



**Universitat**  
de les Illes Balears

## **TRABAJO DE FIN DE MÁSTER**

# **INCORPORACIÓN DE MÉTRICAS DIFUSAS EN EL ALGORITMO RANSAC: IMPLEMENTACIÓN Y ANÁLISIS DE COMPORTAMIENTO**

**Esaú Ortiz Toribio**

**Máster Universitario en Ingeniería Industrial**

**Centro de Estudios de Postgrado**

**Año Académico 2020-21**

# **INCORPORACIÓN DE MÉTRICAS DIFUSAS EN EL ALGORITMO RANSAC: IMPLEMENTACIÓN Y ANÁLISIS DE COMPORTAMIENTO**

**Esaú Ortiz Toribio**

**Trabajo de Fin de Máster**

**Centro de Estudios de Postgrado**

**Universidad de las Illes Balears**

**Año Académico 2020-21**

Palabras clave del trabajo:

RANSAC, estimación robusta de modelos, métrica difusa

*Nombre Tutor del Trabajo: Alberto Ortiz Rodríguez*

*Nombre Tutor del Trabajo: Juan José Miñana Prats*

*Nombre Tutor del Trabajo: Óscar Valero Sierra*

# Resumen

La estimación robusta de modelos es un problema recurrente en áreas tales como robótica y visión por computador debido a la incertidumbre e imprecisión de los datos de los que típicamente se dispone. En este trabajo se propone y evalúa un conjunto de algoritmos denominados como FM-RANSAC, que constituyen enfoques de estimación robusta basados en el conocido algoritmo RANSAC, incorporando modificaciones inspiradas en el concepto de métrica difusa. La incorporación de métricas difusas (FM por sus siglas en inglés) en RANSAC permite expresar las distancias entre los datos sensoriales y el modelo estimado como un grado de proximidad medido con respecto a un parámetro, lo cual resulta conveniente en presencia de la imprecisión y el ruido inherentes a las mediciones en entornos reales. Los algoritmos propuestos utilizan métricas difusas en el bucle principal determinar la bondad del modelo estimado en cada iteración y, también, en una etapa posterior de refinamiento.

Con el objetivo de evaluar el desempeño de los algoritmos FM-RANSAC, se presentan aplicaciones a varios problemas de estimación de modelos, típicamente encontrados en tareas de percepción. Además, los resultados de las estimaciones con el algoritmo propuesto se comparan con otras variantes de RANSAC en términos de precisión de estimación. De esta manera, se concluye que los estimadores propuestos son capaces de superar a las versiones clásicas consideradas.



# Acrónimos

**LS** *Least Squares*

**TLS** *Total Least Squares*

**WLS** *Weighted Least Squares*

**WTLS** *Weighted Total Least Squares*

**LMedS** *Least Median of Squares*

**BDP** *Breakdown Point*

**SAC** *Sample Consensus*

**RANSAC** *Random Sample Consensus*

**MSAC** *M-estimator SAC*

**MLESAC** *Maximum Likelihood SAC*

**NAPSAC** *N-Adjacent Points SAC*

**PROSAC** *Progressive SAC*

**GroupSAC** *Group SAC*

**R-RANSAC** *Randomized RANSAC*

**LO-RANSAC** *Locally Optimizezed RANSAC*

**DL-RANSAC** *Descendant Likelihood RANSAC*

**PSSC-RANSAC** *Prior Sampling & Sample Check RANSAC*

**FM-RANSAC** o **FM-R** *Fuzzy Metric RANSAC*

**TFM** *Trabajo Final de Máster*

**RP** *Reestimación Ponderada*

**RPI** Reestimación Ponderada Iterativa

**RMSE** *Root Mean Square Error*

# Índice general

Resumen	I
Acrónimos	IV
Índice general	VII
Índice de símbolos	IX
Índice de figuras	XII
Índice algoritmos	XIII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Estimación de parámetros . . . . .	1
1.2. Estimación robusta de modelos . . . . .	2
1.3. Métricas difusas . . . . .	3
1.4. Objetivos . . . . .	3
1.5. Organización de este documento . . . . .	3
1.6. Publicaciones de este trabajo . . . . .	4
<b>2. Fundamentos teóricos</b>	<b>5</b>
2.1. <i>Least Squares</i> y <i>Total Least Squares</i> . . . . .	5
2.2. Estimadores robustos . . . . .	6
2.2.1. Evaluación del grado robustez de un estimador . . . . .	6
2.2.2. Breve revisión de estimadores robustos . . . . .	6
2.3. <i>Random Sample Consensus</i> (RANSAC) . . . . .	7
2.3.1. Generación de hipótesis . . . . .	9
2.3.2. Evaluación de hipótesis . . . . .	9
2.3.3. Reestimación del modelo . . . . .	10
2.4. Variantes de RANSAC . . . . .	10
2.4.1. Mejoras enfocadas a la selección del conjunto mínimo . . . . .	10
2.4.2. Mejoras enfocadas a la evaluación de la hipótesis . . . . .	11
2.5. Concepto de métrica difusa . . . . .	12

<b>3. Incorporación de métricas difusas en RANSAC</b>	<b>15</b>
3.1. Métricas difusas consideradas . . . . .	15
3.2. Variantes de RANSAC propuestas . . . . .	16
<b>4. Metodología experimental</b>	<b>23</b>
4.1. Definición de los modelos considerados . . . . .	23
4.1.1. Hiperplanos . . . . .	23
4.1.2. Elipses . . . . .	23
4.1.3. Homografías de similitud . . . . .	24
4.2. Generación de conjuntos sintéticos de muestras . . . . .	25
4.2.1. Hiperplanos . . . . .	25
4.2.2. Elipses . . . . .	25
4.2.3. Homografías . . . . .	26
4.3. Configuración del proceso de estimación . . . . .	28
4.3.1. Medición de la precisión de una estimación . . . . .	28
4.3.2. Configuración de un conjunto de pruebas de estimación . . . . .	30
<b>5. Análisis de comportamiento de los algoritmos FM-R</b>	<b>31</b>
5.1. Caracterización de las métricas difusas . . . . .	31
5.1.1. Dependencia de la proporción de <i>outliers</i> . . . . .	32
5.1.2. Dependencia del umbral de ruido . . . . .	33
5.1.3. Dependencia entre el umbral de ruido y el parámetro $\theta$ . . . . .	33
5.1.4. Dependencia de la magnitud del ruido aleatorio . . . . .	34
5.1.5. Dependencia del tamaño del conjunto mínimo $S$ . . . . .	35
5.1.6. Conclusiones . . . . .	36
5.2. Comparación entre los algoritmos FM-R . . . . .	37
5.2.1. FM-R con una etapa de Reestimación Ponderada (RP) . . . . .	37
5.2.2. FM-R con una etapa de Reestimación Ponderada Iterativa (RPI) . . . . .	38
5.2.3. Conclusiones . . . . .	40
5.3. Comparación con otros estimadores robustos . . . . .	43
5.3.1. Dependencia de los parámetros de ruido . . . . .	43
5.3.2. Dependencia del umbral de ruido . . . . .	43
5.3.3. Conclusiones . . . . .	44
<b>6. Otros problemas de estimación</b>	<b>47</b>
6.1. Estimación de hiperplanos . . . . .	47
6.1.1. Dependencia de los parámetros de ruido . . . . .	47
6.1.2. Dependencia del umbral de ruido . . . . .	48
6.1.3. Hiperplanos de mayor dimensionalidad . . . . .	48
6.1.4. Conclusiones . . . . .	50
6.2. Estimación de elipses . . . . .	50
6.2.1. Dependencia de los parámetros de ruido . . . . .	51
6.2.2. Dependencia del umbral de ruido . . . . .	52



