

Si la velocidad de giro en ambos casos se mantiene constante, también lo será la amplitud y frecuencia de las ondas gravitacionales emitidas, motivo por el cual se las denomina de esta forma [28].

- Ondas gravitacionales estocásticas. Continuamente, estamos siendo bombardeados por pequeñas ondas gravitacionales procedentes desde todas las direcciones posibles, mezclándose entre sí en lo que se conoce como señal estocástica. Estas ondas son las más pequeñas y difíciles de detectar siendo, una parte de ella, originada en el Big Bang [28].
- Ondas gravitacionales transitorias que, según la técnica utilizada en su detección, pueden dividirse en:
 - Ondas gravitacionales producidas al orbitar binarias compactas que se encuentran orbitando entre sí en una trayectoria inminente de colisión, cuya búsqueda modelada se basa en técnicas de filtrado adaptado. Hasta la fecha, todos los eventos detectados por LIGO, entran dentro de esta categoría. Existen tres subclases de sistemas de binarias compactas que generan ondas gravitacionales:
 - Binaria de estrella de neutrones (BNS).
 - Binaria de agujeros negros (BBH).
 - Binaria de estrella de neutrones y agujero negro (NSBH).

Cada binaria produce un patrón único de ondas gravitacionales, sin embargo el mecanismo de generación es el mismo en los tres casos [28], [100].

- Ondas gravitacionales asociadas a estallidos cortos, producidas por fuentes desconocidas y de corta duración. Estas búsquedas son no modeladas y se basan en la identificación de exceso de potencia en el dominio temporal

y en el de frecuencia. Existen hipótesis de que algunos sistemas, como las supernovas o los brotes de rayos gamma, pueden producir ondas gravitacionales de este tipo. Su forma de onda es conocida, pero no con el detalle suficiente como para poder realizar búsquedas [28], [82], [100].

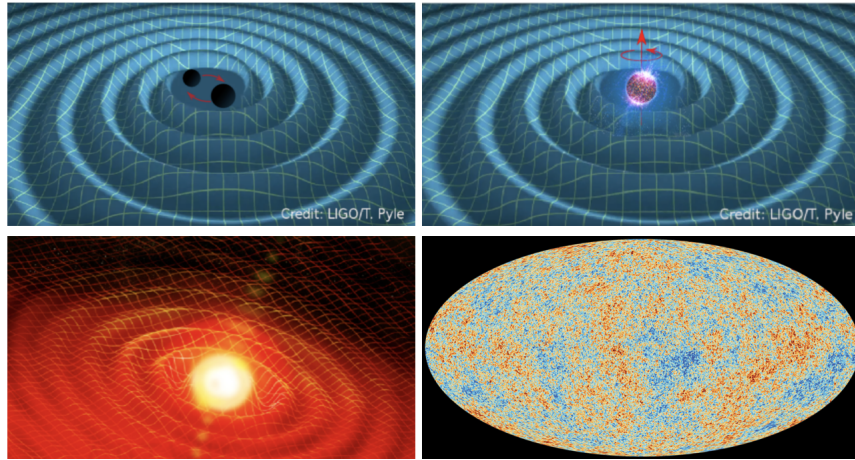


FIGURA 2.9: Categorías de ondas gravitacionales. Fila superior, de izquierda a derecha: ondas gravitacionales de binarias compactas y ondas gravitacionales continuas. Fila inferior, de izquierda a derecha: ondas gravitacionales asociadas a estallidos cortos y radiación de fondo de microondas asociado a las ondas gravitacionales estocásticas. Imagen modificada de [111] y [44].

Con el concepto de fondo estocástico, procedente de este segundo tipo de onda gravitacional, podríamos preguntarnos cuántos eventos individuales existen en los datos de los detectores.

Las observaciones de ondas gravitacionales procedentes de la coalescencia de agujeros negros de masa estelar, nos han permitido estimar que cada 223_{-115}^{+352} s, es decir, cada 2 – 10 min, se produce dicha fusión en algún lugar del universo visible [130]. Para la coalescencia de binarias de estrellas de neutrones, la fusión se produce cada 13_{-9}^{+49} s. Una pequeña fracción de estas coalescencias, es detectada como eventos de ondas gravitacionales que pueden resolverse individualmente mediante los detectores Advanced LIGO y Advanced Virgo. El resto contribuye a un fondo estocástico [130].

Entonces, la respuesta a la pregunta es: No lo sabemos, pero sí podemos saber cuántos eventos totales hay durante el tiempo de observación. Es decir, somos capaces de determinar la tasa global de fusión entre agujeros negros en el universo. Es más, por primera vez podemos determinar cuál es la densidad de masa total de agujeros negros en el universo, gracias a una nueva búsqueda astrofísica para el fondo estocástico de ondas gravitacionales. Para ello, en febrero de 2018, se publicó un nuevo método que aplica la estimación de parámetros bayesianos a todos los datos disponibles a través de simulaciones de Monte Carlo. En éste, se estima que la búsqueda podría detectar el fondo estocástico de una señal procedente de la binaria compacta de dos agujeros negros con tan solo un día de los datos procedentes de los detectores cuando lleguen a la sensibilidad de diseño, en comparación con los aproximadamente 40 meses que se utiliza en las búsquedas de correlación cruzada [130], [127].

Con este nuevo instrumento, podríamos aprender sobre las poblaciones de agujeros negros en el universo primigenio, podríamos combinar los resultados de esta búsqueda con detecciones confirmadas y detecciones candidatas para eliminar el sesgo inherente a ver únicamente las señales de mayor amplitud con mayor facilidad y se podría generalizar dicho método para aplicarlo a estrellas de neutrones, o para detectar el

fondo de ondas gravitacionales que quedó tras el nacimiento del universo en el Big Bang [127].

Esta tesis, se centra en el estudio de las ondas gravitacionales producidas por la coalescencia de binarias compactas (CBC), en concreto aquellas producidas por la fusión de dos agujeros negros.

2.4.1. Ondas gravitacionales producidas por CBCs.

El mecanismo que genera las ondas gravitacionales producidas por la coalescencia de binarias compactas, ocurre a lo largo de miles de millones de años. A medida que los objetos compactos orbitan entre sí, van emitiendo ondas gravitacionales que se llevan parte de la energía orbital del sistema. En consecuencia, ambos cuerpos se acercarán cada vez más, orbitando cada vez más rápido y por tanto, produciendo ondas gravitacionales cada vez más fuertes, es decir, de mayor amplitud y frecuencia. El final inevitable será la fusión de ambos objetos, en nuestro caso de dos agujeros negros, dando como resultado un agujero negro de Kerr perturbado que evolucionará a un agujero negro de Kerr [24], [28].

2.4.1.1. Mecanismos de formación de binarias de agujeros negros observadas por LIGO.

Existen tres procesos conocidos de formación de binarias compactas, consistentes con las observaciones de ondas gravitacionales realizadas por Advanced LIGO: evolución común a través de la fase envolvente, evolución químicamente homogénea, formación dinámica en entornos estelares densos o una combinación de estas tres interacciones.

El proceso de evolución común a través de la fase envolvente, que describiremos a continuación, es el más estudiado de todos ellos. En este escenario, las dos estrellas nacen en una binaria relativamente ancha. Cuando la estrella más masiva, la principal, llega al final de su secuencia principal de evolución, el núcleo empieza a contraerse, la envoltura rica en hidrógeno se expande y se produce una transferencia de masa de forma dinámicamente inestable, conocida como fase envolvente común, hacia la estrella secundaria. La estrella principal colapsa a un agujero negro, mientras que la secundaria seguirá con su vida evolutiva hasta que, cien mil años más tarde, alcance el fin de su secuencia principal. El proceso vuelve a repetirse, la secundaria empezará a transferir masa al agujero negro, que durante esos cien mil años habrá perdido $2/3$ de su masa inicial. Este proceso de transferencia dinámicamente inestable de masa, conducirá a la formación de una envoltura de gas alrededor de la binaria. Las fuerzas de arrastre sobre el agujero negro, conducirán a una órbita en espiral. La energía orbital disipada se deposita en la envoltura, llegando a expulsarla. Tras una mayor pérdida de masa impulsada por el viento de la secundaria y su colapso en un agujero negro, se forma la binaria de agujeros negros. Todo este transcurso, desde la formación de la binaria estelar hasta la formación de la binaria de agujeros negros dura millones de años, mientras que la subsiguiente emisión de ondas gravitacionales puede durar miles de millones de años antes de que se fusionen [89].

En el segundo proceso, la evolución químicamente homogénea, propio de estrellas de alta masa y baja metalicidad ¹³, no se contempla la expansión de la envoltura rica en hidrógeno y como consecuencia, la mayor parte de la masa de la estrella se invierte en la creación del agujero negro, frente al 30 – 50 % que se suele invertir. De esta manera, la escala de tiempo para la fusión de ambos agujeros negros, que no se han transferido masa entre sí, se reduciría significativamente para una separación dada [89].

¹³Abundancia relativa de elementos más pesados que el helio.

La última posibilidad de formación admite la posibilidad de que los agujeros negros no se hayan formado en la misma binaria estelar, sino que se formaron en un entorno estelar denso de forma independiente, como un cúmulo globular. Al igual que los objetos más masivos del cúmulo, ambos agujeros negros se hundirán hacia el centro. Una vez allí, podrán formar binarias a través de interacciones a tres cuerpos, o cuando en una interacción $2 + 1$ el objeto más ligero sea expulsado a favor de los dos objetos más pesados que formen la binaria. Para que la binaria formada no se vea afectada por las demás estrellas en el cúmulo, cada componente deberá tener una velocidad orbital mayor que la velocidad de los demás objetos. Si la densidad de los agujeros negros es lo suficientemente alta como para asegurar una tasa adecuada de interacciones con las demás estrellas, la binaria “se endurecerá” hasta que sea lo suficientemente compacto como para fusionarse mediante la emisión de ondas gravitacionales [89].

Los tres canales de formación descritos, no tienen por qué ser distintos e independientes. La misma binaria puede haberse beneficiado de múltiples tipos de interacción, mientras se dirigía a la coalescencia. Los agujeros negros agrupados por interacción dinámica en cúmulos globulares, pueden ser parte de binarias de transferencia de masa. Por el contrario, las binarias de transferencia de masa pueden verse favorecidas por encuentros dinámicos posteriores. También podría darse el caso en que la estrella más masiva de una binaria aislada, pudiera evolucionar químicamente de manera homogénea, mientras que su compañera menos masiva se expande y dona masa [89].

2.4.1.2. Fases de la onda gravitacional.

Las ondas gravitacionales son producidas durante todo el proceso generando una señal conocida como chirrido [63], como la representada en la figura (2.10), que puede dividirse según las características del ciclo de vida de la binaria en tres etapas:

- Fase de evolución suave, durante la cual los agujeros negros orbitan entre sí acercándose mutuamente al mismo tiempo que van generando ondas gravitacionales [86].
- Fase de fusión, momento en el que colisionan originando a un agujero negro de Kerr perturbado [86].
- Fase de estabilización, donde se emiten las últimas ondas gravitacionales hasta que el agujero negro de Kerr se estabiliza [86].

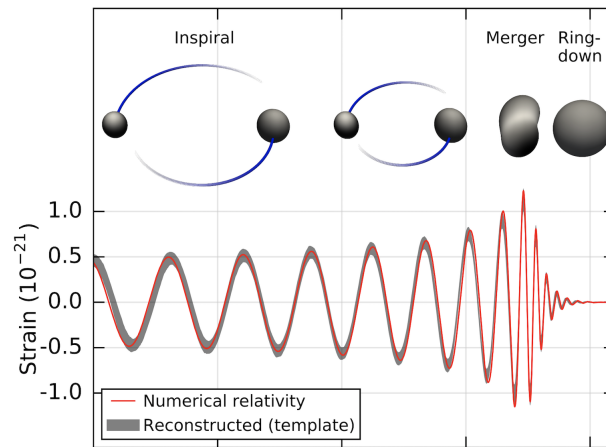


FIGURA 2.10: Comparación entre la señal reconstruida de la onda gravitacional del primer evento detectado GW150914 visto por el detector *H1* en Hanford con su señal numérica calculada a partir de la teoría de la relatividad, para las tres etapas del evento: fase de evolución suave, fase de fusión y fase de estabilización. Imagen de [84].

Una forma de validar la teoría de la relatividad, es comparando las características existentes en estas tres etapas desde el punto de vista experimental con las predichas numéricamente por la teoría. Por ejemplo, en la figura (2.11), observamos la consistencia entre ambas medidas en la intersección entre los parámetros de espín y masa del agujero negro final, determinados a partir de los datos de la onda gravitacional recibida, con las restricciones surgidas al utilizar la descripción numérica en todas las fases de la onda, IMR en inglés, es decir, inspiral, merger y ringdown [86].

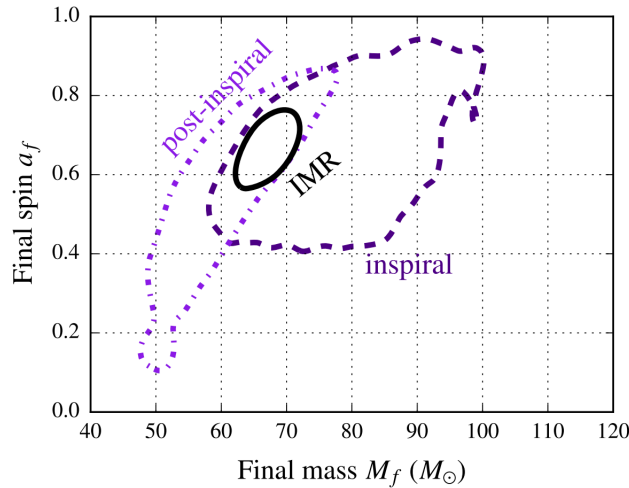


FIGURA 2.11: La línea discontinua muestra la región con un 90% de probabilidad de contener el valor real de masa y espín del agujero negro final, obtenido a partir de los datos en la fase de evolución suave. La línea discontinua punteada muestra la misma región, obtenida a partir de los datos en la fase de fusión y estabilización. La línea continua señala la región sobre ambos parámetros al utilizar la descripción basada en la teoría de la relatividad numérica en todas las fases de la onda gravitacional, IMR en inglés. Imagen de [86].

En el siguiente capítulo estudiaremos cómo se realiza el análisis de datos y la estimación de parámetros para generar figuras como ésta (2.11), conocidas como gráficos de esquina, así como una descripción del modelo IMR utilizado en esta tesis.

2.5. Derivación de la solución de la ecuación de onda gravitacional en el vacío.

Antes de que la teoría de la relatividad general estuviera terminada, Einstein tenía claro que su teoría implicaría la predicción de ondas gravitacionales. Pocos meses después de completarla, Einstein (1916-1918) elaboró las propiedades básicas de estas ondas [134].

Las ondas gravitacionales son perturbaciones en la curvatura del espacio-tiempo que se propagan a la velocidad de la luz producidas, en nuestro caso concreto de estudio, por uno de los eventos astrofísicos más violentos existentes, la colisión de dos agujeros negros.

Con el objetivo de identificar la dinámica del propio espacio-tiempo, codificada en las perturbaciones $h_{\mu\nu}$ de la métrica en la aproximación de campo débil, podremos observar la derivación y propiedades de las ondas gravitacionales. Además analizaremos el efecto de las ondas sobre masas de prueba y describiremos la emisión de las ondas gravitacionales desde un sistema binario de estrellas a través del formalismo cuadrupolar. Finalmente, estudiaremos las clases de ondas gravitacionales existentes,

particularizando en nuestro caso de interés, aquellas producidas por la coalescencia de binarias compactas.

2.5.1. Ondas planas en la teoría linealizada de la gravedad.

Una mirada perspicaz a las ecuaciones de Einstein

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.16)$$

nos hará reconocer que, al fin y al cabo, podrían ser ecuaciones diferenciales con propiedades interesantes. La mejor manera para observar este efecto es introduciéndolas a situaciones de campo débil. En este régimen, el espacio-tiempo es prácticamente plano. De forma que puede aproximarse la métrica por una de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ más unas perturbaciones $\delta g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$, tales que

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{con} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (2.17)$$

Se podría entonces expandir las ecuaciones de campo en potencias de $h_{\mu\nu}$, manteniendo tan sólo los términos lineales. Esta asunción es coherente con la derivación de las ondas gravitacionales en el sentido de que las ondas, lejos de las fuentes que las producen, tienen unos radios de curvatura en sus frentes enormes en comparación con su longitud de onda, al igual que el radio de curvatura del espacio-tiempo a través del cual se propaga. Esto significa que, sin pérdida de generalidad, podemos idealizar las ondas con un frente plano, propagándose a través del espacio-tiempo plano [134]¹⁴. El formalismo resultante es el conocido como 'teoría linealizada de la gravedad'. Adoptando la última expresión para los componentes de la métrica, en el apéndice (A) se ha derivado en detalle los ingredientes necesarios para linealizar la teoría de la relatividad [93].

Una vez definidos los tensores linealizados necesarios, reescribiremos las ecuaciones de Einstein de manera que podamos obtener una ecuación en términos de la perturbación de la métrica $h_{\alpha\beta}$. Utilizando coordenadas geométricas $G = 1$ y $c = 1$, las ecuaciones de Einstein quedan,

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}. \quad (2.18)$$

Introduciendo el tensor de Einstein linealizado (A.20), obtenemos

$$\begin{aligned} -\partial_\mu \partial_\alpha h_\beta^\mu + \partial_\alpha \partial_\beta h + \square h_{\alpha\beta} - \partial_\mu \partial_\beta h_\alpha^\mu + \\ + \eta_{\alpha\beta} (\partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h) = -16\pi T_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde \square es el D'Alembertiano $\square \equiv \partial^\alpha \partial_\alpha = \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta$.

Redefiniendo la perturbación con la forma del tensor de Einstein $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ y operando con cuidado, podremos eliminar de esta expresión los términos dependientes de la traza h . Así, sea

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h \quad (2.20)$$

que verifica $\bar{h} \equiv \bar{h}_a^a = -h$, su inversa será:

$$h_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \bar{h}. \quad (2.21)$$

¹⁴Richard Isaacson desarrolló en 1968, una formulación geométrica de la teoría de las ondas gravitacionales propagándose a través del espacio-tiempo curvo. Un resumen de las ideas principales de su análisis, puede encontrarse en [134].

Introduciendo esta última expresión en (2.19), obtenemos:

$$\begin{aligned} & \square \bar{h}_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\nu \bar{h}^{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\beta \bar{h}_\alpha^\mu - \partial_\mu \partial_\alpha \bar{h}_\beta^\mu + \\ & + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \square \bar{h} - \partial_\alpha \partial_\beta \bar{h} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \square \bar{h} + \frac{1}{2} \partial_\alpha \partial_\beta \bar{h} + \frac{1}{2} \partial_\alpha \partial_\beta \bar{h} = -16\pi T_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Simplificando:

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\nu \bar{h}^{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\beta \bar{h}_\alpha^\mu - \partial_\mu \partial_\alpha \bar{h}_\beta^\mu = -16\pi T_{\alpha\beta} \quad (2.23)$$

El primer término en estas ecuaciones linealizadas es el conocido D'Alembertiano del espacio plano, los otros términos sirven simplemente para mantener las ecuaciones con invariancia gauge. En el apéndice (B), podemos encontrar la definición de transformación gauge e invarianza gauge, en términos de la perturbación de la métrica.

Para finalizar el desarrollo de (2.23) y llegar a la ecuación de onda para la perturbación deberemos aplicar una “transformación coordenada infinitesimal”, es decir, el cambio gauge,

$$x_{nuevo}^\alpha(\mathcal{P}) = x_{viejo}^\alpha(\mathcal{P}) + \xi^\alpha(\mathcal{P}), \quad (2.24)$$

que produce

$$h_{\mu\nu}^{nuevo} = h_{\mu\nu}^{viejo} - \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \xi_\nu, \quad (2.25)$$

siendo $\xi^\alpha(\mathcal{P})$ los generadores de cambio gauge, elegidos para imponer la condición

$$\partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta} = 0, \quad (2.26)$$

conocido como gauge de Lorentz. Estas condiciones gauge son análogas a las de electromagnetismo: $\partial^\alpha A_\alpha = 0$.

Introduciendo las transformaciones gauge sobre las perturbaciones (B.10) en las perturbaciones (2.20):

$$\bar{h}'_{\alpha\beta} = h'_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h' = \bar{h}_{\alpha\beta} - (\partial_\alpha \xi_\beta + \partial_\beta \xi_\alpha - \eta_{\alpha\beta} \partial_\mu \xi^\mu). \quad (2.27)$$

Su divergencia:

$$\partial^\beta \bar{h}'_{\alpha\beta} = \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta} - \partial^\beta \partial_\alpha \xi_\beta - \partial^\beta \partial_\beta \xi_\alpha + \eta_{\alpha\beta} \partial^\beta \partial_\mu \xi^\mu. \quad (2.28)$$

Operando un poco el segundo y el tercer término se anulan, de manera que la divergencia de las perturbaciones transformadas queda

$$\partial^\beta \bar{h}'_{\alpha\beta} = \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta} - \square \xi_\alpha, \quad (2.29)$$

con $\partial_\beta \partial^\beta = \square$ el D'Alembertiano.

Las coordenadas consistentes con el gauge de Lorentz (2.26) son aquellas tales que

$$\square \xi_\alpha = F_\alpha(x), \quad (2.30)$$

donde $F_\alpha(x) = \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta}$ es una función dada por la configuración inicial. De esta manera

$$\partial^\beta \bar{h}'_{\alpha\beta} = 0. \quad (2.31)$$

En consecuencia, gracias a este gauge, la ecuación (2.23) se liberará automáticamente de los términos de la divergencia sobre la perturbación obteniendo la conocida ecuación

de onda para la perturbación:

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = -16\pi T_{\alpha\beta}. \quad (2.32)$$

Las condiciones de gauge (2.26), las ecuaciones de campo (2.32) y la definición de métrica

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}, \quad (2.33)$$

son las ecuaciones fundamentales de la teoría linealizada de la gravedad escritas con el gauge de Lorentz [93], [134].

2.5.2. Ondas gravitacionales en el vacío.

Después de ser emitidas, las ondas gravitacionales se propagan a través de la materia sin ninguna impunidad, es decir, se propagan como en el vacío, incluso cuando hay materia y campos presentes. De manera que, podemos analizar dichas ondas considerando que se propagan en un espacio-tiempo plano y vacío [134]. Por lo tanto, las estudiaremos utilizando la teoría linealizada de la gravedad en el vacío. En el gauge de Lorentz (2.26), las ecuaciones de propagación para campos gravitatorios en el vacío son aquellas donde $T_{\alpha\beta} = 0$, es decir alejadas de la fuente que las produjo:

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = 0. \quad (2.34)$$

Las soluciones más simples a estas ecuaciones linealizadas es la solución de onda plana monocromática:

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} \exp(ik_{\mu}x^{\mu}), \quad (2.35)$$

donde $A_{\alpha\beta}$ son los coeficientes correspondientes a la amplitud y k_{μ} el 4-vector de onda que satisfacen

$$k_{\mu}k^{\mu} = 0, \quad (2.36)$$

$$A_{\alpha\mu}k^{\mu} = 0. \quad (2.37)$$

Esta solución describe una onda con frecuencia

$$\omega \equiv k^0 = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2}, \quad (2.38)$$

que se propaga a la velocidad de la luz en dirección $(1/k^0)(k_x, k_y, k_z)$.

Un primer vistazo a la amplitud $A_{\alpha\beta}$ de esta onda plana, nos hace pensar que parece tener seis componentes independientes (diez, menos las 4 condiciones de ortogonalidad $A_{\alpha\mu}k^{\mu} = 0$). Pero no puede ser así, puesto que el campo gravitatorio en relatividad general tiene dos grados de libertad dinámicas, no seis. Tenemos que tener en cuenta la arbitrariedad relacionada con la libertad de gauge. El vector de onda plana

$$\xi^{\alpha} \equiv -iC^{\alpha} \exp(ik_{\mu}x^{\mu}), \quad (2.39)$$

con C^{α} cuatro constantes arbitrarias, genera una transformación gauge que puede cambiar arbitrariamente cuatro de las seis componentes independientes de $A_{\alpha\beta}$. Debemos deshacernos de esta arbitrariedad escogiendo un gauge específico, conocido como el gauge transverse-traceless (TT) descrito en el apéndice (B). Este nuevo gauge adquiere el nombre de transverse-traceless o TT, puesto que con el, la perturbación de la métrica es puramente espacial, transversal a la dirección de propagación de las ondas, es decir la dirección z , y no tiene traza [93], [134].

2.5.2.1. Polarización de una onda plana propagándose en la dirección z .

Consideremos una onda plana monocromática propagándose en la dirección z . Las condiciones gauge TT, $h_{0\alpha}^{TT} = 0$, $\partial_j h_{ij}^{TT} \equiv ik_j h_{ij}^{TT} = 0$ y $h_{kk}^{TT} = 0$, revelan que las únicas componentes de $h_{\alpha\beta}^{TT}$ ¹⁵ que permanecen son [93], [134], [88]:

$$\begin{aligned} h_{xx}^{TT} &= -h_{yy}^{TT} = A_+ \exp(-i\omega(t-z)), \\ h_{xy}^{TT} &= +h_{yx}^{TT} = A_\times \exp(-i\omega(t-z)), \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde A_+ y A_\times representan los dos modos de polarización independientes. En su forma matricial:

$$h_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_+ & A_\times & 0 \\ 0 & A_\times & -A_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp(-i\omega(t-z)). \quad (2.41)$$

El elemento de línea correspondiente según la métrica $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, será

$$ds^2 = -dt^2 + (1 - h_+)dx^2 + (1 - h_+)dy^2 + 2h_\times dx dy + dz^2. \quad (2.42)$$

2.6. Efecto de las ondas gravitacionales sobre masas de prueba.

En el apéndice (C), se deriva la ecuación de desviación geodésica en el sistema de referencia del detector (C.17), asumiendo que la separación entre dos masas de prueba es pequeña en comparación con la longitud de onda de la radiación. En esta sección, utilizaremos dicha ecuación para estudiar el efecto de las ondas gravitacionales sobre estas masas de prueba; en concreto cómo cambian sus posiciones durante su tránsito. Considerando un anillo de masas de prueba inicialmente en reposo en el sistema de referencia propio del detector y fijando el origen en el centro del anillo, ξ^i describirá la distancia a una masa de prueba con respecto a su origen.

Sea una onda gravitacional propagándose a lo largo de la dirección z y un anillo de masas de prueba localizado en el plano (x, y) , perpendicular a la dirección de propagación. Una onda propagándose en dirección z , tendrá como componentes de la perturbación h_{ij}^{TT} nulas en z , en $i = 3$ y $j = 3$. De manera que, según (C.17), si las masas de prueba estaban inicialmente en $z = 0$ se mantendrán en $z = 0$, quedando el desplazamiento confinado en el plano (x, y) . Por lo tanto, las ondas gravitacionales son transversales no sólo desde un punto de vista matemático (satisfacen $\partial_i h_{ij} = 0$), sino también por su efecto físico: desplazan las masas de prueba transversalmente, con respecto a su dirección de propagación. En la figura (2.12) podemos representar los diferentes efectos de las polarizaciones $+$ y \times de la onda gravitacional, sobre este anillo de pruebas inicialmente en reposo en el plano (x, y) , a lo largo del tiempo para diferentes frecuencias ω , cogiendo como origen temporal $h_{ij}^{TT} = 0$ en $t = 0$,

$$h_{ij}^{TT} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times \\ h_\times & -h_+ \end{pmatrix} \sin \omega t \quad (2.43)$$

con los índices espaciales $i, j = 1, 2$ sobre el plano (x, y) [88].

¹⁵Perturbación de la métrica en el gauge TT.

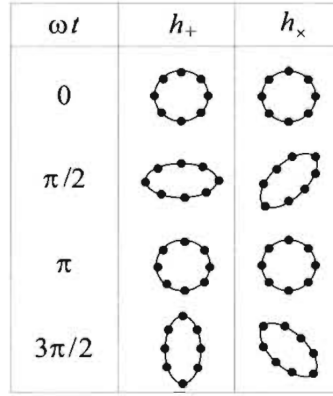


FIGURA 2.12: Deformación de un anillo de masas de prueba debido a las polarizaciones $+$ y \times de la onda gravitacional. Imagen del libro [88].

Estudiemos por separado ambas polarizaciones. Tomando la posición de una masa de prueba como una perturbación respecto de una posición de equilibrio (x_0, y_0) siendo $\delta x(t), \delta y(t)$ los desplazamientos inducidos por la onda gravitacional,

$$\xi^i = (x_0 + \delta x(t), y_0 + \delta y(t)). \quad (2.44)$$

2.6.1. Polarización h_+ .

Tras anular la componente h_\times , la ecuación (C.17) resulta

$$\delta \ddot{x} = -\frac{h_+}{2}(x_0 + \delta x)\omega^2 \sin \omega t, \quad (2.45)$$

$$\delta \ddot{y} = \frac{h_+}{2}(y_0 + \delta y)\omega^2 \sin \omega t. \quad (2.46)$$

Como podemos observar, el lado derecho de ambas ecuaciones nos indica que las perturbaciones $\delta x(t), \delta y(t)$ son de orden $\mathcal{O}(h_+)$; de manera que para un orden lineal en h podemos despreciar las perturbaciones respecto la posición de equilibrio (x_0, y_0) , obteniendo dos integrales inmediatas

$$\delta x(t) = \frac{h_+}{2}x_0 \sin \omega t, \quad (2.47)$$

$$\delta y(t) = -\frac{h_+}{2}y_0 \sin \omega t. \quad (2.48)$$

Podemos construir explícitamente el lugar geométrico de las masas de prueba, ya observado en la figura (2.12), para darnos cuenta que obtenemos una elipse cuyos semiejes van cambiando con el tiempo,

$$\left(\frac{x}{4x_0 + 2x_0 h_+ \sin \omega t} \right)^2 + \left(\frac{y}{4y_0 - 2y_0 h_+ \sin \omega t} \right)^2 = 1. \quad (2.49)$$

Debido a los signos en los denominadores de esta ecuación, cuando uno de los semiejes alcanza el valor máximo el otro alcanza el valor mínimo, alternándose el uno con el otro a lo largo del tiempo en las direcciones horizontal y vertical. La deformación producida en el anillo de masas de prueba adquiere la forma $+$, dando origen al nombre de la polarización que produce dicha deformación: h_+ [88].

2.6.2. Polarización h_{\times} .

Tras anular la componente h_{+} , la ecuación (C.17) resulta

$$\delta\ddot{x} = \frac{h_{\times}}{2}(y_0 + \delta y)\omega^2 \sin \omega t, \quad (2.50)$$

$$\delta\ddot{y} = \frac{h_{\times}}{2}(x_0 + \delta x)\omega^2 \sin \omega t. \quad (2.51)$$

Por el mismo argumento que en la sección anterior, podemos despreciar las perturbaciones respecto la posición de equilibrio (x_0, y_0) , obteniendo

$$\delta x(t) = \frac{h_{\times}}{2}y_0 \sin \omega t, \quad (2.52)$$

$$\delta y(t) = \frac{h_{\times}}{2}x_0 \sin \omega t. \quad (2.53)$$

Construyendo el lugar geométrico de las masas de prueba, observado en la figura (2.12), a lo largo del tiempo

$$\left(\frac{x}{4x_0 + 2y_0 h_{\times} \sin \omega t}\right)^2 + \left(\frac{y}{4y_0 + 2x_0 h_{\times} \sin \omega t}\right)^2 = 1. \quad (2.54)$$

Debido a los signos en los denominadores de esta ecuación, los valores máximos y mínimos de los semiejes se alcanzan simultáneamente, de manera que ahora la deformación se lleva a cabo a lo largo de las bisectrices de los ángulos que ellos conforman. La deformación producida en el anillo de masas de prueba adquiere la forma \times , puesto que corresponde a una deformación girada 45° respecto a la anterior $+$, dando origen al nombre de la polarización que produce dicha deformación: h_{\times} [88].

2.7. Emisión de ondas gravitacionales.

A continuación, estudiaremos cómo son generadas las ondas gravitacionales por las fuentes de materia, en términos del formalismo cuadrupolar.

En el análisis de la generación de ondas gravitacionales, es de gran utilidad dividir el espacio-tiempo alrededor de la fuente en diferentes zonas tal y como muestra la siguiente figura (2.13).

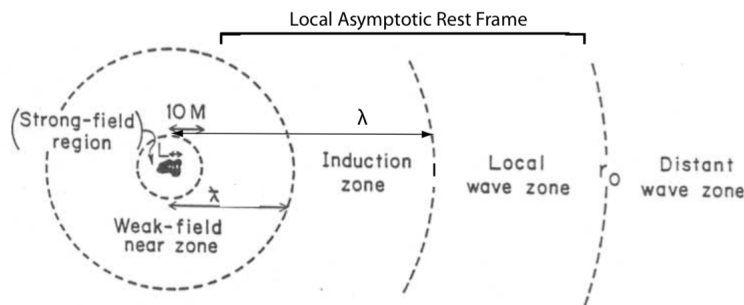


FIGURA 2.13: Regiones del espacio-tiempo alrededor de la fuente de ondas gravitacionales. Imagen de [134].

Siendo la masa de la fuente M , si tiene un tamaño $L \leq M$, entonces el espacio-tiempo dentro y cercano a la fuente se encontrará bastante curvado, por lo que se la denomina como fuente de gravedad fuerte. Algunos ejemplos de fuentes con esta característica

son las estrellas de neutrones y las colisiones de binarias de agujeros negros. La región donde el campo de la fuente es fuerte es aquel cuyo radio medido desde el centro de masas es de $r \leq 10M$. La región donde el campo de la fuente es débil se define como aquel cuyo radio es de $10M \leq r \leq \bar{\lambda}$, donde $\bar{\lambda}$ es la longitud de onda reducida emitida por las ondas. En esta zona, la gravedad de la fuente puede aproximarse bastante bien por la teoría newtoniana y por tanto, por el potencial gravitatorio de Newton. Al igual que en el electromagnetismo, la zona $\bar{\lambda} \leq r \leq \lambda$ se la conoce como región de inducción. La región de la onda empieza en $r \sim \lambda = 2\pi\bar{\lambda}$.

Se puede hacer dos grandes distinciones separadas en dos zonas: la región de ondas local y la región de ondas distantes. La zona de ondas local, es la parte cercana a la fuente $r \leq r_0$, donde la curvatura del espacio-tiempo de cuerpos externos y del universo en su conjunto no son importantes. El modelaje numérico de la onda gravitacional a partir de la dinámica de la fuente, se lleva a cabo en esta región. La zona de ondas distantes $r \geq r_0$, es aquella por la cual las ondas emitidas se ven afectadas significativamente por los cuerpos externos y por el universo, es decir, por la curvatura del espacio-tiempo de fondo. La propagación de ondas gravitacionales desde la fuente hasta la Tierra es tratada desde la región de ondas local hacia afuera, pasando por la región de ondas distantes.

Toda la zona en la cual la gravedad es débil y la curvatura del espacio-tiempo de los cuerpos externos y del resto del universo no son importantes $10M \leq r \leq r_0$, se la conoce como sistema de referencia local asintótico en reposo de la fuente [134].

2.7.1. Desarrollo multipolar.

Las ondas electromagnéticas emitidas por una distribución dinámica de carga pueden expresarse como la suma de momentos multipolares de la fuente. De forma similar, las ondas gravitacionales emitidas por una distribución dinámica de masa/energía y momento pueden expresarse, en la región de ondas local, como la suma de momentos multipolares.

En la región donde el campo de la fuente es débil, los momentos de la distribución masa/energía aparecen en la parte temporal de la métrica en una forma que nos resulta familiar de la teoría newtoniana,

$$g_{00} = -(1 + 2\Phi) = -1 \& \frac{\mathcal{I}_0}{r} \& \frac{\mathcal{I}_1}{r^2} \& \frac{\mathcal{I}_2}{r^3} \& \dots, \quad (2.55)$$

donde r es el radio, \mathcal{I}_l es el momento de orden l y “&” significa “más un término que tiene la forma”, es decir un término cuya magnitud y dependencia con los parámetros es la que se muestra pero cuyos coeficientes no nos interesan, de momento. El término monopolar \mathcal{I}_0 representa la masa total de la fuente, y el momento dipolar \mathcal{I}_1 se puede hacer desaparecer colocando el origen de coordenadas en el centro de masas.

De igual manera, en la misma región donde el campo de la fuente es débil, los momentos de la distribución de momentos \mathcal{S}_l , aparecen en la parte espacio-temporal de la métrica,

$$g_{0j} = \frac{\mathcal{S}_1}{r^2} \& \frac{\mathcal{S}_2}{r^3} \& \dots, \quad (2.56)$$

donde el momento dipolar \mathcal{S}_1 es el momento angular de la fuente J_k .

Sea la masa de la fuente M , su tamaño L y sus velocidades internas $\sim v$, entonces las magnitudes de estos momentos son

$$\mathcal{I}_l \sim ML^l, \quad \mathcal{S}_l \sim MvL^l, \quad (2.57)$$

garantizando que los campos cercanos a la región donde el campo de la fuente es débil, es decir g_{00} y g_{0j} , sean adimensionales.

A medida que estos momentos de la fuente oscilan dinámicamente, van produciendo ondas gravitacionales. La ley de la conservación de energía evita que el término monopolar $\mathcal{I}_0 = M$ oscile, de la misma forma lo hace la conservación del momento angular evitando que el momento dipolar $\mathcal{S}_1 = J_k$ oscile, por último, puesto que la derivada temporal del momento dipolar \mathcal{I}_1 es el momento lineal de la fuente, este último principio de conservación evitará su oscilación. Por lo tanto, únicamente los momentos de orden más bajo podrán oscilar contribuyendo a las ondas, es decir, los momentos cuadrupolares.

Los campos de la onda h_+ y h_\times en la región de ondas local de la fuente, deberá cumplir con las siguientes características: ser adimensionales, decaer como $1/r$ y poder ser expresados como una suma sobre las derivadas de los momentos multipolares.

Con estas consideraciones, se garantiza que las ondas puedan expresarse de la siguiente manera,

$$h_+ \sim h_\times \sim \frac{\partial^2 \mathcal{I}_2 / \partial t^2}{r} \& \frac{\partial^3 \mathcal{I}_3 / \partial t^3}{r} \& \dots \& \frac{\partial^2 \mathcal{S}_2 / \partial t^2}{r} \& \frac{\partial^3 \mathcal{S}_3 / \partial t^3}{r} \& \dots \quad (2.58)$$

La escala de tiempo por la cual oscilan los momentos es $T \sim L/v$, por lo que la derivada temporal producirá un factor v/L . En consecuencia, las contribuciones 1-polares a las ondas tendrán magnitudes,

$$\frac{\partial^l \mathcal{I}_l / \partial t^l}{r} \sim \frac{M}{r} v^l, \quad \frac{\partial^l \mathcal{S}_l / \partial t^l}{r} \sim \frac{M}{r} v^{(l+1)}. \quad (2.59)$$

Esto significa que, para una fuente moviéndose lentamente, es decir aquella cuya velocidad interna v sea pequeña en comparación con la luz, el momento cuadrupolar \mathcal{I}_2 producirá las ondas gravitacionales más fuertes. Análogamente al electromagnetismo, las ondas 3-polares \mathcal{I} y las cuadrupolares \mathcal{S} serán débiles en un factor $v \sim L/\bar{\lambda}$, las cuadrupolares \mathcal{I} y 3-polares \mathcal{S} serán más débiles $v^2 \sim L^2/\bar{\lambda}^2$, y así sucesivamente [134].

2.7.2. Formalismo cuadrupolar.

Consideremos un sistema gravitatoriamente débil casi newtoniano, garantizado por tener una fuente de ondas gravitacionales moviéndose lentamente, puesto que la teoría newtoniana requiere velocidades internas $v \ll 1$, como por ejemplo un sistema binario de estrellas. En su zona cercana, el potencial gravitatorio newtoniano del sistema será,

$$\Phi(\vec{x}) = - \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\mathcal{V}_{x'}. \quad (2.60)$$

Utilizando coordenadas cartesianas imponiendo el origen en el centro de masas y expandiendo,

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{r} + \frac{x^j x^{j'}}{r^3} + \frac{x^j x^k (3x^{j'} x^{k'} - r'^2 \delta_{jk})}{2r^5} + \dots, \quad (2.61)$$

obtenemos la expansión multipolar del potencial newtoniano

$$\Phi(\vec{x}) = -\frac{M}{r} - \frac{3\mathcal{I}_{jk} x^j x^k}{2r^5} + \dots, \quad (2.62)$$

donde M es la masa del sistema y \mathcal{I}_{jk} el momento cuadrupolar,

$$M = \int \rho d\mathcal{V}_x, \quad \mathcal{I}_{jk} = \int \rho \left(x^j x^k - \frac{1}{3} r^2 \delta_{jk} \right) d\mathcal{V}_x. \quad (2.63)$$

Como mencionamos anteriormente, las oscilaciones del momento cuadrupolar generan las ondas gravitacionales más fuertes de la fuente. Estas ondas deben describirse, en la zona cercana a la fuente y en la región de ondas local, mediante una solución de onda para las ecuaciones de Einstein linealizadas con el gauge de Lorentz

$$\bar{h}_{\mu\nu,\nu} = 0, \quad \bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^\alpha = 0, \quad (2.64)$$

que tengan el límite newtoniano de zona cercana,

$$\frac{1}{2}(\bar{h}_{00} + \bar{h}_{xx} + \bar{h}_{yy} + \bar{h}_{zz}) = \bar{h}_{00} = (\text{parte cuadrupolar de } -2\Phi) = \frac{3\mathcal{I}_{jk}x^jx^k}{r}. \quad (2.65)$$

La solución puede escribirse de la siguiente manera,

$$\bar{h}_{00} = 2 \left[\frac{\mathcal{I}_{jk}(t-r)}{r} \right]_{,jk}, \quad \bar{h}_{0j} = 2 \left[\frac{\dot{\mathcal{I}}_{jk}(t-r)}{r} \right]_{,k}, \quad \bar{h}_{jk} = 2 \left[\frac{\ddot{\mathcal{I}}_{jk}(t-r)}{r} \right], \quad (2.66)$$

donde las coordenadas son cartesianas, $r \equiv \sqrt{\delta_{jk}x^jx^k}$ y los puntos denotan derivadas temporales.

Debido a que la perturbación de la métrica de traza inversa (2.66) en la zona de onda local tiene la forma de velocidad de propagación de la luz, además de un decaimiento muy lento $1/r$, podemos determinar el campo de ondas gravitacionales h_{jk}^{TT} a partir de dicha perturbación realizando una proyección TT, obteniendo lo que se conoce como ecuación cuadrupolar para la generación de ondas gravitacionales:

$$h_{jk}^{TT} = 2 \left[\frac{\ddot{\mathcal{I}}_{jk}(t-r)}{r} \right]^{TT}. \quad (2.67)$$

En el artículo “Sur la dynamique de l’électron” de 1905, Henri Poincaré introdujo por primera vez el concepto de onda gravitacional al asumir que la gravedad se propagaba a la velocidad de la luz. Aplicando este concepto a la teoría de la relatividad, Einstein derivó en 1916 la ecuación anterior (2.67), representando la primera formulación de las ondas gravitacionales.