6.2.3. Conclusiones . . . . .	54
6.3. Estimación de homografías de similitud . . . . .	54
6.3.1. Dependencia de los parámetros de ruido . . . . .	55
6.3.2. Dependencia del umbral de ruido . . . . .	55
6.3.3. Conclusiones . . . . .	57
<b>7. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>59</b>
7.1. Conclusiones . . . . .	59
7.2. Trabajo futuro . . . . .	60



# Índice de símbolos

$P$	Conjunto total de muestras
$\mathcal{P}_{in}$	Conjunto de <i>inliers</i>
$\mathcal{P}_{out}$	Conjunto de <i>outliers</i>
$p_j$	Muestra del conjunto de muestras
$p_{in}$	Muestra del conjunto de <i>inliers</i>
$p_{out}$	Muestra del conjunto de <i>outliers</i>
$\omega$	Proporción de <i>outliers</i>
$\sigma$	Desviación típica de una distribución Gaussiana $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ con media $\mu$
$\Theta$	Vector de parámetros de un modelo
$\mathcal{M}_\Theta$	Modelo cuyos parámetros están representados por $\Theta$
$\mathcal{M}_{\Theta^*}$	Modelo exacto, es decir, sus parámetros no están afectados por error alguno
$\epsilon_j$	Error de ajuste de una muestra $p_j$ a un modelo $\mathcal{M}_\Theta$ , expresado como $\epsilon(p_j; \mathcal{M}_\Theta)$
$\tau$	Umbral de ruido basado en el error $\epsilon$
$S$	Conjunto mínimo de $s$ muestras para estimar un modelo
$C$	Coste asociado a un modelo
$M_i$	Métrica difusa
$\Phi$	Parámetros configurables de una métrica difusa $M_i$ , definidos como $\Phi = (n, \theta)$
$\phi_i$	Grado de cercanía/compatibilidad proporcionado por una métrica difusa $M_i$ dado un error $\epsilon_j$ y parámetros $\Phi$ expresado como $\phi_i = (\epsilon_j; \Phi)$
$\sigma_\phi$	Umbral de ruido basado en el grado de compatibilidad
$\varphi$	Sumatorio de grados de cercanía para evaluar la bondad de un modelo
$t$	Número de iteraciones realizadas en la etapa de reestimación ponderada iterativa
$P_f[b]$	Percentil $f\%$ de una variable $b$
$\mu[b]$	Valor promedio de una variable $b$



# Índice de figuras

1.1. Ejemplos de estimaciones de una recta 2D con LS . . . . .	2
2.1. Ejemplo de un caso de estimación exitosa y otro de estimación fallida de una recta 2D mediante TLS . . . . .	6
2.2. Diagrama de flujo del algoritmo RANSAC . . . . .	8
3.1. Valores de grado de compatibilidad $\phi_i(\epsilon; \Phi)$ en función del error $\epsilon$ . . . . .	17
3.2. Diferencias entre los algoritmos FM-R y el algoritmo RANSAC original . . . . .	22
4.1. Ejemplos de <i>datasets</i> con distintos valores de parámetros de ruido considerados en la estimación de rectas 2D . . . . .	26
4.2. Ejemplos de <i>datasets</i> con distintos valores de parámetros de ruido considerados en la estimación de elipses . . . . .	26
4.3. Ejemplos de <i>datasets</i> con distintos valores de parámetros de ruido considerados en la estimación de homografías de similitud . . . . .	27
4.4. Diagrama de una prueba de estimación . . . . .	29
5.1. Evaluación de las estimaciones con FM-R1: dependencia de la precisión con la proporción de <i>outliers</i> y del parámetro $n$ . . . . .	32
5.2. Evaluación de las estimaciones con FM-R1: dependencia de la precisión respecto del factor $\kappa$ . . . . .	33
5.3. Evaluación de las estimaciones con FM-R1: dependencia entre el umbral de ruido $\tau$ y el parámetro $\theta$ . . . . .	34
5.4. Evaluación de las estimaciones de FM-R1: dependencia de la precisión de la magnitud del ruido $\sigma$ . . . . .	34
5.5. Evaluación de las estimaciones de FM-R1: dependencia de la precisión del tamaño $s$ del conjunto mínimo $S$ . . . . .	35
5.6. Evaluación de las estimaciones con los algoritmos FM-R con una etapa de RP: dependencia de la precisión de la proporción de <i>outliers</i> . . . . .	38
5.7. Resultados de estimaciones con FM-R3 con una etapa de RP: dependencia de la precisión de la proporción de <i>outliers</i> y del valor umbral $\sigma_\phi$ . . . . .	39
5.8. Evaluación de las estimaciones con los algoritmos FM-R con una etapa de RPI: dependencia de la precisión de la proporción de <i>outliers</i> . . . . .	40

5.9. Evaluación de las estimaciones con los algoritmos FM-R con una etapa de RPI: dependencia del número de iteraciones $t$ de la proporción de <i>outliers</i> . . . . .	41
5.10. Diferencias entre los valores de $\varepsilon$ y $\varphi$ al final y al inicio de la etapa de RPI de los algoritmos FM-R . . . . .	42
5.11. Caso de rectas 2D: resultados de estimaciones con diferentes valores de proporción de <i>outliers</i> , magnitudes de ruido aleatorio y valores de umbral de ruido . . . . .	45
5.12. Caso de rectas 2D: la mejor y peor estimación encontradas en 500 estimaciones con FM-R4 $M_2$ en comparación con MSAC . . . . .	46
6.1. Caso de hiperplanos 3D: resultados de estimaciones con diferentes valores de proporción de <i>outliers</i> , magnitudes de ruido aleatorio y valores de umbral de ruido . . . . .	49
6.2. Caso de hiperplanos 2D, 3D y 10D: comparación de los percentiles del error de estimación $\varepsilon$ con RANSAC, MSAC y FM-R4 $M_2$ . . . . .	51
6.3. Ejemplos de estimaciones con tres valores distintos del error máximo relativo entre el vector de parámetros original y el estimado . . . . .	52
6.4. Caso de elipses: precisión de la estimación con diferentes valores de proporción de <i>outliers</i> , magnitudes de ruido aleatorio y valores de umbral de ruido . . . . .	53
6.5. Caso de elipses: la mejor y la peor estimación encontradas en 200 estimaciones con FM-R4 $M_2$ en comparación con MSAC . . . . .	54
6.6. Caso de homografías de similitud: precisión de la estimación con diferentes valores de proporción de <i>outliers</i> , magnitudes de ruido aleatorio y valores de umbral de ruido . . . . .	56
6.7. Caso de estimación de homografías de similitud: la mejor y la peor estimación encontradas en 500 estimaciones con FM-R4 $M_1$ en comparación con MSAC . . . . .	58

# Índice de algoritmos

1.	RANSAC (versión original) . . . . .	8
2.	Reestimación Ponderada y Ponderada Iterativa . . . . .	19
3.	FM-R1 . . . . .	20
4.	FM-R2 . . . . .	20
5.	FM-R3 . . . . .	21
6.	FM-R4 . . . . .	21





# Capítulo 1

## Introducción

En este capítulo se expone el problema que supone estimar los parámetros de un modelo en presencia de ruido y ejemplos de algunas de las diferentes formas de abordar la resolución de este problema. Al final de este capítulo se plantean los objetivos del proyecto y se describe la organización de este documento.

### 1.1. Estimación de parámetros

La estimación de los parámetros que describen un modelo es un procedimiento extendido en áreas como estadística, física e ingeniería, entre otros. Este procedimiento consiste en estimar el vector de parámetros  $\Theta$  que describe un modelo  $\mathcal{M}_\Theta$ , a partir de un conjunto de muestras  $P$ , siguiendo un criterio determinado. Por ejemplo, *Least Squares* (LS) resuelve el problema de la estimación encontrando el modelo  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$  que minimiza la suma de los errores de ajuste al cuadrado  $\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}})^2$  de las muestras  $p_j \in P$  respecto de dicho modelo. El error de ajuste  $\epsilon_j$  asociado a una muestra  $p_j$  puede ser interpretado como la distancia entre la muestra y el modelo y su valor se establece a partir de una función que dependerá, entre otros, del modelo considerado. De esta manera, se puede definir un estimador como una función o procedimiento determinado que permite obtener una estimación de los parámetros originales del modelo al que mejor se ajusta el conjunto de muestras.

Un ejemplo de modelo sencillo es una recta 2D descrita por la ecuación general  $ax+by+c=0$ , cuyo vector de parámetros puede ser definido como  $\Theta=(a,b,c)$ . En la figura 1.1 se representan tres conjuntos de muestras que, en una situación ideal, deberían ajustarse a un modelo original  $\mathcal{M}_{\Theta^*}$  de una recta 2D descrita por  $\Theta^*=(0.82,-0.58,0.00)$  en los tres casos. Adicionalmente, en cada caso se representa el modelo estimado  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$  mediante LS. Por un lado, la figura 1.1 (izquierda) muestra una situación en la que todos los puntos siguen de manera ideal el modelo  $\mathcal{M}_{\Theta^*}$ , es decir, todas las muestras tienen un error  $\epsilon_j=0$ . Por otro lado, en la figura 1.1 (centro) se representa una situación no ideal en la que las muestras tienen un error  $0 \leq |\epsilon_j| \leq \tau$ , donde  $\tau$  representa un valor umbral de ruido. A pesar de no ser una situación ideal, el valor del error de una muestra está limitado y, dentro de estos límites, se considera que una muestra se ajusta al modelo que se pretende estimar y se la denomina como valor típico o, en inglés, como *inlier*. Si la

distribución de los errores tiene una media de valor próximo a cero, el modelo puede ser estimado con relativa precisión mediante LS. Por último, en la figura 1.1 (derecha) se representan, además de *inliers*, muestras con errores  $|\epsilon_j| > \tau$  que no se ajustan al modelo que se pretende estimar, denominadas como valores atípicos o *outliers*. En este último caso, los errores del conjunto de muestras respecto del modelo original no tienen una media próxima a cero y, por tanto, el resultado de la estimación con LS es menos preciso en comparación con los dos casos anteriores.

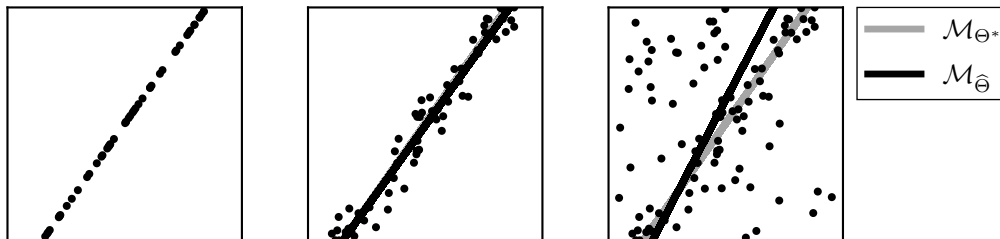


Figura 1.1: Ejemplos de estimaciones de una recta 2D con LS a partir de conjuntos de muestras afectados por distintas cantidades de ruido. El modelo original  $\mathcal{M}_{\Theta^*}$  de la recta 2D está descrito por  $0.82x - 0.58y + 0.00 = 0$ .

A partir de estos ejemplos se puede deducir que el ruido y concretamente los *outliers* pueden afectar negativamente al proceso de estimación del modelo, y que surge la necesidad de aplicar procedimientos más sofisticados para estimar un modelo en presencia de estos valores atípicos.

## 1.2. Estimación robusta de modelos

Como se ha mencionado, el método de LS puede estimar correctamente un modelo a partir de un conjunto de muestras cuyos errores respecto del modelo original siguen una determinada distribución con media igual a cero. Sin embargo, como se ha podido apreciar en la sección anterior, es un método no robusto ante la presencia de *outliers*.

Debido a que la presencia de *outliers* puede afectar significativamente al resultado de la estimación, una manera extendida de clasificar los estimadores es en robustos y no robustos ante la presencia de una determinada cantidad de *outliers*. Esta cualidad de robustez cobra especial importancia en áreas como robótica y, concretamente, aplicaciones de percepción donde los niveles de incertidumbre del conjunto de muestras pueden ser elevados. Existe una amplia variedad de estimadores robustos entre los cuales se encuentra el algoritmo *Random Sample Consensus* (RANSAC) [1], cuyo uso está ampliamente extendido en las áreas mencionadas anteriormente. Su funcionamiento se basa en la clasificación del conjunto de muestras en *inliers* y *outliers* en función de una medida de error asociado a cada muestra y ha resultado ser un método eficaz de estimar modelos en escenarios donde la presencia de *outliers* es elevada.

### 1.3. Métricas difusas

Las metodologías de lógica difusa (junto con otros paradigmas de *soft computing*, como los métodos probabilísticos, el *machine learning*, la computación evolutiva y la inteligencia de enjambre) se han utilizado desde su nacimiento para tratar datos imprecisos, centrándose en el diseño de sistemas capaces de hacer frente a la incertidumbre de diversas formas [2]. Como ya se ha mencionado, la robótica, y en general la percepción, es una de las áreas en las que esta capacidad adquiere mayor relevancia.

En el caso del problema de estimación robusta de modelos, es necesario que el estimador sea capaz de tolerar muestras que no puedan ser clasificadas de forma clara como *inliers* o *outliers*. Mediante una métrica difusa o *fuzzy metric*, por su traducción al inglés, es posible expresar la distancia entre una muestra  $p_j$  y un modelo  $\mathcal{M}_\Theta$  como un grado de cercanía medido con respecto a un parámetro de referencia, lo cual puede resultar adecuado en presencia de la vaguedad o imprecisión inherentes a los datos ruidosos.

### 1.4. Objetivos

El objetivo principal de este Trabajo Final de Máster (TFM) es incorporar y evaluar el uso de métricas difusas en el algoritmo RANSAC a través de la implementación de cuatro variantes del algoritmo original, basando la estimación en la asignación de grados de cercanía entre el conjunto de muestras y un cierto modelo estimado. Esta información será tratada de forma diferente en cada una de las variantes propuestas con el objetivo de analizar la influencia del uso de métricas difusas en diferentes partes del algoritmo RANSAC. Por otra parte, la incorporación de dichas métricas requiere de la caracterización de las mismas dentro del algoritmo propuesto con la finalidad de determinar el efecto que causan en la estimación. Por último, se ha de evaluar el resultado de incorporar métricas difusas en RANSAC para diferentes problemas de estimación de modelos.

### 1.5. Organización de este documento

El presente documento se organiza de la siguiente forma:

- En el capítulo 2, se presenta el algoritmo RANSAC junto con algunas de sus variantes más extendidas. Asimismo, se introduce el concepto de métrica difusa.
- En el capítulo 3, se definen las métricas difusas consideradas y las variantes de RANSAC propuestas para evaluación.
- En el capítulo 4, se describe la metodología experimental empleada, incluyendo la generación de conjuntos de muestras sintéticos y la configuración de los experimentos.
- En el capítulo 5, se presenta la caracterización de los parámetros configurables de las variantes de RANSAC propuestas para el caso de la estimación de rectas 2D.