Notemos que esta expresión se basa en las ecuaciones de Einstein linealizadas y en el potencial newtoniano en el sistema de referencia local asintótico en reposo de la fuente. Por lo tanto, esta fórmula cuadrupolar es también válida para fuentes moviéndose lentamente que tienen una fuerte gravedad interna, como las estrellas de neutrones que giran lentamente, siempre y cuando leamos el momento cuadrupolar $\mathcal{I}_{jk}(t-r)$ a partir del potencial newtoniano (2.62) en la zona cercana del campo débil de la fuente y no intentemos calcularlo mediante la integral de volumen newtoniana (2.63).

Cuando la fuente es aproximadamente newtoniana, de manera que podamos utilizar la integral de volumen (2.63) para calcular el momento cuadrupolar, entonces la derivación de las ondas se simplifica al determinar en su lugar el segundo momento de la distribución de masa

$$I_{jk} = \int \rho x^j x^k d\mathcal{V}_x, \quad (2.68)$$

que difiere del momento cuadrupolar únicamente por su traza. Por lo tanto, debido a que la proyección TT no afecta a la traza, el campo de ondas gravitacionales (2.67) será [134]

$$h_{jk}^{TT} = 2 \left[\frac{\ddot{I}_{jk}(t-r)}{r} \right]^{TT}. \quad (2.69)$$

2.7.3. Magnitud de la perturbación de la onda gravitacional.

Podemos obtener la magnitud de la perturbación de la onda gravitacional, a partir de esta aproximación newtoniana de la ecuación cuadrupolar (2.69). Notemos que la derivada segunda del momento cuadrupolar, es la parte no esférica de la energía cinética interna de la fuente. Es decir, puesto que las fuentes fuertes serán no esféricas, tendremos que $I \sim ML^2$, donde M es la masa y L su tamaño, en consecuencia $\ddot{I} \sim 2Mv^2 \sim 4E_{kin}^{ns}$, con v su velocidad interna y E_{kin}^{ns} la parte no esférica de la energía cinética interna [134], [135]. De esta manera, obtenemos

$$h \sim \frac{E_{kin}^{ns}}{r} = \frac{4G(E_{kin}^{ns}/c^2)}{c^2 r}, \quad (2.70)$$

donde hemos escrito la segunda expresión con las unidades convencionales, adimensionalizando E_{kin}^{ns} .

Esta ecuación manifiesta que, para que la onda gravitacional irradie con fuerza, la fuente debe tener una energía cinética interna, no esférica, muy grande. La forma más conocida para lograrlo, es a través de la gravedad. La conservación de la energía cinética o el teorema del virial, nos dice que cualquier energía cinética inducida gravitacionalmente debe ser del orden de la energía potencial gravitatoria de la fuente. Con el fin de obtener una energía potencial enorme, se requiere que la fuente sea muy compacta, como los agujeros negros y estrellas de neutrones en coalescencia [135].

Para este tipo de objetos, la energía cinética interna, no esférica, es del orden de masas solares. Consecuentemente, la ecuación (2.70) nos dice que $h \sim 10^{-22}$ para aquellas fuentes situadas a la distancia Hubble ¹⁶, $h \sim 10^{-21}$ para una distancia más coherente con las coalescencias producidas 200 Mpc, $h \sim 10^{-20}$ para el cúmulo de Virgo a 15 Mpc y $h \sim 10^{-17}$ en los confines de nuestra galaxia a 20 kpc. Estos resultados, establecen la escala de sensibilidad de los interferómetros terrestres: $h \sim 10^{-21} - 10^{-22}$ [135].

2.7.4. Ondas gravitacionales emitidas desde un sistema binario de estrellas.

Esta tesis se centra en el estudio de ondas gravitacionales procedentes de la coalescencia de binarias compactas, por este motivo describiremos a continuación la emisión de ondas gravitacionales en este tipo de sistemas.

Denotemos las estrellas con los índices A y B cuyas masas serán M_A y M_B , de manera que su masa total y su masa reducida sean,

$$M = M_A + M_B, \quad \mu = \frac{M_A M_B}{M}. \quad (2.71)$$

Supongamos además, por simplicidad, que la órbita de la binaria es circular con una separación a entre el centro de masas de las estrellas. Por lo tanto, por la ley de Kepler,

¹⁶3000 Mpc, es decir, 10^{10} años luz.

la velocidad angular orbital vendrá dada por

$$\Omega = \sqrt{M/a^3}, \quad (2.72)$$

y las órbitas de las dos estrellas serán

$$x_A = \frac{M_B}{M} a \cos \Omega t, \quad y_A = \frac{M_B}{M} a \sin \Omega t, \quad x_B = -\frac{M_A}{M} a \cos \Omega t, \quad y_B = -\frac{M_A}{M} a \sin \Omega t. \quad (2.73)$$

El segundo momento de la distribución de masa, (2.68), es $I_{jk} = M_A x_A^j x_A^k + M_B x_B^j x_B^k$. Introduciendo las órbitas (2.74), obtenemos las siguientes componentes no nulas,

$$I_{xx} = \mu a^2 \cos^2 \Omega t, \quad I_{yy} = \mu a^2 \sin^2 \Omega t, \quad I_{xy} = I_{yx} = \mu a^2 \cos^2 \Omega t \sin \Omega t. \quad (2.74)$$

Notando que $\cos^2 \Omega t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\Omega t)$, $\sin^2 \Omega t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\Omega t)$ y $\cos \Omega t \sin \Omega t = \frac{1}{2} \sin 2\Omega t$ y determinando la derivada temporal segunda, obtenemos

$$\ddot{I}_{xx} = -2\mu(M\Omega)^{2/3} \cos 2\Omega t, \quad \ddot{I}_{yy} = 2\mu(M\Omega)^{2/3} \cos 2\Omega t, \quad (2.75)$$

$$\ddot{I}_{xy} = \ddot{I}_{yx} = -2\mu(M\Omega)^{2/3} \sin 2\Omega t. \quad (2.76)$$

Para determinar el campo de onda gravitacional (2.67), debemos proyectar la parte TT de \ddot{I}_{jk} . La proyección se realiza más fácilmente en una base simétrica ortonormal, ya que allí la parte transversal es solo la proyección en el plano $\vec{e}_{\hat{\theta}}$ y $\vec{e}_{\hat{\phi}}$, y la parte TT tiene como componentes

$$\ddot{I}_{\hat{\theta}\hat{\theta}}^{TT} = -\ddot{I}_{\hat{\phi}\hat{\phi}}^{TT} = \frac{1}{2}(\ddot{I}_{\hat{\theta}\hat{\theta}} - \ddot{I}_{\hat{\phi}\hat{\phi}}), \quad (\ddot{I}_{\hat{\theta}\hat{\phi}})^{TT} = \ddot{I}_{\hat{\theta}\hat{\phi}}. \quad (2.77)$$

Necesitaremos calcular estas cantidades en $\phi = 0$, es decir en el plano $x - z$, puesto que el movimiento circular garantiza su dependencia en t y ϕ debe ser solamente a través de la cantidad $\Omega t - \phi$. En $\phi = 0$, $\vec{e}_{\hat{\phi}} = \vec{e}_x \cos \theta - \vec{e}_z \sin \theta$ y $\vec{e}_{\hat{\theta}} = \vec{e}_y$, de manera que las únicas componentes no nulas de las matrices de transformación desde la base cartesiana a la parte transversal de la base esférica son $L_{\hat{\theta}}^x = \cos \theta$, $L_{\hat{\theta}}^z = -\sin \theta$, $L_{\hat{\theta}}^y = 1$. Utilizando esta matriz de transformación, obtenemos en $\phi = 0$,

$$(\ddot{I}_{\hat{\theta}\hat{\theta}})^{TT} = -(\ddot{I}_{\hat{\phi}\hat{\phi}})^{TT} = -(1 + \cos^2 \theta) \mu (M\Omega)^{2/3} \cos[2(\Omega t - \phi)], \quad (2.78)$$

$$(\ddot{I}_{\hat{\theta}\hat{\phi}})^{TT} = +(\ddot{I}_{\hat{\phi}\hat{\theta}})^{TT} = -2\cos \theta \mu (M\Omega)^{2/3} \sin[2(\Omega t - \phi)]. \quad (2.79)$$

El campo de onda gravitacional (2.69) es $2/r$ veces esta cantidad evaluada en el tiempo retrasado $t - r$.

Escogiendo los siguientes tensores de polarización convencionales

$$\vec{e}^+ = (\vec{e}_{\hat{\theta}} \otimes \vec{e}_{\hat{\theta}} - \vec{e}_{\hat{\phi}} \otimes \vec{e}_{\hat{\phi}}), \quad \vec{e}^\times = (\vec{e}_{\hat{\theta}} \otimes \vec{e}_{\hat{\phi}} + \vec{e}_{\hat{\phi}} \otimes \vec{e}_{\hat{\theta}}), \quad (2.80)$$

con $\vec{e}_{\hat{\theta}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$, $\vec{e}_{\hat{\phi}} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$, entonces las ecuaciones (2.69), (2.78) y (2.79) nos dicen, que el campo de onda gravitacional es

$$h_{\mu\nu}^{TT} = h_+ e_{\mu\nu}^+ + h_\times e_{\mu\nu}^\times, \quad (2.81)$$

con

$$h_+ = h_{\hat{\theta}\hat{\theta}}^{TT} = \frac{2}{r} [\ddot{I}_{\hat{\theta}\hat{\theta}}(t - r)]^{TT} = -2(1 + \cos^2 \theta) \frac{\mu (M\Omega)^{2/3}}{r} \cos[2(\Omega t - \Omega r - \phi)], \quad (2.82)$$

$$h_{\times} = h_{\hat{\theta}\hat{\phi}}^{TT} = \frac{2}{r} [\ddot{I}_{\hat{\theta}\hat{\phi}}(t-r)]^{TT} = -4\cos\theta \frac{\mu(M\Omega)^{2/3}}{r} \sin[2(\Omega t - \Omega r - \phi)], \quad (2.83)$$

donde hemos expresado las amplitudes de estas ondas en términos de la cantidad adimensional $(M\Omega)^{2/3} = M/a = v^2$, con v la velocidad relativa de las dos estrellas.

Notemos que, visto desde el eje polar $\theta = 0$, h_{+} y h_{\times} son idénticos exceptuando un desfase de $\pi/2$. Esto significa que, el movimiento de estiramiento-compresión de la elipse, rota con una velocidad angular Ω . En cambio, un observador que se encuentre en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$, verá que h_{\times} desaparecerá, de manera que el movimiento de estiramiento-compresión de la elipse oscilará únicamente a lo largo de los ejes $+$. Observemos además que la frecuencia de la onda gravitacional es el doble que la frecuencia orbital,

$$f = 2\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{\Omega}{\pi}. \quad (2.84)$$

Veamos cómo evoluciona la pérdida de energía y momento angular de la binaria. Puesto que el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ produce una curvatura de fondo a través de las ecuaciones de Einstein $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$, debe contribuir al cambio de la masa de la fuente M , el momento lineal P_j y el angular J_i . A partir de este tensor, pueden derivarse las siguientes relaciones

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{1}{5} \left\langle \frac{\partial^3 \mathcal{I}_{jk}}{\partial t^3} \frac{\partial^3 \mathcal{I}_{jk}}{\partial t^3} \right\rangle = -\frac{32}{\pi} \frac{\mu^2}{M^2} (M\Omega)^{10/3}, \quad (2.85)$$

$$\frac{dJ_i}{dt} = -\frac{2}{5} \epsilon_{ijk} \left\langle \frac{\partial^2 \mathcal{I}_{jm}}{\partial t^2} \frac{\partial^3 \mathcal{I}_{km}}{\partial t^3} \right\rangle, \quad \frac{dJ_z}{dt} = -\frac{1}{\Omega} \frac{dM}{dt}, \quad \frac{dJ_x}{dt} = \frac{dJ_y}{dt} = 0; \quad (2.86)$$

$$\frac{dP_j}{dt} = 0. \quad (2.87)$$

La pérdida de energía y momento angular de la binaria hace que orbiten en espiral hacia adentro, disminuyendo la separación a de las estrellas y aumentando su velocidad angular orbital Ω . Comparando estas ecuaciones con las estándares para la energía orbital de la binaria y el momento angular, $M - (\text{suma de masas en reposo}) = E = -\frac{1}{2}\mu M/a = -\frac{1}{2}\mu(M\Omega)^{2/3}$, y $J_z = \mu a^2 \Omega = \mu(M\Omega)^{2/3}/\Omega$, obtenemos una ecuación para $d\Omega/dt$ que podemos integrar, resultando

$$\Omega = \pi f = \left(\frac{5}{256} \frac{1}{\mu M^{2/3}} \frac{1}{t_0 - t} \right)^{3/8}, \quad (2.88)$$

donde t_0 es el tiempo que queda hasta que las dos estrellas se fusionan. Si esta ecuación se invierte, podemos obtener el tiempo que falta hasta la fusión en función de la frecuencia de la onda gravitacional [134].

Capítulo 3

Análisis de datos y estimación de parámetros para CBCs.

Sección 3.1. Los detectores Advanced LIGO.

Sección 3.2. Búsqueda de la señal de CBCs, a través de tuberías de filtrado adaptado.

Sección 3.3. Modelos de forma de onda para CBCs.

Sección 3.4. Estimación de parámetros por inferencia bayesiana.

En este capítulo describiremos cómo se detectan y caracterizan las señales de ondas gravitacionales a través del método de filtrado adaptado, utilizando un conjunto de procesos de software conocidos como tuberías ¹. Estos análisis empleados en la búsqueda y estimación de parámetros de señales procedentes de binarias compactas, llevados a cabo en el dominio de las frecuencias, requieren de unos modelos de formas onda precisos y de bajo coste computacional utilizados como plantillas para estas señales. En concreto, lo ideal sería poder tener a nuestra disposición, un conjunto de modelos con expresiones cerradas que describan las diferentes fases de la onda gravitacional en el dominio de las frecuencias, con el objetivo de reducir dicho coste computacional. En este contexto, introducimos el nuevo modelo utilizado en esta tesis publicado en abril del 2020 por el Grupo de Física Gravitacional: teoría y observación de la UIB, en colaboración con la Universidad de Birmingham, la Universidad de Zurich y la Universidad de Cardiff, conocido como IMRPhenomXPHM [108]. Este modelo describe la amplitud y fase de los armónicos esféricos que describen una onda gravitacional, mediante expresiones cerradas e incorporando armónicos subdominantes en el dominio de las frecuencias. Finalmente, estudiaremos las herramientas necesarias para realizar mediciones astrofísicas, la inferencia bayesiana y la estimación de parámetros utilizando el algoritmo de muestreo estocástico, conocido como muestreo anidado.

3.1. Los detectores Advanced LIGO.

El físico estadounidense Joseph Weber es considerado el primero en construir un detector de ondas gravitacionales. En 1968 afirmó la obtención de “una buena evidencia” de ondas gravitacionales. Sin embargo, sus resultados fueron controvertidos al no poder ser replicados y al haberse encontrado errores en el código de su programa. En 1993 los astrónomos Joseph H. Taylor Jr. y Russel A. Hulse ganaron el premio Nobel, tras constatar la existencia de las ondas gravitacionales al descubrir que eran la única explicación posible para describir la trayectoria de colisión, y por ello la pérdida de energía, de un sistema binario de dos estrellas de neutrones. La colaboración LIGO, fundada en 1997 en Estados Unidos, por el físico teórico Kip Thorne y los experimentales Ronald Drever y Rainer Weiss tiene como misión la detección directa de ondas gravitacionales, mediante el uso de dos interferómetros similares al empleado por Michelson y Morley con brazos de etalón Gires-Tournois ²: Advanced LIGO H1 en Hanford, Estados Unidos y Advanced LIGO L1 en Livingston, Estados Unidos [107], [36]. El instrumento original de LIGO, denominado “Initial LIGO”, tenía como objetivo el desarrollo del concepto de detector de ondas gravitacionales, participando

¹Una cadena de procesos, hilos, corrutinas y subrutinas, conectados de manera que la salida de cada elemento sea la entrada del siguiente.

²Placas transparentes en las cuales una de sus superficies tiene una reflectividad muy alta.

en observaciones desde 2002 hasta 2010. Durante este periodo no se detectó ninguna señal pero, como resultado de lo aprendido en esta ejecución, se lograron enormes avances en ingeniería. Se inició entonces el proyecto “Advanced LIGO” por el cual, entre 2010 y 2014, ambos interferómetros se revisaron por completo para incorporar una ingeniería mucho más sofisticada [26].

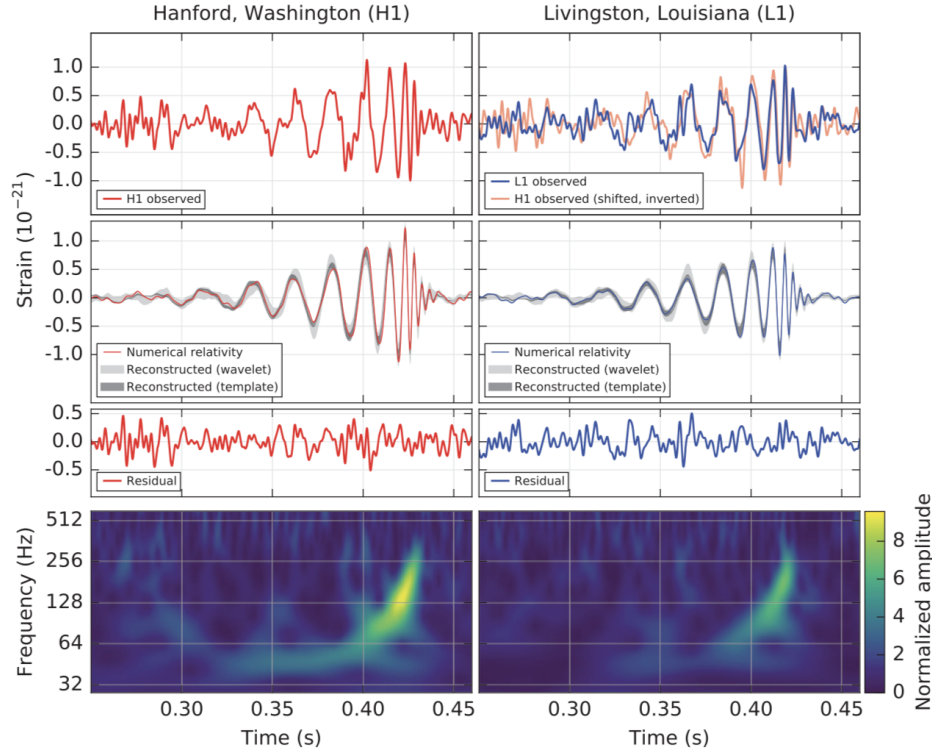


FIGURA 3.1: Evento GW150914 observado por Advanced LIGO Hanford (H1) y Advanced LIGO Livingston (L1). Las series temporales han sido filtradas con filtro pasa banda de 35 – 350 Hz para suprimir las fluctuaciones fuera de la banda de frecuencia más sensible de los detectores, y filtros elimina banda para suprimir las líneas espectrales de los instrumentos que podemos observar en la figura (3.5). Gráficos de la primera fila: Deformación de los brazos de ambos detectores. Como la señal llegó primero a L1 y 6.9 ± 0.5 ms después a H1, se ha comparado en la figura de la derecha los datos de los detectores con H1 desplazado -0.4 ms, para considerar la orientación relativa de ambos. Gráficos de la segunda fila: Deformación de las ondas gravitacionales aplicando la banda 35 – 350 Hz. La onda en rojo representa la forma de onda extraída de la relatividad numérica consistente con los parámetros obtenidos de este evento. Las áreas sombreadas representan regiones con un 90% de credibilidad para dos reconstrucciones de formas de onda independientes. El primero, representado en gris oscuro, modela la señal utilizando plantillas de forma de onda. El otro, representado en gris claro, no utiliza un modelo astrofísico, sino que determina la señal como una combinación de ondas sinusoidales gaussianas. Gráficos de la tercera fila: Residuos que quedan al extraer la forma de onda numérica filtrada de la serie temporal del detector filtrado. Gráficos de la cuarta fila: Aumento de la frecuencia de los datos de la deformación con el tiempo.

Imagen de [9].

La primera observación directa de ondas gravitacionales, se produjo el 14 de septiembre de 2015, GW150914, cuatro días antes de que se iniciara el primer periodo de observación programado. Provenía de la coalescencia de dos agujeros negros de $29M_{\odot}$ y $36M_{\odot}$, liberando una energía en forma de ondas gravitacionales de $3M_{\odot}$. En esta observación, LIGO estimó que la potencia máxima liberada en una fracción de segundo en el momento de la fusión, fue diez veces mayor que la luminosidad combinada de todas las galaxias de todo el universo visible, es decir, entorno a 40 billones de billones de billones de billones de vatios; mientras que en la Tierra lo que detectamos fueron

dos espejos moviéndose en una milésima del ancho de un protón. Tras identificar el evento como un candidato altamente significativo, la configuración de software y hardware en ambos detectores Advanced LIGO, se mantuvo fija hasta que se recopilieron suficientes datos coincidentes como para establecer un límite superior suficientemente preciso en la tasa de falsas alarmas, utilizando una técnica que describiremos más adelante en la sección (3.2). Se necesitaron aproximadamente seis semanas para recopilar los ~ 16 días requeridos de datos coincidentes [65], [83], [8]. Por la observación de ondas gravitacionales y sus contribuciones al detector LIGO, Kip Thorne, Rainer Weiss y Barry C. Barish recibieron el premio Nobel de Física 2017 [3].

Desde ese histórico día que marcó la primera observación, los ingenieros de LIGO han continuado mejorando la sensibilidad de los detectores realizando rondas de mantenimiento e instalaciones importantes, en el intervalo de tiempo entre los periodos de observación *O1* (12/09/2015 - 19/01/2016), *O2* (30/11/2016 - 25/08/2017), *O3a* (01/04/2019 - 01/10/2019) y *O3b* (31/10/2019 - 27/03/2020). Durante *O2*, el 1 de agosto de 2017, se unió a los dos detectores de Advanced LIGO, por un mes de observación, el detector Advanced Virgo en Pisa, Italia; que volvió a unirse durante *O3a* y *O3b* [1], [85]. El éxito de estas mejoras se evidencia en las muchas más detecciones de ondas gravitacionales realizadas desde entonces. Durante estos periodos de observación, destacan los siguientes eventos:

- GW150914. La primera detección de ondas gravitacionales procedente de la coalescencia de dos agujeros negros [81].
- GW170814. La primera señal de ondas gravitacionales medida por la red de tres detectores: Advanced LIGO H1, Advanced LIGO L1 y Advanced Virgo [81].
- GW170817. La primera señal de ondas gravitacionales procedente de la coalescencia de dos estrellas de neutrones y también el primer evento observado por 70 observatorios que produjo radiación electromagnética, marcando un avance importante en la astronomía de multi-mensajeros [81].
- GW190521. La primera señal de ondas gravitacionales que proporciona la primera observación directa de la existencia de los agujeros negros de masa intermedia, al ser el agujero negro resultante de $142M_{\odot}$ y uno de los dos agujeros negros que intervinieron en la coalescencia de $85M_{\odot}$, junto con otro de $66M_{\odot}$.

Con este refinamiento y actualización continuo, se espera que los detectores Advanced LIGO alcancen una sensibilidad 10 veces mayor que la de Initial LIGO, sondeando 1000 veces más el volumen que tenía Initial LIGO. De esta manera, podrán añadirse al rango de observación numerosos cúmulos de galaxias que posiblemente contengan multitud de estrellas de neutrones y agujeros negros, disponibles cuando Advanced LIGO alcance dicha sensibilidad de diseño [26], [56].

Las señales procedentes de las ondas gravitacionales son extremadamente pequeñas, en la sección (2.7.3) vimos que la deformación esperada para una onda producida por CBC, es del orden de 10^{-21} m. Para superar este reto, LIGO utiliza dos interferómetros Advanced LIGO H1 y Advanced LIGO L1, similares al de Michelson con brazos de etalón Gires-Tournois de 4km de longitud en forma de “L”, como podemos observar en el diagrama de la figura (3.2) [124].

Su funcionamiento es el siguiente, un láser Nd-YAG de 1064 nm ³, capaz de producir una potencia de 180W, emite un rayo láser de 25 W que atraviesa una cavidad

³Láser de estado sólido de óxido de itrio y aluminio cristalino dopado con neodimio, cuya emisión infrarroja característica es de 1064 nm.

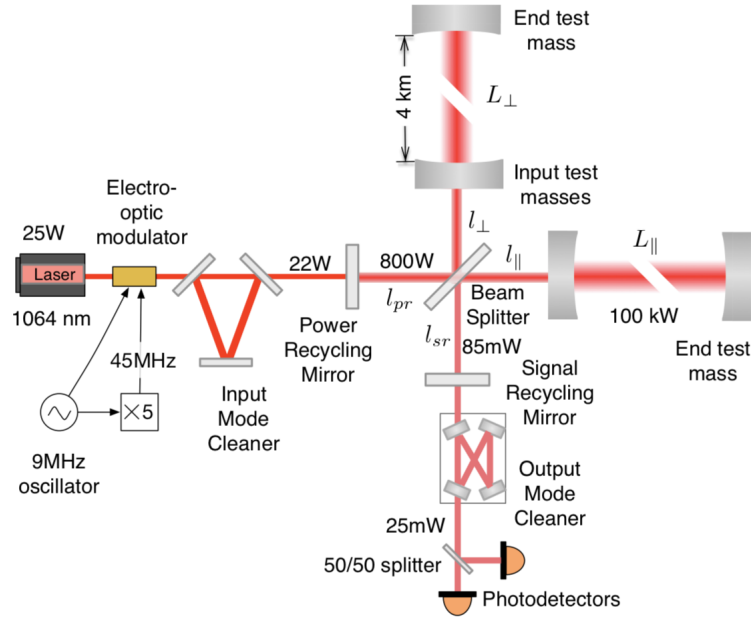


FIGURA 3.2: Esquema de un detector Advanced LIGO, que incluye las siguientes mejoras respecto a los detectores Initial LIGO: una cavidad óptica para reflejar la luz láser repetidamente en cada brazo, un espejo de reciclaje de potencia que incrementa la potencia del láser y un espejo de reciclaje de señal para optimizar la señal extraída en el fotodetector. Imagen de [10].

Fabry-Pérot triangular, cuya finalidad es la de limpiar el perfil espacial del láser, suprimiendo la fluctuación del rayo, limpiando su polarización y ayudando a estabilizar su frecuencia. A continuación, el rayo atraviesa completamente un espejo de reciclaje de potencia cuyo objetivo es el de aumentar la potencia existente entre dicho espejo y el divisor de haz hasta los 800 W, reflejando la luz proveniente del lado contrario al incidente. Al llegar al divisor de haz, la luz se separa a lo largo de dos brazos ortogonales cuya longitud es aproximadamente la misma $L_{\parallel} \sim L_{\perp} = L$. En cada brazo se encontrará con dos masas de prueba, cada una formada por un espejo de 40kg fabricado con sustratos de sílice fundido con recubrimientos ópticos dieléctricos, suspendido por fibras de sílice por un sistema de cuatro péndulos, sostenidos por una plataforma de aislamiento sísmico. Estas masas de prueba forman cavidades Fabry-Pérot en los brazos, aumentando la trayectoria efectiva del láser, cuya potencia en la cavidad pasará a ser de 100 kW. Se pueden mover libremente y por tanto variar en un $\Delta L = L_{\parallel} - L_{\perp}$ ⁴ su posición, cuando una onda gravitacional atraviese el detector. Tras aproximadamente 280 viajes por los brazos de 4km, los dos haces se recombinan en el divisor de haz. El espejo de reciclaje de señal, es utilizado para ampliar la respuesta del detector más allá del ancho de las cavidades del brazo. Antes de que la señal sea detectada por unos fotodetectores, al igual que en la entrada, en la salida también existe una cavidad Fabry-Pérot triangular para limpiar las componentes espaciales y de frecuencia no deseados en la luz. Los fotodetectores son instalados en el vacío, para evitar el acoplamiento del ruido acústico ambiental al canal de ondas gravitacionales. Estos rayos que regresan se mantienen desfasados, de manera que cuando por los brazos no ha pasado una onda gravitacional, ambos se restan y en consecuencia no llega luz al fotodiodo. Cuando una onda gravitacional pasa a través del interferómetro, las distancias de los brazos se acortan y se alargan, de manera que los haces se desfasan un poco menos dando como resultado a que los rayos entren en fase y por tanto captando

⁴Este cambio es controlado de manera que las variaciones en la salida del fotodiodo o fotodetectores (la salida del interferómetro), sean directamente proporcionales a $\Delta L(t)$ [135].

algo de luz en el fotodiodo, indicando que existe una señal. La luz que no contiene una señal, se devuelve al interferómetro a través del espejo de reciclaje de señal para aumentar la potencia en los brazos [9], [24], [76], [27], [10], [135].

En la actualidad, además de LIGO y Virgo, existen varias colaboraciones dedicadas a la observación de ondas gravitacionales, como GEO 600 (Alemania) [91], KAGRA (Japón) ubicado bajo tierra cuyas observaciones empezaron el 25 de Febrero de 2020 ⁵ [55] y LIGO-India (India) planeado para el año 2024 [113]. La tercera generación de detectores está en marcha, incluyendo a los anteriores, DECIGO un observatorio espacial japonés propuesto para 2027 ⁶, el proyecto europeo Einstein Telescope (en Cerdeña o la Eurorregión Mosa-Rin) un observatorio ubicado bajo tierra propuesto para 2035 que nos permitirá observar el universo hasta la edad oscura cosmológica arrojando luz a cuestiones fundamentales actualmente abiertas de la física y la cosmología ⁷ [43], el proyecto Cosmic Explorer (Estados Unidos) propuesto para su construcción en la década del 2020 cuyo objetivo será el de determinar la naturaleza de la materia más densa en el universo o probar una prueba independiente a la expansión del universo, entre otros [112] y el proyecto en conjunto de la ESA y la NASA, LISA [120], que será el primer observatorio espacial de ondas gravitacionales propuesto para 2030 cuyo objetivo será, al igual que el de Cosmic Explorer y Einstein Telescope, el de estudiar el universo primigenio, estructura de las galaxias y la evolución estelar [77], [83], [115].



FIGURA 3.3: Detectores interferométricos de ondas gravitacionales. De izquierda a derecha: Observatorio LIGO Livingston, Louisiana, Estados Unidos; Observatorio LIGO Hanford, Washington, Estados Unidos; Observatorio Virgo, Pisa, Italia. Imágenes de [25], [143].

3.1.1. Datos obtenidos por el detector.

Además de la señal de onda gravitacional $h(t)$, cada detector LIGO registra más de 200000 canales auxiliares que monitorean el comportamiento del instrumento y las condiciones ambientales, diagnosticando fallos e identificando correlaciones de ruido [8]. Los datos obtenidos por el interferómetro son modelados como la suma de la señal más una componente de ruido $n(t)$ [139], [65], [24], [135],

$$d(t) = h(t) + n(t), \quad (3.1)$$

⁵Sustituyendo recientemente a TAMA 300 (Japón). CLIO (Japón), es un prototipo de detector que ayuda a mejorar KAGRA.

⁶B-DECIGO es una misión que planea lanzarse a finales del 2020.

⁷Permitiéndonos estudiar la naturaleza de la materia oscura (agujeros negros primordiales, nubes de axiones, materia oscura acumulada en objetos compactos), energía oscura, toda la población de SBHs y IMBHs de toda la historia del universo y la fase de evolución suave de la estrella de neutrones y sus fuerzas de marea, entre otros [43].

donde $h(t)$ es la señal observada por el detector ⁸, que además de depender de la ubicación de la fuente en el cielo (r, θ, φ) vista desde el propio plano orbital de la binaria, de su ubicación en el cielo vista por el detector $(d_L, \bar{\theta}, \bar{\varphi})$ y de la polarización de la onda ψ que determina la rotación relativa de los brazos del detector con respecto a las componentes h_+ y h_\times ⁹,

$$h(\theta, \varphi, \bar{\theta}, \bar{\varphi}, \psi; d_L, t) = \frac{1}{d_L} [F_+(\bar{\theta}, \bar{\varphi}, \psi)h_+(\theta, \phi; t) + F_\times(\bar{\theta}, \bar{\varphi}, \psi)h_\times(\theta, \phi; t)] = \frac{\Delta L(t)}{L}, \quad (3.2)$$

viene codificada por unas funciones, llamadas patrones de antena, que describen la sensibilidad relativa del detector en diferentes orientaciones celestes,

$$F_+ = \frac{1 + \cos^2 \bar{\theta}}{2} \cos 2\bar{\varphi} \cos 2\psi - \cos \bar{\theta} \sin 2\bar{\varphi} \sin 2\psi, \quad (3.3)$$

$$F_\times = \frac{1 + \cos^2 \bar{\theta}}{2} \cos 2\bar{\varphi} \sin 2\psi + \cos \bar{\theta} \sin 2\bar{\varphi} \cos 2\psi.$$

Esta señal se encuentra enterrada por un ruido de fondo $n(t)$, cuyas fuentes crean señales de varios órdenes de magnitud mayor que la recibida por la onda gravitacional. En la figura (3.4), se muestran todas las fuentes de ruidos en función de su frecuencia.

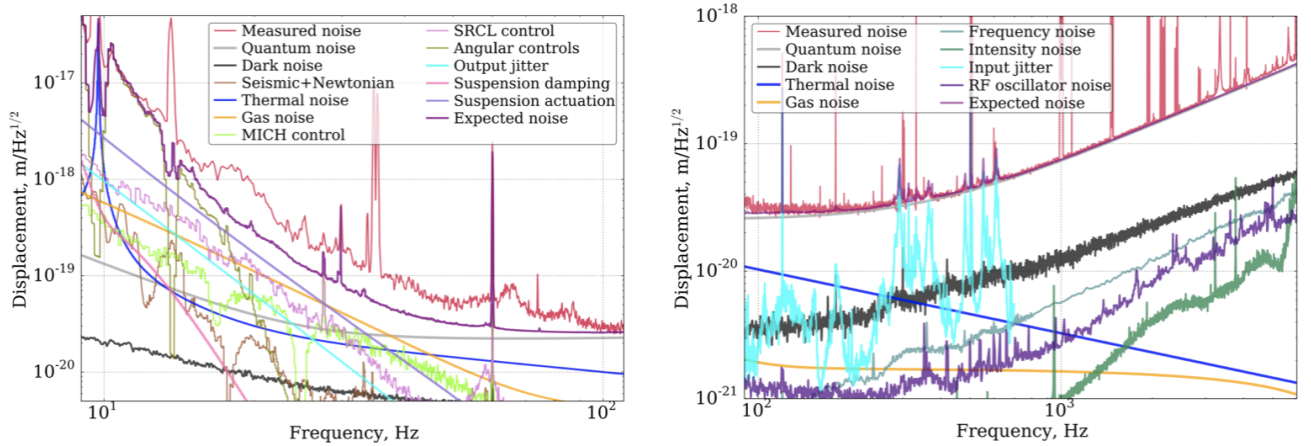


FIGURA 3.4: Gráficos del balance de ruido en los canales de ondas gravitacionales de los dos detectores Advanced LIGO: figura izquierda, detector L1 para bajas frecuencias; figura derecha, detector H1 para altas frecuencias. La suma del ruido de disparo junto con el ruido de presión de radiación, se conoce como ruido cuántico. El acoplamiento del movimiento residual de los grados de libertad Michelson (MICH) y los existentes en la cavidad de reciclaje de señal (SRCL) al canal de ondas gravitacionales, se reduce mediante una técnica de cancelación anticipada. En bajas frecuencias, actualmente existe una brecha significativa entre el ruido de deformación medido y la suma de la raíz cuadrada de los ruidos investigados. En altas frecuencias, la sensibilidad está limitada por el ruido de disparo y la fluctuación del haz en la entrada. Imágenes del artículo [10].

Distinguímos dos tipos de ruidos, el ruido correlacionado y el no correlacionado.

⁸Conocida como la deformación de la onda gravitacional que actúa sobre el detector o gravitational-wave strain, en inglés.

⁹Se elegirá la convención de manera que cuando los brazos del detector sean normales a la propagación de la forma de onda, éstos coincidan con la componente h_+ , es decir, para que $\psi = 0$ [24].

El ruido local no correlacionado tiene un impacto significativo en la señal, es el que podemos ver en la figura (3.4) [139], [65], [24], [10]:

- Ruido antropogénico de carácter acústico, como la actividad humana producida dentro de una de las habitaciones que albergan las cámaras de vacío o ruido de ubicaciones cercanas. Para reducirlo, el personal del detector no ingresa en las habitaciones que contienen los componentes ópticos mientras éstos están tomando datos. Este tipo de ruido es monitoreado por acelerómetros, sismómetros y micrófonos.
- Ruido sísmico, produciendo movimientos en el suelo de los instrumentos con frecuencias de aproximadamente 0.03 Hz a 0.1 Hz. Estas perturbaciones sísmicas son identificadas por una red de sismómetros instalados en los detectores. Para inhibir los efectos sísmicos cuyo movimiento sea por encima de los 10 Hz, se utiliza un sistema cuádruple de suspensión en los espejos de los detectores.
- Ruido debido a un fallo en el sistema del modulador electro-óptico de 45MHz, que se acopla al canal de ondas gravitacionales entre los 10 y 2000 Hz, cubriendo todo el rango de frecuencias analizado para la búsqueda de CBCs. Para detectar y controlar estas cavidades ópticas dentro del detector, se utilizan bandas laterales de modulación de radiofrecuencia.
- Ruido transitorio que aparecen en ambos detectores LIGO, en el canal de la señal de onda como una forma de “lágrima simétrica” típicamente entre los 30Hz y 250Hz.
- Ruido térmico que afecta a los espejos expandiéndolos y a las suspensiones debido al calentamiento causado por los láseres. Puede resolverse utilizando materiales de alta calidad, confinando las vibraciones en una pequeña banda de frecuencia.
- Ruido de disparo, debido a la naturaleza estadística de la detección de cuantos de luz. Una forma de resolverlo es aumentando la potencia del láser mediante la utilización de los espejos de reciclaje de potencia.
- Ruido de presión de radiación, la naturaleza cuántica de los láseres provoca que cuanto mayor sea su potencia, mayor será la incertidumbre en el momento transferido a los espejos. Este problema es resuelto utilizando luz comprimida.
- Ruido oscuro, es el ruido electrónico en la señal incidente en los fotodetectores cuando no captan luz.
- Ruido de gas, debido al movimiento térmico de las moléculas de gas existentes dentro de las cámaras de vacío utilizadas en las ópticas Advanced LIGO, dando como resultado un intercambio de momento con las masas de prueba a través de colisiones.

El ruido correlacionado es producido por fuentes que afectan a ambos detectores simultáneamente, pudiendo imitar un evento de onda gravitacional. Algunos ejemplos de este tipo son [139], [65]:

- Ruido debido al gradiente de gravedad existente en cambios en el campo gravitatorio newtoniano, que de momento no afecta demasiado a las mediciones realizadas hasta la fecha.
- Ruido electromagnético, donde se incluyen los rayos, eventos solares y ruido impulsado por el viento solar, así como la comunicación por radiofrecuencia. Si

este tipo de ruido fuera lo suficientemente fuerte como para afectar a la señal $h(t)$, los magnetómetros y receptores de radio lo presenciarían con una alta SNR.

- Los rayos cósmicos que producen radiación electromagnética y cascadas de partículas al entrar en la atmósfera. Como precaución, se monitorea un detector de radiación cósmica en LIGO-Hanford, gracias al cual no se ha observado ningún acoplamiento entre las cascadas de partículas y la señal de onda.

La suma de todas estas fuentes de ruido, nos proporciona la función de densidad espectral de potencia $P_n(f)$ [115]. A partir de esta función, se puede definir la densidad espectral de amplitud $S_n(f)$, definida de manera que la integral de $P_n(f)$ venga descrita sobre las frecuencias positivas [95], [118], [65]

$$\frac{1}{2}S_n(f) = P_n(f), \quad (3.4)$$

donde

$$P_n(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left| \int_{-T/2}^{T/2} n(t) e^{-2\pi i f t} dt \right|^2. \quad (3.5)$$

La representación de $S_n(f)$, como la que tenemos en la figura (3.5), es clave para el posterior análisis de datos, manifestando una imagen clara de la sensibilidad y ruido promedio presente en el detector.

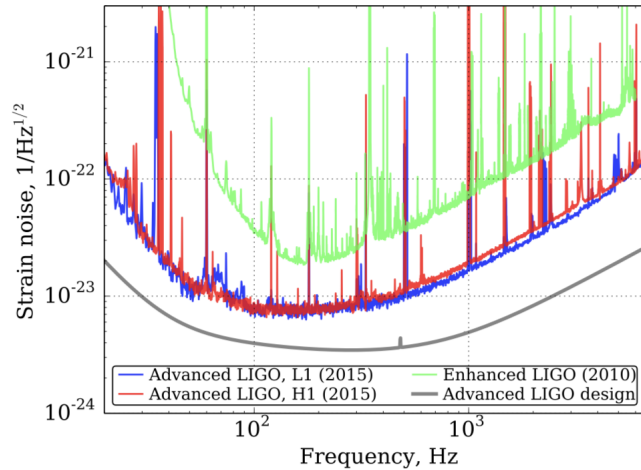


FIGURA 3.5: Sensibilidad de deformación para el detector LIGO Livingston (L1) y el detector LIGO Hanford (H1) durante el primer periodo de observación. En la curva gris, se representa la sensibilidad en el diseño Advanced LIGO. La curva verde, señala la sensibilidad alcanzada durante las pruebas finales de recopilación de datos (S6) en intial LIGO. Imagen de [10].

Como observamos en las curvas azul (L1) y roja (H1) de la figura (3.5), ambos detectores alcanzaron una sensibilidad de $\sim 10^{-23} \text{ Hz}^{-1/2}$ entre los 50 y 300 Hz. Los picos que podemos observar, son debidos a resonancias mecánicas conocidas, armónicos en la red eléctrica y señales inyectadas utilizadas para la calibración [8].

Idealmente, una vez identificada la fuente de un ruido, se modifica el hardware o software del instrumento con el fin de reducir su acoplamiento a la señal $h(t)$, de manera que no afecte a las búsquedas astrofísicas. Si la mitigación de la fuente no es viable, entonces aquellos períodos de tiempo en los cuales hay problemas importantes con la calidad de los datos se omiten, se vetan de las búsquedas de ondas gravitacionales [8].

A continuación, explicaremos el proceso realizado en la búsqueda de la señal de onda gravitacional en los datos de CBCs, donde se incluye este tipo de vetos. Esta búsqueda

es el primer paso que se lleva a cabo en el análisis de datos de CBCs, con el objetivo de identificar dicha señal en el ruido del detector. Una vez identificada, el siguiente paso consiste en realizar una estimación de parámetros de la fuente, a través de la estadística bayesiana.

3.2. Búsqueda de la señal de CBCs, a través de tuberías de filtrado adaptado.

La identificación de un candidato de onda gravitacional producida por la coalescencia de binarias compactas en los datos del detector, es un proceso llevado a cabo por tuberías a través del método del filtrado adaptado.