- En el capítulo 6, se evalúa el desempeño de las variantes de RANSAC propuestas en términos de precisión de las estimaciones de hiperplanos, elipses y homografías de similitud.
- Finalmente, en el capítulo 7, se detallan las conclusiones a la que se han llegado una vez terminado este TFM.

## 1.6. Publicaciones de este trabajo

Las siguientes publicaciones contienen algunos de los resultados expuestos en este TFM, así como un análisis más extendido de algunos de los aspectos tratados en el mismo.

A. Ortiz, E. Ortiz, J. J. Miñana, and O. Valero, “On the Use of Fuzzy Metrics for Robust-Model Estimation: a RANSAC-based Approach ,” in *Proceedings of the International Work-conference On Artificial Neural Networks*, Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2021, *in press*.

A. Ortiz, E. Ortiz, J. J. Miñana, and O. Valero, “Hypothesis Scoring and Model Refinement Strategies for FM-based RANSAC,” in *Proceedings of the Spanish Conference on Fuzzy Logic and Technologies*, Lecture Notes in Artificial Intelligence. Springer, 2021, *in press*.

J. J. Miñana, A. Ortiz, E. Ortiz, and O. Valero, “On the standard fuzzy metric: generalizations and application to model estimation ,” in *Proceedings of the Spanish Conference on Fuzzy Logic and Technologies*, Lecture Notes in Artificial Intelligence. Springer, 2021, *in press*.

## Capítulo 2

# Fundamentos teóricos

En este capítulo se expone el trabajo precedente relacionado con este TFM. En primer lugar se presentan algunas de las alternativas para resolver el problema de estimación. En segundo lugar se presenta el algoritmo RANSAC como una solución ampliamente utilizada en el ámbito de la estimación robusta de modelos. Por último, se introduce el concepto de métrica y su importancia en la resolución del problema de estimación.

### 2.1. *Least Squares y Total Least Squares*

El método de LS es un modelo de regresión lineal cuyo uso está ampliamente extendido en el ámbito de la estimación de modelos. Como ya se ha presentado, se trata de un procedimiento que intenta estimar los parámetros del modelo minimizando la suma de los errores al cuadrado con respecto del modelo estimado  $\mathcal{M}_{\hat{\theta}}$ . En el caso de las rectas 2D, los errores respecto del modelo considerados por LS pueden ser distancias respecto de la coordenada  $x$  o de la coordenada  $y$  y, en consecuencia, las estimaciones pueden resultar imprecisas o fallidas en determinadas situaciones. Por ejemplo, la estimación de rectas verticales es inviable considerando como error de ajuste  $\epsilon = (y - \hat{y})^2$  entre el conjunto de muestras y el modelo. Por el contrario, en la regresión *Total Least Squares* (TLS) las distancias consideradas son ortogonales respecto del modelo y, por tanto, la estimación de rectas 2D con TLS resultaría adecuada en situaciones en las que LS no resuelve correctamente el problema de estimación.

En el caso de la estimación de rectas 2D, ambas regresiones tienen en común que un único *outlier* puede provocar un sesgo elevado en la estimación, es decir, provocar una estimación imprecisa. La figura 2.1 (izquierda) muestra el resultado de una estimación con TLS de un modelo donde los errores asociados al conjunto de muestras respecto de dicho modelo siguen una distribución Gaussiana con una media  $\mu \approx 0$  y la figura 2.1 (derecha) muestra la misma situación añadiendo un único *outlier* muy alejado del modelo original. A partir de estos ejemplos, resulta evidente que, en determinadas situaciones, las regresiones lineales presentadas no pueden tolerar la presencia de *outliers* dado que ambos métodos asumen que el ruido responde a una distribución con media cero.

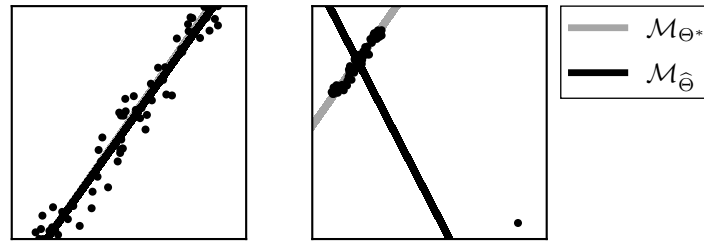


Figura 2.1: Ejemplo de un caso de estimación exitosa (izquierda) y otro de estimación fallida (derecha) de una recta 2D mediante TLS. El modelo original  $\mathcal{M}_{\Theta^*}$  de la recta 2D está descrito por  $0.82x - 0.58y + 0.00 = 0$ .

## 2.2. Estimadores robustos

Como se ha podido observar en la sección anterior, los *outliers* pueden provocar grandes sesgos en la estimación de un modelo. En consecuencia, surge el paradigma de la estimación robusta, cuyo objetivo es resolver el problema de la estimación en presencia de *outliers*, incluso en situaciones en las que la proporción de *outliers* en el conjunto de muestras supera a la de *inliers*.

### 2.2.1. Evaluación del grado robustez de un estimador

De manera general, se determina el grado de robustez de un estimador o, en otras palabras, la bondad de la estimación en presencia de una determinada cantidad de *outliers*, a partir del punto de ruptura o *Breakdown Point* (BDP) [3] por su traducción al inglés. Para poder definir el concepto de BDP se introduce el concepto de sesgo o *bias* como la máxima desviación que puede sufrir un parámetro del modelo cuando el conjunto de parámetros se estima con sólo muestras consistentes con el modelo (*inliers*) y cuando se sustituye una proporción de *inliers* por *outliers* [4]. De esta manera, el BDP se define como la mínima proporción de *outliers* que induce un sesgo elevado en la estimación. Por tanto, se puede medir el grado de robustez de un estimador ante la presencia de *outliers* a partir de su BDP. Cuanto más alta sea la proporción de *outliers* en el conjunto de muestras que un estimador pueda soportar sin llegar al BDP, más robusto se considera. Por ejemplo, las regresiones LS y TLS tienen un BDP del 0% ya que una sola muestra causa un sesgo elevado en la estimación.

### 2.2.2. Breve revisión de estimadores robustos

Una alternativa simple a las regresiones LS y TLS es *Least Median of Squares* (LMedS) [4], una regresión no lineal cuyo objetivo es minimizar la mediana de la distribución de errores  $\epsilon^2$  definidos como el cuadrado la distancia entre cada muestra  $p_j$  y el modelo estimado  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$ . La mediana de la distribución de errores resulta un valor útil si el conjunto total de muestras contiene una proporción de *outliers* inferior al 50%, punto en el cual LMedS llega al BDP. Otro grupo de estimadores robustos son los *M-estimators* [5]. El objetivo de estos estimadores es minimizar

una función positiva y simétrica  $\rho(\epsilon_j)$  con un único mínimo en  $\epsilon_j = 0$ . Existen multitud de funciones  $\rho(\epsilon_j)$  entre las que se encuentran las funciones de Huber, Welsch y Tukey [5]. Cada *M-estimator* propone distintas formas de atenuar el efecto de los *outliers* aunque, de manera general, no superan un BDP del 50%. En la práctica, el uso de un *M-estimator* u otro tiende a ser arbitrario y estar sujeto a la búsqueda de la viabilidad computacional.

Aunque en determinadas aplicaciones el uso de estimadores con un BDP inferior al 50% pueda resultar adecuado, en aplicaciones de robótica y visión por computador es posible que el conjunto de muestras incluya una proporción de *outliers* superior a la de *inliers*. El algoritmo RANSAC [1] es un estimador robusto ante proporciones elevadas de *outliers*, siendo capaz de resolver estimaciones donde la proporción de *outliers* es superior al 50%. Su funcionamiento se basa en la generación de múltiples hipótesis de modelos a partir de la selección aleatoria de conjuntos mínimos de muestras y la elección de aquel modelo cuya bondad es la más alta de entre todas las hipótesis consideradas. Se trata de un algoritmo iterativo donde el número de iteraciones depende de la probabilidad con la que se requiera seleccionar un conjunto mínimo de muestras formado únicamente por *inliers* del modelo original. Finalmente, es habitual reestimar el modelo con los *inliers* del mejor modelo estimado en el proceso iterativo. RANSAC es ampliamente utilizado en la actualidad y desde su presentación se han propuesto distintas versiones con el objetivo de mejorar aspectos como la eficiencia computacional y la precisión de la estimación.

### 2.3. *Random Sample Consensus (RANSAC)*

El algoritmo RANSAC fue introducido en el año 1981 en [1] como un nuevo paradigma para la estimación de modelos a partir de datos experimentales contaminados con ruido. El objetivo de RANSAC es recorrer de manera eficiente el espacio de parámetros del modelo seleccionando el conjunto de parámetros  $\Theta$  que minimiza una determinada función de coste (*loss function*):

$$C = \sum_j \rho(\epsilon_j; \tau), \quad (2.1)$$

donde  $\epsilon_j$  es el error de ajuste asociado a la muestra  $p_j$ ,  $\tau$  es el umbral de ruido y la función  $\rho(\epsilon_j; \tau)$  se define de la siguiente manera:

$$\rho(\epsilon_j; \tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \epsilon_j = |\epsilon(p_j; \mathcal{M}_\Theta)| \leq \tau \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad (2.2)$$

donde  $\epsilon(p_j; \mathcal{M}_\Theta)$  es una métrica conveniente que mide la distancia entre una muestra  $p_j$  y el modelo  $\mathcal{M}_\Theta$ . De esta manera, RANSAC suboptimiza la función de coste  $C$  encontrando el modelo  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$  con el mayor número de *inliers* en un proceso iterativo, buscando el modelo de máximo consenso. En las siguientes secciones, se describen las fases de este proceso iterativo, el cual se describe en el algoritmo 1 y en el diagrama de flujo de la figura 2.2.

---

**Algoritmo 1** RANSAC (versión original)

---

**Input:** $P$ : conjunto total de muestras  $\{p_j\}$  $\tau$ : umbral de ruido $k_{\max}$ : número máximo de iteraciones, idealmente establecido a partir de la expresión (2.3)**Output:** $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$ : modelo estimado cuyos parámetros están representados por  $\hat{\Theta}$ 

---

```
1:  $C_{\min} := \infty$ 
2: for  $k := 1$  to  $k_{\max}$  do
3:   Seleccionar aleatoriamente un conjunto mínimo de muestras  $S_k \subset P$  de tamaño  $s$ 
4:   Estimar el modelo  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}$  a partir de  $S_k$ 
5:   Calcular los errores de estimación  $\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}), \forall p_j \in P$ 
6:   Definir el conjunto de inliers  $\mathcal{P}_{in_k} := \{p_j \in P : |\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k})| \leq \tau\}$ 
7:   Calcular el coste asociado al modelo estimado  $C_k := \sum_j \rho(\epsilon_j; \tau)$ 
8:   if  $C_k < C_{\min}$  then
9:      $C_{\min} := C_k, \mathcal{M}_{\hat{\Theta}} := \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}, \mathcal{P}_{in} := \mathcal{P}_{in_k}$ 
10:  end if
11: end for
12: Reestimar de  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$  mediante  $\mathcal{P}_{in}$  y LS o TLS
13: return  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$ 
```

---

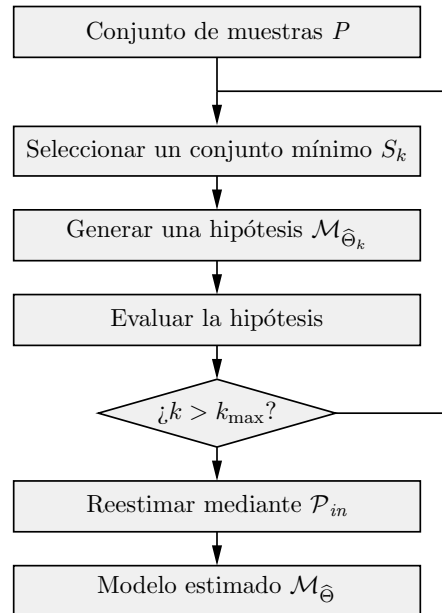


Figura 2.2: Diagrama de flujo del algoritmo RANSAC



### 2.3.1. Generación de hipótesis

La fase de generación de hipótesis (líneas 3 y 4 en el algoritmo 1) consiste en la generación de un modelo  $\mathcal{M}_{\hat{\theta}_k}$  a partir de un conjunto de muestras  $S_k \subset P$  de tamaño  $s$  seleccionado de forma aleatoria. La forma de estimar un modelo durante el paso de generación de una nueva hipótesis dentro de RANSAC consiste en usar un método de regresión como LS o TLS. A diferencia de estas técnicas de regresión, cuya forma de estimar un modelo es utilizando todos los puntos disponibles, RANSAC selecciona una proporción del conjunto total para estimar un modelo y posteriormente evalúa su bondad. Los siguientes aspectos son clave en esta sección de RANSAC:

#### Tamaño de la muestra

La proporción de muestras seleccionadas del conjunto total se conoce, de forma general como el conjunto mínimo de muestras  $S$  que permite definir un modelo determinado. Por ejemplo, en el caso de la estimación de líneas de dos dimensiones el tamaño de  $S$  tendrá que ser como mínimo  $s = 2$ . Nótese que es posible seleccionar un conjunto más grande que el mínimo necesario.

#### Número de iteraciones

En cuanto al número de hipótesis necesarias para estimar correctamente el modelo, se establecen un número de iteraciones  $k_{\max}$  en las que, con una probabilidad  $p$  (habitualmente entre 95 % y 99 %), se seleccionaría un conjunto de muestras  $S$  formado únicamente por *inliers*. Este número de iteraciones se puede demostrar que viene dado por [6]:

$$N = \frac{\log(1 - p)}{\log(1 - (1 - \omega)^s)}, \quad (2.3)$$

donde  $\omega$  es la proporción de *outliers* en  $P$ . A partir de esta expresión se pueden deducir que el número de iteraciones aumentan a medida que aumenta la probabilidad  $p$ , la proporción de *outliers*  $\omega$  y/o el tamaño del conjunto mínimo de muestras  $s$ . En la práctica, la proporción de *outliers*  $\omega$  es desconocida, y por tanto, tendrá que ser establecida sin conocimiento previo contemplando el peor caso o bien de manera dinámica en cada iteración, recalculando el número de iteraciones necesarias  $k_{\max}$  [7].

### 2.3.2. Evaluación de hipótesis

En la fase de evaluación de hipótesis (líneas 5 - 10 en el algoritmo 1) se determina la bondad del modelo estimado  $\mathcal{M}_{\hat{\theta}_k}$  en la fase de generación de hipótesis. A partir de la función de pérdida descrita en la expresión (2.2) se asocia un coste al modelo estimado que, cuanto menor es, mayor es la bondad de dicho modelo. A continuación, se describen los aspectos relevantes en esta sección de RANSAC:

#### Valor del umbral de ruido $\tau$

La función de pérdida depende del valor del umbral  $\tau$  que determina el límite a partir del cual un punto es considerado como *inlier* o como *outlier* y, en consecuencia, asignarle un coste.