Cualquier búsqueda de señal en los datos, deberá modelar de forma precisa el ruido del detector. El modelo más simple es asumiendo que este ruido es de naturaleza estacionaria y gaussiana. Bajo estos supuestos, el mejor método para detectar señales es el filtrado adaptado, que implica la construcción de un banco de posibles señales. Es decir, implica la generación de plantillas o filtros óptimos para las señales de ondas gravitacionales dado el ruido, de forma que, colocándolas de manera que cubran el posible espacio de parámetros físicos, se realice la correlación cruzada entre éstas y los datos de los detectores. Se calculan correlaciones cruzadas para aproximadamente cien millones de plantillas, generando grandes costes computacionales. Por este motivo, el cálculo de cada una debe ser eficiente y rápido para poder asegurar que la estimación de parámetros bayesiana, que se realiza posteriormente, sea manejable. Las puntuaciones resultantes se distribuyen de acuerdo con la distribución de Pearson, χ^2 , en presencia o ausencia de señales. Como podemos intuir de la sección anterior (3.1.1), desafortunadamente ambas suposiciones fallan debido a que las estadísticas del ruido varían en las escalas de tiempo de las propias señales y por la presencia de artefactos intermitentes de naturaleza no astrofísica que claramente no son producidos por ruido aleatorio gaussiano, conocidos como “defectos”. Estos defectos contaminan la distribución χ^2 . Además, las plantillas que cubren el espacio de parámetros, tienen superposiciones finitas que a menudo se activan generando un pulso de ruido transitorio [137]. Es decir, los datos del detector contienen dos clases de ruido:

- ruido no estacionario y ruido transitorio no gaussiano debido, además de estos defectos y las superposiciones de las plantillas, a ruido instrumental y ambiental;
- ruido gaussiano, y principalmente estacionario, debido a ruido térmico, ruido cuántico y ruido sísmico.

Los eventos reales detectables se encuentran en las colas de la distribución χ^2 , por lo tanto, es crucial corregir adecuadamente la sistemática para maximizar la sensibilidad a los eventos de ondas gravitacionales y estimar tasas confiables de falsas alarmas (FAR) [140], [137], [18], [39].

El catálogo oficial de LIGO Scientific Collaboration-Virgo Collaboration (LVC) [7], presenta eventos de ondas gravitacionales obtenidos a través de dos tuberías independientes que utilizan el filtrado adaptado y que cada una esta basada en, el paquete de software PyCBC y la biblioteca GstLAL, respectivamente; y un algoritmo que no maneja el filtrado adaptado ni los modelos de forma de onda, utilizado para la búsqueda de señales transitorias, conocido como coherent WaveBurst (cWB). Tanto la tubería PyCBC como la GstLAL, han desarrollado soluciones para resolver las complejidades existentes en los datos [137], [7]. A continuación, proporcionaremos una

descripción general de estas dos tuberías y los métodos utilizados para detectar las ondas gravitacionales a partir de binarias compactas en los datos LIGO [137].

La figura (3.6) muestra los pasos que utiliza la tubería para encontrar señales.

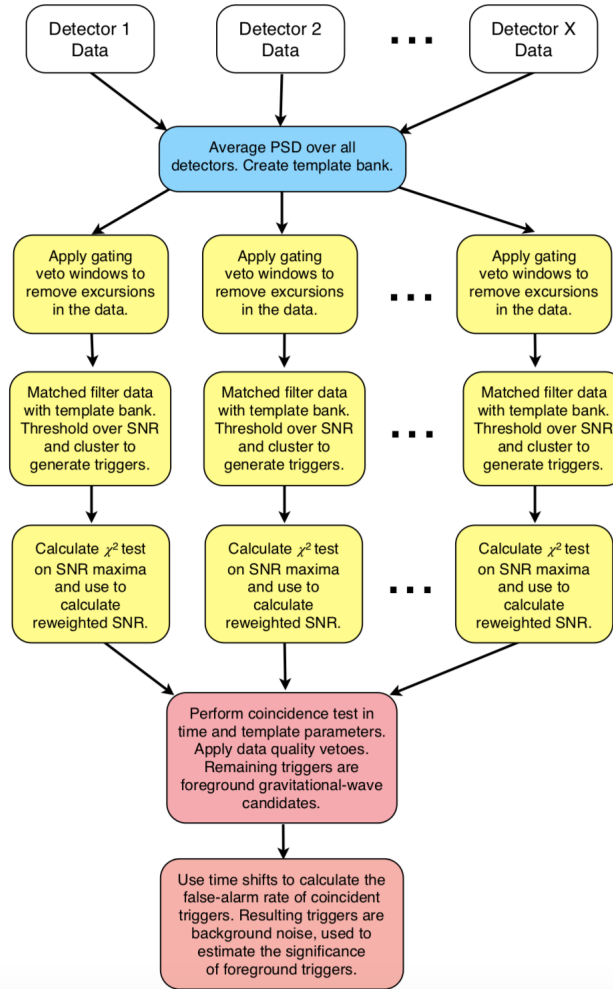


FIGURA 3.6: Pasos en el proceso de búsqueda de la señal en una tubería. Cuadrado azul: Los datos de los detectores son promediados para crear la PSD necesaria, para poder colocar el catálogo de plantillas de manera que cubran el espacio de parámetros de la búsqueda. Cuadrados amarillos: Los momentos en que los datos del detector contienen ruidos transitorios fuertes, se eliminan o se vetan. A continuación, los datos de cada detector se comparan, se filtran y los disparadores se generan mediante el establecimiento de umbrales y la agrupación de la serie temporal de la relación SNR. Se calcula una prueba χ^2 para cada disparador y la SNR se vuelve a ponderar por el valor de la estadística de χ^2 , para distinguir mejor entre señal y ruido. Cuadrados rojos: La tubería determina qué disparadores sobreviven a las pruebas de tiempo y coincidencia de la plantilla, descartando aquellos que se encuentren en momentos de mala calidad de los datos. Los disparadores que pasan las pruebas, son etiquetados como eventos candidatos. Finalmente, se realizan múltiples desplazamientos temporales para generar un ruido de fondo, que se utiliza para asignar una significancia estadística a los eventos candidatos. Imagen del artículo [137].

La entrada de la tubería son los datos de deformación calibrados del detector. Para poder eliminar los peores períodos de funcionamiento del detector, independientemente de la tubería utilizada, se estudia la calidad de los datos caracterizándolos en tres clases:

- datos contaminados con el suficiente ruido, tal que deben descartarse directamente;

- datos que se pueden filtrar, pero los candidatos a eventos que se encuentran en intervalos donde la calidad de los datos es baja, deben descartarse o vetarse; o
- datos aptos para búsquedas astrofísicas.

Tras eliminar los datos que no son aptos para búsquedas astrofísicas, la tubería empieza su análisis, siguiendo los pasos de la figura (3.6).

Como a priori no conocemos los parámetros de las ondas gravitacionales en los datos, se construyen catálogos de plantillas de formas de onda que abarcan el espacio de la señal astrofísica. Si la masa total de una binaria compacta es menor que $M \leq 12M_{\odot}$ y los espines adimensionales de los objetos compactos son pequeños $cS_{1,2}/Gm_{1,2}^2 \leq 0.4$, como lo es para el caso de una binaria de estrellas de neutrones, entonces los detectores son sensibles a la fase de evolución suave de la forma de onda, de manera que se podrá modular utilizando aproximaciones post-Newtonianas [137]. Si la binaria compacta tiene una masa total elevada y los espines altos, entonces los modelos analíticos ajustados a la relatividad numérica pueden proporcionar predicciones precisas a la señal. La ubicación exacta de las plantillas, depende de la función de densidad espectral de potencia (PSD) $P_n(f)$ del detector [137].

Dado que la forma de onda de las señales está bien modelada, la tubería utiliza el método de filtrado adaptado para buscar estas señales en el ruido del detector. La amplitud y fase de la forma de onda, cuya descripción veremos en la siguiente sección, son maximizadas al construir el filtro adaptado proyectando la señal contra dos fases ortogonales de la plantilla $h(t)$, dada por h_{cos} y h_{sin} . El filtrado adaptado consiste entonces en un producto interno ponderado en el dominio de frecuencias, utilizado para construir la relación señal/ruido (SNR), $\rho(t)$,

$$\rho^2(t) = \frac{(s|h_{cos})^2}{(h_{cos}|h_{cos})} + \frac{(s|h_{sin})^2}{(h_{sin}|h_{sin})} = \frac{(s|h_{cos})^2 + (s|h_{sin})^2}{(h_{cos}|h_{cos})}, \quad (3.6)$$

donde el producto interno viene definido como

$$(s|h)(t) = 4Re \int_{f_{low}}^{f_{high}} \frac{\tilde{s}(f)\tilde{h}^*(f)}{S_n(f)} e^{2\pi ift} df, \quad (3.7)$$

con los límites de frecuencia determinados por el ancho de banda en los datos del detector, $\tilde{h}(f)$ la transformada de Fourier de la plantilla de forma de onda, $\tilde{s}(f)$ la transformada de Fourier de los datos del detector,

$$\tilde{s}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-2\pi ift} dt, \quad (3.8)$$

y $S_n(f)$ la densidad espectral de potencia unilateral definida anteriormente (3.4) y que ahora con esta transformada de Fourier, la especificamos como

$$\langle \tilde{s}(f)\tilde{s}(f') \rangle = \frac{1}{2}S_n(f)\delta(f - f'), \quad (3.9)$$

donde “ $\langle \dots \rangle$ ” denota un promedio sobre el ruido y δ la función delta de Dirac.

A pesar de los estudios sobre la calidad de los datos, los ruidos transitorios de origen desconocido, aún permanecen tras haber aplicado los vetos pertinentes. Para mitigar el efecto, la tubería aplica una función puerta que identifica oscilaciones en los datos de la deformación de la entrada $s(t)$, y a continuación aplica una ventana para poner a cero los datos alrededor del tiempo de un ruido transitorio, antes del filtrado. Habiendo eliminado estos ruidos transitorios, la tubería calcula la SNR, $\rho(t)$, para cada plantilla

en cada detector. La búsqueda identifica los momentos en que la SNR excede un umbral predeterminado para una plantilla determinada en los datos de un detector. La tubería aplica un algoritmo de agrupamiento, que toma el valor más alto dentro de una ventana predefinida de $\rho(t)$ e identifica los máximos en la serie temporal. Este proceso genera una lista de momentos en los que puede estar presente una señal, denominados disparadores [137].

Estos disparadores, generados a través del filtrado adaptado de los datos con el catálogo de plantillas, están sujetos a una prueba χ^2 que determina si la distribución tiempo-frecuencia de la potencia en los datos es consistente con la potencia esperada en la plantilla de forma de onda coincidente. Esta χ^2 , es utilizada para calcular la χ^2 reducida $\chi_r^2 = \chi^2/(2p - 2)$ que debe ser cercana a la unidad, donde p son los intervalos de frecuencia por los cuales se ha dividido la plantilla, que a su vez define la SNR reponderada,

$$\hat{\rho} = \begin{cases} \rho/[(1 + (\chi_r^2)^3)/2]^{1/6}, & \text{si } \chi_r^2 > 1, \\ \rho, & \text{si } \chi_r^2 \leq 1. \end{cases} \quad (3.10)$$

cuyo objetivo es el de reducir la ponderación de los disparadores causados por ruido transitorio. Habiendo calculado esta SNR reponderada para cada disparador, la tubería descarta aquellos que se encuentren por debajo de un umbral de SNR reponderado predeterminado [137].

La certeza de la existencia de un evento candidato en los datos, radica en la detección casi simultánea de disparadores observados con la misma plantilla en ambos interferómetros, en un intervalo de tiempo mayor que 10ms, la velocidad máxima a la que viaja la luz entre ellos [84], [8], para tener en cuenta la incertidumbre en la medición del tiempo de llegada; y que además los parámetros observados sean consistentes en ambos detectores. Los disparadores que sobrevivan a la prueba de coincidencia de tiempo y parámetros, son considerados como eventos candidatos [137].

La suma de cuadrados de la SNR reponderada en cada detector, es la estadística de detección que utiliza la tubería, para clasificar la probabilidad de que un disparo se deba a una señal de onda gravitacional. Para asignar una significación estadística a los candidatos de detección, la tubería mide la tasa de falsas alarmas de la búsqueda en función del valor $\hat{\rho}_c$. Puesto que es imposible aislar los detectores de las ondas gravitacionales, no es posible medir directamente el ruido del detector en ausencia de señales. Esto, junto con la naturaleza no estacionaria y no gaussiana del ruido, significa que la tasa de falsas alarmas de la búsqueda, debe medirse empíricamente. Para ello, se aplica un desplazamiento temporal en los disparadores de un detector respecto al otro. El desplazamiento temporal mínimo, se elige de manera que sea mayor que la ventana utilizada para determinar si las señales se observan con parámetros consistentes en ambos detectores. Por lo tanto, los eventos en el análisis con tiempo desplazado, no pueden deberse a la coincidencia de un par de disparadores producidos por una señal real. Este desplazamiento temporal se realiza muchas veces generando un conjunto de datos de fondo que se utilizan para aproximar el ruido de fondo y estimar la tasa de falsas alarmas de la búsqueda. La certeza de un evento candidato de onda gravitacional, es una medida de la probabilidad de que sea una detección falsa debida al ruido coincidente [8], [137].

3.3. Modelos de forma de onda para CBCs.

Como vimos en la sección anterior, las búsquedas de ondas gravitacionales procedentes de la coalescencia de binarias compactas, consisten en comparar los datos de la señal entrante con un catálogo de formas de onda que describen el patrón esperado que generaría una fuente en concreto, utilizando la técnica de filtrado adaptado. De manera que, si la señal detectada es lo suficientemente fuerte, el siguiente paso sería la estimación, mediante inferencia bayesiana, de los parámetros de la fuente que emitió las ondas gravitacionales [24].

Por lo tanto, los modelos de forma de onda existentes para realizar un análisis de filtrado adaptado, en el que los datos se correlacionan de forma cruzada con plantillas que cubren el posible espacio de parámetros físicos, son claves en el análisis de datos. Se realizan correlaciones cruzadas para aproximadamente cien millones de formas de onda, generando grandes costes computacionales. Por este motivo, el cálculo de cada plantilla debe ser eficiente y rápido para poder asegurar que la estimación bayesiana de parámetros sea manejable [39].

En la década de los años 50 los físicos teóricos Richard Arnowitt, Stanley Deser y Charles W. Misner, desarrollaron el formalismo ADM para resolver numéricamente las ecuaciones de Einstein [16]. El principal reto que se encontraron a continuación, fue la resolución numérica del problema relativista general de dos cuerpos. Es concreto, tuvieron muchos problemas con la manera de tratar las singularidades de los agujeros negros. Finalmente en 2005, Frans Pretorius pudo anunciar la primera simulación exitosa de la coalescencia de la binaria de agujeros negros en todas las etapas de la onda gravitacional [122].

En las dos últimas décadas, se han ido desarrollando diferentes plantillas de ondas gravitacionales, generando diversos catálogos de familias de formas de onda, cuyo carácter puede ser analítico, numérico o una combinación de ambos. Para modelar dichas plantillas, se han desarrollado las siguientes aproximaciones aplicables en las diferentes fases de la onda:

- Teoría perturbativa, para describir los modos cuasi normales ¹⁰ de los objetos compactos [70]. Antes de que las simulaciones de relatividad numérica fueran posibles, se tenía esta herramienta para estudiar las perturbaciones en la fase de relajación de la onda gravitacional, donde el objeto resultante de la coalescencia fuese un agujero negro de Schwarzschild o de Kerr [122].
- Soluciones de relatividad numérica (NR), esto es, resolver las ecuaciones de Einstein numéricamente para poder describir el problema de dos cuerpos [115].
- Expansiones analíticas post-Newtonianas (PN), válidas para fuentes que se mueven lentamente $v/c \ll 1$ y cuya curvatura en el espacio-tiempo sea suave, es decir, aplicable únicamente en la fase de evolución suave [115]. Consiste en expresar las ecuaciones de Einstein en términos de desviaciones de la gravedad Newtoniana, donde unos parámetros son ajustados para tener en cuenta las posibles modificaciones que provoca la relatividad general en la detección.

El modelado de la forma de onda completa con NR, es demasiado costoso computacionalmente para binarias cuya separación inicial entre los objetos sea pequeña y cuyo cociente de masas y espines de los objetos sean bajos [122]. Por ello, existen varias formas de combinar la NR con las aproximaciones anteriores, para poder modelar las

¹⁰Frecuencias discretas complejas que decaen con el tiempo [79]. Físicamente se interpretan como oscilaciones del espacio-tiempo, armónicas (normales) que decaen (cuasi), donde la energía perdida es debida a la emisión de ondas gravitacionales [122].

plantillas de ondas gravitacionales cubriendo todas las fases de la onda: la fase de evolución suave, la fase de fusión y la fase de estabilización. Según la técnica utilizada, estos modelos pueden clasificarse en:

- Formas de onda híbridas, son una combinación de PN al inicio de la fase de evolución suave y NR al final de dicha fase, juntando la de fusión y la de estabilización en el punto donde la diferencia de fases es minimizada [122], [24].
- Modelos fenomenológicos (Phenom), unos modelos analíticos construidos en el dominio de Fourier, donde la PN es utilizada en la fase de evolución suave, mientras que en la fusión y la estabilización se tienen unos coeficientes a determinar a través de ajustes en la NR [115].
- Formalismo efectivo de un solo cuerpo (EOB), el modelo es construido a través de ecuaciones diferenciales ordinarias con PN, correcciones NR para la fase de fusión y teoría perturbativa de los modos cuasi normales para la última fase de relajamiento [122].
- Combinaciones EOB/NR, conocidos como EOBNR.

Las simulaciones de NR son fundamentales en estas cuatro técnicas, puesto que proporcionan información fundamental para la parte no lineal donde la curvatura del espacio-tiempo es fuerte, en la fase de fusión [115], [122].

Todas estas plantillas pueden describir diferentes situaciones físicas y son válidas en regiones restringidas del espacio de parámetros o, como podemos ver en la figura 3.7, para un rango de frecuencia determinado. La combinación PN/NR, junto con las EOB y los modelos Phenom, dan lugar a unos modelos capaces de abarcar todo el espectro de frecuencias, todas las fases de la onda, conocidas como las formas de onda IMR, por sus siglas en inglés, inspiral, merger y ringdown [65], [115], [24].

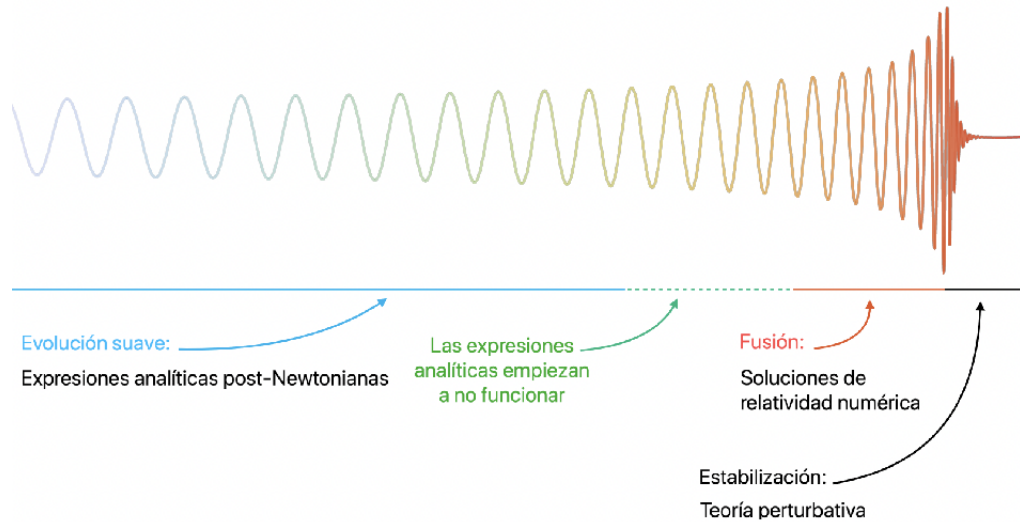


FIGURA 3.7: Forma de onda gravitacional típica procedente de la coalescencia de una binaria compacta indicando, en cada fase, el formalismo que puede ser utilizado para el modelado de la señal. Imagen modificada de [110].

Esta tesis pone a prueba, a través de la estimación de parámetros, un modelo de forma de onda publicado en abril del 2020 por el Grupo de Física Gravitacional: teoría y observación de la UIB, en colaboración con la Universidad de Birmingham, la Universidad de Zurich y la Universidad de Cardiff, el modelo IMRPhenomXPHM [108]. Tal como su nombre indica, es un modelo fenomenológico (Phenom) en el dominio de frecuencias, para la señal de onda emitida por la binaria compacta de agujeros

negros (IMR), de precesión (P) cuasi circular, incorporando multipolos más allá del cuadrupolo dominante (HM). Las tres características más interesantes de este modelo son la descripción de la amplitud y la fase de los armónicos esféricos que describen la onda gravitacional mediante expresiones cerradas, la incorporación de los armónicos subdominantes y su descripción en el dominio de frecuencias. La primera y tercera propiedad ¹¹ proporcionan que el modelo sea computacionalmente eficiente, ideal para el análisis de parámetros posterior. La segunda propiedad incorpora más información en la descripción de la onda, evitando un sesgo sistemático en los parámetros de la fuente y una pérdida significativa en la tasa de detección. Veamos a continuación, qué son estos armónicos y porqué son tan importantes.

3.3.1. La importancia de los armónicos subdominantes.

En la sección (3.1.1) habíamos descrito la señal de la onda gravitacional, vista por el detector. La descripción de la señal de onda dada una ubicación en la esfera celeste, a través de los armónicos esféricos, es la que se utiliza para construir los modelos de ondas gravitacionales. Dicha descripción nos permitirá revelar la importancia de la implementación de armónicos esféricos más altos que el dominante en los modelos, conocidos como armónicos subdominantes.

Sea el sistema de coordenadas esféricas (r, θ, φ) , la perturbación de la métrica puede descomponerse en modos de ondas $h_{l,m}(\Xi; t)$, con Ξ una lista de los parámetros intrínsecos de la fuente ¹², en base de los armónicos esféricos $Y_{l,m}^{-2}(\theta, \varphi)$ conocidos en inglés como “spin -2 weighted spherical harmonic”. Estos armónicos forman una base de funciones definidas sobre la esfera que, debido a sus propiedades de transformación bajo rotaciones, son particularmente adecuados para describir el campo gravitatorio como campos de espín-2 ¹³ [24]. De manera que, para cualquier punto $p = (\theta, \varphi)$ de la esfera celeste, la deformación de las ondas gravitacionales dependerá de su ubicación como,

$$h(\Xi; d_L, \theta, \varphi; t) = h_+ - ih_\times = \frac{1}{d_L} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}^{-2}(\theta, \varphi) h_{l,m}(\Xi; t), \quad (3.11)$$

donde d_L es la distancia luminosa, los armónicos $Y_{l,m}^{-2}(\theta, \varphi)$ definidos como

$$Y_{l,m}^{-2}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} d_{l,m}(\theta) e^{im\varphi}, \quad (3.12)$$

con,

$$d_{l,m} = \sum_{j=\max(0, m-2)}^{\min(l+m, l-2)} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{\sqrt{(l+m)!(l-m)!(l+2)!(l-2)!}}{(j-m+2)!(l+m-j)!(l-j-2)!} \cdot \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{2l+m-2j-2} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{2j-m+2}, \quad (3.13)$$

¹¹Los cálculos que se realizan, basados en el filtrado adaptado de los datos, suelen desarrollarse en el dominio de las frecuencias. Por este motivo, tener un modelo desarrollado en dicho dominio, reduce el coste computacional.

¹²Descritos más adelante en la sección (3.4.1).

¹³En teoría de campos, la teoría de la relatividad describe las autointeracciones no lineales de una excitación espín-2 sin masa [123].

y los modos $h_{l,m}(\Xi; t)$ que, como para cualquier descripción de una onda, podremos escribirlos con una amplitud $A_{lm}(t)$ y una fase $\phi_{l,m}(t)$, como [24]

$$h_{l,m}(\Xi; t) = A_{lm}(t)e^{i\phi_{l,m}(t)}. \quad (3.14)$$

Hasta 2012, los modelos utilizados en los datos tomados por los detectores Advanced LIGO y Virgo, incluían únicamente el armónico esférico dominante ($l = 2, |m| = 2$). Se le conoce como dominante, porque es suficiente para la descripción de la onda gravitacional, siempre y cuando los agujeros negros tengan masas comparables, o la señal sea débil. Sin embargo, para binarias compactas donde un agujero negro sea más masivo que el otro o cuando la inclinación de la órbita tienda a $\pi/2$, el modelado de los armónicos subdominantes ($l, |m|$) = (3, 3), (4, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 3) se volverá de gran importancia [50], [109].

En la figura (3.8), se muestra el efecto de la inclinación sobre la forma de onda según esté contruida con el modo dominante o los subdominantes.

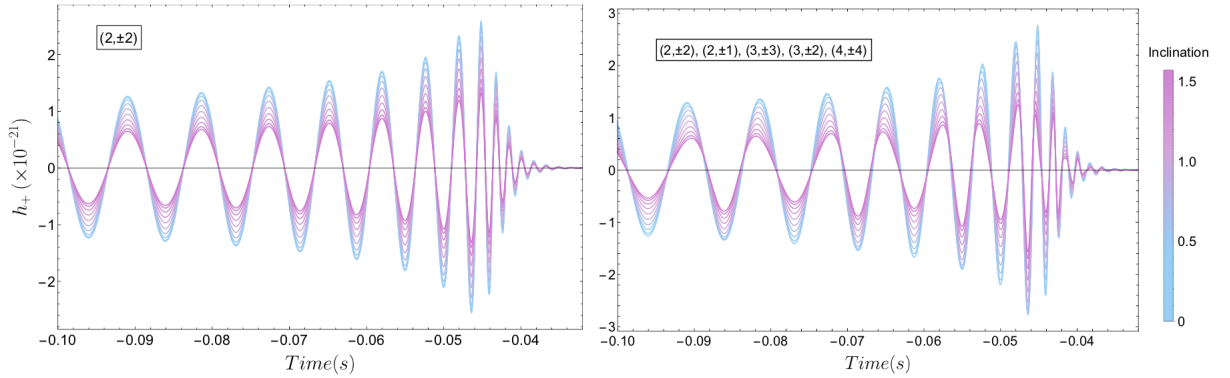


FIGURA 3.8: Formas de onda generadas con el armónico dominante (izquierda) y los subdominantes (derecha), en función de la inclinación desde 0 a $\pi/2$, puesto que por simetría ecuatorial de $\pi/2$ a π , el efecto sería equivalente. Imagen de [115].

En el caso de la forma de onda con el modo dominante, se aprecia el equidistanciamiento entre los nodos; mientras que para el caso con los modos subdominantes, existe un desfase entre los nodos a medida que nos acercamos a $\pi/2$, debido a las diferentes fases relativas entre los modos. De hecho, como podemos observar en la figura (3.9), a medida que la inclinación tiende hacia $\pi/2$, la amplitud de los armónicos del modo dominante decrece a la vez que aumenta la de los modos subdominantes.

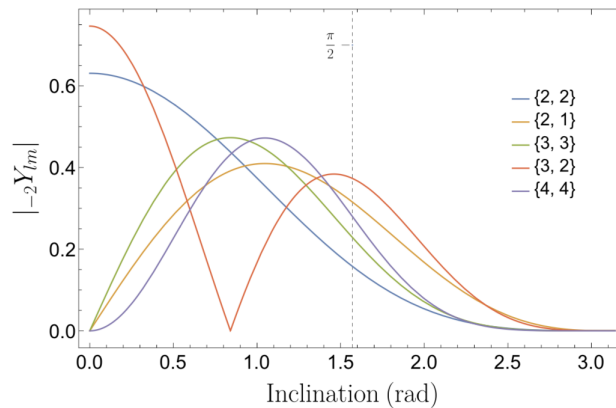


FIGURA 3.9: Amplitud de $Y_{l,m}^{-2}$ respecto a la inclinación. Imagen de [115].

Otro parámetro que evidencia la importancia de los armónicos subdominantes, son los sistemas cuya masa total es alta. La razón es que los detectores Advanced LIGO son más sensibles para masas totales altas, en aquellas bandas de frecuencia correspondientes a la fase de estabilización de la onda. A medida que la masa total sea mayor, los detectores serán cada vez más sensibles a otros modos, además del dominante.

Varios estudios han cuantificado cómo afecta la inclusión o no de los armónicos subdominantes en los modelos. El gráfico izquierdo de la figura (3.11), muestra la región en el espacio de parámetros donde la no introducción de los modos subdominantes, provoca una pérdida de más del 10% del volumen detectable, una pérdida inaceptable. La gráfica de la derecha, presenta la región en el espacio de parámetros donde, el hecho de no incorporar los modos subdominantes, provoca que los errores sistemáticos sean mayores que los estadísticos esperados.

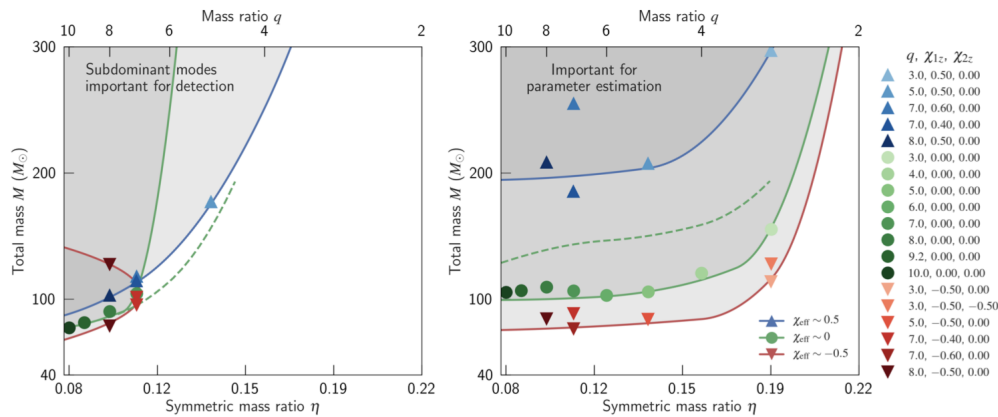


FIGURA 3.10: Región del espacio de parámetros donde las contribuciones de los modos subdominantes son importantes para la detección (izquierda) y para la estimación de parámetros (derecha). Imagen de [138].

La primera vez que se introdujeron los armónicos subdominantes en los modelos de ondas gravitacionales fue en 2012 a través del formalismo EOB, en el modelo EOBNRv2HM [102] donde se incluyó, además del dominante, los armónicos (2, 1), (3, 3), (4, 4) y (5, 5) [52], [94]. Posteriormente se realizaron múltiples estudios sobre la incorporación de dichos armónicos en diferentes situaciones físicas, como en binarias de agujeros negros con espín o sin espín, alineados o no, o en binarias con y sin precesión. En 2015 empezó a aparecer su integración en formas de onda híbridas PN/NR [24] y en modelos fenomenológicos [69], donde además continuaron los estudios para diferentes situaciones físicas de binarias de agujeros negros, así como su implicación en la estimación de parámetros.

En este caldo de cultivo, llegamos a la primera incorporación en 2018 de los armónicos subdominantes en binarias de agujeros negros con espín a través del modelo fenomenológico IMRPhenomHM [78], utilizando una aproximación basada en el comportamiento de los armónicos subdominantes con respecto al modo (2, 2) dado por IMRPhenomD.

La diferencia fundamental entre IMRPhenomHM [78] y uno de los dos predecesores directos de nuestro modelo estudiado (IMRPhenomXPHM [108]), conocido como IMRPhenomXHM [50], además de su carácter cuasi circular, radica en que con esta aproximación, IMRPhenomHM sólo está calibrado con datos numéricos basados en dicho modo (2, 2), mientras que IMRPhenomXHM [50] calibra directamente los armónicos subdominantes a un conjunto de formas de onda numéricas [50], [115]. El segundo predecesor directo de IMRPhenomXPHM [108], se conoce como IMRPhenomXAS [109], un modelo fenomenológico que describe el modo dominante (2, 2) para

la señal de onda gravitacional emitida por la coalescencia de una binaria compacta de órbita cuasi circular, sin precesión y con los vectores de espín ortogonales al plano orbital [109].

Todos estos modelos mencionados, junto con muchos otros, forman parte de la familia fenomenológica “Phenom”. Concretamente, los modelos IMRPhenomP (Pv2) [57], IMRPhenomD [69], IMRPhenomXAS [109], IMRPhenomHM [78], IMRPhenomXHM [50] y IMRPhenomXPHM (XP) [108], han sido desarrollados en la UIB por el Grupo de Física Gravitacional: teoría y observación en colaboración con varias universidades e institutos, como la Universidad de Cardiff, el Instituto Max Planck de Física Gravitacional (Instituto Albert Einstein), l’Institut d’Estudis Espacials de Catalunya, el Centro Internacional de Ciencias Teóricas en la India, la Univerisdad de Birmingham y la Universidad de Hannover. En la tabla (3.1), podemos observar un esquema actual de dicha familia asociando cada modelo con la física que simulan, separando aquellos que ayudaron a desarrollar el modelo estudiado, IMRPhenomXPHM, en la familia PhenomX.

Modos, precesión y fuerzas de marea	Familia Phenom	
	Otros de la familia Phenom	Familia PhenomX
Modo (2,2)	IMRPhenomA (B, C, D, C_INTERP, D_INTERP)	IMRPhenomXAS
Modos subdominantes	IMRPhenomHM	IMRPhenomXHM
Modo (2,2) y precesión	IMRPhenomP (Pv2, Pv3, Pv2_INTERP)	IMRPhenomXP
Modos subdominantes y precesión	IMRPhenomPv3HM	IMRPhenomXPHM
Modo (2,2) y correcciones en las fuerzas de marea	IMRPhenomD_NRTidal	-
Modo (2,2), precesión y correcciones en las fuerzas de marea	IMRPhenomPv2_NRTidal(v2)	-
Binaria de estrella de neutrones y agujero negro	IMRPhenomNSBH	-

CUADRO 3.1: Familia de los modelos Phenom actual [74], [114]. Tabla modificada de [115].

3.3.2. El modelo IMRPhenomXPHM.

El modelo IMRPhenomXPHM [108] es una extensión de IMRPhenomXHM [50], al añadir los efectos de la precesión de la binaria. Dicho efecto es introducido como una modulación en la amplitud y fase de una onda gravitacional, que puede aproximarse en términos de una rotación dependiente del tiempo en un sistema de referencia sin precesión. Es decir, la construcción del modelo se basa en modular mapas aproximados entre los modos de forma de onda con espines alineados en el sistema de referencia no inercial, precesante de la binaria, con los modos de forma de onda en el sistema de referencia inercial, no precesante. Dicho de otra manera, la forma de onda para binarias con precesión se puede describir interpretando una forma de onda sin precesión, como una aproximación de la forma de onda con precesión, observada en un sistema de referencial inercial que sigue la precesión del plano orbital. Este método es conocido como “retorcer” el modelo sin precesión. IMRPhenomXPHM [108] incorpora además el modelo IMRPhenomXP, en el caso en que se quiera modelar únicamente el armónico dominante [108].

En concreto, el algoritmo “retorcer”, puede esquematizarse de la siguiente manera:

1. Modelar los modos de forma de onda de IMRPhenomXAS y IMRPhenomXHM, en el sistema de referencia precesante no inercial. Este sistema, conocido como “L”, viene descrito en términos de un plano orbital que rota, ortogonal al momento orbital angular Newtoniano $L_N = \mu \vec{n} \times \vec{v}$ definido sobre el eje z , con μ la masa reducida Newtoniana, \vec{n} el vector que va desde el agujero negro secundario al primario y \vec{v} la velocidad relativa.

Para cada fase, los modos de IMRPhenomXHM son descritos con las siguientes expresiones cerradas,

- a) En la región de evolución suave, aplicando la aproximación de fase estacionaria (SPA),

$$h_{l,m} = A_{lm} \sqrt{\frac{2\pi}{m\dot{\phi}}} e^{i(2\pi f t_c - \phi_{l,m} - \pi/4 + \psi_0)} := A_{lm}^{SPA} e^{i\Psi_{lm}}, \quad (3.15)$$

donde t_c es un parámetro de cambio de tiempo y ϕ_0 es una fase general [50]. En realidad, la amplitud no es modelada con la aproximación SPA, sino con la cantidad

$$H_{l,m} := \frac{|A_{lm}(f)|}{A_{22}^0(f)} + \alpha \left(\frac{f}{f_{lm}^{INS}} \right)^{7/3} + \beta \left(\frac{f}{f_{lm}^{INS}} \right)^{8/3} + \gamma \left(\frac{f}{f_{lm}^{INS}} \right)^{9/3}, \quad (3.16)$$

para incluir los efectos de los armónicos subdominantes en forma de tres términos pseudo-PN $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, donde se normaliza con la amplitud del modo (2, 2)

$$A_{22}^0 := \pi \sqrt{\frac{2\eta}{3}} (\pi f)^{-7/6}, \quad (3.17)$$

con $\eta = m_1 m_2 / m_1 + m_2$ el cociente de masa simétrico y $m_{1,2}$ las masas de los objetos compactos de la binaria donde $m_1 > m_2$ [50]. La fase de cada multipolo es definida como,

$$\phi_{lm}(f) = \frac{m}{2} \phi_{22}^X(2/mf) + \Lambda_{lm}(f) + d\phi_{lm}^{Ins} f + \phi_{lm}^{Ins}, \quad (3.18)$$

con $d\phi_{lm}^{Ins}$ y ϕ_{lm}^{Ins} dos constantes que se tienen que determinar, ϕ_{22}^X la fase cuadrupolar reconstruida del modelo IMRPhenomXAS y

$$\Lambda_{lm} = \begin{cases} \Lambda_{lm}^{PN} \sim \Delta \phi_{lm}^{Ins}, & \text{si } m_1/m_2 < 100, \\ \Lambda_{lm}^{fit}, & \text{si } m_1/m_2 \geq 100. \end{cases} \quad (3.19)$$

- b) En la región intermedia entre la evolución suave y la estabilización, la amplitud y la fase se calibran completamente. La amplitud se define como,

$$\frac{A_{lm}^{Inter}}{A_0} = \frac{1}{\delta_0 + \delta_1 f + \delta_2 f^2 + \delta_3 f^3 + \delta_4 f^4 + \delta_5 f^5}, \quad (3.20)$$

con $A_0 = \pi \sqrt{\frac{2\eta}{3}}$ y $\delta_{0,5}$ seis parámetros a determinar [50]. La fase para cada modo, viene dado por el ansatz general

$$\frac{d\phi_{lm}^{Int}}{df} = a_\lambda^{lm} \frac{f_{damp}^{lm}}{(f_{damp}^{lm})^2 + (f - f_{ring}^{lm})^2} + \sum_{k=1}^4 \frac{a_k^{lm}}{f^k} + d\phi_{Int}^{lm}. \quad (3.21)$$

- c) En la fase de estabilización, el ansatz utilizado para la amplitud es,

$$\frac{A_{RD}^{lm}}{A_0^{22}} = \frac{1}{f^{1/12}} \frac{|a_\lambda| f_{damp}^{lm} \sigma}{(f - f_{ring}^{lm})^2 + (f_{damp}^{lm} \sigma)^2} e^{-\frac{(f - f_{ring}^{lm})^\lambda}{f_{damp}^{lm} \sigma}}, \quad (3.22)$$

con $\{a_\lambda, \lambda, \sigma\}$ tres coeficientes a determinar [50].

Para la fase, el ansatz tiene la forma,

$$\phi_{lm}^{RD} = -w_{lm} \frac{f_{damp}^{22}}{f_{damp}^{lm}} \alpha_{22}^2 \frac{(f_{ring}^{lm})^2}{f} + \alpha_{\lambda}^{22} \tan^{-1} \left(\frac{f - f_{ring}^{lm}}{f_{damp}^{lm}} \right) + d\phi_{RD}^{lm} f + \phi_{RD}^{lm}, \quad (3.23)$$

donde w_{lm} , α_{λ}^{22} , α_{22}^2 , $d\phi_{RD}^{lm} f$ y ϕ_{RD}^{lm} son constantes [50].

La construcción de la fase para el modo (3, 2), se realiza de forma diferente, resultando

$$\phi_{32} = -\frac{\alpha_2^{32}}{f} - \frac{\alpha_4^{32}}{3f^3} + \alpha_{\lambda}^{32} \tan^{-1} \left(\frac{f - f_{ring}^{32}}{f_{damp}^{32}} \right) + d\phi_{RD}^{32} f + \phi_{RD}^{32}, \quad (3.24)$$

donde los coeficientes de esta ecuación son determinados resolviendo un sistema lineal [50].

Tras modelar estas expresiones en el sistema precesante no inercial “L”, siguiendo las convenciones dadas por [50] y [109], se realiza el siguiente paso.

2. Para representar el movimiento de precesión, se efectúa una rotación en sentido antihorario desde el sistema de referencia “L” al sistema de referencia inercial cartesiano $(\hat{x}_J, \hat{y}_J, \hat{z}_J)$ conocido como “J”, donde se escoge el eje \hat{z}_J como la dirección del momento angular total \vec{J} . Este sistema cartesiano está asociado con el sistema de coordenadas esférico, inercial, estándar (t, r, θ, φ) , donde t es la coordenada temporal inercial de los observadores distantes, r es la distancia luminosa a la fuente y θ y φ son los ángulos polares de la fuente. En muchas binarias, el momento angular orbital y de espín precesionan alrededor de \vec{J} . En este modelo, se ha escogido la dirección de \vec{J} fija, $\hat{J}(t) \sim \hat{J}_{t \rightarrow -\infty}$. La construcción de la forma de onda gravitacional “retorcida” en este sistema “J”, vendrá dada en términos de su descomposición en los armónicos esféricos “spin -2 weighted spherical harmonic” $Y_{l,m}^{-2}(\theta, \varphi)$, como

$$h^J = h_+^J - ih_{\times}^J = \sum_{l \geq 2} \sum_{m=-l}^l h_{lm}^J Y_{l,m}^{-2}(\theta, \varphi). \quad (3.25)$$

Las polarizaciones de la onda gravitacional $h_{+, \times}^J(f)$ en el sistema “J” en el dominio de las frecuencias, en términos de los armónicos esféricos $h_{lm}^L(f)$ en el sistema “L”, se derivan a partir de transformaciones de Fourier con la aproximación de fase estacionaria (SPA). Dichas polarizaciones en términos del sistema precesante “L”, quedan

$$h_+^J(f > 0) = \frac{1}{2} \sum_{l \geq 2} \sum_{m' > 0}^l h_{l-m'}^L(f) e^{im'\gamma} \sum_{m=-l}^l [A_{m-m'}^l + (-1)^l A_{mm'}^{l*}], \quad (3.26)$$

$$h_{\times}^J(f > 0) = \frac{i}{2} \sum_{l \geq 2} \sum_{m' > 0}^l h_{l-m'}^L(f) e^{im'\gamma} \sum_{m=-l}^l [A_{m-m'}^l - (-1)^l A_{mm'}^{l*}], \quad (3.27)$$

donde,

$$A_{mm'}^l = e^{-im\alpha} d_{mm'}^l(\beta) Y_{l,m}^{-2}, \quad (3.28)$$

con $d_{mm'}^l(\beta)$ las matrices-d reales de Wigner, que son funciones polinómicas dependientes de $\cos(\beta/2)$ y $\sin(\beta/2)$ [108].