El valor  $\tau$  está estrechamente relacionado con la magnitud del ruido que afecta a los *inliers* y su valor suele determinarse de forma empírica. No obstante, este valor puede ser definido formalmente en algunas situaciones asumiendo que el error de ajuste al cuadrado  $\epsilon^2$  es resultado de la suma de variables Gaussianas al cuadrado. De esta manera,  $\epsilon^2$  sigue una distribución chi-cuadrada  $\chi_n^2$  cuyos grados de libertad  $n$  se corresponden con la codimensión del modelo. Por tanto, el error  $\epsilon^2$  asociado a un porcentaje de *inliers*  $p_{inlier}$  estará por debajo del umbral  $\tau^2 = \sigma^2 \cdot \chi_n^{-1}(p_{inlier})$ , donde  $\chi_n^{-1}$  es la función de distribución chi-cuadrada acumulada inversa.

### 2.3.3. Reestimación del modelo

Por último, una vez realizadas  $k_{\max}$  iteraciones, es posible reestimar el modelo de máximo consenso mediante el conjunto de *inliers* de dicho modelo y LS o TLS (ver línea 12 en el algoritmo 1). En la siguiente sección, se describen otras maneras de abordar la reestimación o el refinamiento del mejor modelo encontrado en el bucle principal de RANSAC.

## 2.4. Variantes de RANSAC

El algoritmo RANSAC ha sido ampliamente utilizado en multitud de aplicaciones desde que fue introducido. La particularidad de cada problema de estimación da lugar a una amplia cantidad de variantes de RANSAC que proponen mejoras de precisión, eficiencia computacional y robustez. Estas mejoras pueden implementarse en una o varias de las fases del algoritmo representadas en la figura 2.2. En las siguientes secciones se presentan modificaciones y variantes de RANSAC clasificándolas en función de la etapa del algoritmo a la cual enfocan su propuesta de mejora.

### 2.4.1. Mejoras enfocadas a la selección del conjunto mínimo

La selección del conjunto mínimo  $S$  es, habitualmente, aleatoria. Sin embargo, es posible utilizar información del dominio del problema concreto para poder guiar esta selección con efectos positivos sobre la eficiencia computacional [8–13]. Algunas de las variantes de RANSAC cuyo enfoque se centra en mejorar la selección del conjunto mínimo son *N-Adjacent Points SAC* (NAPSAC) [8], *Progressive SAC* (PROSAC) [9] y *GroupSAC* [11], cuya descripción se presenta a continuación.

Por una parte, en NAPSAC se parte de la suposición de que en la proximidad de un *inlier* es probable que haya más *inliers*. En consecuencia, NAPSAC selecciona un punto de forma aleatoria, define una hiperesfera de radio  $r$  cuyo centro es el primer punto seleccionado y selecciona puntos de forma aleatoria dentro de esta hiperesfera hasta completar el conjunto mínimo  $S$ . De esta manera, se incrementa la probabilidad de que se seleccionen únicamente conjuntos formados por *inliers*. Sin embargo, la efectividad de esta mejora dependerá de la medida en la que se cumpla la premisa inicial.

Por otra parte, PROSAC utiliza un orden basado en la calidad de las muestras para seleccionar el conjunto  $S$  formado por muestras con mayor probabilidad de ser válidas. Un ejemplo de clasificación de muestras es a partir de la función de similitud entre correspondencias de puntos

clave (*key points*) de un par de imágenes. De esta manera, se generarían hipótesis priorizando la selección de las correspondencias con una puntuación más elevada. Se ha demostrado que PROSAC genera mejores hipótesis de manera temprana y, en consecuencia, que es significativamente más rápido que RANSAC. Pese a esto, las mejoras que presenta dependen de la relevancia que tenga la forma en la que se asigna una puntuación a cada muestra.

Por último, GroupSAC parte de la suposición de que el conjunto total de datos  $P$  puede separarse en grupos con características similares y, por tanto, con una probabilidad similar de estar formado únicamente por *inliers* o *outliers*. La clasificación en grupos puede basarse en, por ejemplo, *Optical Flow Based Clustering*. De esta manera, el conjunto  $S$  se selecciona de aquellos grupos con una alta probabilidad de estar formados únicamente por *inliers*. En comparación con RANSAC y PROSAC, permite aumentar la rapidez de la estimación. La principal desventaja de GroupSAC es que no siempre es posible agrupar las muestras bajo un criterio determinado.

Vale la pena mencionar que existen otras variantes más recientes con el mismo enfoque tales como *Descendant Likelihood RANSAC* (DL-RANSAC) [12] o *Prior Sampling & Sample Check RANSAC* (PSSC-RANSAC) [13]. Sin embargo, el objetivo de este documento no es revisar de forma exhaustiva todas las variantes de RANSAC. Para una descripción detallada el lector puede consultar la bibliografía proporcionada y las referencias que allí se hacen.

#### 2.4.2. Mejoras enfocadas a la evaluación de la hipótesis

A partir del modelo generado por el conjunto mínimo de muestras  $S$  se evalúa la bondad del modelo estimado mediante la función de pérdida descrita por la expresión 2.2. Debido a la forma de la función de pérdida, RANSAC no tiene en cuenta la cantidad de error presente en el conjunto de *inliers*. *M-estimator SAC* (MSAC) [6] permite evaluar el modelo con una mayor sensibilidad proponiendo una función de pérdida descrita por:

$$\rho(p_j; \tau) = \begin{cases} (\epsilon(p_j; \mathcal{M}_\Theta))^2 & \text{si } |\epsilon(p_j; \mathcal{M}_\Theta)| \leq \tau \\ c & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad (2.4)$$

donde  $c$  es un valor constante. De forma similar, *Maximum Likelihood SAC* (MLESAC) [6] propone una función de pérdida basada en la suma de una distribución Gaussiana de errores de *inliers* y una distribución uniforme de errores de *outliers* con el objetivo de seleccionar el modelo cuya probabilidad asociada sea máxima. Aunque MLESAC consigue una mayor precisión que MSAC en la estimación a expensas de un mayor coste computacional, tanto MSAC como MLESAC consiguen resultados similares mejorando las estimaciones de RANSAC en cuanto a precisión de estimación se refiere [6].

#### Refinamiento del modelo

Es posible refinar el modelo estimado por RANSAC, de acuerdo con el algoritmo 1, estimando un modelo con todos los *inliers* [1]. Existen variantes que proponen estrategias distintas de refinamiento. Por ejemplo, *Locally Optimize RANSAC* (LO-RANSAC) [14] incorpora una etapa de refinamiento al final de la etapa de evaluación de hipótesis, en caso de haber actualizado el mejor modelo encontrado, estableciendo como punto de partida el modelo resultante de la etapa

de generación de hipótesis. Se ha demostrado que esta etapa de refinamiento, combinada con la estrategia de terminación adaptativa, permite realizar de forma aproximada el número teórico de iteraciones sin necesidad de establecer la proporción de *outliers* de forma previa [14].