Los modos en el sistema “L” son las aproximaciones de los modos de forma de

onda no precesantes, descritos en el paso anterior procedentes del modelo IMRP-phenomXHM, que contiene los modos $(l, |m|) = (2, 2), (2, 1), (3, 3), (3, 2), (4, 4)$.

- Finalmente se proyectan estas polarizaciones en el sistema de referencia conocido como “N”, donde el eje z corresponde a la dirección \hat{n} de la línea de visión del observador a la señal. Dicho observador debe estar ubicado en la posición $\theta = \theta_{JN}$ y $\varphi = \phi_{JN}$, en el sistema de referencia “J” [108].

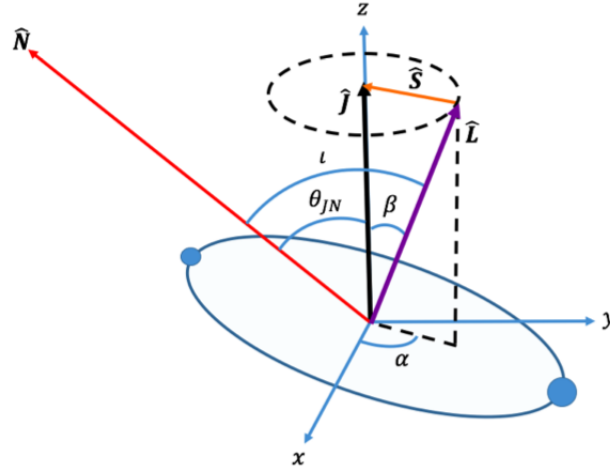


FIGURA 3.11: Gráfico que muestra cómo se definen los ángulos de precesión. el vector normal indica la línea de visión del observador, \hat{L} y \hat{J} son los vectores de momento angular orbital y momento angular total respectivamente. Imagen de [46].

En este modelo se implementó dos formas de mapear, uno basado en la aproximación post-Newtoniana de un solo espín conocido como ‘next-to-next-leading order’ (NNLO)¹⁴, y otro basado en utilizar múltiples análisis en escala (MSA) de doble espín, proporcionando dos descripciones diferentes para las expresiones de los ángulos de Euler en el dominio de frecuencias. A través de la estimación de parámetros para diferentes eventos, estudiaremos estas dos descripciones.

3.4. Estimación de parámetros por inferencia bayesiana.

La inferencia estadística, en concreto la inferencia bayesiana y la frecuentista, son utilizadas habitualmente en la astronomía de ondas gravitacionales a la hora de responder preguntas como: “¿Existe una señal presente en los datos de los detectores?” o “¿Cuáles son los parámetros físicos que describen la fuente?”. Muchos estudios teóricos, abordan estos problemas desde el punto de vista frecuentista. Sin embargo, en las últimas décadas, en concreto tras el desarrollo de los métodos de Monte Carlo, la aplicación de la inferencia bayesiana ha aumentado su popularidad [131], [14].

La diferencia fundamental entre dichas inferencias, radica en su diferente interpretación sobre la probabilidad de un evento. Para los frecuentistas, las probabilidades se basan en su repetición; mientras que para los bayesianos, las probabilidades están relacionadas con el grado de conocimiento que se tiene. Lógicamente, puesto que en el campo de la astronomía no podemos repetir un mismo experimento tantas veces como queramos, las inferencias deben estar sujetas a incertezas en las cantidades a estimar que necesitan ser cuantificadas por un modelo. Por este motivo, en el análisis de datos

¹⁴Como el usado también en el modelo IMRPhenomPv2.

de ondas gravitacionales, la estadística que se encarga de realizar dichos estudios es la bayesiana.

La interacción entre la inferencia bayesiana y la astrofísica, no es nueva. Todo empezó en 1763, cuando se publicó el trabajo “Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances” [20] por Thomas Bayes, dos años después de su muerte. En éste, se asienta el formalismo matemático que es la base de la inferencia bayesiana a través del teorema que lleva su nombre: el teorema de Bayes. Su aplicación en la astrofísica fue introducida por Pierre-Simon Laplace, quién la utilizó para estimar las masas de los planetas y para cuantificar las incertezas en las medidas de dichas masas debidas a los errores observacionales. Desde principios del siglo pasado, la mayoría de los científicos se mostraban reacios a la hora de utilizar métodos bayesianos. En parte debido a la falta de una justificación formal para la asignación y justificación de una probabilidad a priori sobre el evento, y en parte debido a las dificultades para evaluar las integrales que conllevan el uso del teorema de Bayes. El primer problema fue abordado por los astrónomos Sir Harold Jeffers (1931 - 1939) [67], [68] y posteriormente estudiado por Edwin Thompson Jaynes (2003) [66]. En concreto, Jaynes proporcionó una manera lógica de establecer la distribución de probabilidad a priori utilizando el principio de máxima entropía [22], [54], [66]. La inferencia bayesiana en el análisis de datos de ondas gravitacionales, fue propuesta en 1993 por Lee Samuel Finn y David F. Chernoff [47], cuyo estudio fue extendido en 1994 por Cutler y Flanagan [38]. En paralelo, las dificultades surgidas con la evaluación analítica del teorema de Bayes, fueron superadas por la aparición del método estocástico de Monte Carlo basado en cadenas de Márkov (MCMC) en 1953 [92]. Sin embargo, la revolución vino en la década de los 90 con la llegada de recursos informáticos, compactos y rápidos, para ejecutar dichos algoritmos de manera eficiente. El primer estudio que se realizó sobre aplicar la estadística bayesiana con el algoritmo MCMC en la detección de una onda gravitacional y en la estimación de parámetros de la fuente [33], fue en 1998 por el grupo compuesto por Nelson Christensen y Renate Meyer de la Universidad de Auckland. Tras ese estudio, muchas personas se lanzaron hacia esta área probando otros formalismos de MCMC bayesianos más sofisticados y computacionalmente eficientes. Como por ejemplo el utilizado en este trabajo, conocido como el algoritmo de muestreo anidado, propuesto en 2004 por John Skilling [128] y desarrollado por él mismo para la inferencia bayesiana en el 2006 [129].

La inferencia bayesiana y la estimación de parámetros forman parte de las herramientas básicas que nos permiten hacer declaraciones sobre los parámetros de la fuente bajo un modelo de onda gravitacional y la selección de dicho modelo, basándonos en los datos de la detección. Las principales razones, que hemos mencionado, por las cuales se utiliza la inferencia bayesiana en la astronomía de ondas gravitacionales son,

- la no posibilidad de repetir varias veces un mismo evento;
- la aparición de diferentes métodos estocásticos de integración numérica, como el algoritmo de Monte Carlo basado en cadenas de Márkov (MCMC) o el algoritmo de muestreo anidado; y
- el vínculo directo existente entre los datos y el modelo, surgido a raíz de que somos capaces de describir la emisión de las ondas gravitacionales a través de la teoría, volviéndose un requisito ideal para poder utilizar el teorema de Bayes [136], [132].

Gracias a la inferencia bayesiana, a través del teorema de Bayes, podemos estimar los parámetros de la fuente obteniendo sus densidades de probabilidad a posteriori correspondientes codificadas en las ondas gravitacionales, y podemos estimar la probabilidad

de haber observado los datos bajo ciertas hipótesis, conocida como evidencia. Con esta evidencia, podemos preguntarnos por ejemplo, cuánto de probable es que los datos contenga una señal con modos subdominantes respecto a otra que sólo contenga el modo dominante [131].

3.4.1. El teorema de Bayes.

La distribución de probabilidad a posteriori $p(\theta|d, H)$ representa la probabilidad de que el verdadero valor de un parámetro θ se encuentre entre el intervalo $(\theta', \theta' + d\theta)$, dados los datos d y un modelo H [136]. Esta función de densidad de probabilidad, está normalizada de manera que

$$\int d\theta p(\theta|d, H) = 1. \quad (3.29)$$

En nuestro caso, los 15 - 17 parámetros físicos que el modelo toma como entrada $\vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N\}$ y que describen la coalescencia de la binaria compacta, pueden dividirse en dos grupos. El primero viene dado por aquellos parámetros que describen las propiedades fundamentales de una binaria, conocidos como parámetros intrínsecos, éstos son [65], [24]

- las dos masas de la binaria, la principal m_1 y la secundaria m_2 tales que $m_1 \geq m_2$, en unidades de masas solares;
- la masa chirrido $\mathcal{M} = (m_1 m_2)^{3/5} (m_1 + m_2)^{-1/5}$;
- el cociente de masa $q = m_1/m_2$;
- los espines adimensionales $\chi_{1,2} \in [0, 1]$, definidos como $\chi_{1,2} = |\vec{s}_{1,2}|/m_{1,2}^2$ con $\vec{s}_{1,2}$ el vector de espín;
- el espín efectivo ¹⁵

$$\chi_{eff} = \frac{\vec{s}_1/m_1 + \vec{s}_2/m_2}{m_1 + m_2} \cdot \hat{L}; \quad (3.30)$$

- los ángulos de inclinación $t_{1,2}$ entre el momento angular orbital y los espines de los objetos ¹⁶;
- el ángulo azimutal que separa los vectores de espín ϕ_{12} ; y
- el ángulo azimutal del momento angular orbital ϕ_{JL} .

El segundo grupo son los parámetros extrínsecos que determinan la orientación y localización de la binaria respecto del observador [65], [24],

- la declinación δ y la ascensión recta α , que ubican la fuente en la esfera celeste;
- la distancia luminosa a la fuente d_L ;
- el ángulo de inclinación ι entre la línea de visión y el momento angular orbital del sistema;
- el ángulo de polarización ψ ;
- el tiempo de coalescencia de la binaria t_c ;
- la fase orbital ϕ_c en t_c .

¹⁵La combinación de las dos componentes de espín en χ_{eff} , se estima mejor que los dos espines por separado [97].

¹⁶Por este motivo hemos especificado 15 - 17 parámetros, puesto que estos parámetros se encuentran únicamente en los modelos con precesión.

De acuerdo con el teorema de Bayes, la distribución de probabilidad a priori $p(\theta|H)$ es actualizada al recibir nuevos datos d del detector dado un modelo H , para dar una distribución de probabilidad a posteriori $p(\theta|d, H)$, que viene definida como [65], [136]

$$p(\theta|d, H) = \frac{p(d|\theta, H)p(\theta|H)}{p(d|H)}, \quad (3.31)$$

escrita de otra manera,

$$p(\theta|d) = \frac{\mathcal{L}(d|\theta)\pi(\theta)}{\mathcal{Z}}, \quad (3.32)$$

con $\mathcal{L}(d|\theta)$ la función de verosimilitud a través de la cual los datos d modifican el conocimiento de θ , $\pi(\theta)$ la distribución de probabilidad a priori y \mathcal{Z} el factor de normalización conocido como evidencia,

$$\mathcal{Z} = \int d\theta \mathcal{L}(d|\theta)\pi(\theta). \quad (3.33)$$

Entonces, nuestra distribución de probabilidad a posteriori para la coalescencia de una binaria compacta contando únicamente con los parámetros físicos, para un detector, es una función de 15 - 17 dimensiones ¹⁷. Como normalmente lo que queremos estudiar es la distribución a posteriori para cada parámetro θ , lo que se hace es marginalizar (integrar) sobre los parámetros que no nos interesan, obteniendo la distribución de probabilidad a posteriori marginalizada,

$$p(\theta_i|d) = \int \left(\sum_{k \neq i} d\theta_k \right) p(\theta|d) = \frac{\mathcal{L}(d|\theta_i)\pi(\theta_i)}{\mathcal{Z}}, \quad (3.34)$$

donde $\mathcal{L}(d|\theta_i)$ es la función de verosimilitud marginalizada,

$$\mathcal{L}(d|\theta_i) = \int \left(\sum_{k \neq i} d\theta_k \right) \pi(\theta_k)\mathcal{L}(d|\theta). \quad (3.35)$$

Sean dos variables covariantes θ_a y θ_b , cuando marginalizamos sobre θ_a para obtener una distribución a posteriori en θ_b , θ_a está inyectando cierta incertidumbre a la distribución de θ_b . Cuando esto sucede, la distribución de probabilidad a posteriori marginalizada $p(\theta_b|d)$ se hace más ancha que la distribución de probabilidad a posteriori condicional $p(\theta_b|d, \theta_a)$ [65], [136].

3.4.1.1. La función de verosimilitud.

La función de verosimilitud es una función que podemos elegir, puesto que describe la medida. En la astronomía de ondas gravitacionales, a través de ésta, se introduce implícitamente el ruido del modelo. Como habíamos visto en las secciones (3.1.1) y (3.2), el ruido tiene un carácter gaussiano y otro no-gaussiano. Sin embargo, se considera que el efecto combinado de los procesos que generan dicho ruido, tiende a una gaussiana. De esta manera, la función de verosimilitud [65], [136], queda

$$\mathcal{L}(d|\theta) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{|d - \mu(\theta)|^2}{\sigma^2}\right), \quad (3.36)$$

¹⁷Si además añadimos los 20 parámetros necesarios para modelar la incertidumbre sistemática en los datos y lo multiplicamos para los dos detectores Advanced LIGO y Virgo, obtenemos un total de 75 - 77 parámetros. Con lo cual, las dimensiones de la probabilidad a posteriori, se disparan.

donde σ el ruido del detector y $\mu(\theta)$ es la plantilla para la onda gravitacional dado θ que habíamos definido en (3.2),

$$\mu(\theta) = F_+(\bar{\theta}, \bar{\varphi}, \psi)h_+(\theta) + F_\times(\bar{\theta}, \bar{\varphi}, \psi)h_\times(\theta). \quad (3.37)$$

En la práctica, los datos d representan la transformada de Fourier de $d(t)$ medida por un detector,

$$d = FFT(d(t))/f_s, \quad (3.38)$$

donde f_s es la frecuencia del muestreo y FFT la transformada rápida de Fourier [136]. El ruido en cada paquete de frecuencia, está caracterizado por la función de densidad espectral de potencia unilateral $P(f)$, que es proporcional a la raíz de la deformación. Por lo tanto, la función de verosimilitud en cada paquete de frecuencia j , dado θ , queda

$$\mathcal{L}(d_j|\theta) = \frac{1}{2\pi P_j} \exp\left(-2\Delta f \frac{|d - \mu(\theta)|^2}{P_j}\right), \quad (3.39)$$

donde Δf es la resolución de la frecuencia. El factor $2\Delta f$ viene del $1/2$ de (3.36) y de $4\Delta f$ introducido para convertir la raíz de las transformadas de Fourier en unidades de la $P(f)$ [136].

Asumiendo que el ruido en cada paquete es independiente, la combinación de la función de verosimilitud para un detector [136], es el productorio

$$\mathcal{L}(d|\theta) = \prod_j^M \mathcal{L}(d_j|\theta). \quad (3.40)$$

Al considerar la medida de varios detectores, el producto sobre la frecuencia j , gana un índice adicional para cada detector.

Aprovechando la propiedad fundamental de las funciones logarítmicas, por la cual nos permiten reemplazar los productos por sumas de logaritmos, se suele trabajar con el logaritmo de la verosimilitud [136],

$$\begin{aligned} \log \mathcal{L}(d|\theta) &= \sum_j^M \log \mathcal{L}(d_j|\theta) = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_j \log(2\pi P_j) - 2\Delta f \sum_j \frac{|d - \mu(\theta)|^2}{P_j} = \\ &= \Psi - \frac{1}{2} \langle d - \mu(\theta), d - \mu(\theta) \rangle, \end{aligned} \quad (3.41)$$

donde se ha definido el producto interno,

$$\langle a, b \rangle = 4\Delta f \sum_j \mathcal{R} \left(\frac{a_j^* b_j}{P_j} \right), \quad (3.42)$$

y la constante

$$\Psi = - \sum_j \log(2\pi P_j). \quad (3.43)$$

Dado que las constantes no cambian la forma de la verosimilitud logarítmica, a menudo se desprecia Ψ . Esto está permitido siempre que lo hagamos de manera consistente, puesto que cuando se quiere determinar la diferencia de dos evidencias logarítmicas, el factor Ψ se cancela de todos modos. Tomando $\Psi = 0$, expandamos la verosimilitud

logarítmica [136],

$$\begin{aligned} \log \mathcal{L}(d|\theta) &= -\frac{1}{2}[\langle d, d \rangle - 2\langle d, \mu(\theta) \rangle + \langle \mu(\theta), \mu(\theta) \rangle] = \\ &= -\frac{1}{2}[-2\log \mathcal{Z}_R - 2\kappa^2(\theta) + \rho_{opt}^2(\theta)] = \\ &= \log \mathcal{Z}_R + \kappa^2(\theta) - \frac{1}{2}\rho_{opt}^2(\theta). \end{aligned} \quad (3.44)$$

El primer término es proporcional al logaritmo del ruido de la evidencia [136],

$$-2\log \mathcal{Z}_R = \langle d, d \rangle. \quad (3.45)$$

El tercer término se conoce como la raíz de la SNR óptima [136],

$$\rho_{opt}^2 = \langle \mu, \mu \rangle. \quad (3.46)$$

El segundo término se puede reescribir en términos de ρ_{mf} como [136],

$$\kappa^2 = \langle d, \mu \rangle = \rho_{mf} \rho_{opt}, \quad (3.47)$$

donde

$$\rho_{mf} = \frac{\langle d, \mu \rangle}{\langle \mu, \mu \rangle^{1/2}}. \quad (3.48)$$

Escribiendo la verosimilitud de esta manera, podemos observar la relación existente entre la estimación de parámetros y el método de filtrado adaptado, la técnica de máxima verosimilitud para las detecciones de ondas gravitacionales.

3.4.1.2. La distribución de probabilidad a priori.

La distribución de probabilidad a priori $\pi(\theta)$ describe nuestra creencia sobre θ antes de que la medida se realice y, por lo tanto, la podemos elegir. En ocasiones, se tiene una intuición sobre su elección. Si se desconoce θ , esta ignorancia se expresa al elegir una distribución uniforme o, cuando tampoco se conoce el orden de la magnitud, una distribución logarítmica uniforme [136], [65].

Por estos motivos, en cada evento, se escoge [65], [7]:

- para m_1 y m_2 , una distribución uniforme ¹⁸;
- para t_c , el tiempo de coalescencia, se asume uniforme;
- para χ_1 y χ_2 , los espines, se suponen isotrópicos en la esfera y uniformes en su magnitud;
- para δ y α , la ubicación de la fuente en la esfera, también se suponen isotrópicos, con δ la distribución coseno y α uniforme;
- para d_L , la distancia luminosa, se supone una distribución potencial al cuadrado;
- para ι , el ángulo de inclinación entre la línea de visión y el momento angular orbital del sistema, se asume uniforme en su coseno;
- para ϕ_1 y ϕ_2 , se asume uniforme;
- para ϕ_{JL} , se asume uniforme;
- para t_1 y t_2 , los ángulos de inclinación entre el momento angular orbital y los espines de los objetos, se asumen distribuciones seno;

¹⁸Con lo cual todos los parámetros derivados de las masas, también lo serán: q y \mathcal{M} .

- para ψ , el ángulo de polarización, se asume uniforme; y,
- para ϕ_c , la fase en t_c , también se asume uniforme.

3.4.1.3. La evidencia bayesiana.

La evidencia, definida en (3.33), es una función de verosimilitud marginalizada, que adquiere gran importancia cuando se utiliza para la selección de modelos. Para ello, se compara la evidencia de un modelo (A) con la evidencia de otro modelo (B), definiendo una proporción conocida como el factor de Bayes, cuyo logaritmo es

$$BF_B^A = \frac{\mathcal{Z}_A}{\mathcal{Z}_B} \rightarrow \log BF_B^A = \log(\mathcal{Z}_A) - \log(\mathcal{Z}_B). \quad (3.49)$$

De manera que, cuando el valor absoluto de $\log(BF)$ es grande, decimos que un modelo es preferido sobre el otro. El signo de $\log(BF)$, nos dirá cual de los dos es el elegido [136], [65].

3.4.1.4. Intervalos de credibilidad.

La distribución de probabilidad a posteriori, se utiliza para construir los intervalos de credibilidad¹⁹, los contornos 1-, 2- y 3- sigma, regiones en el espacio de parámetros que contienen una parte de dicha distribución. El valor real del parámetro estimado deberá estar dentro de un intervalo de credibilidad del 90 %. Notar que tampoco esperamos que el pico de la distribución caiga en el valor real, sino dentro de la región 1-sigma.

El método del intervalo más alto de densidad a posteriori (HPDI) es el utilizado para construirlos, produce el intervalo de credibilidad mínimo más ancho. Consiste en representar una recta horizontal que atraviese la distribución a posteriori y calcular el área por encima de ésta. De manera que, si se mueve la recta hacia abajo, el área suba. Colocando la recta de forma que el área sea, por ejemplo del 95 %, entonces la parte por encima será el intervalo de credibilidad HPDI 2-sigma [136].

3.4.1.5. La divergencia de Jensen-Shannon.

La divergencia de Jensen-Shannon se utiliza para cuantificar la concordancia entre dos modelos de forma de onda, calculándola entre sus respectivas distribuciones de probabilidad a posteriori. Esta divergencia, se define como la medida simétrica de la distancia entre dos distribuciones de probabilidad $p(x)$ y $q(x)$, como

$$D_{JS}(p|q) = \frac{1}{2}[D_{KL}(p|s) + D_{KL}(q|s)], \quad (3.50)$$

con $s = 1/2(p + q)$ y

$$D_{KL}(p|q) = \int p(x) \log_s \left(\frac{p(x)}{q(x)} \right) dx, \quad (3.51)$$

la divergencia de Kullback-Leibler definida entre $p(x)$ y $q(x)$, medida en bits [7].

3.4.1.6. Calibración.

Además de los 15 – 17 parámetros físicos propios de la binaria, debido a la incertidumbre sistemática introducida por la naturaleza de la calibración del detector y que es medida por el mismo en la propia señal observada, se añaden aún más parámetros por cada interferómetro.

¹⁹Notar que estos intervalos, son diferentes a los intervalos de confianza en la inferencia frecuentista.

Este error sistemático, puede describirse con una amplitud $\delta A(f)$ y una fase $\delta\phi(f)$ en el dominio de las frecuencias, modeladas como dos splines²⁰ cúbicas. De manera que la señal observada $h_{obs}(f)$, venga relacionada con la real conocida $h(f)$, como

$$h_{obs}(f) = h(f)[1 + \delta A(f)]\exp[i\delta\phi(f)], \quad (3.52)$$

con,

$$\exp[i\delta\phi(f)] = \frac{2 + i\delta\phi(f)}{2 - i\delta\phi(f)} + \mathcal{O}(\delta\phi^3). \quad (3.53)$$

Las distribuciones a priori escogidas para los valores spline, se toman como distribuciones normales, cuya media y varianza se cargan desde un archivo de calibración dependiente de la frecuencia [11].

3.4.2. Muestreadores.

El objetivo de la estimación de parámetros es obtener la distribución de probabilidad a posteriori con el mejor ajuste posible, para ello lo que se busca, es obtener una alta verosimilitud con un volumen de la distribución de probabilidad a priori mínimo [65], [136]. Este proceso es un problema inverso, por el cual, dados los datos de los detectores d se estiman los parámetros de la fuente. La solución a este problema, es utilizar muestreadores estocásticos. Los más comunes son los que se muestran en la figura 3.12: el método de Monte Carlo basado en cadenas de Márkov (MCMC) [92], [59] y un nuevo muestreador, utilizado en esta tesis, que está cogiendo fuerza en la astronomía de ondas gravitacionales, conocido como el algoritmo de muestreo anidado [128], [129].

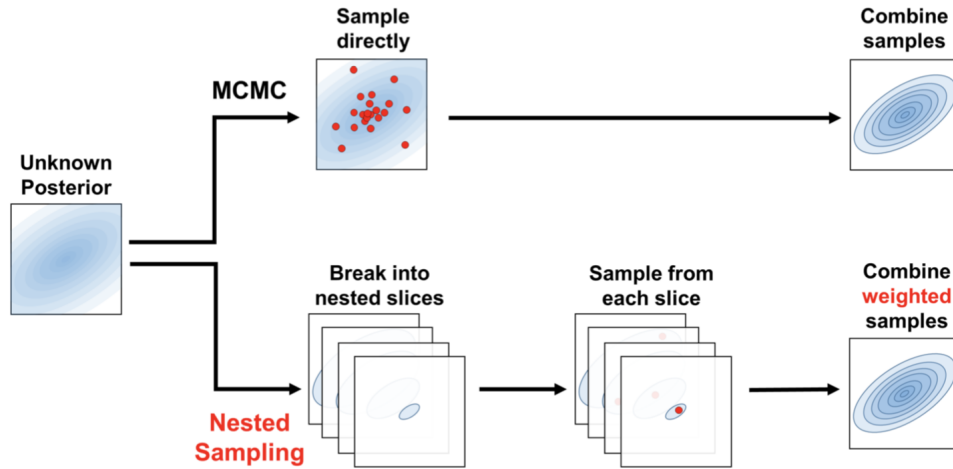


FIGURA 3.12: Esquema del método de Monte Carlo basado en cadenas de Márkov (MCMC) y del algoritmo de muestreo anidado, que muestrean la distribución de probabilidad a posteriori. Imagen del artículo [132].

Ambos métodos generan una lista de muestras a partir de la distribución de probabilidad a posteriori $\{\theta\}$, que nos permiten determinar,

- los valores esperados de ciertas cantidades de interés $f(x)$,

$$\langle f(x) \rangle_{p(x)} = \int dx p(x) f(x) \sim \frac{1}{n_s} \sum_k^{n_s} f(x_k), \quad (3.54)$$

²⁰Curva diferenciable definida a trozos mediante polinomios.

donde $p(x)$ es la distribución a posteriori que estamos muestreando y n_s las muestras; y

- la distribución de probabilidad a posteriori marginalizada de cualquier subconjunto de parámetros, a partir de las muestras en un espacio N -dimensional, construyendo los “diagramas de esquina” que muestran dichas distribuciones en una y dos dimensiones para cada θ .

La diferencia fundamental entre los dos métodos es que MCMC, genera las muestras desde la distribución de probabilidad a posteriori directamente; mientras que el algoritmo de muestreo anidado, las genera dividiendo la distribución en porciones, sacando muestras de cada una y recombinándolas escogiendo unos pesos apropiados[136].

3.4.2.1. El algoritmo de muestreo anidado.

La primera alternativa a los métodos MCMC, fue introducida por Skilling en 2004 [128], a través del algoritmo de muestreo anidado. Mientras que los MCMC están diseñados para generar muestras de la distribución de probabilidad a posteriori, el algoritmo de muestreo anidado tiene como objetivo principal el cálculo de la evidencia generando como subproducto las muestras de la distribución a posteriori. Es decir, al determinar la evidencia a través de las muestras anidadas, éstas se ponderan y, gracias al teorema de Bayes, pasan a ser muestras de la distribución de probabilidad a posteriori [136] [65].

Puesto que la integral de la evidencia (3.33), es una integral multidimensional, en nuestro caso de $75 - 77$ dimensiones ²¹, el algoritmo de muestreo anidado la aproxima a una unidimensional, escribiéndola en términos del volumen de la distribución de probabilidad a priori cuyo contorno está definido por una función de isoverosimilitud $\mathcal{L}(X)$ que cubre todos los valores tales que $\mathcal{L}(\theta) > \mathcal{L}^*$ [136], [65], [129], [128]. Siendo dicho volumen,

$$X(\mathcal{L}^*) = \int_{\mathcal{L}(\theta) > \mathcal{L}^*} \pi(\theta) d\theta, \quad (3.55)$$

al invertirlo, como la distribución a priori está normalizada, entonces $X(\mathcal{L}^* = 0) = 1$ y $X(\mathcal{L}^* = \infty) = 0$, y la evidencia podrá expresarse como,

$$\mathcal{Z} = \int_0^1 \mathcal{L}(X) dX. \quad (3.56)$$

Los pasos que sigue el algoritmo de muestreo anidado, son los siguientes:

1. Se rellena el espacio de parámetros con un conjunto de N puntos extraídos de la distribución de probabilidad a priori, denominados “puntos vivos” $(\theta_1, \dots, \theta_N) \in (0, 1)$, a los cuales se les asocia, a cada uno, su correspondiente verosimilitud $(\mathcal{L}(\theta_1), \dots, \mathcal{L}(\theta_N))$ [129], [65], [128]. Este proceso, se representa en la figura (4.6), donde podemos observar la asociación entre los puntos de la distribución de probabilidad a priori, los puntos vivos $\in (0, 1)$, con sus correspondientes contornos de isoverosimilitud (imagen de la derecha) siendo ordenados en volúmenes cerrados de la masa $X(\mathcal{L}^*)$ (imagen de la izquierda).

²¹Los 15 – 17 parámetros físicos más los parámetros para cada detector que modelan la incertidumbre sistemática en los datos

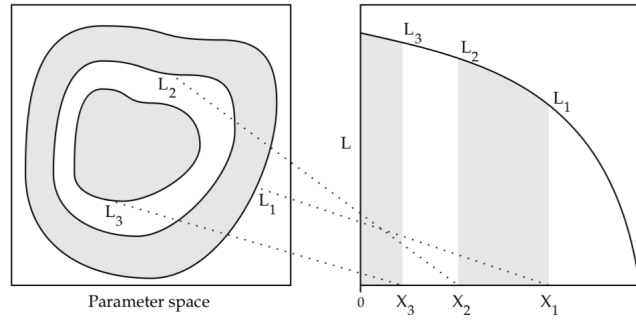


FIGURA 3.13: Esquema del primer paso del algoritmo de muestreo anidado. Los contornos anidados, contienen el volumen de la distribución de probabilidad a priori. Imagen del artículo [128].

2. Para cada iteración $i = 1, \dots, j$, empezando por $X_0 = 1$ y $\mathcal{Z} = 0$, se realizan los siguientes pasos representados en la figura (3.14) [129], [65], [128]:

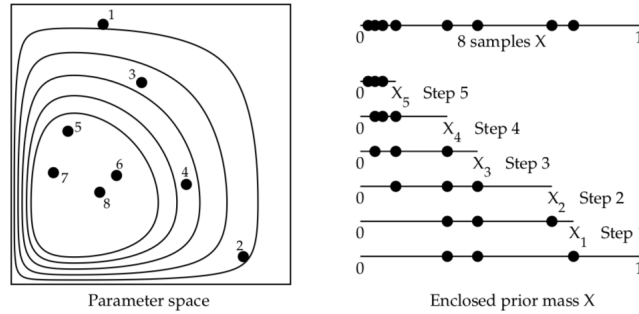


FIGURA 3.14: Las 5 primeras iteraciones para un conjunto de tres puntos. Los contornos de verosimilitud se van contrayendo un área $\exp -1/3$. Imagen del artículo [128].

- Se escoge el peor punto vivo ²², es decir, el que tiene menor \mathcal{L}_i y mayor X_i y se guarda su \mathcal{L}_i .
- Se define $X_i = e^{-i/N}$.
- Se establece un ancho $w_i = X_{i-1} - X_i$, para el volumen de la distribución de probabilidad a priori. También podría haberse utilizado la regla de los trapecios, sin embargo, el paquete de python utilizado para este muestreo “dynesty” utiliza dicha definición.
- Se incrementa \mathcal{Z} con $\mathcal{L}_i w_i$. Notemos que la distribución de probabilidad a posteriori, se encuentra en una pequeña fracción de la distribución a priori e^{-I} , siendo I ,

$$I = \int \log(dP/dX)dP. \quad (3.57)$$

- Se reemplaza el punto vivo escogido, que pasaremos a llamar como “punto muerto”, por otro punto vivo extraído de la distribución de probabilidad a priori dentro de $\mathcal{L}(\theta) > \mathcal{L}_i$. El θ de este nuevo punto vivo, es determinado a partir de una transformada a priori τ .

Al final de todas las iteraciones, debemos quedarnos con N muestras independientes, que serán los puntos muertos.

²²Recordar que para conseguir un ajuste decente, debemos tener una alta verosimilitud con un volumen de la distribución de probabilidad a priori mínimo

3. Se incrementa \mathcal{Z} , rellenando $0 < X < X_j$ con $w = N^{-1}X_j$ para cada punto muerto [129], [65], [128].

En otras palabras, el algoritmo funciona poblando el espacio de parámetros por un conjunto de N puntos vivos extraídos de la distribución de probabilidad a priori. En cada iteración, el punto de menor verosimilitud es eliminado del conjunto de puntos vivos y se extraen nuevas muestras de la distribución a priori hasta que se encuentra un punto con mayor verosimilitud que el punto eliminado [136]. De esta manera, el volumen de la región de la distribución de probabilidad a priori que es muestreada, se ve reducida al volumen contenido en el hiperplano de verosimilitud mínima constante para el actual número de puntos vivos. Cuando el dominio de puntos vivos se ha reducido lo suficiente, se hace difícil seleccionar puntos de mayor verosimilitud uniformemente del espacio restringido de la distribución a priori. Para solucionar esto, la librería implementada en esta tesis 'Bilby', a través de 'dynesty', lo que hace es seleccionar nuevos puntos a través de caminatas aleatorias utilizando un algoritmo MCMC modificado, a partir de la muestra que se reemplaza. La probabilidad de transición de la cadena de Markov, viene determinada por la distribución actual de los puntos vivos. El número de pasos en la cadena se determina de manera que su longitud de autocorrelación sea al menos un múltiplo del parámetro ' n_{act} '. Es decir, el algoritmo MCMC necesitará por lo menos ' n ' pasos para extraer una nueva muestra de la distribución a priori restringida. Por este motivo, el algoritmo de muestreo anidado es capaz de resolver problemas multimodales, convirtiéndolo en un instrumento necesario para explorar espacios de parámetros multidimensionales como el nuestro.

La evidencia se determina al asignar a cada punto eliminado, es decir, a cada punto muerto, un volumen $w_i(\vec{t})$ y calculando

$$\mathcal{Z}(\vec{t}) \sim \sum_{i \in \text{muerto}}^1 \mathcal{L}_i w_i(\vec{t}), \quad (3.58)$$

con $\vec{t} = t_1, t_2, \dots, t_{N_{\text{muerto}}} \in (0, 1)$ es un conjunto de variables aleatorias para los N puntos muertos [129], [65], [128].

A través de una condición de terminación, es posible estimar un límite superior en cada iteración para determinar la evidencia.

Utilizando el teorema de Bayes, las muestras anidadas utilizadas para la evidencia $\mathcal{Z}(\vec{t})$, se convierten en muestras de la distribución de probabilidad a posteriori [129], [65], [128],

$$p_i(\vec{t}) = \frac{w_i(\vec{t}) \mathcal{L}_i}{\sum_i \mathcal{L}_i w_i(\vec{t})} = \frac{w_i(\vec{t}) \mathcal{L}_i}{\mathcal{Z}(\vec{t})}. \quad (3.59)$$

Debido a este proceso, el algoritmo de muestreo anidado, tiene las siguientes ventajas frente a un método MCMC tradicional [132]:

- El algoritmo de muestreo anidado, puede estimar directamente tanto \mathcal{Z} como la distribución de probabilidad a posteriori. Mientras que los métodos MCMC, sólo estiman la distribución a posteriori.
- El algoritmo de muestreo anidado puede muestrear distribuciones multimodales, mientras que para los métodos MCMC esto representa un desafío.
- Mientras que muchos criterios de terminación para MCMC están basados en obtener un número de muestras efectivo, el muestreo anidado posee criterios de terminación bien motivados centrados en la estimación de la evidencia.

- Los métodos MCMC deben converger (“burn in”) a la distribución posterior antes que las muestras generadas sean válidas. El algoritmo de muestreo anidado, no sufre problemas similares porque el método se integra suavemente sobre la distribución a posteriori a partir de la distribución a priori.

Los inconvenientes que tiene este algoritmo, son [132]:

- Requiere una transformada a priori.
- Su tiempo de ejecución es sensible al volumen que tenga la distribución de probabilidad a priori.
- La velocidad de integración de la distribución posterior es siempre constante.

Mientras que los dos primeros son inherentes a la estrategia del algoritmo, el último no lo es. Por este motivo, este algoritmo descrito se le conoce también como muestreo anidado estático. En 2017, se desarrolló el algoritmo de muestreo anidado dinámico [61], cuyo cambio principal es el de variar durante el tiempo de ejecución, el número de puntos vivos.

3.4.2.1.1 El algoritmo de muestreo anidado estático en paralelo.

En esta tesis, se ha aplicado el algoritmo de muestreo anidado estático en paralelo para realizar las estimaciones de parámetros, puesto que reduce significativamente el tiempo de análisis.

La inferencia bayesiana en la astronomía de ondas gravitacionales, presenta dos grandes desafíos:

- los espacios de parámetros que tienen una dimensión alta, son difíciles de explorar de manera eficiente,
- generando un coste computacional elevado.

Al realizar inferencias en señales individuales de la coalescencia de binarias compactas, el tiempo de análisis, conocido como “muro temporal”, puede oscilar entre varias horas, varias semanas, meses o incluso años. Los casos más costosos corresponden a los análisis físicamente más realistas e importantes, pero su alto muro temporal representa un obstáculo para el descubrimiento físico. Las técnicas que emplean la reducción de la dimensión en la estimación de parámetros, pueden mitigar estos efectos. Sin embargo, se vuelven exponencialmente más difíciles de aplicar a medida que aumenta el espacio de parámetros en los modelos de forma de onda. En nuestro caso, además de los 17 parámetros astrofísicos descritos, el modelo de calibración de los datos utiliza un conjunto de diez amplitudes y diez fases para modelar la incertidumbre sistemática en los datos. De manera que, los datos de una red de tres detectores, los dos de LIGO y Virgo, se describen mediante 75 – 77 parámetros que deben inferirse simultáneamente [131].

Por este motivo se ha utilizado este algoritmo, ya que permite reducir significativamente el muro temporal implementándolo en un clúster CPU de alto rendimiento, como los empleados: Picasso y MareNostrum. La reducción en el muro temporal, escala casi de forma lineal con el número de CPUs en el clúster, pudiendo pasar de un tiempo de varios años a hacerlo en una semana.

La diferencia fundamental respecto al original, es que las muestras son extraídas de la distribución a priori en paralelo en cada iteración. Esto es posible, puesto que cada iteración es independiente del estado del algoritmo en las iteraciones previas,

es decir, extraer en serie las muestras de la distribución a priori es equivalente a extraerlas simultáneamente. El muestreo en paralelo se implementa en los $n_{nucleos}$ de la CPU a través de una interfaz de paso de mensajes o MPI ²³. Se utiliza un modelo maestro/esclavo, donde el nodo “maestro” organiza los puntos vivos/muertos y estima su evidencia, mientras que el resto de nodos $n_{nucleos} - 1$ “esclavos” buscan nuevos puntos vivos. En cada iteración i , una CPU j toma el mismo punto vivo de menor verosimilitud \mathcal{L}_{min} . La muestra $\theta_{i,j}$ es extraída desde la distribución de probabilidad a priori y aceptada según la restricción $\mathcal{L}(d|\theta_{i,j}) > \mathcal{L}_{min}$ ²⁴. De manera que, una vez recopiladas las muestras $n' \leq n_{nucleos} - 1$, se utilizan para actualizar la lista de puntos vivos y muertos [131].

²³Define la semántica y sintaxis de las rutinas de una biblioteca de paso de mensajes.

²⁴Notar que es la misma restricción que antes habíamos llamado $\mathcal{L}(\theta) > \mathcal{L}^*$.

Capítulo 4

Descripción y resultados de la tesis.

Sección 4.1. Descripción del proyecto.

Sección 4.2. Resultados obtenidos.

Este capítulo desarrolla el problema planteado y expone y analiza los resultados obtenidos.

4.1. Descripción del proyecto.

Esta tesis presenta una investigación sobre el efecto de la implementación de los armónicos subdominantes y la precesión en el nuevo modelo IMRPhenomXPHM. A través de la estimación de parámetros de los eventos de ondas gravitacionales GW150914, GW170729 y GW190814, se revelará la importancia de dicha incorporación, comparando las distribuciones de probabilidad a posteriori de varios parámetros, obtenidas a través de diferentes análisis utilizando los modelos IMRPhenomXHM, IMRPhenomXP y IMRPhenomXPHM.

4.1.1. Implementación.

Para ello se ha utilizado la librería de inferencia bayesiana para la astronomía de ondas gravitacionales: *Bilby* [17]. Fue desarrollada en 2018 por la colaboración LIGO, con el objetivo de adaptarse de la forma más sencilla posible a los diferentes problemas subyacentes de dicha astronomía. En el contexto de las ondas gravitacionales procedentes de binarias compactas, permite extraer información sobre las propiedades de los brotes de rayos gamma, sobre los parámetros físicos de las estrellas de neutrones, la formación de los objetos compactos binarios, propiedades sobre poblaciones de fuentes de ondas gravitacionales y permite realizar pruebas sobre la teoría de la relatividad general [12]. En concreto, se ha utilizado para inferir las propiedades de las fuentes de los eventos GW150914, GW170729 y GW190814 en todas las fases de la onda gravitacional.

Con el objetivo de optimizar el tiempo de computación se ha empleado un código de python escrito por Maite Mateu-Lucena, miembro del Grupo de Física Gravitacional: teoría y observación de la UIB, que utiliza *parallel bilby* (*pBilby*), una implementación en paralelo de Bilby que utiliza una interfaz de paso de mensajes (MPI) para distribuir el paquete de algoritmo de muestreo anidado estático *dynesty* a través de varias CPUs. Específicamente se utilizaron los clústers CPU de alto rendimiento: Marenostrum (Barcelona Supercomputing Center) y Picasso (Universidad de Málaga). La comunicación entre los diferentes nodos por MPI, se realizó instalando los paquetes *mpi4py* y *schwimmbad*.

Se estudiaron 32s de los datos de los detectores LIGO-Hanford, LIGO-Livingston para el evento GW150914, junto con el detector Virgo para los eventos GW170729 y GW190814, disponibles en los catálogos de la colaboración LIGO-Virgo abiertos al público GWTC-1 y GWTC-2 [34]. En dichos catálogos se encuentran además las densidades espectrales de potencia (PSD) y los datos asociados a las incertidumbres en la calibración, definidos con la amplitud y fase descritos en (3.4.1.6), para cada detector en cada evento, necesarios para realizar la estimación de parámetros.

Con estos datos, el Grupo de Física Gravitacional: teoría y observación, realizó diferentes ejecuciones del programa, utilizando como plantilla diferentes modelos de ondas gravitacionales que incluían o bien los armónicos subdominantes (IMRPhenomXHM) o la precesión (IMRPhenomXP) o ambos a la vez (IMRPhenomXPHM). Para cada uno se fueron modificando los parámetros del algoritmo, con el objetivo de poder observar qué ejecución obtenía una mejor convergencia en los resultados. En el modelo IMRPhenomXPHM, se hicieron varias ejecuciones para las dos versiones implementadas utilizadas para describir la precesión: NNLO y MSA, cambiando el espín final del objeto resultante de la coalescencia en 0, 1, 2 y 3.

Con los archivos resultantes de dichas ejecuciones, se utilizó el paquete de Python PEssummary para procesar y visualizar las muestras de la distribución de probabilidad a posteriori para los tres eventos.

4.1.2. Planteamiento.

Esta tesis puede dividirse en los cuatro estudios siguientes, realizados para cada evento:

- Primero se estudió la convergencia de cada ejecución en cada modelo, según dos números de puntos vivos ' N_{live} ' fijos para diferentes valores del parámetro ' n_{act} '. La siguiente tabla (4.1), resume las ejecuciones realizadas:

Modelo	Parámetros del algoritmo
IMRPhenomXHM	$N_{live} = 512, 2048$ $n_{act} = 10, 30, 50$
IMRPhenomXPHM/XP	$N_{live} = 512, 2048$ $n_{act} = 10, 30$

CUADRO 4.1: Ejecuciones realizadas para cada modelo.

La elección de estos parámetros, es una cuestión que depende del evento y de los parámetros a estimar. No existe una fórmula en concreto que nos diga exactamente cuáles son los valores adecuados. Sin embargo, sí que se tiene una idea general de cuales son los más convenientes. El paquete *dynesty*, recomienda $50 \cdot ndim$ puntos vivos por cada moda esperada ¹. Teniendo en cuenta que, los espines y los parámetros extrínsecos se encuentran muy correlacionados entre sí, es de esperar que como mínimo la distribución de probabilidad a posteriori sea bimodal o trimodal para dichos parámetros. Por este motivo, con los 15 parámetros que describen la coalescencia de la binaria compacta, podemos asegurar que con ~ 2000 puntos vivos podremos obtener unos resultados aceptables. La elección de escoger 1/4 de 2048, proviene de comprobar si efectivamente se obtiene una peor convergencia o si con la modulación del nuevo parámetro n_{act} incorporado recientemente, es suficiente para obtener buenos resultados con un número de puntos vivos bajo y un n_{act} alto.

- Según los resultados del estudio anterior, se realizó un estudio de la precesión del nuevo modelo según las diferentes versiones (MSA o NNLO) y espines finales (0, 1, 2 o 3).
- Se comparó los resultados obtenidos para el modelo IMRPhenomXPHM para el evento GW170729 con la literatura, en concreto con la publicación [13].
- Finalmente se estimó de nuevo los parámetros q y χ_{eff} del artículo [13].

¹La moda de una distribución de probabilidad continua es cualquier valor en el que su función de densidad de probabilidad posea un máximo local. Es decir, cualquier pico es una moda.

En todas las ejecuciones para los tres eventos, se utilizaron las mismas distribuciones de probabilidad a priori descritas en la sección (3.4.1.2).

4.2. Resultados obtenidos.

4.2.1. GW170729.

Este evento observado el 29 de julio de 2017, representa una de las detecciones más interesantes dentro de los catálogos GWTC-1 y GWTC-2. Es el segundo más masivo, tras GW190521, con una masa final de $\sim 85M_{\odot}$ y el cuarto más distante a $\sim 3Gpc$. Además es uno de los pocos eventos con espines distintos a cero y un espín efectivo de $(0.11 - 0.58)$ dentro de un intervalo de credibilidad del 90%. El hecho de que sea uno de los más masivos, lo convierte en un candidato ideal para observar el efecto de los armónicos subdominantes en los modelos.

4.2.1.1. Estudio de la convergencia.

4.2.1.1.1 Resultados para el modelo IMRPhenomXHM.

La siguiente figura (4.1) presenta un gráfico de esquina donde podemos observar las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones para los parámetros relacionados con las masas de la binaria, para el modelo IMRPhenomXHM variando los parámetros del algoritmo en: $N_{live} = 2048, 512$ y $n_{act} = 50, 30, 10$. Por completitud, en el apéndice (D) se han añadido dos gráficos de esquina más, para los parámetros relacionados con la ubicación de la fuente en la esfera celeste, el ángulo de polarización, la fase orbital, los parámetros relacionados con los espines y la distancia luminosa.

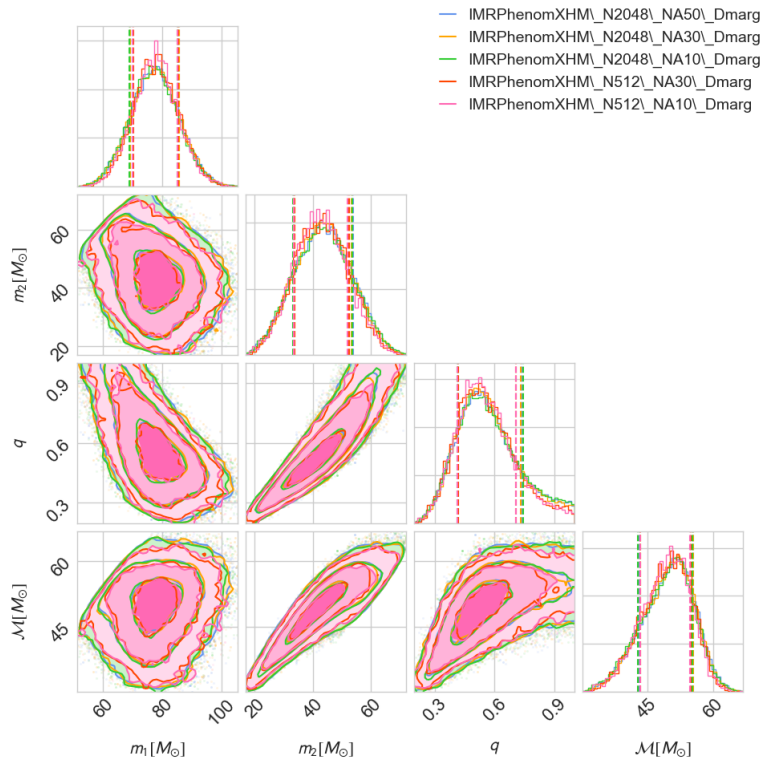


FIGURA 4.1: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con las masas de la binaria, para el modelo IMRPhenomXHM, variando los parámetros del algoritmo.

Mientras que las distribuciones de probabilidad a posteriori unidimensionales nos proporcionan una estimación de los parámetros estudiados. Las distribuciones bidimensionales, nos muestran las correlaciones existentes entre ellos. Observando esta figura, e incluyendo las del apéndice (D), (D.1) y (D.2), los parámetros extrínsecos parecen ser más difíciles de estimar que los intrínsecos, puesto que presentan distribuciones más multimodales. Destacamos la ventaja que proporciona la estimación del parámetro χ_{eff} , sin modalidad, frente a la de los espines, en la figura (D.2).

En los histogramas de las distribuciones de probabilidad a posteriori en una dimensión para cada parámetro, podemos observar claramente como la elección de $N_{live} = 512$ y $n_{act} = 30, 10$, constituye la peor de todas ellas. A primera vista parece que dichas distribuciones podrían ser las que convergen mejor al sobresalir ligeramente por encima de las demás, en el sentido de que el ancho de estas distribuciones es más estrecho de manera que el intervalo de credibilidad es menor y por lo tanto se debería obtener una mejor estimación. Sin embargo, observando los bordes de los contornos de isoverosimilitud en las distribuciones bidimensionales, nos damos cuenta que para esa elección correspondiente a los colores rosa y rojo, fluctúan demasiado. Los bordes no están bien definidos. Es decir, con esa elección de parámetros $N_{live} = 512$ y $n_{act} = 30, 10$ el algoritmo no ha obtenido la resolución necesaria para dar una distribución sólida y lo que vemos en las fluctuaciones o en los bins separados por demasiada altura, no son más que errores sistemáticos producidos en el muestreo.

Descartando entonces los modelos rojo y rosa, observamos que los otros tres poseen distribuciones practicamente iguales. De hecho, calculando la divergencia de Jensen-Shannon para todos los parámetros, siendo el cero un valor que indica que las distribuciones son idénticas y la unidad que son totalmente divergentes, vemos que dan del orden de 10^{-4} .

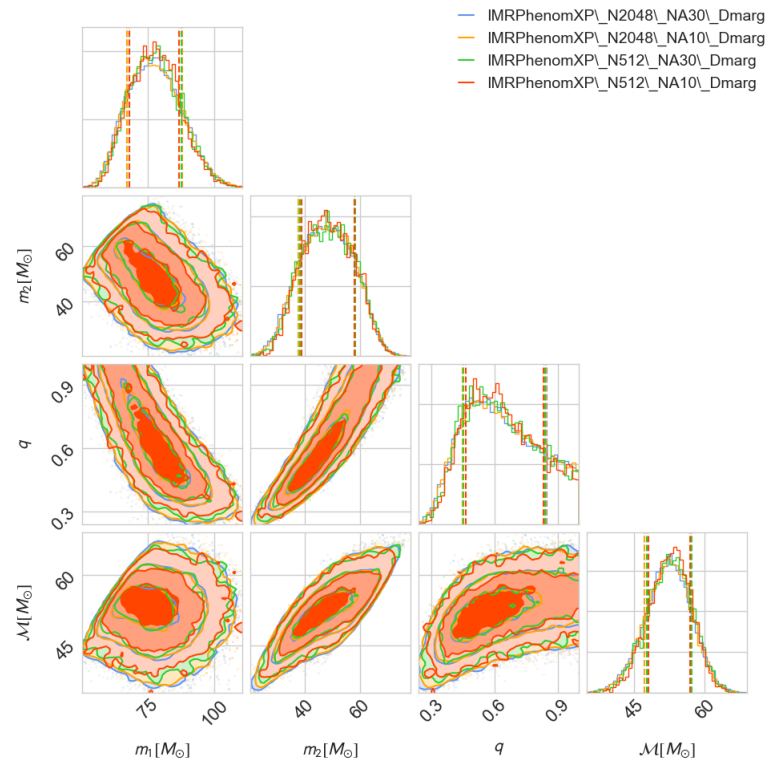


FIGURA 4.2: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con las masas de la binaria, para el modelo IMRPhenomXP, variando los parámetros del algoritmo.

4.2.1.1.2 Resultados para el modelo IMRPhenomXPHM y IMRPhenomXP.

Las figuras (4.2) y (4.3) representan dos gráficos de esquina con las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones, para los parámetros relacionados con las masas de la binaria, para los modelos IMRPhenomXP y IMRPhenomXPHM respectivamente, variando los parámetros del algoritmo en: $N_{live} = 2048, 512$ y $n_{act} = 30, 10$. Por completitud, en el apéndice (D) se han añadido dos gráficos de esquina más, para cada modelo, con los mismos parámetros de la sección anterior. Al igual

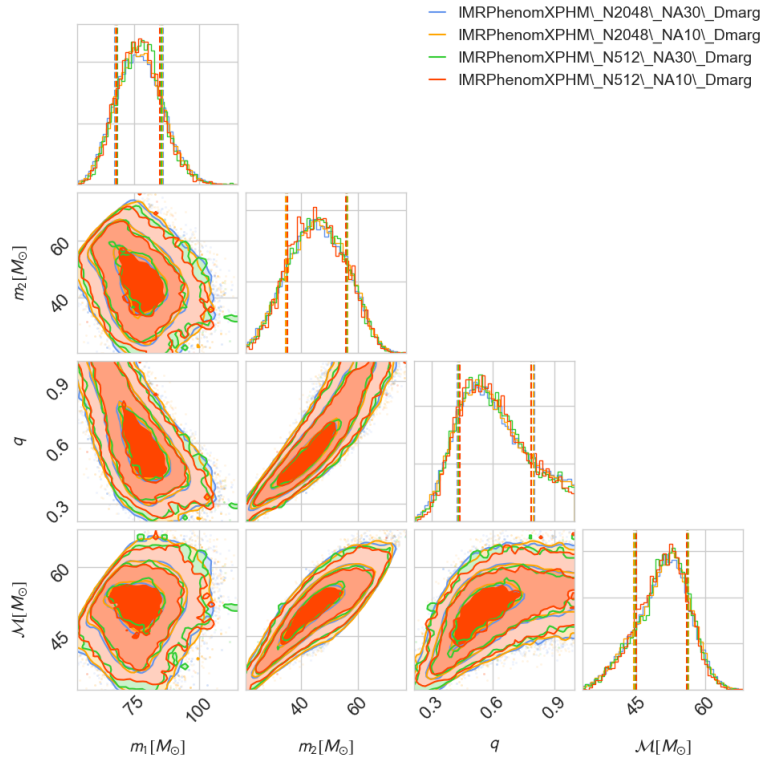


FIGURA 4.3: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con las masas de la binaria, para el modelo IMRPhenomXPHM, variando los parámetros del algoritmo.

que sucedía en la sección anterior, observando las figuras (4.2) y (4.3) junto con las del apéndice (D) para cada modelo, observamos que los parámetros extrínsecos son más difíciles de estimar que los intrínsecos, debido a que son más multimodales.

En los bins de los histogramas de las distribuciones de probabilidad a posteriori en una dimensión para cada parámetro de los modelos rojo y verde, así como en las fuertes fluctuaciones presentes en las distribuciones bidimensionales para dichos modelos, podemos volver a notar el error sistemático producido en el muestreo, al necesitar unos parámetros del algoritmo más altos para poder obtener unas distribuciones sólidas. Sin embargo, por lo general podemos apreciar menores fluctuaciones en el modelo IMRPhenomXPHM que en el IMRPhenomXP, debido a la inclusión de los armónicos subdominantes. De hecho, comparando todos las distribuciones de probabilidad a posteriori unidimensional para todos los parámetros en los dos modelos, como las representadas en la siguiente figura (4.4), observamos como efectivamente la inclusión de estos armónicos subdominantes, repercute en la convergencia de dichas distribuciones.

Descartando los modelos rojo y verde por poseer fuertes fluctuaciones, observamos cómo en los gráficos de la fila inferior de la figura (4.4) correspondientes al modelo

IMRPhenomXPHM, se obtiene un mejor comportamiento en términos de la obtención de unos bordes con menos fluctuaciones y menor modalidad, traducido en un mayor estrechamiento de la distribución y por tanto en una mejor estimación de los parámetros, en comparación con los gráficos superiores correspondientes al modelo IMRPhenomXP. Notar que este comportamiento, es debido exclusivamente a la im-

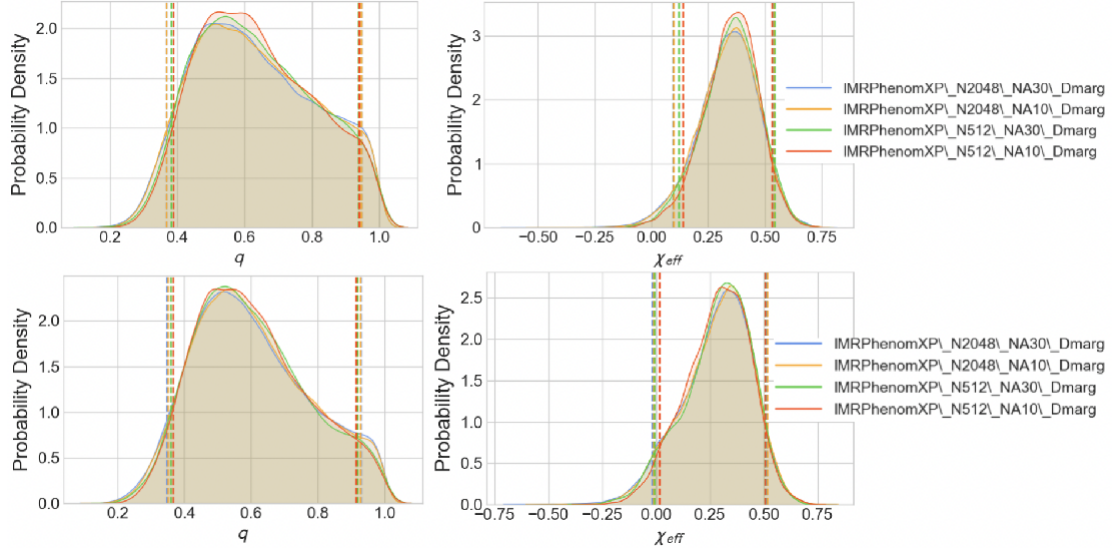


FIGURA 4.4: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori unidimensional de los parámetros q y χ_{eff} , para los modelos IMRPhenomXPHM (fila inferior) y IMRPhenomXP (fila superior), variando los parámetros del algoritmo.

plementación de los armónicos subdominantes en el modelo, puesto que la resolución que comparamos es la misma para cada color. Los siguientes gráficos (4.5) correspondientes a la evolución de la convergencia de las muestras para ese mismo parámetro q para los modelos IMRPhenomXPHM (figura izquierda) y IMRPhenomXP (figura derecha) ambos con $N_{live} = 2048$ y $n_{act} = 10$, muestran este efecto.

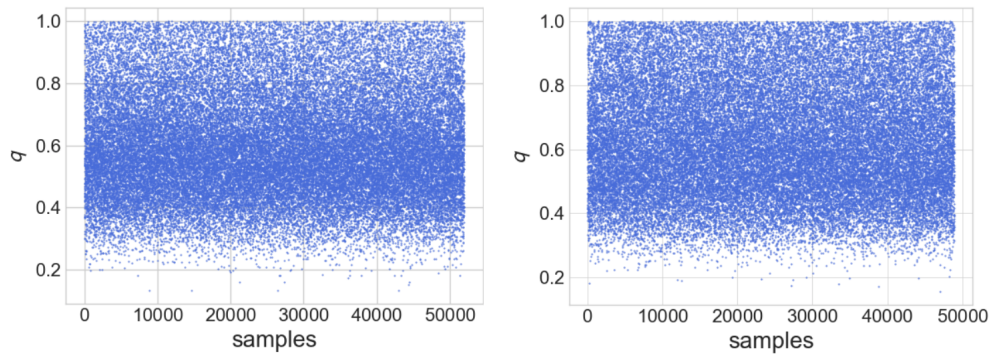


FIGURA 4.5: Evolución de las muestras del parámetro q para los modelos IMRPhenomXPHM (izquierda) y IMRPhenomXP (derecha) ambos con $N_{live} = 2048$ y $n_{act} = 10$.

Como podemos observar, teniendo ambos modelos la misma resolución, el correspondiente al de IMRPhenomXPHM posee una densidad de las muestras más concentrada en la zona a converger entre $0.3 - 0.7$, revelando la importancia de la implementación de los armónicos subdominantes en la estimación de parámetros. Este mismo comportamiento, es visible en el resto de parámetros.

4.2.1.1.3 Resultados para el modelo IMRPhenomXPHM y IMRPhenomXHM.

Una vez comprobado que el modelo IMRPhenomXPHM presenta mejores resultados, comparémoslo con la versión sin precesión IMRPhenomXHM estudiada anteriormente. Puesto que las distribuciones dan prácticamente las mismas para $n_{act} = 10, 30$ y 50 , se escogió $n_{act} = 10$ para disminuir el tiempo de ejecución.

La siguiente figura (4.6) junto con las del apéndice (D) para estos dos modelos, nos indica que una vez más, los parámetros extrínsecos son más difíciles de estimar que los intrínsecos.

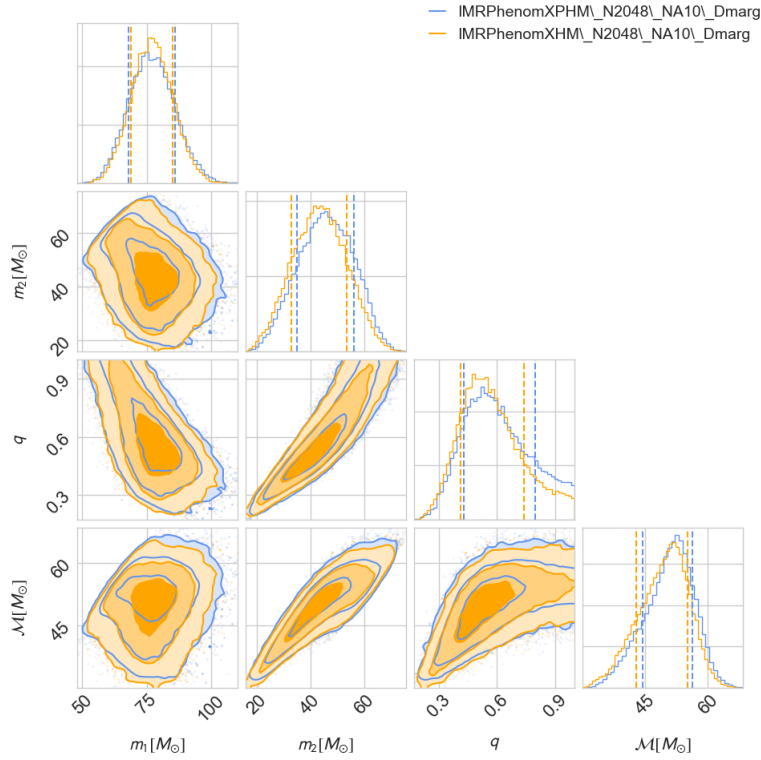


FIGURA 4.6: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con las masas de la binaria, para los modelos IMRPhenomXPHM y IMRPhenomXP, con $N_{live} = 2048$ y $n_{act} = 10$.

Observando esta figura (4.6), ahora que ya no tenemos los errores del muestreo, nos damos cuenta que realmente no hay mucha diferencia en las distribuciones al añadir o no la precesión. De hecho, estudiando de nuevo la evolución de la convergencia de las muestras para el parámetro q en estos modelos, mostrada en la siguiente figura (4.7), nos fijamos que apenas hay diferencia entre uno y otro en la densidad de las muestras entre $0.3 - 0.7$; en comparación con la que si había en (4.5).

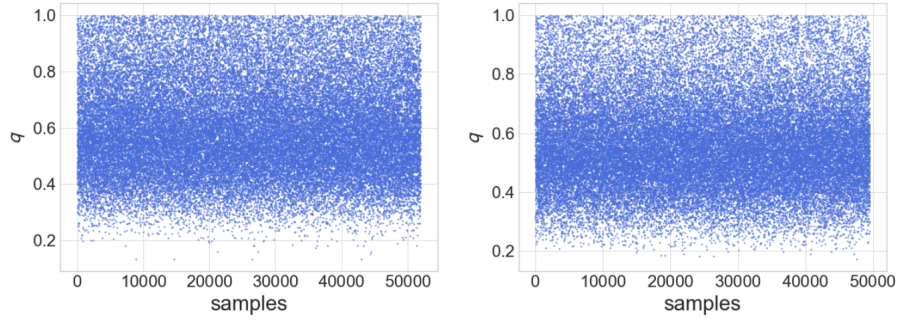


FIGURA 4.7: Evolución de las muestras del parámetro q para los modelos IMRPhenomXPHM (izquierda) y IMRPhenomXHM (derecha) ambos con $N_{live} = 2048$ y $n_{act} = 10$.

4.2.1.2. Estudio de la precesión.

En la sección anterior, vimos que realmente parecía no haber mucha diferencia entre el modelo con precesión y sin precesión. Estudiemos con más detalle la precesión de IMRPhenomXPHM con la elección de $N_{live} = 2048$ y $n_{act} = 10$, cambiando los parámetros del propio modelo en el espín final del objeto resultante $FS = 0, 1, 2, 3$ y las dos diferentes versiones implementadas para describir la precesión MSA o $NNLO$. Por defecto, el modelo toma $FS = 3$ y MSA , veamos qué pasa cuando lo variamos.

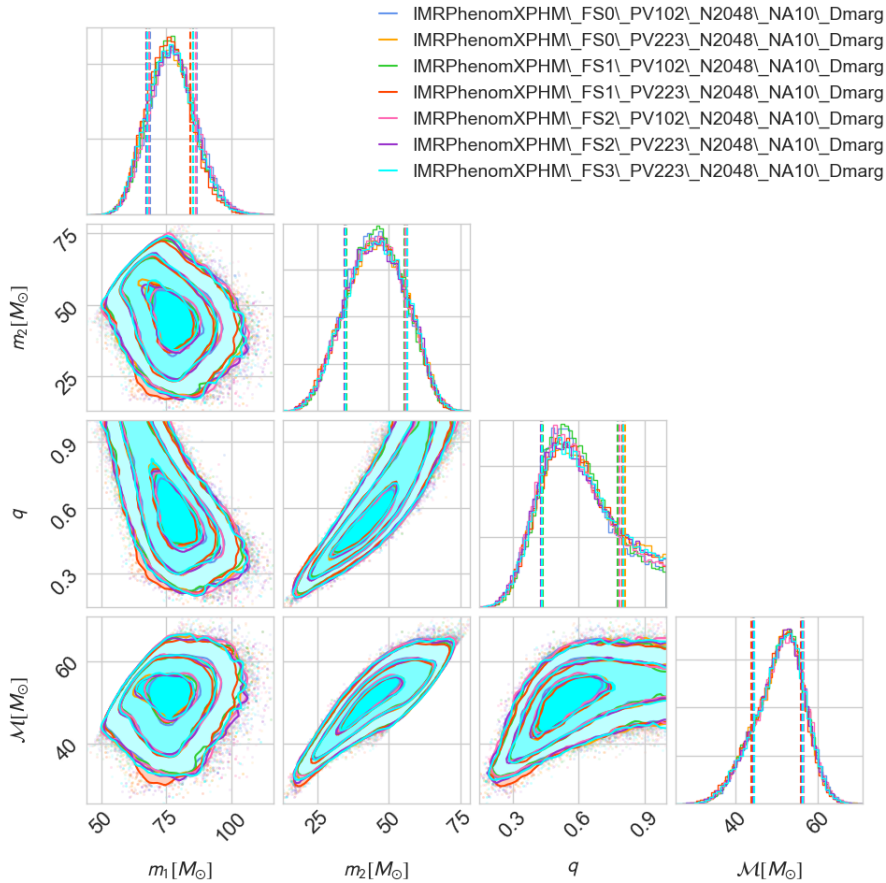


FIGURA 4.8: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con las masas de la binaria, para IMRPhenomXPHM, con $N_{live} = 2048$ y $n_{act} = 10$, variando los parámetros del modelo.

Fijándonos en esta figura (4.8) junto con las del apéndice (D), deducimos que realmente no hay mucha diferencia con el conjunto de parámetros que se toma por defecto, la curva cian. Podríamos pensar que quizás el modelo rojo, presenta una mejor convergencia al tener un ancho de la distribución más estrecho. Pero comparando este modelo con el cian, como podemos ver en la siguiente figura (4.9) y en las del apéndice (D), no parece haber estadísticamente una diferencia significativa en la convergencia.

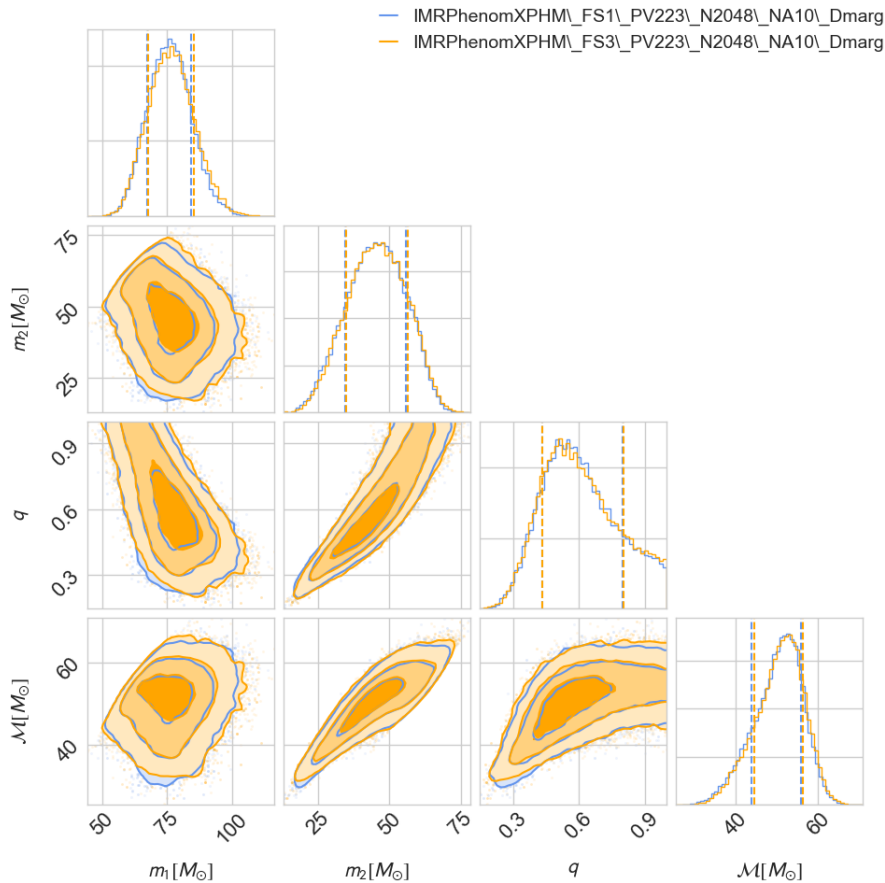


FIGURA 4.9: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con las masas de la binaria, para el modelo por defecto y el modelo rojo, con $N_{live} = 2048$ y $n_{act} = 10$.

De hecho, calculando la divergencia de Jensen-Shannon para los parámetros de la figura (4.8), siendo el cero un valor que indica que las distribuciones son idénticas y la unidad que son totalmente divergentes, se obtiene para todos los modelos un orden de entre $10^{-3} - 10^{-4}$.

4.2.1.3. Comparando los resultados obtenidos con la literatura y el catálogo GWTC-1.

En esta sección compararemos los resultados obtenidos para el modelo IMRPhenomXPHM siendo $N_{live} = 2048$ y $n_{act} = 10$ con el catálogo GWTC-1 y el artículo de Katerina Chatziioannou et al, publicado en noviembre de 2019 [13].

Este artículo fue el primero en el cual se realizó el análisis de un evento cuyo cociente de masas q era alto, y por lo tanto se pudo estudiar las contribuciones de los modos subdominantes en la estimación de parámetros. Sin embargo, los modelos utilizados aún no eran muy maduros, o bien contenían sólo el efecto de la precesión (IMRPhenomPv2, SEOBNRv3) o bien sólo los armónicos subdominantes (IMRPhenomHM, SEOBNRv4HM). Únicamente NRSur7dq2 contenía tanto precesión como armónicos

subdominantes, pero este modelo sólo está calibrado cuando el cociente de masas es $q \sim 2$, que en realidad no es suficiente para este evento. Además el modelo IMRPhenomHM no está calibrado a NR para dichos armónicos y la calibración del armónico dominante a NR se encuentra desactualizada puesto que se realizó antes de la primera detección GW150914. En consecuencia existe bastante dispersión entre los modelos de forma de onda para los parámetros estudiados.

Debido a la alta masa del agujero negro principal $m_1 = 50.6^{+16.6}_{-10.2} M_\odot$ y al espín no nulo, en el artículo consideraron si estas podían ser las evidencias para la posibilidad de que la formación del agujero negro masivo proviniera de una fusión anterior. De manera que se plantearon dos escenarios posibles, de primera (1g) y segunda generación (2g), adaptando las distribuciones de probabilidad a priori para cada situación ². Al ser de segunda generación, explicaría el alto cociente entre las masas de la binaria así como su alto valor de espín.

Las formas de onda a comparar con nuestro modelo precesante IMRPhenomXPHM, que modela los modos (2, 2), (2, 1), (3, 3), (3, 2) y (4, 4), son

Modelo de onda	Dinámica del espín	Modos (l, m)	Fuente
SEOBNRv3	Precesante	(2, 2)	GWTC-1
IMRPhenomPv2	Precesante	(2, 2)	GWTC-1 y literatura
IMRPhenomHM	Alineado	(2, 2), (2, 1), (3, 3), (3, 2), (4, 4), (4, 3)	Literatura
SEOBNRv4HM	Alineado	(2, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 4), (5, 5)	Literatura

CUADRO 4.2: Tabla de los modelos estudiados procedentes de la literatura y GWTC-1 para comparar con IMRPhenomXPHM.

Las muestras de la distribución a posteriori que utilizaron en el artículo se pueden encontrar en [32].

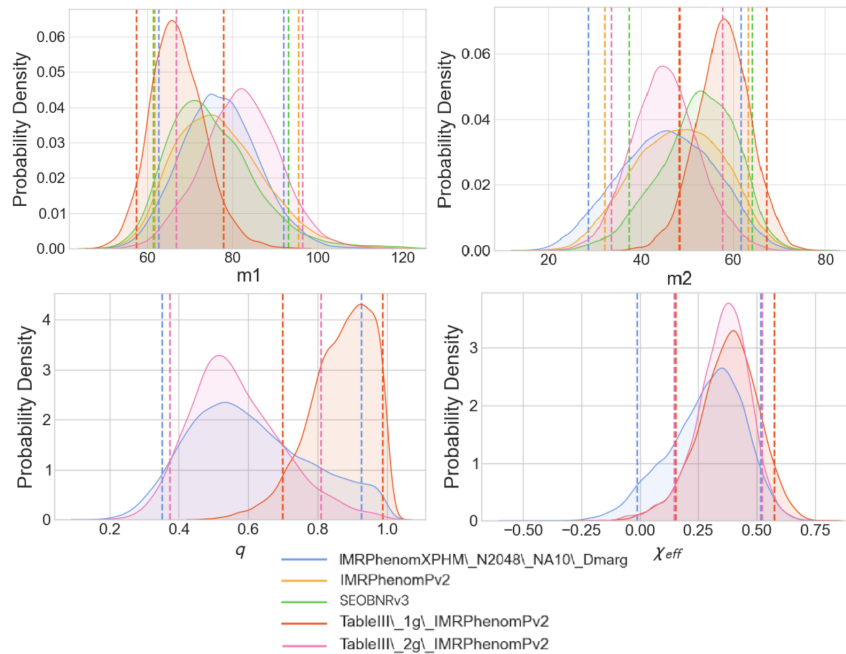


FIGURA 4.10: Distribuciones de probabilidad a posteriori unidimensionales de las masas de la binaria, el cociente de masas y el espín efectivo, para el modelo azul a estudiar, los dos modelos naranja y verde del catálogo GWTC-1 y el modelo IMRPhenomPv2 de la literatura en rojo y rosa para los escenarios 1g y 2g respectivamente.

²Las distribuciones de probabilidad a priori elegidas en el artículo son las mismas que las escogidas, descritas en la sección (3.4.1.2).

4.2.1.3.1 Comparación con el catálogo GWTC-1 y el modelo IMRPhenomPv2 de la literatura.

En la figura (4.10) se muestran algunas de las distribuciones de probabilidad a posteriori unidimensionales realizadas, que comparan el modelo IMRPhenomXPHM a estudiar en azul, con los modelos del catálogo GWTC-1, IMRPhenomPv2 en naranja y SEOBNRv3 en verde, junto con el modelo IMRPhenomPv2, para los dos diferentes escenarios $1g$ y $2g$ de la literatura utilizando distribuciones de probabilidad a priori adaptadas, diferentes a las empleadas en IMRPhenomXPHM. Los modelos de los catálogos no guardan las muestras para los parámetros q y χ_{eff} , motivo por el cual no se encuentran representados.

Tal y como apreciamos en la distribución rosa para el cociente de masas $q = 0.55^{+0.23}_{-0.20}$, debido a la elección adaptada de las distribuciones de probabilidad a priori para el escenario $2g$, el modelo apoya la situación de masas desiguales en la binaria. En seguida nos damos cuenta de la preferencia de los modelos hacia el de $2g$, y en concreto el modelo con armónicos subdominantes IMRPhenomXPHM. En las distribuciones para el parámetro χ_{eff} , observamos que el escenario $1g$ apoya más a unas componentes no nulas.

4.2.1.3.2 Comparación con el modelo IMRPhenomHM.

Comparemos las distribuciones de probabilidad a posteriori unidimensionales, entre IMRPhenomXPHM en azul y el modelo IMRPhenomHM de la literatura, para la misma elección de distribuciones de probabilidad a priori (Table II) y para los dos diferentes escenarios $1g$ y $2g$ (Table III).

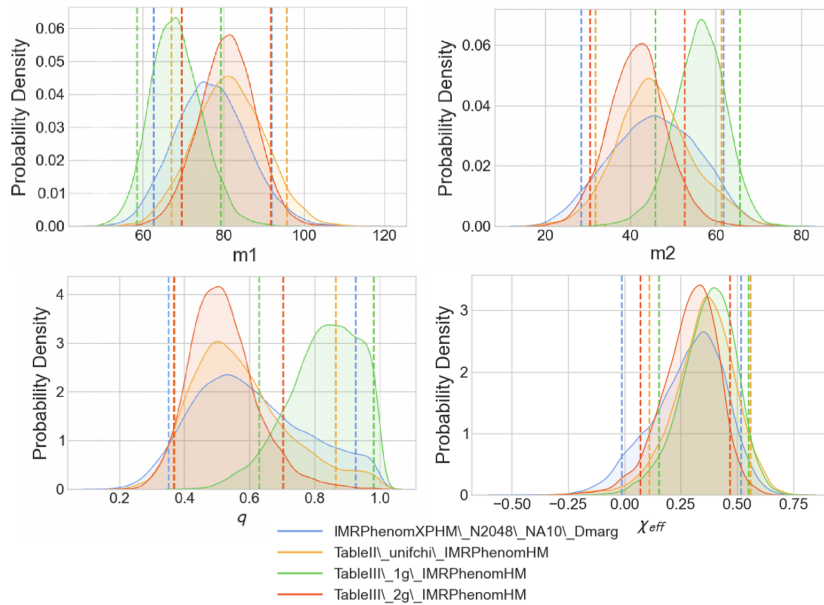


FIGURA 4.11: Distribuciones de probabilidad a posteriori unidimensionales de las masas de la binaria, el cociente de masas y el espín efectivo, para el modelo azul a estudiar y el modelo IMRPhenomHM de la literatura con los mismos priors utilizados (naranja) y en rojo y rosa para los escenarios $1g$ y $2g$ respectivamente.

El comportamiento de las distribuciones frente a $1g$ y $2g$ es el mismo que el de la sección anterior. Nos fijamos además que al presentar armónicos subdominantes, se obtiene una mayor convergencia en las gráficas con respecto a la figura anterior.

4.2.1.3.3 Comparación con el modelo SEOBNRv4HM.

Finalmente comparamos las distribuciones de probabilidad a posteriori unidimensionales, entre IMRPhenomXPHM en azul y el modelo SEOBNRv4HM de la literatura, para la misma elección de distribuciones de probabilidad a priori (Table II) y para los dos diferentes escenarios $1g$ y $2g$ (Table III).

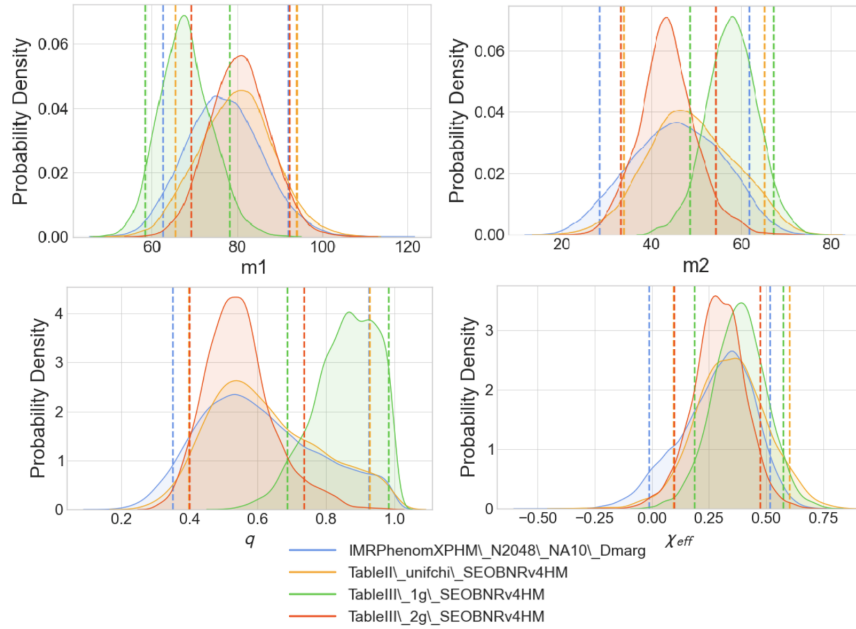


FIGURA 4.12: Distribuciones de probabilidad a posteriori unidimensionales de las masas de la binaria, el cociente de masas y el espín efectivo, para el modelo azul a estudiar y el modelo SEONRv4HM de la literatura con los mismos priors utilizados (naranja) y en rojo y rosa para los escenarios $1g$ y $2g$ respectivamente.

El comportamiento es bastante similar a la de la figura anterior. Únicamente observamos que por lo general el modelo azul que ponemos a prueba, presenta una menor difencia con el modelo SEOBNRv4HM en naranja, que frente al que daba con IMRP-phenomHM.

4.2.1.4. Mejorando la estimación de parámetros para q y χ_{eff} .

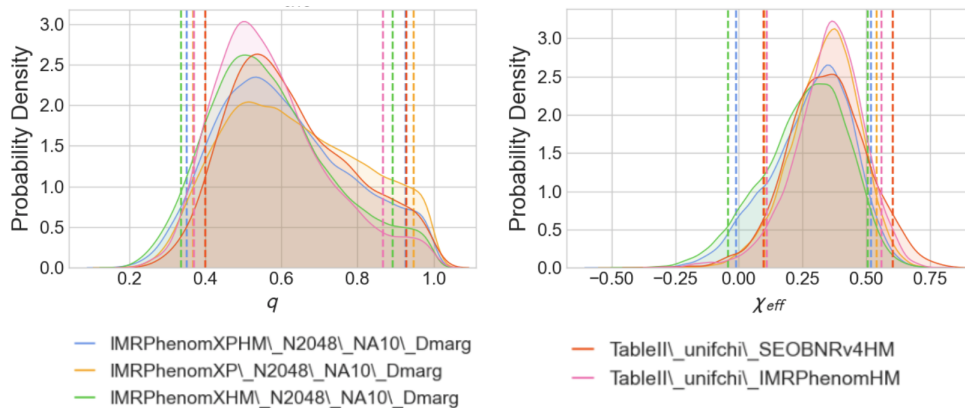


FIGURA 4.13: Distribuciones de probabilidad a posteriori unidimensionales para q y χ_{eff} .

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, podemos hacer una elección de los mejores modelos que tenemos actualmente para estimar dentro de un intervalo de credibilidad del 90 % los parámetros q y χ_{eff} . Estos modelos son: IMRPhenomXPHM/XP y IMRPhenomXHM de las ejecuciones realizadas con $N_{live} = 2048$ y $n_{act} = 10$ y IMRPhenomHM y SEOBNRv4HM del artículo mencionado utilizando las mismas distribuciones de probabilidad a priori.

En la siguiente tabla observamos las estimaciones obtenidas de los parámetros q y χ_{eff} , utilizando varios modelos.

Modelo de onda	q	χ_{eff}
IMRPhenomXPHM_N2048_NA10_Dmarg	$0.58^{+0.34}_{-0.23}$	$0.30^{+0.21}_{-0.31}$
IMRPhenomXP_N2048_NA10_Dmarg	$0.62^{+0.33}_{-0.25}$	$0.35^{+0.19}_{-0.25}$
IMRPhenomXHM_N2048_NA10_Dmarg	$0.55^{+0.34}_{-0.21}$	$0.28^{+0.23}_{-0.32}$
TableII_unifchi_SEOBNRv4HM	$0.60^{+0.33}_{-0.20}$	$0.34^{+0.26}_{-0.25}$
TableII_unifchi_IMRPhenomHM	$0.55^{+0.32}_{-0.18}$	$0.36^{+0.20}_{-0.25}$
Media	(0.366 – 0.912)	(0.05 – 0.544)

CUADRO 4.3: Tabla con las estimaciones de los parámetros q y χ_{eff} para varios modelos.