### Evaluación parcial de la hipótesis

Debido a que el coste computacional que supone la etapa de evaluación de hipótesis aumenta a medida que lo hace el tamaño del conjunto de muestras  $P$ , existen propuestas de evaluación parcial de la hipótesis, de tal manera que una proporción de las muestras es evaluada y, si se considera que el modelo no es lo suficientemente bueno, la etapa de evaluación de hipótesis termina sin evaluar el conjunto de muestras  $P$  al completo. Algunas propuestas de evaluación parcial son los test  $T_{d,d}$  [15] y *Sequential Probability Ratio Test* (SPRT) [16] incorporados en distintas versiones de *Randomized RANSAC* (R-RANSAC) y el test *Bail-Out* [17]. La contribución principal de propuestas mencionadas es la disminución del coste computacional que supone estimar el modelo con la versión original de RANSAC.

## 2.5. Concepto de métrica difusa

Como ya se ha expuesto, el funcionamiento de RANSAC consiste en encontrar el modelo que mejor se adapta a un conjunto de datos mediante la clasificación de los elementos de éste diferenciándolos entre *inliers* y *outliers*. Para llevar a cabo dicha clasificación, se requiere del uso de una medida de error o medida de proximidad entre los elementos del conjunto de datos y un modelo determinado. De manera habitual, se utiliza como medida de proximidad la métrica Euclídea, aunque el algoritmo RANSAC podría hacer uso de cualquier otra métrica. Recordemos que, dado un conjunto  $X$ , diremos que una función  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty[$  es una métrica (sobre  $X$ ) si, para todo  $x, y, z \in X$ , se cumplen las siguientes condiciones:

(d1)  $d(x, y) = 0$  si, y sólo si  $x = y$ ;

(d2)  $d(x, y) = d(y, x)$ ;

(d3)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Las métricas son un caso particular de medida de disimilitud, es decir, funciones que miden cómo de diferentes son dos objetos. Así pues, dados dos objetos  $x, y \in X$ , cuanto mayor es el valor  $d(x, y)$  que nos devuelve la métrica actuando sobre dichos objetos, mayor es la diferencia entre ellos. Por el contrario, valores cercanos a cero de  $d(x, y)$  indican poca disimilitud entre ellos, tomando valor 0 solamente cuando ambos objetos son en realidad el mismo. En el caso concreto de RANSAC, cuanto más cercano a cero sea el valor que proporciona la métrica entre una muestra y el modelo, mayor es la posibilidad de que dicho elemento sea considerado como *inlier*. Su clasificación como *inlier* o *outlier* dependerá, por tanto, de un cierto valor umbral  $\tau \in ]0, \infty[$ .

A pesar del uso habitual de la métrica Euclídea en el algoritmo RANSAC, es posible enfocar la clasificación de *inliers* o *outliers* mediante una medida de similitud. Al contrario que las

medidas de disimilitud, las medidas de similitud miden cómo de parecidos son dos objetos, es decir, cuanto más alto sea el valor que nos devuelve la medida de similitud entre dos objetos, más parecidos son. En lo que se refiere a RANSAC, la medida de similitud entre un elemento y el modelo considerado nos permite evaluar el grado de compatibilidad dicho elemento elemento al modelo. De esta manera, además de poder hacer una clasificación *inlier/outlier*, se puede asignar a cada elemento un grado de compatibilidad con el modelo estimado, tal como se propone en este TFM.

En este sentido, el uso de la métrica Euclídea en RANSAC puede resultar inadecuado en situaciones en las que establecer el valor  $\tau$  del umbral de ruido no sea trivial, es decir, situaciones en las que no haya una forma clara de discernir entre *inliers* y *outliers* en el conjunto total de muestras. De hecho, un elemento es clasificado como *inlier* si el valor que proporciona la métrica Euclídea entre el elemento y el modelo es menor o igual al umbral. Sin embargo, la métrica Euclídea no evalúa la calidad de los *inliers* en el sentido de que no se diferencia entre aquellos para los que el valor de la métrica es cercano a 0 o aquellos para los que éste es cercano a  $\tau$ . Una manera de enfocar la resolución de este problema es asignar a cada elemento de una muestra un grado de calidad de *inlier* atendiendo a lo cerca del modelo que se encuentra dicho elemento. Una herramienta útil en este sentido se puede encontrar en las métricas difusas introducidas por Kramosil y Michalek en [18], las cuales proporcionan un grado de cercanía entre dos objetos con respecto a un cierto parámetro. Siguiendo [19], dada una  $t$ -norma continua  $*$  (véase [20] para aspectos básicos sobre  $t$ -normas), diremos que una función  $M : X \times X \times [0, \infty[ \rightarrow [0, 1]$  es una métrica difusa (sobre  $X$ ) si, para cada  $x, y, z \in X$  y  $\theta, \mu \in ]0, \infty[$ , se cumplen las siguientes propiedades:

**(KM1)**  $M(x, y, 0) = 0$ ;

**(KM2)**  $M(x, y, \theta) = 1$  para todo  $\theta > 0$  si, y sólo si  $x = y$ ;

**(KM3)**  $M(x, y, \theta) = M(y, x, \theta)$ ;

**(KM4)**  $M(x, z, \theta + \mu) \geq M(x, y, \theta) * M(y, z, \mu)$ ;

**(KM5)** La función  $M_{x,y} : [0, \infty[ \rightarrow [0, 1]$ , dada por  $M_{x,y}(\theta) = M(x, y, \theta)$ , es continua por la izquierda.

Atendiendo a su definición, la noción de métrica difusa puede interpretarse como una medida de proximidad entre dos objetos  $x$  e  $y$ , denotada como  $M(x, y, \theta)$ , donde  $\theta$  es un valor de referencia que condiciona dicha medida. Por otro lado, a diferencia de la métrica Euclídea, las métricas difusas son medidas de similitud ya que el valor  $M(x, y, \theta)$  puede entenderse como un grado de similitud (o cercanía) entre los objetos  $x$  e  $y$  con respecto del parámetro  $\theta$ . En este sentido, valores cercanos a 1 de  $M(x, y, \theta)$  indican un mayor grado de similitud con respecto a  $\theta$  entre  $x$  e  $y$ . A partir de **(KM2)**, se observa que el grado de similitud entre dos objetos solamente puede ser 1 para cualquier valor de  $\theta$  si ambos objetos son el mismo. En consecuencia, una métrica difusa permite clasificar de forma no binaria los elementos de una muestra con respecto a un modelo sin hacer distinción estricta entre *inliers* y *outliers*. De esta manera, cada elemento de la muestra tiene asignado un grado de cercanía al modelo estimado cuyo valor se encuentra entre 0 y 1.



## Capítulo 3

# Incorporación de métricas difusas en RANSAC

En este capítulo se definen las métricas difusas consideradas y se describen las variantes de RANSAC propuestas.

### 3.1. Métricas difusas consideradas

Como ya se ha mencionado, las métricas difusas que consideramos pueden interpretarse como una medida de similitud entre dos puntos  $x$  e  $y$  respecto de un parámetro de referencia  $\theta$ . De esta manera, cuanto mayor sea el valor  $M(x, y, \theta)$ , mayor será la similitud entre  $x$  e  $y$ . Un ejemplo de métrica difusa es la denominada métrica difusa estándar [21], la cual se induce de una métrica clásica y se define del modo siguiente:

$$M^d(x, y, \theta) = \frac{\theta}{\theta + d(x, y)}, \text{ para cada } x, y \in X, \theta \in ]0, \infty[. \quad (3.1)$$

Cabe notar que para la métrica difusa estándar, el grado de cercanía entre dos puntos  $x, y \in X$  solo puede ser igual a 1 para algún  $\theta_0 \in ]0, \infty[$  en el caso de que  $x$  e  $y$  sean el mismo punto. Es más, el grado de cercanía entre dos puntos no puede ser nunca igual a 0.