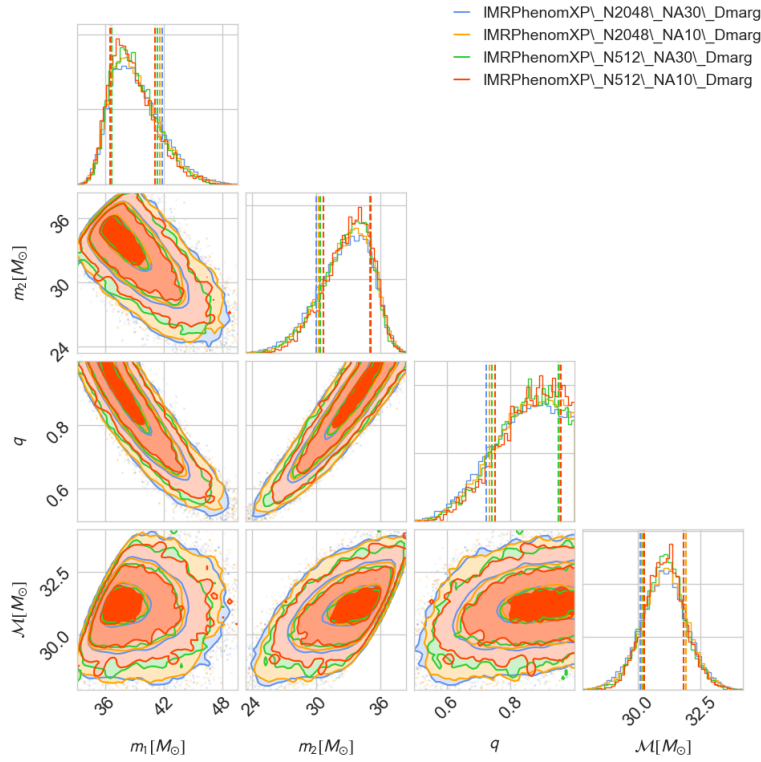


FIGURA 4.14: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con las masas de la binaria, para el modelo IMRPhenomXP, variando los parámetros del algoritmo.

4.2.2. GW150914.

El primer evento constituye uno de los más masivos existentes dentro del primer catálogo GWTC-1. Por lo tanto su reanálisis utilizando modelos que incluyan armónicos subdominantes, podrá restringir al igual que en el evento anterior, las estimaciones de parámetros respecto a los análisis que se hayan hecho anteriormente.

4.2.2.1. Estudio de la convergencia.

4.2.2.1.1 Resultados para los modelos IMRPhenomXPHM y IMRPhenomXP.

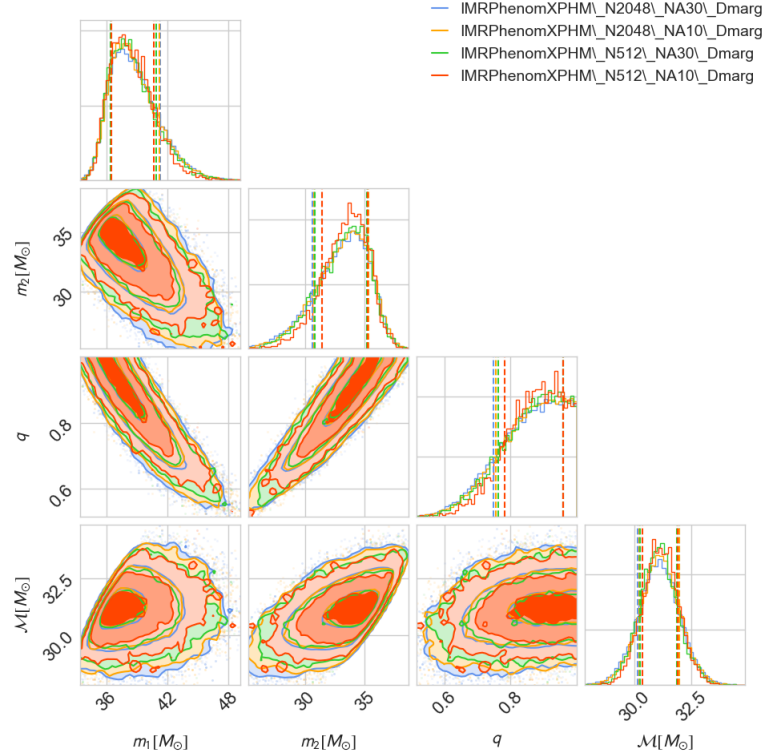


FIGURA 4.15: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con las masas de la binaria, para el modelo IMRPhenomXPHM (izquierda) y IMRPhenomXP (derecha), variando los parámetros del algoritmo.

En las figuras (4.14) y (4.15) se representa dos gráficos de esquina con las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones, para los parámetros relacionados con las masas de la binaria, para los modelos IMRPhenomXP y IMRPhenomXPHM respectivamente, variando los parámetros del algoritmo en: $N_{live} = 2048, 512$ y $n_{act} = 30, 10$. Por completitud, en el apéndice (D) se han añadido dos gráficos de esquina más, para cada modelo, con los mismos parámetros de la sección anterior.

Al igual que sucedía con el evento anterior, observando ambas figuras junto con las del apéndice (D) para cada modelo, observamos que los parámetros extrínsecos son más difíciles de estimar que los intrínsecos, debido a que son más multimodales.

De igual manera vemos que la elección de $N_{live} = 512$ y $n_{act} = 30, 10$, constituye la peor de todas ellas. Puesto que observando los bordes de los contornos de isoverosimilitud en las distribuciones bidimensionales para el rojo y el verde, nos damos cuenta que fluctúan demasiado. El algoritmo no ha obtenido la resolución necesaria

para dar una distribución sólida y lo que vemos son errores sistemáticos producidos en el muestreo.

Descartando los modelos rojo y verde por poseer fuertes fluctuaciones, observamos cómo en los gráficos de la fila inferior de la figura (4.16) correspondientes al modelo IMRPhenomXPHM, se obtiene un mejor comportamiento, traducido en un mayor estrechamiento de la distribución y por tanto en una mejor estimación de los parámetros, en comparación con los gráficos superiores correspondientes al modelo IMRPhenomXP.

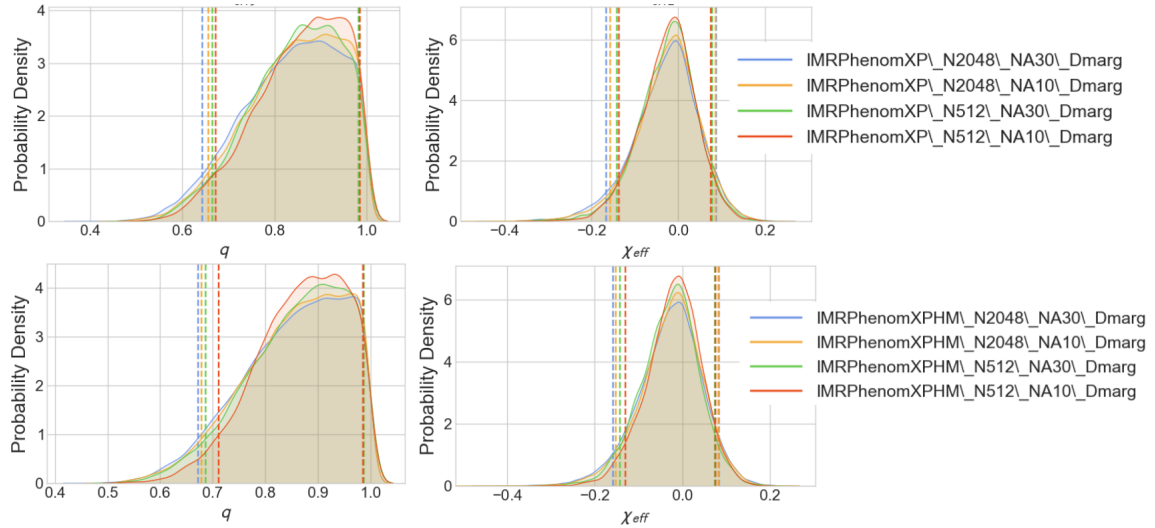


FIGURA 4.16: Distribuciones de probabilidad a posteriori unidimensionales para los parámetros q y χ_{eff} , para los modelos IMRPhenomXP (figura superior) y IMRPhenomXPHM (figura inferior), variando los parámetros del algoritmo.

De nuevo hacemos notar que este efecto se debe a la implementación de los armónicos subdominantes en el modelo, puesto que la resolución que comparamos es la misma para cada color.

4.2.2.1.2 Resultados para los modelos IMRPhenomXPHM y IMRPhenomXHM.

En la figura (4.17) se representa un gráfico de esquina donde podemos observar las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones para los parámetros relacionados con las masas de la binaria, para el modelo IMRPhenomXHM variando los parámetros del algoritmo en: $N_{live} = 2048, 512$ y $n_{act} = 50, 30, 10$. Por completitud, en el apéndice (D) se han añadido dos gráficos de esquina más, para los parámetros relacionados con la ubicación de la fuente en la esfera celeste, el ángulo de polarización, la fase orbital, los parámetros relacionados con los espines y la distancia luminosa.

Al igual que en el modelo anterior, observamos que la elección de $N_{live} = 512$ y $n_{act} = 30, 10$ constituye la peor de todas ellas, puesto que presenta errores sistemáticos producidos en el muestreo. Descartando entonces los modelos rosa y rojo, los otros tres poseen distribuciones prácticamente iguales.

Calculando la divergencia de Jensen-Shannon para todas las distribuciones de todos los parámetros para este modelo IMRPhenomXHM junto con las de IMRPhenomXPHM,

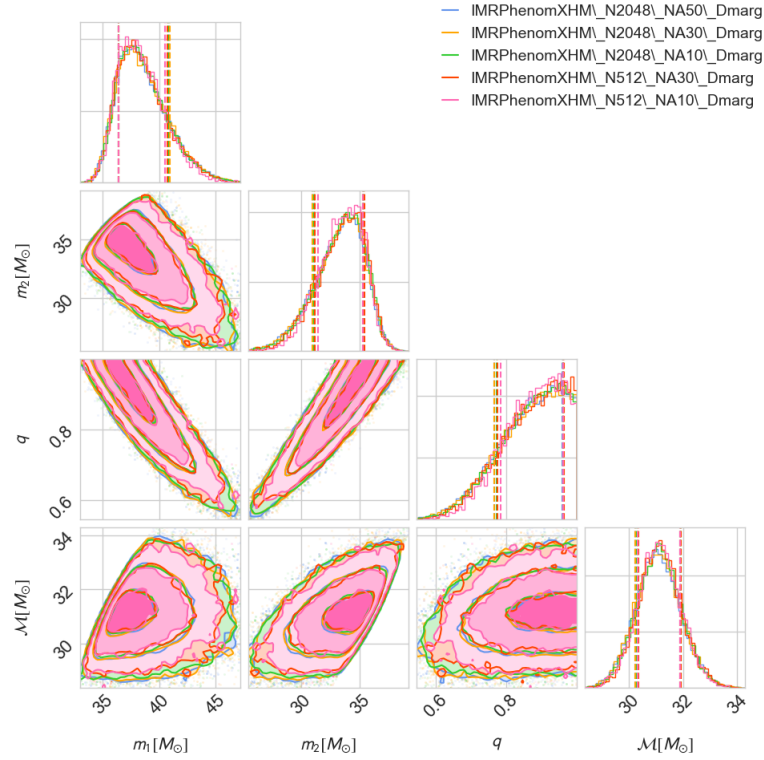


FIGURA 4.17: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con las masas de la binaria, para el modelo IMRPhenomXPHM (izquierda) e IMRPhenomXHM (derecha), variando los parámetros del algoritmo.

siendo el cero un valor que indica que las distribuciones son idénticas y la unidad que son totalmente divergentes, se obtienen valores del orden de $10^{-3} - 10^{-4}$.

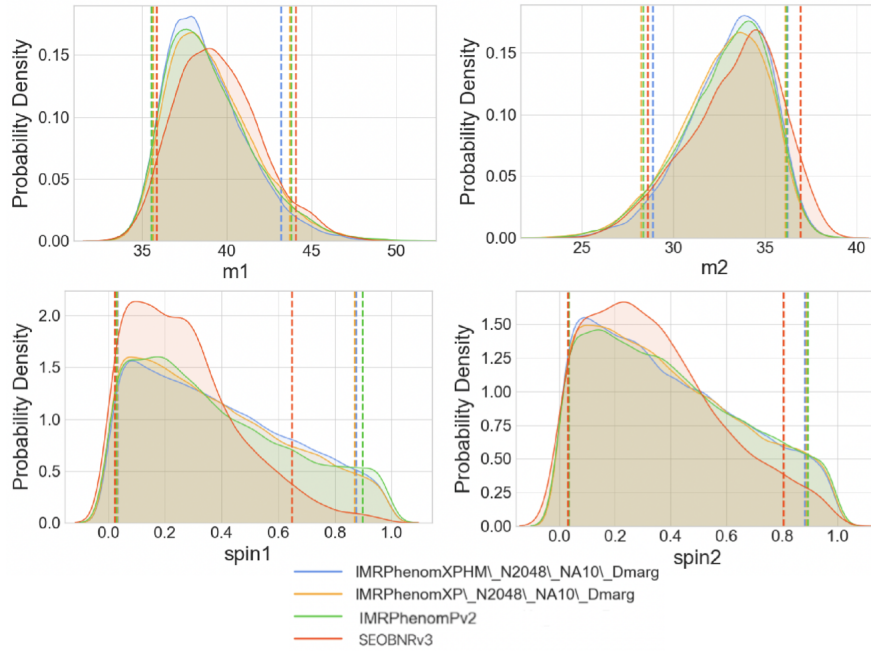


FIGURA 4.18: Distribuciones de probabilidad a posteriori unidimensionales de las masas y espines de la binaria, para el modelo IMRPhenomXPHM e IMRPhenomXP con $N_{live} = 2048$ y $n_{act} = 10$, comparándolos con los modelos de la literatura.

4.2.2.2. Comparación con el catálogo GWTC-1.

En la sección (4.2.2.1.1) vimos que el modelo IMRPhenomXPHM con $N_{live} = 2048$ era el preferido frente al resto. En el siguiente análisis se ha considerado estos puntos vivos $N_{live} = 2048$ y $n_{act} = 10$, para disminuir el tiempo de ejecución, comparando los modelos IMRPhenomXPHM con el IMRPhenomXP.

En general, podemos observar en la figura (4.18) que las distribuciones correspondientes con los modelos IMRPhenomXP y IMRPhenomXPHM convergen adecuadamente según lo esperado con la literatura. La inclusión de los armónicos subdominantes en el modelo IMRPhenomXPHM mejora de hecho la estimación de parámetros.

4.2.2.3. Mejorando la estimación de parámetros para q y χ_{eff} .

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, podemos hacer una elección de los mejores modelos que tenemos actualmente para estimar dentro de un intervalo de credibilidad del 90% los parámetros q y χ_{eff} . Estos modelos son: IMRPhenomXPHM/XP, IMRPhenomXHM y IMRPhenomXAS de las ejecuciones realizadas con $N_{live} = 2048$ y $n_{act} = 10$.

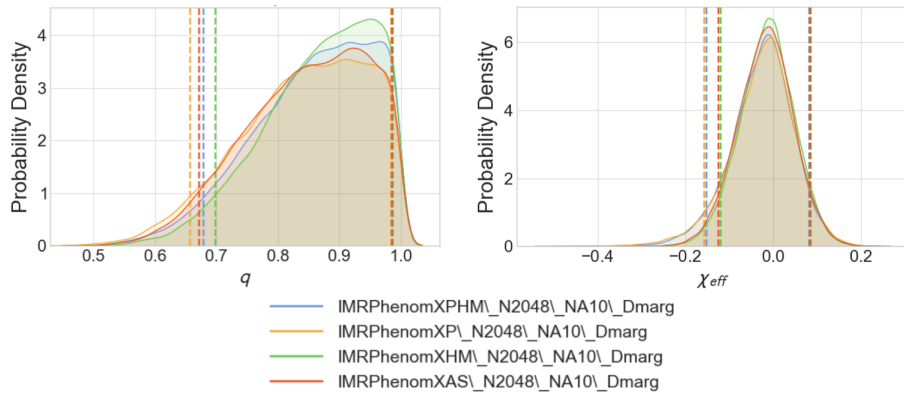


FIGURA 4.19: Distribuciones de probabilidad a posteriori unidimensionales para q y χ_{eff} .

En la siguiente tabla observamos las estimaciones obtenidas de los parámetros q y χ_{eff} , utilizando varios modelos.

Modelo de onda	q	χ_{eff}
IMRPhenomXPHM_N2048_NA10_Dmarg	$0.87^{+0.12}_{-0.19}$	$-0.02^{+0.10}_{-0.13}$
IMRPhenomXP_N2048_NA10_Dmarg	$0.85^{+0.13}_{-0.20}$	$-0.02^{+0.11}_{-0.14}$
IMRPhenomXHM_N2048_NA10_Dmarg	$0.88^{+0.11}_{-0.18}$	$-0.01^{+0.10}_{-0.11}$
IMRPhenomXAS_N2048_NA10_Dmarg	$0.86^{+0.13}_{-0.19}$	$-0.02^{+0.10}_{-0.11}$
Media	$(0.675 - 0.9875)$	$(-0.14 - 0.05)$

CUADRO 4.4: Tabla con las estimaciones de los parámetros q y χ_{eff} para varios modelos.

4.2.3. GW190814.

Dos años después de la primera detección llevada a cabo por los tres interferómetros LIGO y Virgo, el 14 de agosto de 2019, se observó el evento GW190814. Este evento presenta dos características interesantes, relacionadas con la fuente que lo produjo. En primer lugar, la masa primaria de la binaria $23M_{\odot}$ es nueve veces más masiva que su compañera, convirtiéndola en el sistema más asimétrico jamás observado con ondas gravitacionales hasta la fecha. En segundo lugar, la masa secundaria de la binaria

$2.6M_{\odot}$ la convierte en el agujero negro más ligero o estrella de neutrones más pesada jamás descubierta en un sistema binario de objetos compactos, y de momento, no estamos seguros de cuál es. Estas propiedades presentan un desafío único en nuestra comprensión sobre las masas que pueden tener los objetos compactos, así como en el proceso por el cual llegan a terminar fusionándose. El análisis de parámetros en este evento utilizando los últimos modelos actualizados como los estudiados en esta tesis, podrá arrojar un poco de luz a dicho enigma.

4.2.3.1. Estudio de la convergencia.

4.2.3.1.1 Resultados para los modelos IMRPhenomXPHM y IMRPhenomXP.

Las siguientes figuras (4.20) y (4.21) representan dos gráficos de esquina con las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones, para los parámetros relacionados con las masas de la binaria, para los modelos IMRPhenomXP y IMRPhenomXPHM respectivamente, variando los parámetros del algoritmo en: $N_{live} = 2048, 512$ y $n_{act} = 30, 10$. Por completitud, en el apéndice (D) se han añadido dos gráficos de esquina más para cada modelo, con los mismos parámetros de la sección anterior.

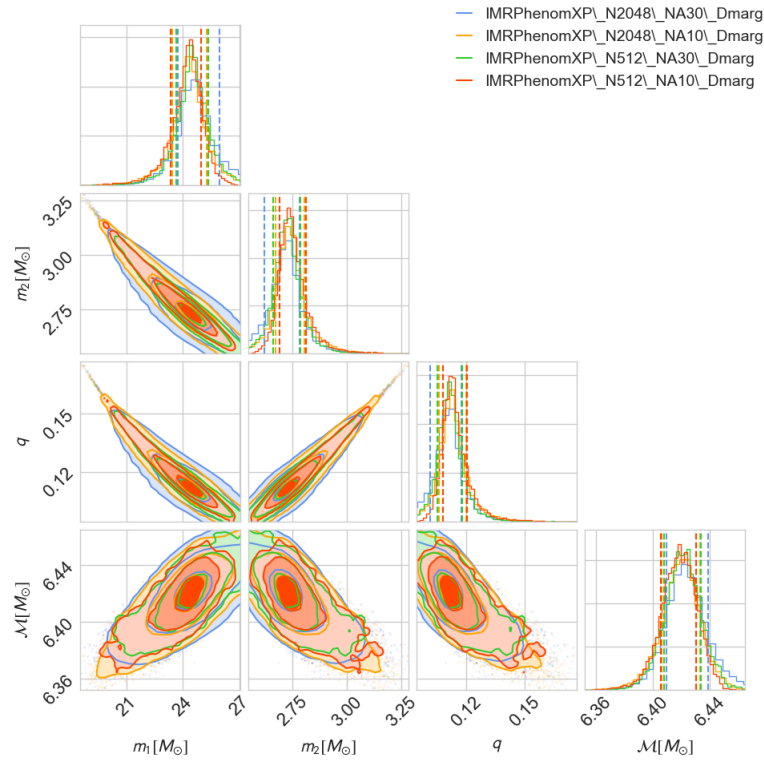


FIGURA 4.20: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con las masas de la binaria para el modelo IMRPhenomXP, variando los parámetros del algoritmo.

Al igual que sucedía con los dos eventos anteriores, observando ambas figuras junto con las del apéndice (D), observamos que los parámetros extrínsecos son más difíciles de estimar que los intrínsecos, debido a que son más multimodales.

De igual manera vemos que la elección de $N_{live} = 512$ y $n_{act} = 30, 10$, constituye la peor de todas ellas, puesto que sus bordes en los contornos de iso-verosimilitud

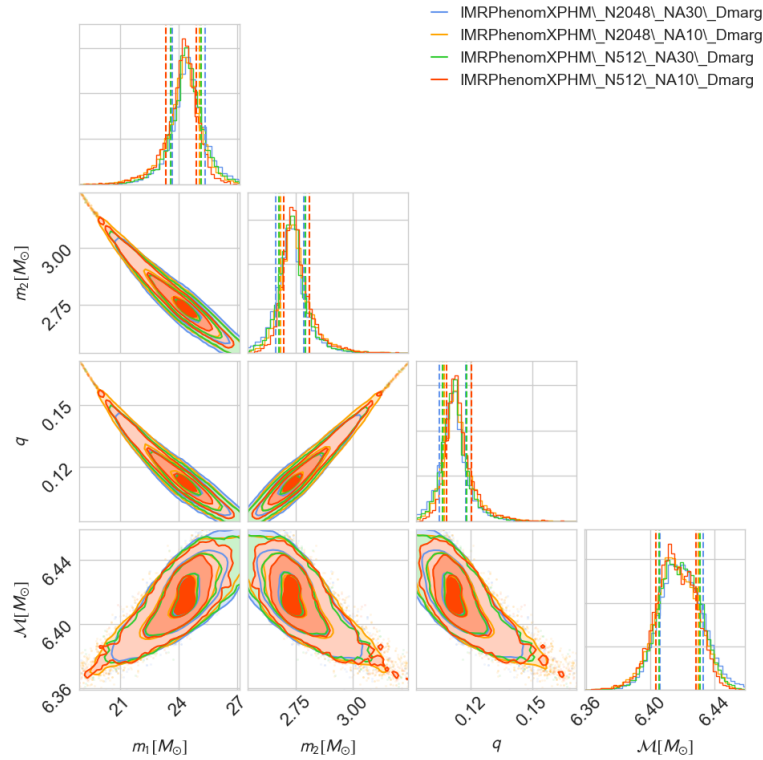


FIGURA 4.21: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con las masas de la binaria para el modelo IMRPhenomXPHM, variando los parámetros del algoritmo.

fluctúan demasiado, lo que se traduce en errores sistemáticos producidos durante el muestreo.

Observando las distribuciones de probabilidad en dos dimensiones, nos damos cuenta que la inclusión de los armónicos subdominantes en el modelo IMRPhenomXPHM implica una mejor convergencia en los parámetros y con ello una mejor estimación, al tener un mayor estrechamiento en las distribuciones, en comparación con el modelo IMRPhenomXP.

Descartando los modelos rojo y verde por poseer fuertes fluctuaciones, el resto de distribuciones son prácticamente las mismas. La divergencia de Jensen-Shannon, así lo ratifica, obteniendo valores del orden de $10^{-3} - 10^{-4}$.

4.2.3.2. Comparación con el catálogo GWTC-2.

En la sección anterior vimos que el modelo IMRPhenomXPHM era preferido frente al IMRPhenomXP, siendo el resto de las distribuciones muy iguales entre sí. Para reducir el tiempo de computación se escogió la de $N_{live} = 2048$ y $n_{act} = 10$, para compararla con los modelos del segundo catálogo.

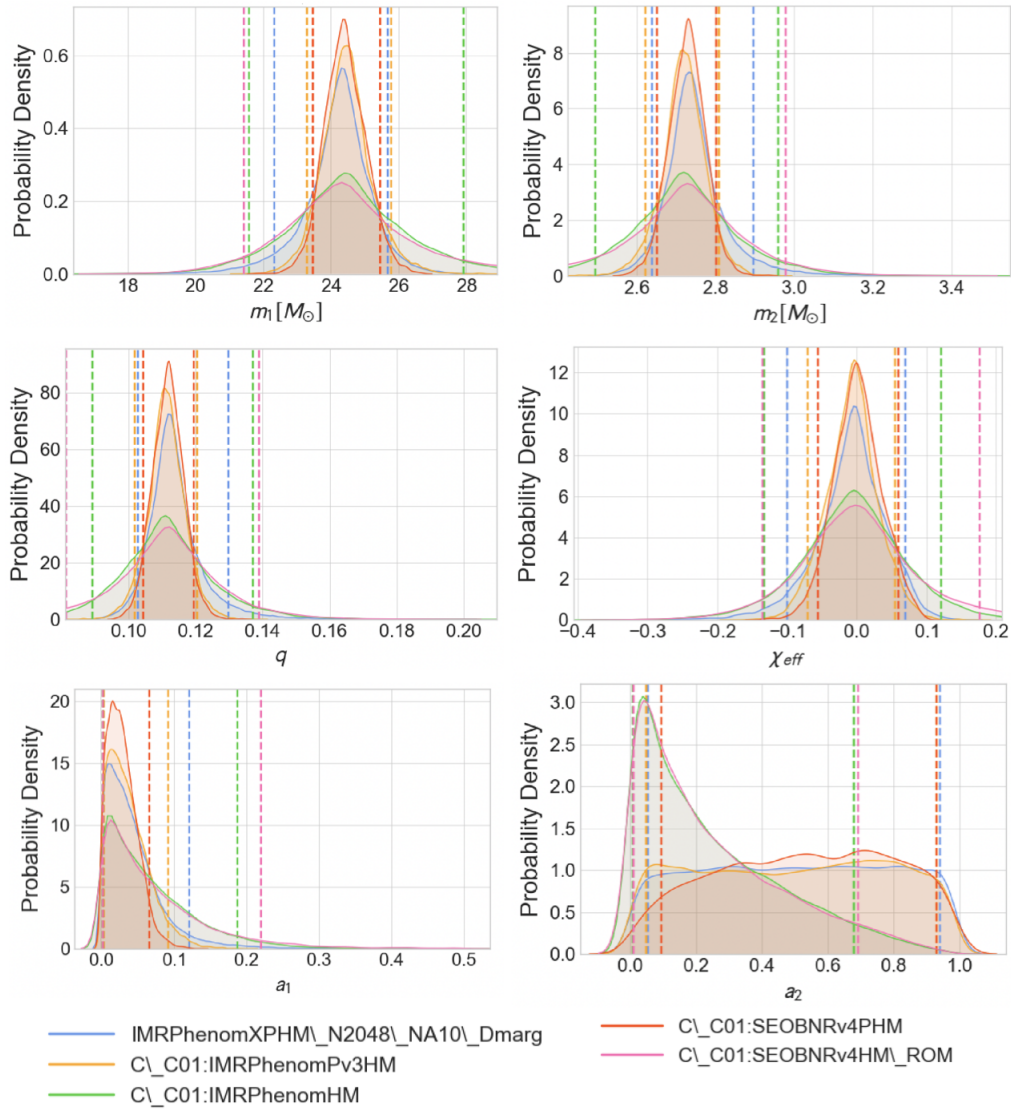


FIGURA 4.22: Distribuciones de probabilidad a posteriori unidimensionales de las masas, espines de la binaria, el cociente de masas y el espín efectivo para el modelo IMRPhenomXPHM con $N_{live} = 2048$ y $n_{act} = 10$ comparándolo con los modelos del catálogo.

Como podemos comprobar la implementación de la precesión en los modelos, mejora significativamente la estimación de parámetros.

4.2.3.3. Mejorando la estimación de parámetros para q y χ_{eff} .

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, podemos hacer una elección de los mejores modelos que tenemos actualmente para estimar dentro de un intervalo de credibilidad del 90% los parámetros q y χ_{eff} . Estos modelos son: IMRPhenomXPHM y IMRPhenomXP de las ejecuciones realizadas con $N_{live} = 2048$ y $n_{act} = 10$ y los modelos IMRPhenomPv3HM y SEOBNRv4PHM del catálogo GWTC-2.

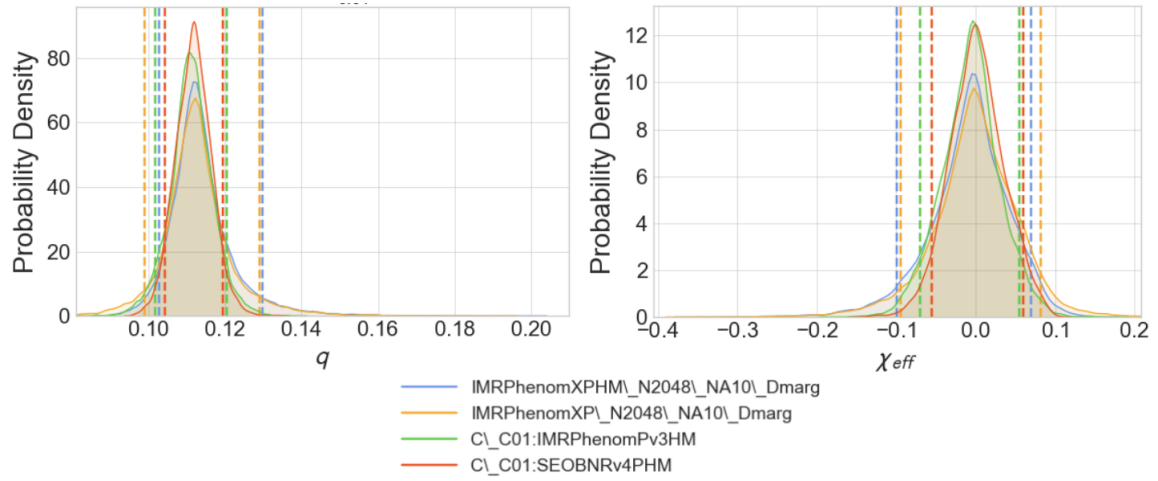


FIGURA 4.23: Distribuciones de probabilidad a posteriori unidimensionales para q y χ_{eff} .

En la siguiente tabla observamos las estimaciones obtenidas de los parámetros q y χ_{eff} , utilizando varios modelos.

Modelo de onda	q	χ_{eff}
IMRPhenomXPHM_N2048_NA10_Dmarg	$0.11^{+0.02}_{-0.01}$	$-0.0^{+0.07}_{-0.09}$
IMRPhenomXP_N2048_NA10_Dmarg	$0.11^{+0.02}_{-0.01}$	$-0.0^{+0.08}_{-0.10}$
IMRPhenomPv3HM	$0.11^{+0.01}_{-0.01}$	$-0.01^{+0.06}_{-0.06}$
SEOBNRv4PHM	$0.11^{+0.01}_{-0.01}$	$-0.0^{+0.06}_{-0.06}$
Media	$(0.110 - 0.125)$	$(-0.08 - 0.07)$

CUADRO 4.5: Tabla con las estimaciones de los parámetros q y χ_{eff} para varios modelos.

Conclusiones.

Esta tesis demuestra la eficacia del nuevo modelo IMRPhenomXPHM en la actual era de la astronomía de ondas gravitacionales, donde la cantidad y diversidad de eventos detectados crece constantemente. Este modelo además de proporcionar un bajo coste computacional, incluye el modelado de los armónicos subdominantes y la precesión, que, como hemos comprobado, beneficia la estimación de parámetros posterior.

Para analizar su comportamiento se empleó un código de python escrito por Maitte Mateu-Lucena, que utiliza la implementación en paralelo de *Bilby*, *parallel bilby*, en los clústeres CPU de alto rendimiento: Marenostrom (Barcelona Supercomputing Center) y Picasso (Universidad de Málaga). Con los datos de los detectores LIGO-Hanford, LIGO-Livingston y Virgo disponibles en los catálogos de ondas gravitacionales GWTC-1 y GWTC-2 abiertos al público [34], el Grupo de Física Gravitacional: teoría y observación, realizó diversas ejecuciones del programa utilizando diferentes modelos que incluían o bien los armónicos subdominantes, o la precesión o ambos a la vez, para estudiar su efecto en todos los eventos del catálogo. Con los archivos resultantes de dichas ejecuciones, se realizaron cuatro estudios para los eventos GW150914, GW170729 y GW190814.

El primer paso fue analizar la convergencia de cada ejecución para cada modelo en cada evento. Por lo general, se observó en los tres eventos que un número de puntos vivos alto ayuda a establecer los límites de las distribuciones a posteriori de manera sólida y flexible, mejorando la eficacia del muestreo y la resolución del volumen de la distribución a priori, resultando en una mejor estimación de los parámetros. El nuevo parámetro n_{act} incorporado en el algoritmo, ayuda también a obtener una mejor resolución. Sin embargo, aumenta de forma simultánea el tiempo de ejecución.

Una vez fijado los mejores parámetros del algoritmo teniendo en cuenta la convergencia resultante y el coste computacional en $N_{live} = 2048$ y $n_{act} = 10$, se procedió a realizar un estudio de cual era la mejor versión de la precesión, si MSA o NNLO incorporadas en el modelo, comparándola con la versión por defecto, para el evento GW170729. Utilizando la divergencia de Jensen-Shannon el resultado determinó, que no hubo una diferencia significativa entre las distribuciones de los parámetros estudiados.

En este mismo evento GW170729, además de comparar las ejecuciones realizadas con las del catálogo GWTC-1, se comparó con el artículo de Katerina Chatziioannou et al publicado en noviembre de 2019. Dicho artículo fue el primero en encargarse de analizar un evento cuyo cociente de masas q era alto para estudiar la contribución de los modos subdominantes en la estimación de parámetros. Sin embargo, los modelos utilizados no eran lo suficientemente maduros como para ser aplicados. Con la familia de formas de onda IMRPhenomX, sí que podemos abarcar este tipo de eventos que poco a poco dejarán de ser exóticos. Por la naturaleza de las fuentes de la binaria, en este artículo además estudiaron la posibilidad de que el agujero negro principal proviniera de una fusión anterior. Del resultado de comparar IMRPhenomXPHM con las muestras proporcionadas por el artículo y con el catálogo GWTC-1, podemos concluir que el modelo apoya el escenario en el que el agujero negro principal sea resultado de una fusión anterior.

Comparando los diferentes modelos que incluían o no la precesión y los armónicos subdominantes en los tres eventos, podemos concluir que ambos efectos son relevantes en la estimación de parámetros, volviéndose cada vez más importantes en aquellos

eventos cuyo cociente de masas es mayor. En el evento GW170729, cuyo cociente entre masas según el artículo de Katerina et al es estimado entre $(0.3 - 0.8)$, parece que el efecto de los armónicos subdominantes domina frente al de la precesión. Sin embargo para el evento GW190814, cuyo cociente de masas es el más desigual medido hasta la fecha $0.112_{-0.009}^{+0.008}$, observando la figura (4.22), podemos decir que las tornas parecen girarse y es ahora la precesión quien domina frente a los armónicos subdominantes. Hacemos notar que los cambios observados en las estimaciones no son debidos a errores sistemáticos en los modelos, sino que la modelación precisa, de efectos físicos relevantes, mejora las mediciones de los parámetros.

Por último, se observa que la inclusión de los armónicos subdominantes y la precesión, da como resultado una estimación mejorada en el cociente de masas q y el espín efectivo χ_{eff} . Para cada evento, resumimos a continuación dicha estimación,

Evento	q		χ_{eff}	
	Vieja estimación	Nueva estimación	Vieja estimación	Nueva estimación
GW150914	(1.1 – 1.6)	(0.675 – 0.987)	(–0.14 – 0.13)	(–0.14 – 0.05)
GW170729	(0.30 – 0.80)	(0.366 – 0.912)	(–0.01 – 0.50)	(0.05 – 0.544)
GW190814	(0.103 – 0.120)	(0.110 – 0.125)	(–0.055 – 0.06)	(–0.08 – 0.07)

CUADRO 5.1: Tabla con las estimaciones de los parámetros q y χ_{eff} para cada evento.

Capítulo A

Ingredientes de la teoría linealizada de la gravedad.

- Sección A.1.** Métrica inversa.
- Sección A.2.** Símbolos de Christoffel linealizados.
- Sección A.3.** Tensor de Riemann linealizado.
- Sección A.4.** Tensor de Ricci linealizado.
- Sección A.5.** Escalar de Ricci linealizado.
- Sección A.6.** Tensor de Einstein linealizado.

En este apéndice, exponemos los ingredientes necesarios para linealizar la teoría de la gravedad, con el objetivo de describir la ecuación de onda de la perturbación de la métrica con el gauge de Lorentz y así poder identificar su solución en el vacío como las ondas gravitacionales.

A.1. Métrica inversa.

A lo largo del desarrollo, será necesario el uso de la métrica inversa $g^{\mu\nu}$. Conocida la métrica inversa de Minkowski, debemos preguntarnos qué forma tiene la perturbación de la métrica inversa $\delta g^{\mu\nu} = h^{\mu\nu}$. Para ello, partiremos de la definición de métrica inversa:

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} = \delta^{\mu}_{\alpha}, \quad (\text{A.1})$$

y la someteremos a variaciones infinitesimales tales que,

$$\delta(g^{\mu\nu} g_{\nu\alpha}) = 0 \rightarrow \delta g^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} + g^{\mu\nu} \delta g_{\nu\alpha} = 0 \rightarrow \delta g^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} = -g^{\mu\nu} \delta g_{\nu\alpha}. \quad (\text{A.2})$$

Aplicando la métrica inversa a ambos lados de la igualdad, contrayendo índices y linealizando (despreciando los términos de orden cuadrático $\mathcal{O}(h^2)$), obtenemos

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} \delta g_{\alpha\beta} g^{\beta\nu} \rightarrow \delta g^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\beta} \eta^{\beta\nu} + \mathcal{O}(h^2) = -\eta^{\mu\alpha} \eta^{\beta\nu} h_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(h^2). \quad (\text{A.3})$$

Como podemos ver, esta perturbación en teoría linealizada, puede escribirse:

$$h^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} h_{\alpha\beta} = (\eta^{\mu\alpha} + \mathcal{O}(h)) (\eta^{\nu\beta} + \mathcal{O}(h)) h_{\alpha\beta} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} h_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(h^2). \quad (\text{A.4})$$

De manera que la métrica inversa $g^{\mu\nu}$ se expresa como,

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \quad (\text{A.5})$$

Una vez definidas la métrica y su inversa, con el fin de construir las ecuaciones de Einstein linealizadas, debemos continuar describiendo el resto de objetos necesarios para el desarrollo dentro de este régimen lineal.

A.2. Símbolos de Christoffel linealizados.

Los símbolos de Christoffel se definen como

$$\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\nu} (\partial_{\beta}g_{\mu\nu} + \partial_{\mu}g_{\nu\beta} - \partial_{\nu}g_{\beta\mu}) . \quad (\text{A.6})$$

Teniendo en cuenta que la métrica viene dada por la suma de la métrica de Minkowski más una perturbación, la derivada de la métrica ∂g no es más que la derivada de la perturbación ∂h . De esta manera, desarrollando a primer orden, obtenemos

$$g^{\alpha\nu}\partial g = (\eta^{\alpha\nu} + \mathcal{O}(h))\partial(\eta + h) = \eta^{\alpha\nu}\partial h + \mathcal{O}(h^2) . \quad (\text{A.7})$$

Por tanto, los símbolos de Christoffel linealizados son

$$\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\nu} (\partial_{\beta}h_{\mu\nu} + \partial_{\mu}h_{\nu\beta} - \partial_{\nu}h_{\beta\mu}) + \mathcal{O}(h^2). \quad (\text{A.8})$$

A.3. Tensor de Riemann linealizado.

El tensor de Riemann se define como

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\gamma}^{\alpha}\Gamma_{\nu\beta}^{\gamma} - \Gamma_{\nu\gamma}^{\alpha}\Gamma_{\mu\beta}^{\gamma}. \quad (\text{A.9})$$

Por conveniencia, para llegar a una expresión más sencilla una vez linealizado este tensor, bajemos los índices con la métrica, obteniendo

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\gamma} \left(\partial_{\mu}\Gamma_{\nu\beta}^{\gamma} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\beta}^{\gamma} + \Gamma_{\mu\delta}^{\gamma}\Gamma_{\nu\beta}^{\delta} - \Gamma_{\nu\delta}^{\gamma}\Gamma_{\mu\beta}^{\delta} \right) . \quad (\text{A.10})$$

Al linealizar debemos notar que los símbolos de Christoffel son de primer orden $\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} \sim \mathcal{O}(h)$, en consecuencia habrá contribuciones de segundo orden $\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} \sim \mathcal{O}(h^2)$ que deberemos despreciar para obtener un régimen lineal. Enseguida observamos que la contracción entre ellos, en el tercer y cuarto término, será de segundo orden y por lo tanto despreciable. Tampoco jugará un papel en el desarrollo, los términos de segundo orden procedentes de la perturbación de la métrica contraída con los símbolos de Christoffel, que de nuevo deberemos despreciar quedándonos únicamente con la contribución de Minkowski. De esta manera, obtenemos

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \eta_{\alpha\gamma} \left(\partial_{\mu}\Gamma_{\nu\beta}^{\gamma} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\beta}^{\gamma} \right) + \mathcal{O}(h^2). \quad (\text{A.11})$$

Desarrollando esta expresión con la definición de los símbolos de Christoffel linealizados (A.8), se obtiene

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta_{\alpha\gamma} \{ \partial_{\mu}[\eta^{\gamma\delta} (\partial_{\nu}h_{\beta\delta} + \partial_{\beta}h_{\delta\nu} - \partial_{\delta}h_{\nu\beta})] - \partial_{\nu}[\eta^{\gamma\delta} (\partial_{\mu}h_{\beta\delta} + \partial_{\beta}h_{\delta\mu} - \partial_{\delta}h_{\mu\beta})] \} + \mathcal{O}(h^2). \quad (\text{A.12})$$

Simplificando el primer y cuarto término, la expresión se reduce a

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta_{\alpha\gamma}\eta^{\gamma\delta} (\partial_{\mu}\partial_{\beta}h_{\delta\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\delta}h_{\nu\beta} - \partial_{\nu}\partial_{\beta}h_{\delta\mu} + \partial_{\nu}\partial_{\delta}h_{\mu\beta}) + \mathcal{O}(h^2). \quad (\text{A.13})$$

Finalmente, el haber bajado los índices anteriormente nos permite utilizar $\eta_{\alpha\gamma}\eta^{\gamma\delta} = \delta_{\alpha}^{\delta}$ obteniendo

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu}\partial_{\beta}h_{\alpha\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\alpha}h_{\beta\nu} - \partial_{\nu}\partial_{\beta}h_{\alpha\mu} + \partial_{\nu}\partial_{\alpha}h_{\beta\mu}) + \mathcal{O}(h^2). \quad (\text{A.14})$$

A.4. Tensor de Ricci linealizado.

El tensor de Ricci se define con la contracción del tensor de Riemann de la siguiente manera

$$R_{\alpha\beta} = g^{\gamma\delta} R_{\gamma\alpha\delta\beta}. \quad (\text{A.15})$$

Cogiendo la expresión del tensor de Riemann linealizado (A.14), la perturbación de la métrica contraída con éste dará términos de orden cuadrático que deberán despreciarse, quedándonos solo con la contribución de Minkowski. Contrayendo el tensor de Riemann linealizado con Minkowski, se obtiene

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \partial_\alpha h_\beta^\mu - \partial_\alpha \partial_\beta h - \square h_{\alpha\beta} + \partial_\mu \partial_\beta h_\alpha^\mu \right) + \mathcal{O}(h^2), \quad (\text{A.16})$$

con $h \equiv h_\alpha^\alpha = \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(h^2)$ la traza de la perturbación y siendo \square el D'Alembertiano $\square \equiv \partial^\alpha \partial_\alpha = \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta$.

A.5. Escalar de Ricci linealizado.

El escalar de Ricci se define contrayendo el tensor de Ricci del modo siguiente

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.17})$$

Cogiendo la expresión del tensor de Ricci linealizado (A.16), la perturbación de la métrica contraída con éste dará de nuevo términos de orden cuadrático que despreciaremos, quedándonos solo con la contribución de Minkowski. Contrayendo el tensor de Ricci linealizado con Minkowski, obtenemos

$$R = \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} - \square h + \mathcal{O}(h^2). \quad (\text{A.18})$$

A.6. Tensor de Einstein linealizado.

Con estos ingredientes, podemos finalmente escribir el tensor de Einstein linealizado. Sea el tensor de Einstein definido como

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R, \quad (\text{A.19})$$

debemos fijarnos que de nuevo la perturbación de la métrica contraída con el escalar de Ricci dará términos de orden cuadrático que deberán despreciarse, quedándonos solo con la contribución de Minkowski. Introduciendo el tensor de Ricci linealizado (A.16) y el escalar de Ricci linealizado (A.18) en el tensor de Einstein, obtenemos su expresión linealizada

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [\partial_\mu \partial_\alpha h_\beta^\mu - \partial_\alpha \partial_\beta h - \square h_{\alpha\beta} + \partial_\mu \partial_\beta h_\alpha^\mu - \eta_{\alpha\beta} (\partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h)] + \mathcal{O}(h^2). \quad (\text{A.20})$$

Capítulo B

Las transformaciones gauge e invarianza gauge.

Sección B.1. Las ecuaciones básicas de la teoría linealizada.

Sección B.2. Transformaciones gauge e invarianza gauge.

Sección B.3. El gauge Transverse-traceless (TT).

A continuación, se describirán las transformaciones gauge y la invarianza gauge en términos de la perturbación de la métrica, necesarios para finalizar el desarrollo de la teoría linealizada de la gravedad cuyo objetivo es el de obtener la ecuación de onda para la perturbación, identificando en su solución en el vacío las ondas gravitacionales.

B.1. Las ecuaciones básicas de la teoría linealizada.

Las ecuaciones básicas de la teoría linealizada, escritas en cualquier sistema de coordenadas que sea casi globalmente de Lorentz son

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{con} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (\text{B.1})$$

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\nu \bar{h}^{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\beta \bar{h}^\mu_\alpha - \partial_\mu \partial_\alpha \bar{h}^\mu_\beta = -16\pi T_{\alpha\beta} \quad (\text{B.2})$$

Dos tipos de transformaciones de coordenadas conectan sistemas casi globalmente de Lorentz entre sí: las transformaciones globales de Lorentz y las transformaciones coordenadas infinitesimales.

B.1.1. Transformaciones globales de Lorentz

$$x^\mu = \Lambda^\mu_{\alpha'} x^{\alpha'}, \quad \Lambda^\mu_{\alpha'} \Lambda^\nu_{\beta'} \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha'\beta'}, \quad (\text{B.3})$$

donde Λ son los boosts de Lorentz. Esto transforma los coeficientes de la métrica via

$$\eta_{\alpha'\beta'} + h_{\alpha'\beta'} = g_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\beta'}} g_{\mu\nu} = \Lambda^\mu_{\alpha'} \Lambda^\nu_{\beta'} (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) = \eta_{\alpha'\beta'} + \Lambda^\mu_{\alpha'} \Lambda^\nu_{\beta'} h_{\mu\nu}. \quad (\text{B.4})$$

Por lo tanto, $h_{\mu\nu}$ y consecuentemente $\bar{h}_{\mu\nu}$, se transforman como las componentes de un tensor en el espacio-tiempo plano

$$h_{\alpha'\beta'} = \Lambda^\mu_{\alpha'} \Lambda^\nu_{\beta'} h_{\mu\nu}. \quad (\text{B.5})$$

B.1.2. Transformaciones de coordenadas infinitesimales (creación de perturbaciones en el sistema de coordenadas).

$$x^{\mu'}(\mathcal{P}) = x^\mu(\mathcal{P}) + \xi^\mu(\mathcal{P}), \quad (\text{B.6})$$

donde $\xi^\mu(\mathcal{P})$ son cuatro funciones arbitrarias lo suficientemente pequeñas como para que las perturbaciones de la métrica en las nuevas coordenadas sigan verificando $|h_{\mu'\nu'}| \ll 1$. Las transformaciones infinitesimales de este tipo producen pequeños cambios en los escalares, vectores y campos de tensores. Estos pequeños cambios pueden

ser ignorados en todas las cantidades excepto en la métrica, donde pequeñas desviaciones de $\eta_{\mu\nu}$ contienen toda la información sobre la gravedad. La ley de transformación habitual para la métrica es:

$$g_{\rho'\sigma'}[x^{\alpha'}(\mathcal{P})] = g_{\mu\nu}[x^\alpha(\mathcal{P})] \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\rho'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\sigma'}}, \quad (\text{B.7})$$

combinado con (B.6) y junto con

$$g_{\mu\nu}[x^\alpha(\mathcal{P})] = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}[x^\alpha(\mathcal{P})], \quad (\text{B.8})$$

revela que

$$g_{\rho'\sigma'}(x^{\alpha'} = a^\alpha) = \eta_{\rho\sigma} + h_{\rho\sigma}(x^\alpha = a^\alpha) - \partial_\sigma \xi_\rho - \partial_\rho \xi_\sigma + \mathcal{O}(\partial\xi). \quad (\text{B.9})$$

De esta manera, vemos que la perturbación de la métrica en los sistemas de coordenadas nuevo ($x^{\mu'}$) y antiguo (x^μ) están relacionados por

$$h_{\mu\nu}^{nuevo} = h_{\mu\nu}^{viejo} - \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \xi_\nu, \quad (\text{B.10})$$

mientras que las formas funcionales de todos los demás escalares, vectores y tensores quedan inalterados, dentro de la teoría linealizada.

B.2. Transformaciones gauge e invarianza gauge.

En teoría linealizada generalmente se conoce la ecuación anterior como transformaciones gauge, análogas a las

$$A_\mu^{nuevo} = A_\mu^{viejo} + \partial_\mu \psi, \quad (\text{B.11})$$

existentes en electromagnetismo. El hecho de que las transformaciones gauge no afecten a los escalares, vectores, o tensores se le llama 'invarianza gauge'. Al igual que la invarianza gauge existente en el electromagnetismo,

$$F_{\mu\nu}^{nuevo} = \partial_\mu A_\nu^{nuevo} - \partial_\nu A_\mu^{nuevo} = \partial_\mu A_\nu^{viejo} + \partial_{\nu\mu} \psi - \partial_\nu A_\mu^{viejo} - \partial_{\mu\nu} \psi = F_{\mu\nu}^{viejo}, \quad (\text{B.12})$$

demostraremos a continuación la invarianza gauge presente en el tensor de Riemann. Podemos darnos cuenta de que, puesto que el tensor de Riemann linealizado (A.14) está compuesto por la suma y resta de términos con derivadas segundas de la perturbación y que la transformación gauge es una suma de términos sobre la perturbación, entonces el tensor de Riemann transformado presentará la misma estructura más términos dependientes de ξ . Estos términos acabarán cancelándose, de manera que el tensor mantendrá la misma forma ante transformaciones gauge

$$\begin{aligned} R'_{\alpha\beta\mu\nu} &= R_{\alpha\beta\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\beta \partial_\alpha \xi_\nu - \partial_\mu \partial_\beta \partial_\nu \xi_\alpha - \partial_\alpha \partial_\nu \partial_\beta \xi_\mu - \partial_\alpha \partial_\nu \partial_\mu \xi_\beta + \\ &+ \partial_\alpha \partial_\mu \partial_\beta \xi_\nu + \partial_\alpha \partial_\mu \partial_\nu \xi_\beta + \partial_\beta \partial_\nu \partial_\alpha \xi_\mu + \partial_\beta \partial_\nu \partial_\mu \xi_\alpha = R_{\alpha\beta\mu\nu}, \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

revelando, efectivamente, la invarianza gauge del tensor de Riemann

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}^{nuevo} = R_{\alpha\beta\mu\nu}^{viejo}. \quad (\text{B.14})$$

Al igual que este tensor, el tensor de Einstein y el tensor energía-momento no se ven afectados por las transformaciones gauge. Por lo tanto, si uno conoce una solución

específica $\bar{h}_{\alpha\beta}$ para las ecuaciones de campo linealizadas (??) para una $T^{\alpha\beta}$ dada, se puede obtener otra solución tal que describa exactamente la misma situación física.

B.3. El gauge Transverse-traceless (TT).

Sea la cuadrivelocidad u para todo el espacio-tiempo. Por la imposición de una transformación gauge específica, imponemos las condiciones

$$A_{\alpha\beta}u^\beta = 0. \quad (\text{B.15})$$

Esto son sólo tres condiciones para $A_{\alpha\beta}$, no cuatro. Para la cuarta, utilizaremos una transformación gauge

$$A_\alpha^\alpha = 0. \quad (\text{B.16})$$

Tenemos ahora ocho condiciones en total, $A_{\alpha\beta}u^\beta = A_{\alpha\beta}k^\beta = A_\alpha^\alpha = 0$, para las diez componentes de la amplitud. Las componentes restantes de $A_{\alpha\beta}$ representan los dos grados de libertad (las dos polarizaciones) de una onda gravitacional.

Es de utilidad reformular las ocho condiciones $A_{\alpha\beta}u^\beta = A_{\alpha\beta}k^\beta = A_\alpha^\alpha = 0$, en un sistema de referencia de Lorentz donde $u^0 = 1$, $u^j = 0$, y en una forma donde k^α no aparezca explícitamente:

$$\begin{aligned} h_{\alpha 0} &= 0, & \text{es decir, solo los componentes espaciales } h_{jk} \text{ no son cero;} \\ \partial^j h_{ij} &= 0, & \text{es decir, las componentes espaciales tienen divergencia cero;} \\ h_{ii} &= 0, & \text{es decir, las componentes espaciales tienen traza cero;} \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

donde $i, j = 1, 2, 3$. Notar que dado que $h = h_\alpha^\alpha = h_{ii} = 0$, no existe distinción alguna entre $h_{\alpha\beta}$ y $\bar{h}_{\alpha\beta}$ en este gauge.

Desviemos por un momento la atención de las ondas planas hacia ondas gravitacionales en la teoría linealizada. Cualquier onda electromagnética puede resolverse como una superposición de ondas planas, de la misma manera podrá hacerse con cualquier onda gravitacional. Para cada onda plana superpuesta, introduzcamos el gauge especial (B.17). Nota que las condiciones gauge son lineales en $h_{\alpha\beta}$. Por lo tanto, cualquier onda arbitraria también satisficará las condiciones (B.17). En consecuencia, enunciemos el siguiente teorema: *Sea un sistema de referencia global de Lorentz de la teoría linealizada, es decir sea una cuadrivelocidad específica u . En este marco, donde $u^\alpha = \delta_0^\alpha$, examinemos una onda gravitacional específica cuya forma sea arbitraria. Uno podrá siempre encontrar un gauge en el cual $h_{\alpha\beta}$ satisficazca las condiciones (B.17).* Por otra parte, tenemos que en este gauge solo $h_{ji} \neq 0$. Por lo tanto, necesitaremos imponer las seis ecuaciones de onda

$$\square h_{ji} = 0. \quad (\text{B.18})$$

Cualquier tensor simétrico que satisficazca las condiciones (B.17), pero no necesariamente las ecuaciones de onda (B.18), se le llama tensor transverse-traceless (TT). Transverse, porque es puramente espacial $h_{0\alpha} = 0$, pensándolo como una onda es transversa a su propia dirección de propagación $\partial_j h_{ij} = h_{ij}k_j = 0$; traceless puesto que la traza es cero $h_{ii} = 0$. Estas condiciones (B.17) permiten reducir la perturbación sobre un espacio-tiempo plano, a ondas con dos grados de libertad (las polarizaciones).

Sea un tensor puramente espacial S_{ij} , puede ser descompuesto en dos partes. Una parte S_{ij}^{TT} que es 'transverse-traceless', donde $S_{ij}^T = \frac{1}{2}(\delta_{ij}\partial_{kk}f - \partial_{ij}f)$ es 'transverse' $\partial_j S_{ij}^T = 0$, pero está determinado por una función f dada la traza de S $S_{kk}^T = \nabla^2 f$. Y una parte $S_{ij}^L = \partial_j S_i^L + \partial_i S_j^L$ que es longitudinal, determinada por el campo vectorial

S_i^L . En teoría linealizada h_{ij}^L es una parte puramente gauge de $h_{\alpha\beta}$, mientras que h_{ij}^T y h_{ij}^{TT} son partes invariantes gauge de $h_{\alpha\beta}$. El gauge especial por el cual $h_{\alpha\beta}$ se reduce a su parte transverse-traceless se le llama TT o gauge transverse-traceless. Así, las condiciones (B.17) que definen este gauge se les nombra como

$$h_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}^{TT}. \quad (\text{B.19})$$

Capítulo C

Interacción de las ondas gravitacionales con masas de prueba.

Sección D.1. La ecuación de desviación geodésica en términos de la derivada covariante.

Sección D.2. Masas de prueba en el sistema de referencia TT y en el sistema de referencia del detector.

Idealizando el detector de ondas gravitacionales como un conjunto de masas de prueba, discutiremos a continuación su interacción con dichas ondas.

C.1. La ecuación de desviación geodésica en términos de la derivada covariante.

Con la finalidad de poder explicar posteriormente cómo las masas de prueba se comportan en el sistema de referencia del detector, debemos reescribir la ecuación de desviación geodésica (1.39). Reescribamosla de forma elegante introduciendo la derivada covariante de un campo vectorial, compatible con la métrica y de torsión nula, a lo largo de la curva $x^\mu(\tau)$

$$\mathcal{D}(u)\xi^\mu = u^\nu \nabla_\nu \xi^\mu = u^\nu \partial_\nu \xi^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu u^\nu \xi^\rho = \frac{d\xi^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu u^\nu \xi^\rho. \quad (\text{C.1})$$

Puesto que u^μ y ξ^μ describen direcciones independientes la una de la otra, pueden tomarse como una base de coordenadas que conmutan, verificando:

$$\mathcal{D}(u)\xi^\mu = \mathcal{D}(\xi)u^\mu. \quad (\text{C.2})$$

Aplicando esto junto con la regla de Leibnitz, obtendremos una expresión equivalente a (1.39)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2(u)\xi^\mu &= u^\rho \nabla_\rho (u^\nu \nabla_\nu \xi^\mu) = u^\rho \nabla_\rho (\xi^\nu \nabla_\nu u^\mu) = u^\rho \nabla_\rho \xi^\nu \nabla_\nu u^\mu + u^\rho \xi^\nu \nabla_\rho \nabla_\nu u^\mu = \\ &= u^\rho \nabla_\rho \xi^\nu \nabla_\nu u^\mu + u^\rho \xi^\nu \nabla_\nu \nabla_\rho u^\mu + u^\rho \xi^\nu R_{\sigma\rho\nu}^\mu u^\sigma = R_{\sigma\rho\nu}^\mu u^\sigma u^\rho \xi^\nu \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Escrita de esta manera podemos observar que, dos geodésicas de tipo tiempo cercanas entre sí experimentan una fuerza de marea codificada en el tensor de Riemann. Escribir explícitamente la ecuación de las geodésicas o la ecuación de desviación geodésica en el sistema de referencia de interés nos ayudará a entender cómo las masas de prueba se comportan con el correspondiente observador.

C.2. Masas de prueba en el sistema de referencia TT y en el sistema de referencia del detector.

En relatividad, al elegir un gauge, seleccionamos un observador específico adquiriendo un sistema de coordenadas en concreto. En la sección (2.5.1) vimos que las ondas gravitacionales, adquieren una forma simple bajo el gauge TT. Veamos qué significa estar en un sistema de referencia TT.

C.2.1. Masas de prueba en el sistema de referencia TT.

La respuesta la encontramos observando la ecuación de las geodésicas (1.32) junto con la teoría linealizada. Sea una masa de prueba en reposo a $\tau = 0$,

$$\left. \frac{dx^i}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0, \quad (\text{C.4})$$

donde i hace referencia a los índices espaciales 1, 2, 3. Siendo la ecuación de las geodésicas (1.32), las componentes espaciales resultan

$$\left. \frac{d^2x^i}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} = - \Gamma_{00}^i \left(\left. \frac{dx^0}{d\tau} \right|_{\tau=0} \right)^2 = 0, \quad (\text{C.5})$$

donde Γ_{00}^i proviene de los símbolos de Christoffel linealizados (A.8):

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} (2\partial_0 h_{0i} - \partial_i h_{00}). \quad (\text{C.6})$$

Sin embargo, en el gauge TT esta cantidad desaparece, puesto que tanto h_{00} como h_{0i} son nulos por la condición gauge (B.17). De esta manera si a $\tau = 0$, $\frac{dx^i}{d\tau}$ es cero por estar la masa de prueba en reposo, en el gauge TT también su derivada $\frac{d^2x^i}{d\tau^2}$ se anula, y por lo tanto $\frac{d^2x^i}{d\tau^2}$ se anula para todo τ [88].

Así demostramos que en un marco de referencia TT, las partículas que permanecían en reposo antes de la llegada de la onda, permanecerán en reposo incluso después de que la onda pase. Estrictamente hablando, esto es sólo cierto en régimen lineal, es decir, a primer orden en $h_{\mu\nu}$. Si incluyéramos términos de orden cuadrático a los símbolos de Christoffel, entonces Γ_{00}^i no desaparecería. No obstante, dado que en la Tierra uno espera detectar ondas gravitacionales del orden de $h = \mathcal{O}(10^{-21})$, ir más allá del régimen lineal no resulta de interés.

En otras palabras, las coordenadas del sistema de referencia TT se estiran como respuesta a la llegada de una onda, de manera que la posición de las partículas de masa libres inicialmente en reposo no cambia de estado. Para obtener una interpretación física del gauge TT, podemos utilizar masas de prueba libres para marcar coordenadas.

C.2.1.1. Distancia coordenada.

Si las coordenadas de las masas de prueba inicialmente en reposo se mantienen constantes, también la distancia coordenada ξ^i entre ellas deberá permanecer constante durante el tránsito de la onda. Puntualizar que ξ^i es la diferencia entre las coordenadas de dos masas de prueba; no es la distancia propia. Se asumirá que esta separación es mucho menor que la longitud típica de variación de la onda gravitacional transitante, dada por su longitud de onda reducida. La distancia coordenada es por tanto la separación ξ^i entre geodésicas, que verifica la ecuación de desviación geodésica (1.39). Entonces, utilizando la componente espacial ($\mu = i$) de la ecuación (1.39), puesto que a $\tau = 0$ se cumple $dx^i/d\tau = 0$, mientras que $dx^0/d\tau = c$, obtenemos

$$\left. \frac{d^2\xi^i}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} = - \left\{ 2c\Gamma_{0\rho}^i \frac{d\xi^\rho}{d\tau} + c^2\xi^\sigma \partial_\sigma \Gamma_{00}^i \right\}_{\tau=0}. \quad (\text{C.7})$$

Como ya comentamos $\Gamma_{00}^i = 0$ en el gauge TT, puesto que tanto h_{00} como h_{0i} son nulos por la condición gauge (B.17). En el primer término, $\Gamma_{0\rho}^i$ no se desvanecerá al menos que ρ sea un índice espacial. De la ecuación de los símbolos de Christoffel linealizados (A.8), obtenemos que en el gauge TT: $\Gamma_{0j}^i = (1/2)\partial_0 h_{ij}$. Por lo tanto, en

el gauge TT, obtenemos

$$\left. \frac{d^2 \xi^i}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} = - \left\{ h_{ij} \frac{d\xi^i}{d\tau} \right\}_{\tau=0}, \quad (\text{C.8})$$

donde el punto representa la derivada temporal. Como vemos, si las masas de prueba se encuentran inicialmente, en $\tau = 0$, a una distancia coordenada fija $d\xi^i/d\tau = 0$, entonces esta separación permanecerá invariante para todo τ puesto que gracias a (C.8): $d^2 \xi^i/d\tau^2 = 0$.

Aclaremos qué significa la derivada temporal de la perturbación, no queda explícito si se trata de tiempo propio o coordenado. En el gauge TT, con $h_{00} = h_{0i} = 0$, el tiempo propio de una trayectoria tipo tiempo $x^\mu(\tau) = (x^0(\tau), x^i(\tau))$ es

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2(\tau) - (\delta_{ij} + h_{ij}^{TT}) dx^i(\tau) dx^j(\tau) = c^2 dt^2(\tau) - (\delta_{ij} + h_{ij}^{TT}) \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} d\tau^2, \quad (\text{C.9})$$

donde $x^0(\tau) = ct(\tau)$. Como para una masa de prueba inicialmente en reposo $dx^i(\tau)/d\tau = 0$ para todo τ . Por lo tanto, el tiempo propio τ medido por un reloj que se encuentra sobre una masa de prueba inicialmente en reposo, es el mismo que el tiempo coordenado t [88].

C.2.1.2. Distancia propia.

El gauge TT nos muestra que en relatividad, los efectos físicos no vienen expresados por lo que le pase a las coordenadas puesto que la teoría es invariante bajo transformaciones de coordenadas. A primera vista, uno podría sorprenderse por el hecho de que en este gauge durante el tránsito de una onda gravitacional, las posiciones de las masas de prueba no se vean modificadas. Sin embargo, esto no significa que las ondas gravitacionales no tengan un efecto físico, únicamente hemos escogido libremente un sistema coordenado para definir las coordenadas de manera que éstas no cambien. Los efectos físicos surgen al introducir, además del tiempo propio, la distancia propia.

Consideremos las masas de prueba como dos eventos simultáneos en $(t, x_1, 0, 0)$ y $(t, x_2, 0, 0)$, respectivamente. En el gauge TT, la distancia coordenada $L = x_2 - x_1$ en el plano perpendicular a la dirección de propagación de una onda gravitacional, se mantiene constante. El elemento de línea s se corresponderá con la distancia propia entre ambas masas de prueba, puesto que sólo contiene contribuciones espaciales

$$s = \sqrt{L^2 + h_{ij}(t) L_i L_j} \simeq L + \frac{L_i L_j}{2L} h_{ij}(t), \quad (\text{C.10})$$

donde L_i son las proyecciones de la distancia respecto a las coordenadas i . Definiendo el siguiente peso $n_i = L_i/L$ y $s = n_i s_i$ como una suma con $s_i = L_i + \mathcal{O}(h)$, obtenemos la ecuación de las geodésicas en términos de la distancia propia

$$\ddot{s}_i \simeq \frac{1}{2} \ddot{h}_{ij} s_j. \quad (\text{C.11})$$

Como podemos observar en esta ecuación (C.11), al contrario de lo que ocurría con las distancias coordenadas entre masas de prueba que se mantenía constante durante el paso de una onda gravitacional, las distancias propias cambian tras este tránsito [88].

C.2.2. Masas de prueba en el sistema de referencia del detector.

El sistema de referencia TT tiene la ventaja de que las ondas gravitacionales son descritas de forma simple. Sin embargo, no es el sistema de referencia formal utilizado por

un experimental para describir el detector. En el laboratorio, las posiciones no están marcadas por partículas libres; más bien, tras escoger un origen, se utilizan barras rígidas como patrón para definir las coordenadas. En este sistema esperamos que una masa de prueba con libertad para moverse, se verá desplazada por el tránsito de las ondas gravitacionales, con respecto a la posición definida por una barra rígida. Esto es diferente de lo que pasaba en el sistema de referencia TT, donde las posiciones de las masas de prueba, son por definición, inalteradas por el paso de la onda gravitacional.

Podría argumentarse que la barra podría verse afectada por el paso de una onda gravitacional monocromática de amplitud h_0 y frecuencia angular w , de hecho sí que ocurre. Sin embargo, para una barra de longitud L y frecuencia angular del modo fundamental de oscilación w_0 , puede demostrarse que la deformación ΔL provocada, viene dada por

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{2}{\pi^2} h_0 \left(\frac{w}{w_0} \right)^2. \quad (\text{C.12})$$

Entonces si $w_0 \gg w$ implica $\Delta L/L \ll h$. De manera que si L es pequeña, podemos considerar la barra como una barra rígida.

Dependiendo del tipo de detector, si uno en caída libre o fijado a la Tierra, tendremos algunas diferencias. El más sencillo es el detector en caída libre, centrándonos en una región del espacio suficientemente pequeña, se puede considerar una métrica plana incluso en presencia de las ondas gravitacionales. En un detector basado en la Tierra la métrica del laboratorio es más compleja. Además, en este último caso, las ondas gravitacionales deben competir con una serie de efectos como las fuerzas de Coriolis, que son de varios órdenes de magnitud mayor. Esta situación es resuelta por el hecho de que las ondas gravitacionales, tienen frecuencias altas en comparación con las escalas típicas de tiempo de todos los demás efectos. En la práctica, las ondas gravitacionales con frecuencias inferiores a unos pocos Hz se pierden irremediamente en un mar de ruidos newtonianos mucho más altos. Sin embargo, a frecuencias más altas, es posible tener una ventana de frecuencia donde sea posible el aislamiento de los ruidos externos, obteniendo una sensibilidad aceptable para las ondas gravitacionales.

Para aislar el efecto de las ondas gravitacionales, podemos enfocarnos en la respuesta del detector en esa ventana de frecuencia, donde asumiremos que las fuerzas gravitacionales newtonianas que varían con el tiempo, son lo suficientemente pequeñas como para que las ondas gravitacionales contribuyan únicamente sobre el tensor de Riemann. Al considerar esta contribución, podremos trabajar en un espacio-tiempo localmente plano de manera que $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ se anulen en el punto de expansión P . Utilizando la ecuación (C.3), la ecuación de desviación geodésica (1.39) se reescribe como

$$\ddot{\xi}^i = -c^2 R_{\sigma\rho\nu}^i u^\sigma u^\rho \xi^\nu, \quad (\text{C.13})$$

donde ξ es la distancia coordenada entre las masas de prueba cuyos índices espaciales se encuentran contenidos en el plano perpendicular a la dirección de propagación de la onda gravitacional, el punto denota la derivada con respecto al tiempo coordenado t del sistema de referencia propio del detector. Como el detector se mueve a velocidades no relativistas, las componentes espaciales de la cuadrivelocidad $dx^i/d\tau$ pueden despreciarse frente la componente temporal $dx^0/d\tau$ simplificando aún más la expresión anterior,

$$\ddot{\xi}^i = -c^2 R_{00j}^i u^0 u^0 \xi^j. \quad (\text{C.14})$$

Recordando la definición de tiempo propio y teniendo en cuenta que el paso de una onda gravitacional de amplitud h_0 provocará velocidades del orden de h_0 en las masas

de prueba $dx^i/s\tau = c\mathcal{O}(h)$ inicialmente en reposo, entonces

$$dt^2 = d\tau^2 \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^i}{d\tau} \right\} = d\tau^2 \{1 + \mathcal{O}(h^2)\} . \quad (\text{C.15})$$

De manera que la componente temporal de la cuadrivelocidad resulta $u^0 = 1$, por la equivalencia entre tiempo coordinado y tiempo propio.

Recuperando el tensor de Riemann linealizado (A.14), que resulta invariante ante transformaciones gauge TT, gracias a este gauge podemos eliminar de la expresión las componentes temporales de la perturbación así como su traza quedándonos con la componente que nos interesa:

$$R_{i0j0} = -\frac{1}{2c^2} \ddot{h}_{ij}^{TT} . \quad (\text{C.16})$$

Con estos dos últimos ingredientes, la ecuación de desviación geodésica (C.14) en el sistema de referencia del detector es:

$$\ddot{\xi}^i = \frac{1}{2} \ddot{h}_{ij}^{TT} \xi^j . \quad (\text{C.17})$$

Esta ecuación establece que, en el sistema de referencia propio del detector, el efecto de las ondas gravitacionales sobre una partícula puntual de masa m puede ser descrita en términos de la segunda ley de Newton

$$F_i = \frac{m}{2} \ddot{h}_{ij}^{TT} \xi^j , \quad (\text{C.18})$$

y por lo tanto la respuesta del detector al paso de las ondas gravitacionales puede analizarse en lenguaje puramente newtoniano, sin ningún tipo de referencia a la relatividad [88].

Capítulo D

Resultados obtenidos de los tres eventos.

Sección D.1. GW170729.

Sección D.2. GW150914.

Sección D.3. GW190814.

Para completar la tesis, expondremos a continuación algunos de los gráficos realizados para el evento GW170729.

D.1. GW170729.

D.1.1. Estudio de la convergencia.

D.1.1.1. Resultados para el modelo IMRPhenomXHM.

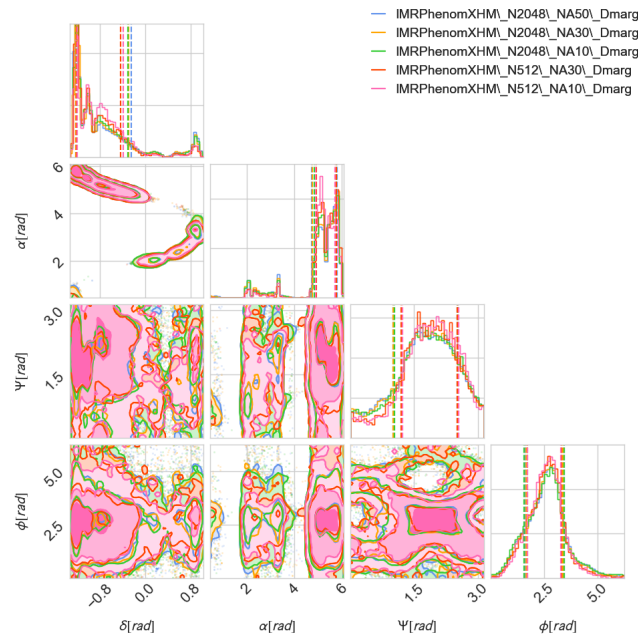


FIGURA D.1: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con la ubicación de la fuente en la esfera celeste, el ángulo de polarización y la fase orbital, para el modelo IMRPhenomXHM, variando los parámetros del algoritmo.

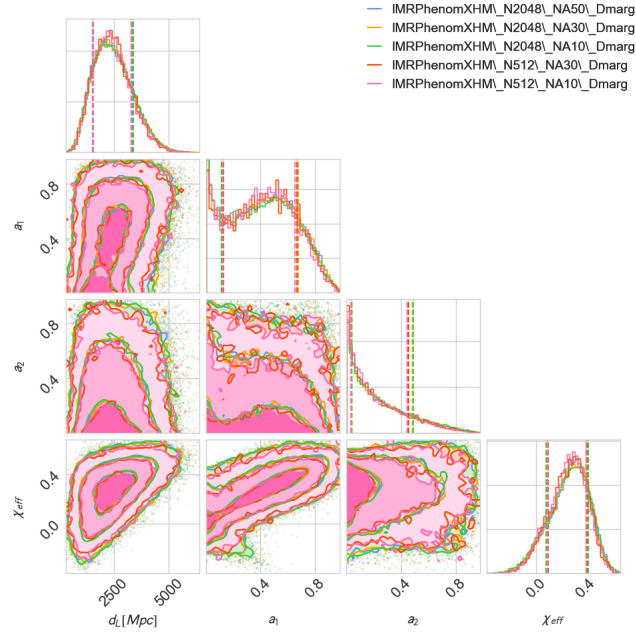


FIGURA D.2: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con los espines y la distancia luminosa, para el modelo IMRPhenomXHM, variando los parámetros del algoritmo.

D.1.1.1.1 Resultados para el modelo IMRPhenomXP.

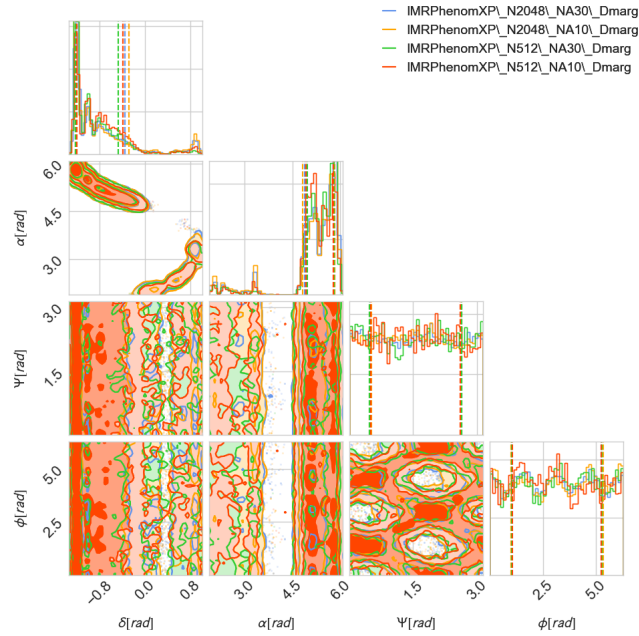


FIGURA D.3: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con la ubicación de la fuente en la esfera celeste, el ángulo de polarización y la fase orbital, para el modelo IMRPhenomXP, variando los parámetros del algoritmo.

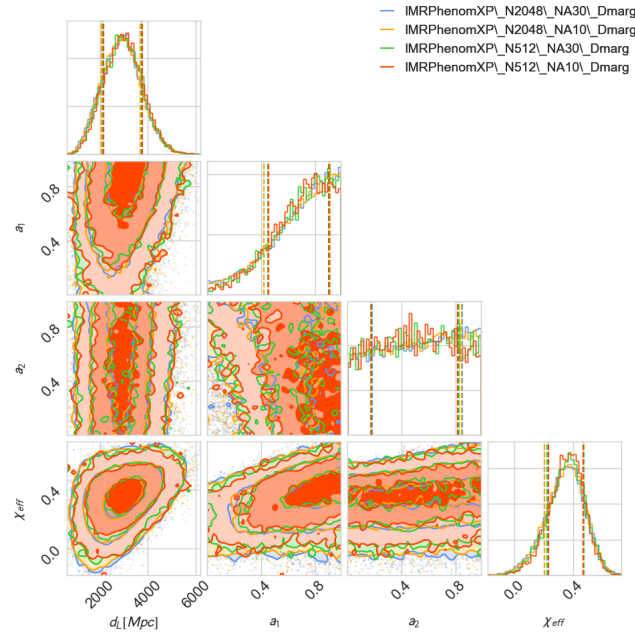


FIGURA D.4: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con los espines y la distancia luminosa, para el modelo IMRPhenomXP, variando los parámetros del algoritmo.

D.1.1.1.2 Resultados para el modelo IMRPhenomXPHM.

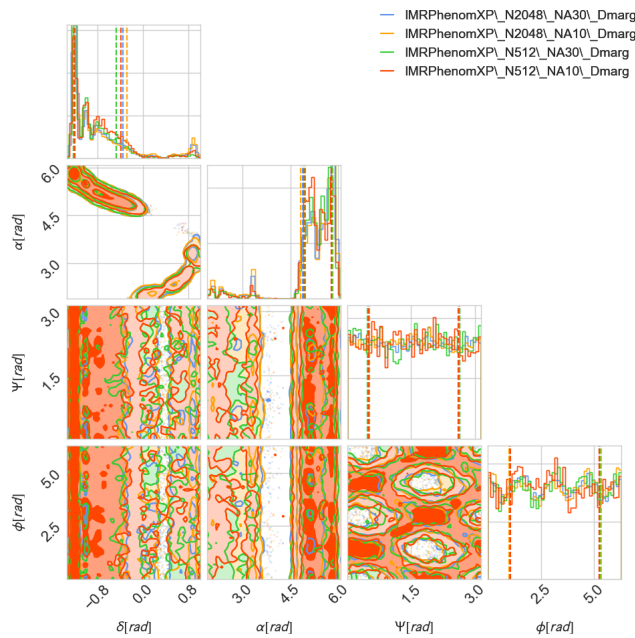


FIGURA D.5: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con la ubicación de la fuente en la esfera celeste, el ángulo de polarización y la fase orbital, para el modelo IMRPhenomXPHM, variando los parámetros del algoritmo.

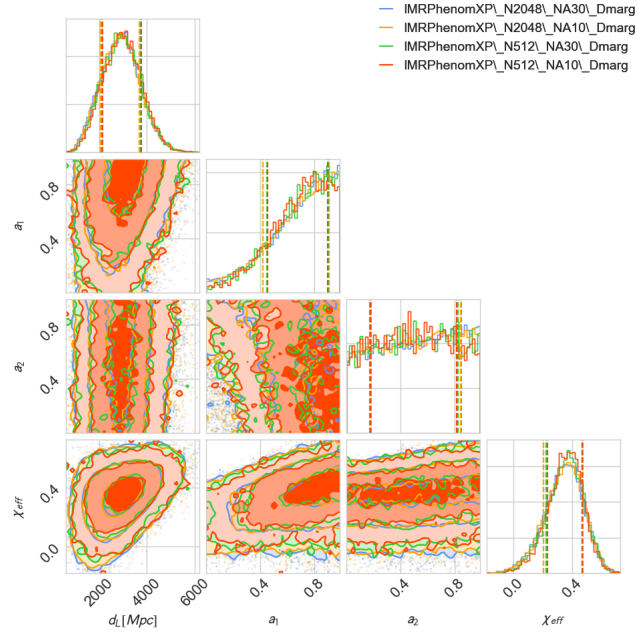


FIGURA D.6: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con los espines y la distancia luminosa, para el modelo IMRPhenomXPHM, variando los parámetros del algoritmo.

D.1.1.1.3 Resultados para el modelo IMRPhenomXHM y IMRPhenomHM.

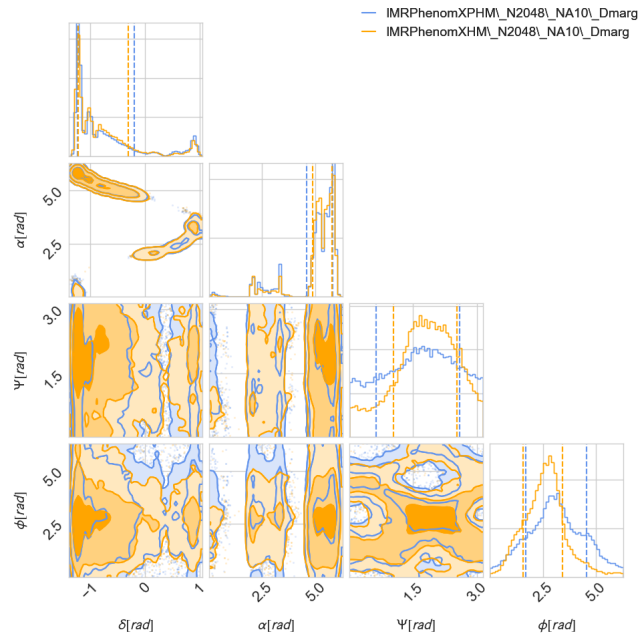


FIGURA D.7: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con la ubicación de la fuente en la esfera celeste, el ángulo de polarización y la fase orbital, para los modelos IMRPhenomXHM y IMRPhenomHM.

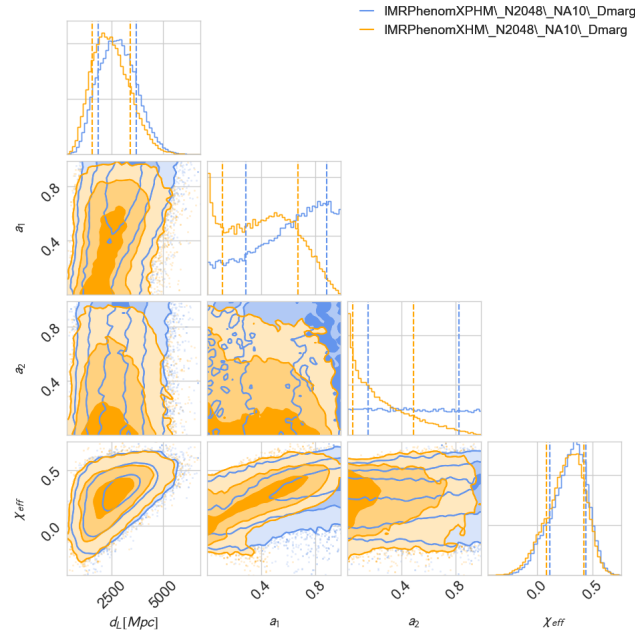


FIGURA D.8: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con los espines y la distancia luminosa, para los modelos IMRPhenomXHM y IMRPhenomXPHM.

D.1.2. Estudio de la precesión.

D.1.2.1. Comparación de las diversas opciones para el modelo IMRPhenomXPHM.

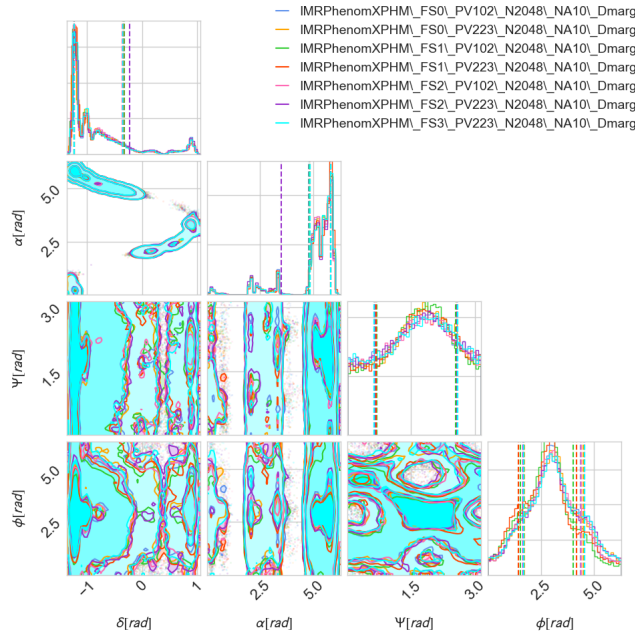


FIGURA D.9: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con la ubicación de la fuente en la esfera celeste, el ángulo de polarización y la fase orbital, para IMRPhenomXPHM, variando los parámetros del modelo.

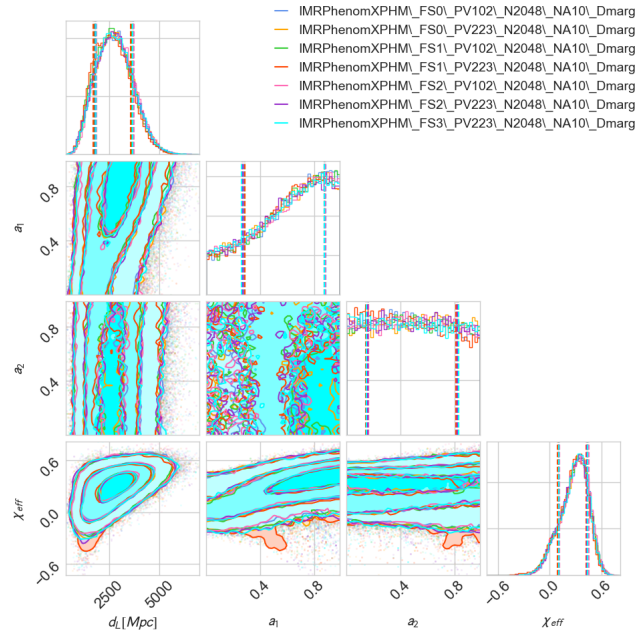


FIGURA D.10: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con los espines y la distancia luminosa, para IMRPhenomXPHM, variando los parámetros del modelo.

D.1.2.2. Comparación con el modelo por defecto.

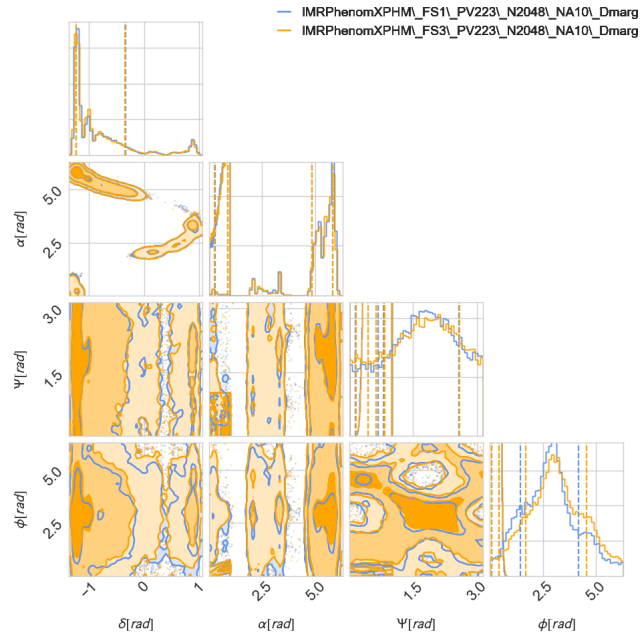


FIGURA D.11: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con la ubicación de la fuente en la esfera celeste, el ángulo de polarización y la fase orbital, para el modelo por defecto y el modelo rojo, con $N_{live} = 2048$ y $n_{act} = 10$.

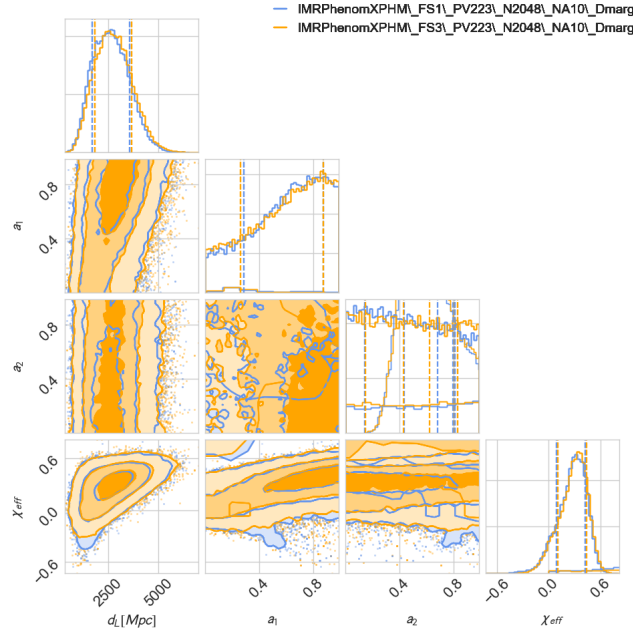


FIGURA D.12: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con los espines y la distancia luminosa, para el modelo por defecto y el modelo rojo, con $N_{live} = 2048$ y $n_{act} = 10$.

D.2. GW150914.

D.2.1. Estudio de la convergencia.

D.2.1.1. Resultados para el modelo IMRPhenomXHM.

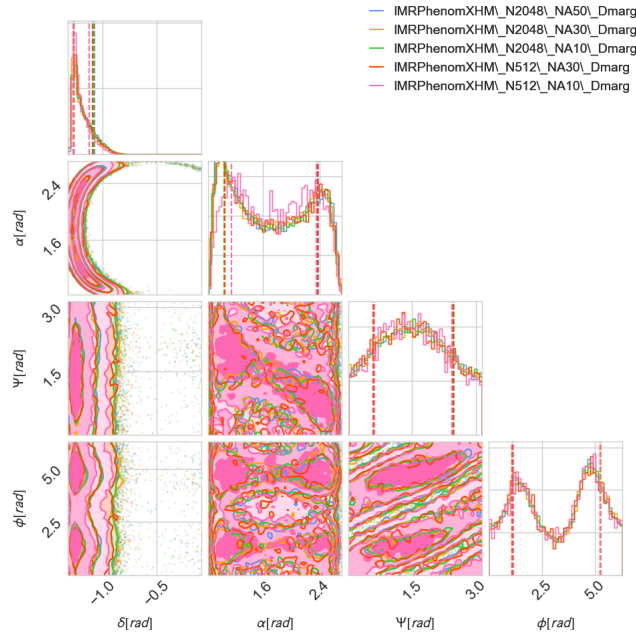


FIGURA D.13: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con la ubicación de la fuente en la esfera celeste, el ángulo de polarización y la fase orbital, para el modelo IMRPhenomXHM, variando los parámetros del algoritmo.

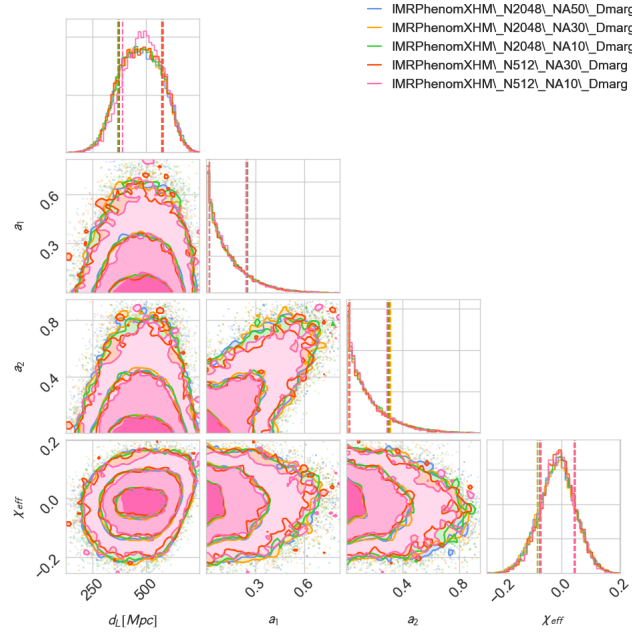


FIGURA D.14: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con los espines y la distancia luminosa, para el modelo IMRPhenomXHM, variando los parámetros del algoritmo.

D.2.1.1.1 Resultados para el modelo IMRPhenomXP.

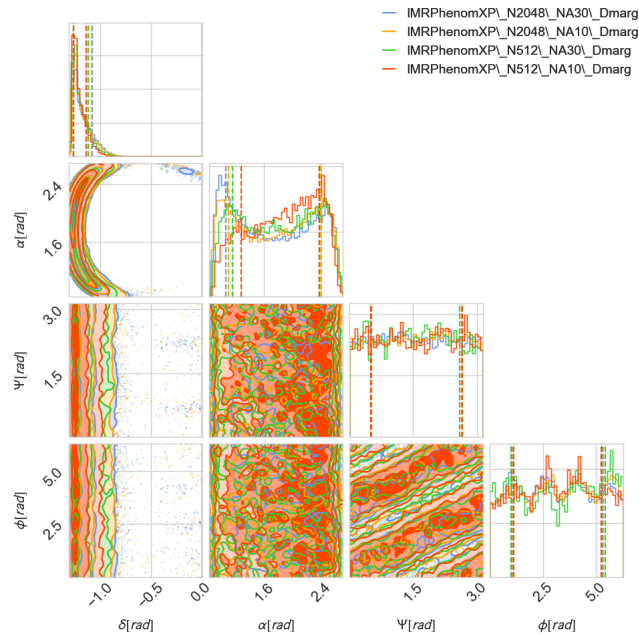


FIGURA D.15: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con la ubicación de la fuente en la esfera celeste, el ángulo de polarización y la fase orbital, para el modelo IMRPhenomXP, variando los parámetros del algoritmo.

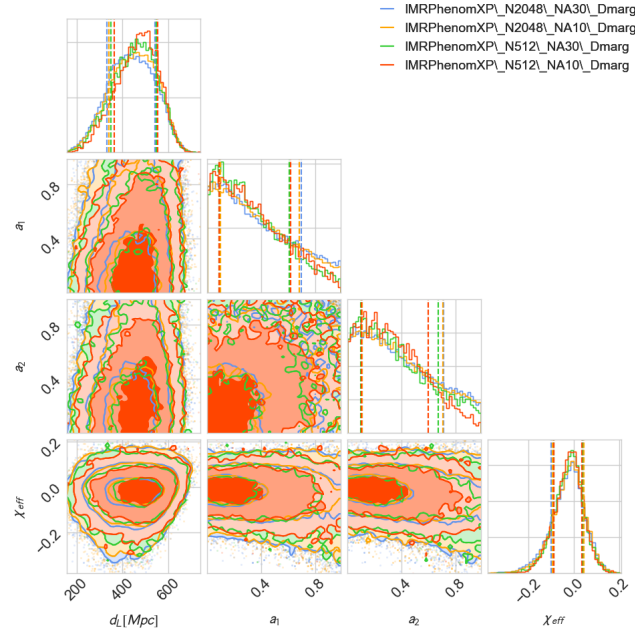


FIGURA D.16: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con los espines y la distancia luminosa, para el modelo IMRPhenomXP, variando los parámetros del algoritmo.

D.2.1.2. Resultados para el modelo IMRPhenomXPHM.

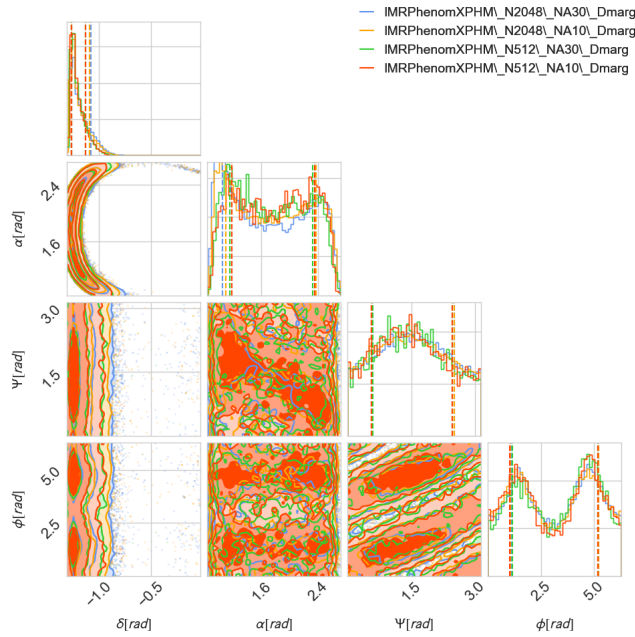


FIGURA D.17: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con la ubicación de la fuente en la esfera celeste, el ángulo de polarización y la fase orbital, para el modelo IMRPhenomXPHM, variando los parámetros del algoritmo.

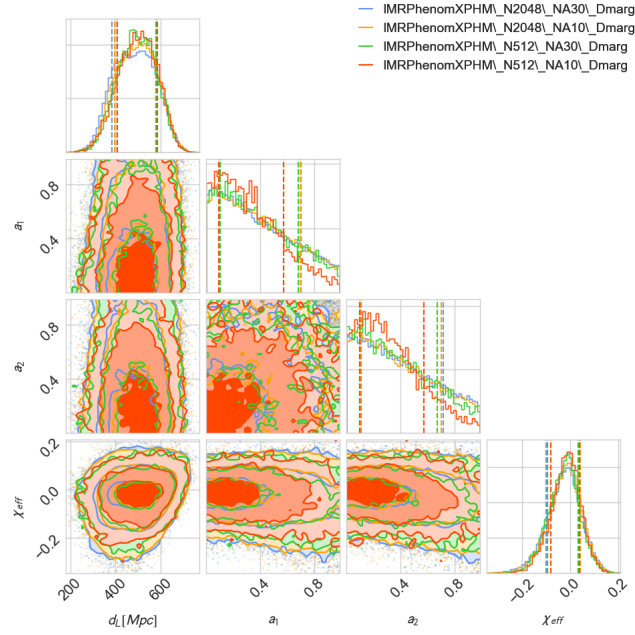


FIGURA D.18: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con los espines y la distancia luminosa, para el modelo IMRPhenomXPHM, variando los parámetros del algoritmo.

D.3. GW190814.

D.3.1. Estudio de la convergencia.

D.3.1.1. Resultados para el modelo IMRPhenomXPHM.

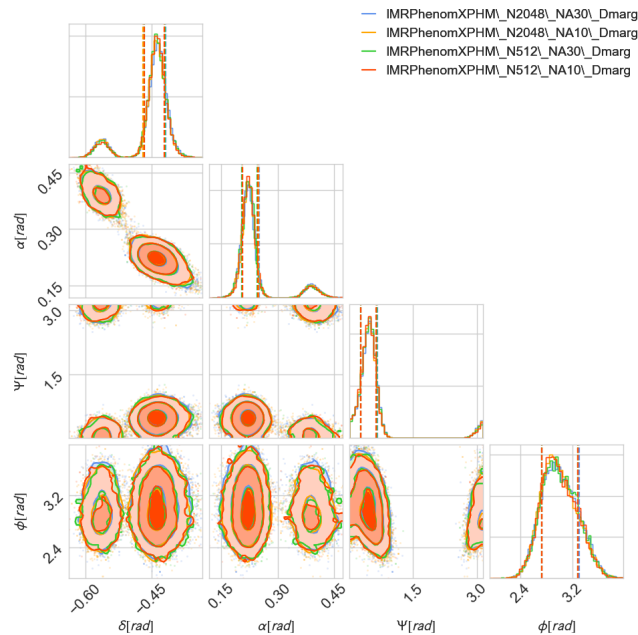


FIGURA D.19: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con la ubicación de la fuente en la esfera celeste, el ángulo de polarización y la fase orbital, para el modelo IMRPhenomXPHM, variando los parámetros del algoritmo.

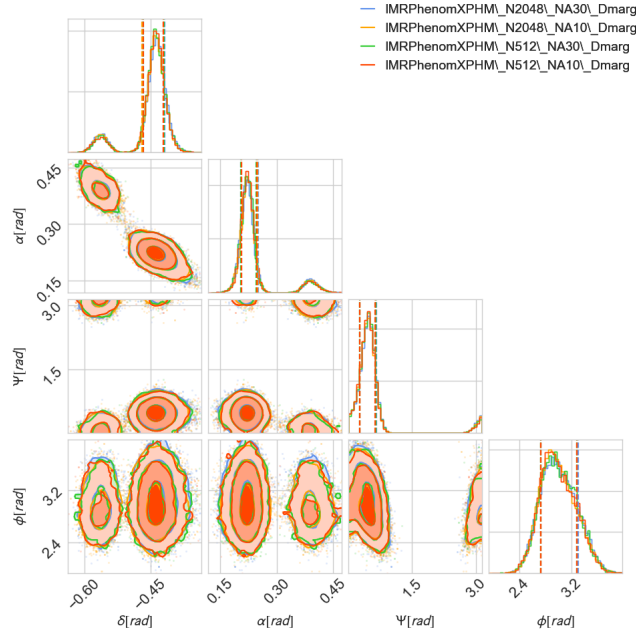


FIGURA D.20: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con los espines y la distancia luminosa, para el modelo IMRPhenomXPHM, variando los parámetros del algoritmo.

D.3.1.2. Resultados para el modelo IMRPhenomXP.

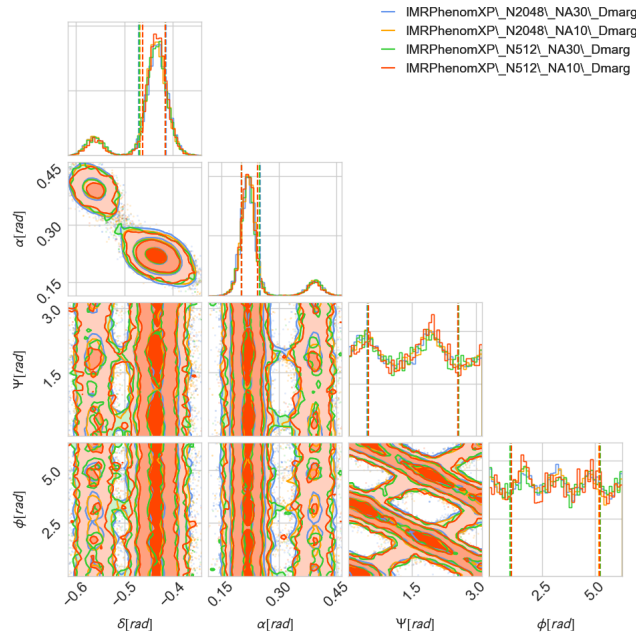


FIGURA D.21: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con la ubicación de la fuente en la esfera celeste, el ángulo de polarización y la fase orbital, para el modelo IMRPhenomXP, variando los parámetros del algoritmo.

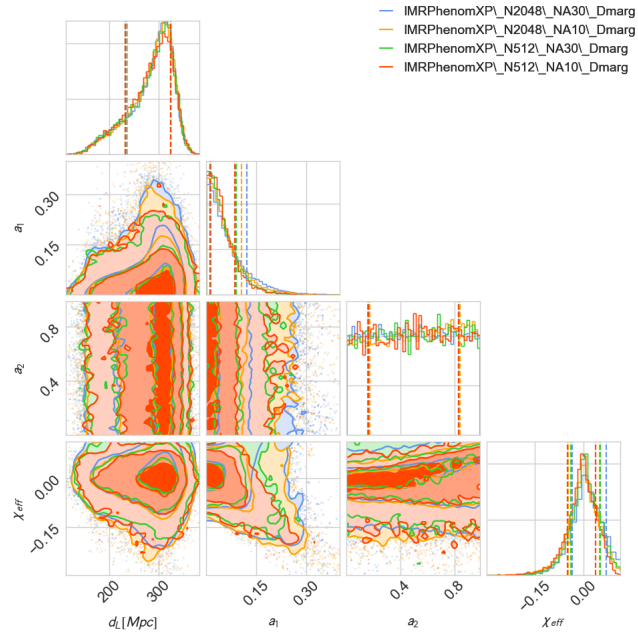


FIGURA D.22: Gráfico de esquina que muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori en una y dos dimensiones de los parámetros relacionados con los espines y la distancia luminosa, para el modelo IMRPhenomXP, variando los parámetros del algoritmo.

Bibliografía

- [1] News Release. LIGO Caltech (2018). *LIGO Prepares for Third Observing Run*. Disponible en <https://www.ligo.caltech.edu/news/ligo20180921>.
- [2] EHT Media 2019. «Press Release (April 10, 2019): Astronomers Capture First Image of a Black Hole». En: *Press release: Event Horizon Telescope*. (2019).
- [3] Nobel Media AB 2019. «Press release: The Nobel Prize in Physics 2017». En: *Press release: The Nobel Prize in Physics 2017*. NobelPrize.org. Nobel Media AB 2019. Tue. 18 Jun 2019. (2017).
- [4] NASA Administrator. *What Are Black Holes?* Disponible en https://www.nasa.gov/vision/universe/starsgalaxies/black_hole_description.html.
- [5] M. M. Akbar. «Spherical Spacelike Geometries in Static Spherically Symmetric Spacetimes: Generalized Painlevé-Gullstrand Coordinates, Foliation, and Embedding.» En: *arXiv:1702.00964v2* (2017).
- [6] B. Luo et al. «The Chandra deep field-south survey: 7 ms source catalogs». En: *arXiv:1611.03501v2* (2016).
- [7] B. P. Abbot et al. En: *Physical review X* 9, 031040 (2019).
- [8] B. P. Abbott et al. «Characterization of transient noise in Advanced LIGO relevant to gravitational wave signal GW150914.» En: *LIGO Document Control Center* (2015).
- [9] B. P. Abbott et al. «Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger.» En: *Physical Review Letters* 116, 061102 (2016).
- [10] D. V. Martynov et al. «The Sensitivity of the Advanced LIGO Detectors at the Beginning of Gravitational Wave Astronomy.» En: *arXiv:1604.00439v3* (2018).
- [11] I. M. Romero-Shaw et al. «Bayesian inference for compact binary coalescences with Bilby: Validation and application to the first LIGO–Virgo gravitational-wave transient catalogue». En: *arXiv:2006.00714v3* (2020).
- [12] I. M. Romero-Shaw et al. «Bayesian inference for compact binary coalescences with Bilby: Validation and application to the first LIGO–Virgo gravitational-wave transient catalogue». En: *arXiv:2006.00714v3* (2020).
- [13] Katerina Chatziioannou et al. «On the properties of the massive binary black hole merger GW170729». En: *arXiv:1903.06742v3* (2019).
- [14] Asad Ali y col. «Bayesian Inference on Gravitational Waves». En: *Pak.j.stat.oper.res. Vol.XI No.4 2015 pp645-665* (2015).
- [15] Santo Armenia. *Galilei and Einstein: Reflections on the theory of general relativity. The free fall of bodies. The shape of solid bodies*. Tektime, 2019.
- [16] R. Arnowitt, S. Deser y C. W. Misner. «Dynamical Structure and Definition of Energy in General Relativity». En: *Phys. Rev. Volume 116, Number 5* (1959).
- [17] Gregory Ashton y col. «Bilby: A user-friendly Bayesian inference library for gravitational-wave astronomy». En: *arXiv:1811.02042v1* (2018).
- [18] S. Babak y col. En: *arXiv:1208.349v1* (2012).
- [19] Manuel Crespo Ballesteros. «Ecuaciones del campo de Einstein». En: *Universidad de Murcia. Licenciatura de Física* (2019).
- [20] Thomas Bayes. *Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances*. Disponible en <https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rstl.1763.0053>.

- [21] José Manuel Montejó Bernardo. *El experimento más famoso de Galileo probablemente nunca tuvo lugar*. Disponible en https://www.eldiario.es/sociedad/experimento-famoso-Galileo-probablemente-lugar_0_900110136.html.
- [22] L. G. Bretthorst. «Bayesian Spectrum Analysis and Parameter Estimation, Lecture Notes in Statistics». En: *Number 48*. Springer-Verlag, New York. (1988).
- [23] Torsten Bronger. *PP3 – Celestial Chart Generation*. Disponible en <http://pp3.sourceforge.net/>.
- [24] Juan Calderón Bustillo. «Sub-dominant modes of the Gravitational Radiation from Compact Binary Coalescences: Construction of hybrid waveforms and Impact on Gravitational Wave searches». Tesis doct. Universitat de les Illes Balears, 2015.
- [25] LIGO Caltech. Disponible en <https://www.ligo.caltech.edu/image/ligo20150731c>.
- [26] LIGO Caltech. *About*. Disponible en <https://www.ligo.caltech.edu/page/about>.
- [27] LIGO Caltech. *LIGO's Interferometer*. Disponible en <https://www.ligo.caltech.edu/page/ligos-ifo>.
- [28] LIGO Caltech. *Sources and Types of Gravitational Waves*. Disponible en <https://www.ligo.caltech.edu/page/gw-sources>.
- [29] V. M. Canuto e I. Goldman. «General Relativity». En: *arXiv:1509.01243v1* (2015).
- [30] Bradley W. Carroll y Dale A. Ostlie. *An Introduction to Modern Astrophysics*. Pearson Addison Wesley, 2007.
- [31] M. Celoria y col. «Lecture notes on black hole binary astrophysics». En: *arXiv:1807.11489v3* (2018).
- [32] Katerina Chatziioannou. *GWTC170729HM DataRelease*. Disponible en https://git.ligo.org/katerina.chatziioannou/gw170729hm_datarelease.
- [33] N. Christensen y R. Meyer. «Markov chain Monte Carlo methods for Bayesian gravitational radiation data analysis.» En: *Phys. Rev. D*, 58(8):082001. 2, 12 (1998).
- [34] LIGO Scientific Collaboration y Virgo Collaboration. *GWTC Release List. Gravitational Wave Open Science Center*. Disponible en <https://www.gw-openscience.org/eventapi/html/>.
- [35] The Event Horizon Telescope Collaboration. «First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole». En: *The Astrophysical Journal Letters*, 875:L1 (17pp), 2019 April 10 (2019).
- [36] Hugo García Compeán, Jose Ruben Morones Ibarra y Leonel Toledo Sesma. «Ondas gravitacionales: Un nuevo contacto de la física con la tecnología.» En: *ResearchGate*. (2016).
- [37] Nicolaus Copernicus. *De revolutionibus orbium coelestium*. Disponible en <http://ads.harvard.edu/books/1543droc.book/>.
- [38] C. Cutler y E. E. Flanagan. «Gravitational waves from merging compact binaries: How accurately can one extract the binary's parameters from the inspiral waveform?» En: *Phys. Rev. D*, 49(6):2658-2697 (1994).
- [39] Tim Dietrich, Tanja Hinderer y Anuradha Samajdar. «Interpreting Binary Neutron Star Mergers. Describing the binary Neutron Star Dynamics, Modeling Gravitational Waveforms, and Analyzing Detections.» En: *arXiv:2004.02527v1* (2020).
- [40] Albert Einstein. *Die Feldgleichungen der Gravitation*. Disponible en <https://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHOdocuView?url=/permanent/echo/einstein/sitzungsberichte/6E3MAXK4/index.meta&pn=1>.

- [41] Albert Einstein. *Grundgedanken der allgemeinen Relativitätstheorie und Anwendung dieser Theorie in der Astronomie*. Disponible en <https://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECH0docuView?url=/permanent/echo/einstein/sitzungsberichte/ZQOU8TBC/index.meta&viewMode=auto>.
- [42] Albert Einstein. *Zur allgemeinen Relativitätstheorie*. Disponible en <https://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECH0docuView?url=/permanent/echo/einstein/sitzungsberichte/199SW1KB/index.meta&pn=1>.
- [43] Administrator of Einstein Telescope. *Introduction (2020)*. Disponible en <http://www.et-gw.eu>.
- [44] ESA. *Planck's view of the cosmic microwave background*. Disponible en https://www.esa.int/ESA_Multimedia/Images/2018/07/Planck_s_view_of_the_cosmic_microwave_background.
- [45] Euclides. *Elementos*. Disponible en <http://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pdf>.
- [46] Stephen Fairhurst y col. «Two-harmonic approximation for gravitational waveforms from precessing binaries». En: *arXiv:1908.05707v2* (2020).
- [47] S. L. Finn y Chernó D. F. «Observing binary inspiral in gravitational radiation: One interferometer». En: *Phys. Rev. D*, 47(6):2198-2219 (1993).
- [48] J. L. Fry y Z. E. Musielak. «Inertial Mass and its Various Representations». En: *Adv. Studies Theor. Phys.*, Vol. 7, 2013, no. 17, 839 - 852 (2013).
- [49] Galileo Galilei. *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*. Disponible en https://web.archive.org/web/20110604150851/http://www.liberliber.it/biblioteca/g/galilei/discorsi_e_dimostrazioni_matematiche_intorno_a_due_nuove_etc/pdf/discor_p.pdf.
- [50] Cecilio García-Quirós y col. En: *arXiv:2001.10914v1* (2020).
- [51] S. Giacintucci y col. «Discovery of a giant radio fossil in the Ophiuchus galaxy cluster». En: *arXiv:2002.01291v1*. (2020).
- [52] Philip B. Graff, Alessandra Buonanno y B. S. Sathyaprakash. «The Missing Link: Bayesian Detection and Measurement of Intermediate-Mass Black-Hole Binaries». En: *arXiv:1504.04766v2 [gr-qc]* (2015).
- [53] Marvin Jay Greenberg. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries. Development and History*. W.H.Freeman y Company, 1993.
- [54] P. Gregory. «Bayesian Logical Data Analysis for the Physical Sciences.» En: *Cambridge University Press, New York, NY, USA*. (2005).
- [55] ICRR GW group. *About KAGRA Project*. Disponible en <https://gwcenter.icrr.u-tokyo.ac.jp/en/plan>.
- [56] LIGO Hanford. *Advanced LIGO's Extended Reach*. Disponible en <https://www.ligo.caltech.edu/WA/image/ligo20160128>.
- [57] Mark Hannam y col. «A simple model of complete precessing black-hole-binary gravitational waveforms». En: *arXiv:1308.3271v2* (2014).
- [58] Thomas E. Harrison. «Mass measurements of black holes in x-ray transients: Is there a mass gap?» En: *arXiv:1205.1805v1* (2012).
- [59] W. K. Hasting. «Monte Carlo Sampling Methods Using Markov Chains and Their Applications». En: *Biometrika*, Vol. 57, No. 1. (Apr., 1970), pp. 97-109 (1970).
- [60] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis y P.V. Landshoff. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1973.
- [61] Edward Higson y col. «Dynamic nested sampling: an improved algorithm for parameter estimation and evidence calculation». En: *arXiv:1704.03459v4* (2018).

- [62] Huggett, Nick y Carl Hoefer. «Absolute and Relational Theories of Space and Motion». En: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Ed. por Edward N. Zalta. Spring 2018. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2018.
- [63] Piotr Jaranowski y Andrzej Królak. *Analysis of Gravitational-Wave Data*. Cambridge University Press, 2009.
- [64] Johan Jarnestad. *Cross section of a black hole. The Royal Swedish Academy of Science*. Disponible en <https://www.nobelprize.org/uploads/2020/10/fig2-phy-en-cross-section.pdf>.
- [65] Alicia Calafat Jaso. «Medición de ondas gravitacionales de sistemas binarios de agujeros negros con masas intermedias.» En: *Memòria del Treball de Fi de Grau. Facultat de Ciències. UIB.* (2019).
- [66] E. T. Jaynes. «Probability Theory: The Logic of Science (Vol II)». En: *Cambridge University Press*. (2003).
- [67] E. T. Jaynes. «Scientific Inference.» En: *Cambridge University Press, 1st edn edition*. (1931).
- [68] E. T. Jaynes. «Theory of Probability.» En: *The Clarendon Press, Oxford, 1st edn edition*. (1939).
- [69] Sebastian Khan y col. En: *arXiv:1508.07253v2* (2015).
- [70] Kostas D. Kokkotas. «Quasi-Normal Modes of Stars and Black Holes.» En: *arXiv:gr-qc/9909058v1* (1999).
- [71] N. V. Krishnendu y Anjali B. Yelikar. «Testing the Kerr nature of intermediate-mass and supermassive black hole binaries using spin-induced multipole moment measurements». En: *arXiv:1904.12712v1* (2019).
- [72] John M. Lee. *Riemannian Manifolds. An Introduction to Curvature*. Springer-Verlag New York, Inc., 1997.
- [73] Herbert Lichtenegger y Bahram Mashhoon. «Mach's Principle». En: *arXiv:physics/0407078v2* (2008).
- [74] LIGO Scientific Collaboration. *LIGO Algorithm Library - LALSuite*. free software (GPL). 2018. DOI: [10.7935/GT1W-FZ16](https://doi.org/10.7935/GT1W-FZ16).
- [75] R. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration y Virgo Collaboration). «GW190521: A Binary Black Hole Merger with a Total Mass of 150 M». En: *Physical review letters* 125, 101102 (2020) (2020).
- [76] S. J. Waldman for the LIGO Scientific Collaboration. «The Advanced LIGO Gravitational Wave Detector». En: *arXiv:1103.2728v1* (2011).
- [77] Lisamission.org. *LISA - observing gravitational waves in space*. Disponible en <https://www.lisamission.org>.
- [78] Lionel London y col. En: *arXiv:1708.00404v4* (2018).
- [79] LSC. *El tañido de las campanas cósmicas: En busca de oscilaciones de agujeros negros*. Disponible en <https://www.ligo.org/sp/science/Publication-S5S6RD/>.
- [80] LSC. *GW190521: The most massive black hole collision observed to date (2020)*. Disponible en <https://www.ligo.org/science/Publication-GW190521/>.
- [81] LSC. *GWTC-1: A new catalog of gravitational-wave detections*. Disponible en <https://www.ligo.org/science/Publication-02Catalog/>.
- [82] LSC. *Introduction to LIGO and gravitational waves. Burst gravitational waves*. Disponible en <https://www.ligo.org/science/GW-Burst.php>.
- [83] LSC. *Observación de ondas gravitacionales procedentes de la fusión de un sistema binario de agujeros negros*. Disponible en <https://www.ligo.org/science/Publication-GW150914/translations/science-summary-spanish.pdf>.
- [84] LSC. *Observation of gravitational waves from a binary black hole merger*. Disponible en <https://www.ligo.org/science/Publication-GW150914/>.

- [85] LSC. *Observing plans and public alerts*. Disponible en <https://www.ligo.org/scientists/GWEMalerts.php>.
- [86] LSC. *¿Tenía razón Einstein acerca de la gravedad fuerte? Usando ondas gravitacionales de la fusión de dos agujeros negros para testear la relatividad general*. Disponible en <https://www.ligo.org/sp/science/Publication-GW150914TestingGR/>.
- [87] Ernst Mach. *The science of mechanics*. Disponible en <https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.154174/page/n5/mode/2up>.
- [88] Michele Maggiore. *Gravitational Waves. Volume 1. Theory and Experiments*. Oxford University Press, 2008.
- [89] Ilya Mandel y Alison Farmer. «Merging stellar-mass binary black holes». En: *arXiv:1806.05820v1* (2018).
- [90] Ben Margalit y Brian D. Metzger. «Constraining the maximum mass of neutron stars from multimessenger observations of GW170817.» En: *arXiv:1710.05938v2* (2017).
- [91] Max-Planck-Gesellschaft. *What is GEO600?*. Disponible en <https://www.geo600.org/3020/About-GEO600>.
- [92] Nicholas Metropolis y col. «Equation of State Calculations by Fast Computing Machines». En: *J. Chem. Phys.* 21, 1087 (1953); doi: 10.1063/1.1699114 (1953).
- [93] Misner y col. *Gravitation*. W. H. Freeman y Princenton University Press, 1973.
- [94] Satya Mohapatra, James Clark y Laura Cadona. «Effect of the inclusion of subdominant modes of gravitational-waves emitted from binary black hole mergers - measured by a gravitational-wave burst search algorithm». En: *Amaldi 10. Warszawa*. (2013).
- [95] C J Moore, R H Cole y C P L Berry. «Gravitational-wave sensitivity curves». En: *arXiv:1408.0740v2* (2014).
- [96] Sir Isaac Newton. *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. Disponible en <https://archive.org/details/newtonspmathema00newtrich/page/n7/mode/2up>.
- [97] Ken K. Y. Ng y col. «Gravitational-wave astrophysics with effective-spin measurements: Asymmetries and selection biases». En: *arXiv:1805.03046v2* (2018).
- [98] Anna M. Nobili. «On the universality of free fall, the equivalence principle, and the gravitational redshift». En: *American Journal of Physics* 81, 527 (2013).
- [99] Anna M. Nobili y Alberto Anselmi. «Relevance of the weak equivalence principle and experiments to test it: Lessons from the past and improvements expected in space». En: *Physics Letters A* (2018).
- [100] Gayathri V. P. Bacon y col. «Driving unmodelled gravitational-wave transient searches using astrophysical information». En: *arXiv:1805.04023v4* (2018).
- [101] A. Pais. *Subtle is the Lord: The Science and the Life of Albert Einstein: The Science and the Life of Albert Einstein*. OUP Oxford, 2005.
- [102] Yi Pan y col. «Inspirational-merger-ringdown multipolar waveforms of nonspinning black-hole binaries using the effective-one-body formalism». En: *arXiv:1106.1021 [gr-qc]* (2012).
- [103] J. Fernando Pascual-Sánchez. «El modelo matemático del espacio-tiempo». En: *Universidad de Valladolid* ().
- [104] Alf-Håkon Pedersen. «Linearized general relativity and its quantization». En: *Norwegian University of Science and Technology* (2017).
- [105] Asad Pe'er. «Curvature». En: *University College Cork, Ireland* (2014).
- [106] Nicklas Persson. «Shortest paths and geodesics in metric spaces». Tesis doct. Umeå Universitet, 2012.

- [107] APS physics. *A fleeting detection of gravitational waves*. Disponible en <https://physics.aps.org/story/v16/st19>.
- [108] Geraint Pratten y col. En: *arXiv:2004.06503v1* (2020).
- [109] Geraint Pratten y col. En: *arXiv:2001.11412v1* (2020).
- [110] Geraint Pratten y col. *The IMRPhenomX Suite of Waveform Models*. Texas Relativity Meeting, Portsmouth, UK (2019).
- [111] Reinhard Prix. «Bayesian methods in the search for gravitational waves.» En: *Albert-Einstein-Institut Hannover* (2016).
- [112] Cosmic Explorer Project. *Cosmic Explorer a next generation gravitational wave detector*. Disponible en <https://cosmicexplorer.org>.
- [113] LIGO-India Project. *A Gravitational Wave detector project on Indian soil*. Disponible en <https://www.ligo-india.in>.
- [114] PyCBC Development Team. *PyCBC*. 2020. DOI: [10.5281/zenodo.596388](https://doi.org/10.5281/zenodo.596388).
- [115] Cecilio García Quirós. «Waveform modelling of binary black holes in the Advanced LIGO era.» Tesis doct. Universitat de les Illes Balears, 2020.
- [116] Saúl Ramos-Sánchez. *Relatividad para futuros físicos*. CopIt Arxives publishing Open Access with an Open Mind, 2018.
- [117] Th. Rivinius y col. «A triple system with a nonaccreting black hole in the inner binary: A naked-eye analog of LB-1?» En: *arXiv:2005.02541v1* (2020).
- [118] Travis Robson, Neil J. Cornish y Chang Liu. «The construction and use of LISA sensitivity curves». En: *arXiv:1803.01944v2* (2018).
- [119] Narciso Román Roy. «Teoría de la relatividad general. 100 años de las ecuaciones de Einstein de la gravitación.» En: *Universitat Politècnica de Catalunya* (2015).
- [120] Steve Sabia. *What is LISA?*. Disponible en <https://lisa.nasa.gov>.
- [121] Olivier Sarbach. «Una introducción a la teoría de los agujeros negros. XIV Escuela de Física Fundamental.» En: *Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo Morelia, Mexico*. (2019).
- [122] Philipp Scharpf. «Simulation and Visualization of Gravitational Waves from Binary Black Holes». En: *Universität Stuttgart* (2017).
- [123] Angnis Margreta Schmidt-May. «Classically Consistent Theories of Interacting Spin-2 Fields». Tesis doct. Stockholm University, 2013.
- [124] Karsten Schuhmanna y col. «Polarizing Gires-Tournois interferometer as intracavity frequency-selective element in high-power lasers.» En: *ResearchGate* (2018).
- [125] Karl Schwarzschild. *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*. Disponible en <https://es.scribd.com/doc/25310028/Ij-i-3-o-j-c>.
- [126] O. Shemmer y col. «Near infrared spectroscopy of high redshift active galactic nuclei. I. A metallicity-accretion rate relationship». En: *THE ASTROPHYSICAL JOURNAL*, 614:??-??, 2004 OCTOBER 10, ASTRO-PH/0406559. (2004).
- [127] Ethan Siegel. *LIGO Misses 100,000 Black Hole Mergers A Year (2018)*. Disponible en <https://www.forbes.com>.
- [128] John Skilling. «Nested Sampling». En: *AIP Conference Proceedings* 735, 395 (2004); doi: [10.1063/1.1835238](https://doi.org/10.1063/1.1835238) (2004).
- [129] John Skilling. «Nested Sampling for General Bayesian Computation». En: *Bayesian Anal.* 1 (2006), no. 4, 833–859; doi: [10.1214/06-BA127](https://doi.org/10.1214/06-BA127) (2006).
- [130] Rory Smith y Eric Thrane. «Optimal Search for an Astrophysical Gravitational-Wave Background». En: *Physical Review X* 8, 021019. (2018).
- [131] Rory J. E. Smith y col. «Massively parallel Bayesian inference for transient gravitational-wave astronomy». En: *arXiv:1909.11873v2* (2020).

- [132] Joshua S. Speagle. «dynesty: A Dynamic Nested Sampling Package for Estimating Bayesian Posteriors and Evidences». En: *arXiv:1904.02180v1* (2019).
- [133] NASA LAMBDA Archive Team. *LAMBDA - Education and Graphics*. Disponible en https://lambda.gsfc.nasa.gov/education/graphic_history/.
- [134] Kip Thorne. «Gravitational Waves and Experimental Tests of General Relativity.» En: (2012).
- [135] Kip. S. Thorne. «Gravitational Waves». En: *arXiv:gr-qc/9506086v1* (1995).
- [136] Eric Thrane y Colm Talbot. «An introduction to Bayesian inference in gravitational-wave astronomy: parameter estimation, model selection, and hierarchical models». En: *arXiv:1809.02293v8* (2020).
- [137] Samantha A. Usman y col. En: *arXiv:1508.02357v3* (2016).
- [138] Vijay Varma y Parameswaran Ajith. En: *arXiv:1612.05608v2* (2017).
- [139] J. Veitch y col. «Parameter estimation for compact binaries with ground-based gravitational-wave observations using LALInference». En: *arXiv:1409.7215v2* (2015).
- [140] Tejaswi Venumadhav y col. En: *arXiv:1902.10341v2* (2019).
- [141] Xabier Cid Vidal y Ramón Cid Manzano. «¿Es la Tierra un lugar seguro para el LHC (CERN)?» En: *Real Sociedad Española de Física* (2008).
- [142] Xabier Cid Vidal y Ramón Cid Manzano. «¿Es la Tierra un lugar seguro para el LHC (CERN)?» En: *Real Sociedad Española de Física* (2008).
- [143] Virgo. Disponible en <https://www.virgo-gw.eu>.
- [144] Robert M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [145] Clifford M. Will. «Special Relativity: A Centenary Perspective». En: *arXiv:gr-qc/0504085v1* (2005).
- [146] Clifford M. Will. *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Cambridge University Press, 1993.