Con el objetivo de proponer métricas difusas que puedan resultar útiles para RANSAC, es decir, útiles para asignar un grado de compatibilidad a cada elemento del conjunto de datos respecto del modelo estimado, consideramos las métricas difusas especificadas a través de las expresiones (3.2), (3.3), (3.4) y (3.5):

$$M_{1,n}^d(x, y, \theta) = \begin{cases} \left(1 - \frac{d(x,y)}{n\theta}\right)^n, & \text{si } d(x, y) \leq n\theta \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad (3.2)$$

$$M_{2,n}^d(x, y, \theta) = \begin{cases} 1 - \frac{d^n(x,y)}{\theta^n}, & \text{si } d(x, y) \leq \theta \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad (3.3)$$

$$M_{3,n}^d(x, y, \theta) = e^{-\frac{d^n(x,y)}{\theta^n}}, \quad (3.4)$$

$$M_{4,n}^d(x, y, \theta) = \frac{\theta^n}{\theta^n + d^n(x, y)}, \quad (3.5)$$

donde  $n \in \mathbb{R}$ . Como se puede observar, se trata de una familia de métricas difusas que, al igual que la métrica difusa estándar, emplean una métrica clásica para determinar el grado de cercanía entre dos elementos.

Es necesario notar que, para dos puntos distintos  $x$  e  $y$ , el grado de similitud puede ser 1 para cualquier  $\theta_0 \in ]0, \infty[$ , pero dicho grado solo puede ser 1 para valores  $\theta \in ]0, 1[$  siempre que los puntos  $x$  e  $y$  sean el mismo punto. También es necesario destacar que es posible encontrar casos particulares en los que los valores de las métricas difusas presentadas proporcionan valores de cercanía igual a 0 entre dos puntos, a diferencia de la métrica difusa estándar, que no es capaz de lograrlo. Para una descripción detallada de las métricas difusas consideradas el lector puede consultar [22–24].

En cuanto al uso de métricas difusas en RANSAC, el valor de una métrica difusa puede ser obtenido a partir de la distancia Euclídea o error de ajuste  $\epsilon(p_j, \mathcal{M}_\Theta)$  entre un elemento  $p_j$  del conjunto de datos y un determinado modelo  $\mathcal{M}_\Theta$ . De esta manera, el valor proporcionado por la métrica difusa  $M_{i,n}^d$  puede denotarse como  $\phi_i(\epsilon; \Phi)$  donde  $\Phi = (n, \theta)$ , es decir,  $\phi_i(\epsilon(p_j; \mathcal{M}_\Theta); \Phi = n, \theta) = M_{i,n}^d(p_j, \mathcal{M}_\Theta, \theta)$ . Por último, en la figura 3.1 se representan valores de compatibilidad  $\phi_i(\epsilon; \Phi)$  en función del error  $\epsilon$  del conjunto de muestras respecto del modelo. Para aligerar la notación, de ahora en adelante nos referiremos a las métricas difusas mediante la notación  $M_i$ , sin alusión a la forma como comparamos  $x$  e  $y$  ( $d$ ) o  $p_j$  y  $\mathcal{M}_\Theta$  ( $\epsilon$ ), ni al parámetro  $n$ , excepto cuando sea preciso referirse a ellos.

### 3.2. Variantes de RANSAC propuestas

La versión de RANSAC original clasifica de manera clara el conjunto total de muestras  $P$  en *inliers* y *outliers*. A pesar de ser una forma simple y eficaz para estimar los parámetros de modelos en presencia de una cantidad de ruido elevada, con esta clasificación puede perderse información que podría ser utilizada para mejorar la eficiencia computacional y la precisión de la estimación. Como se ha mencionado en secciones anteriores, es posible aprovechar información de la distribución de los errores respecto del modelo como se propone en [6] con MSAC y MLESAC para mejorar la estimación del modelo. En este sentido, el error  $\epsilon(p_j; \mathcal{M}_\Theta)$  puede ser utilizado para medir el grado de compatibilidad entre una muestra  $p_j$  y el modelo  $\mathcal{M}_\Theta$  mediante las métricas difusas presentadas en la sección anterior.

Las variantes del algoritmo RANSAC propuestas, denominadas genéricamente como *Fuzzy Metric RANSAC* (FM-RANSAC o FM-R), incorporan métricas difusas tanto en el bucle principal de RANSAC, en la etapa de evaluación de hipótesis, como en una etapa posterior de refinamiento del modelo de máximo consenso más concretamente:

1. En cuanto a la clasificación del conjunto de muestras en *inliers* y *outliers*, las variantes propuestas pueden hacer esta distinción en base a (1) el error  $\epsilon_j$  entre una muestra  $p_j$  y el modelo estimado  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$ , (2) el grado de compatibilidad  $\phi_i(\epsilon_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}})$  asociado a una muestra o, por último, (3) no hacer ninguna distinción y tratar el conjunto de muestras completo



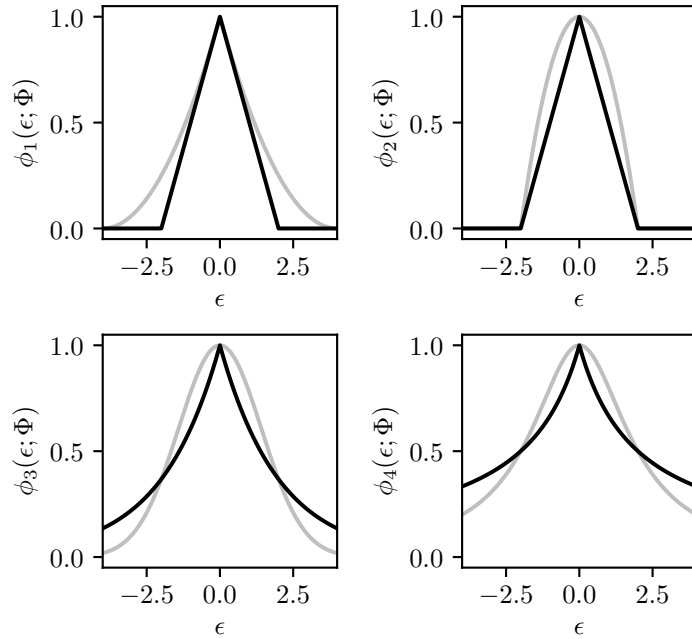


Figura 3.1: Valores de grado de compatibilidad  $\phi_i(\epsilon; \Phi)$  en función del error  $\epsilon$  con valores de  $n = 1$  (líneas negras) y  $n = 2$  (líneas grises). El valor del umbral es  $\theta = 2$  en todos los casos.

$P$  de forma difusa a partir del grado de compatibilidad entre cada muestra y el modelo estimado.

2. En cuanto a la evaluación del modelo estimado, ésta se puede hacer a partir de exclusivamente los grados de compatibilidad de los *inliers*, si se hace esta distinción, o a partir del conjunto de muestras completo en caso contrario. En ambos casos, los grados de compatibilidad involucrados se agregan de forma aditiva para evaluar la bondad del modelo estimado. Por tanto, el modelo resultante es el modelo estimado cuya agregación de grados de compatibilidad es la más alta encontrada en  $k_{\max}$  iteraciones (ver algoritmo 1).
3. En cuanto al refinamiento del mejor modelo estimado, es posible incorporar una etapa de refinamiento basada en una reestimación ponderada mediante, por ejemplo, *Weighted Least Squares* (WLS) o *Weighted Total Least Squares* (WTLS) de acuerdo con los grados de compatibilidad del conjunto de *inliers* o del conjunto de muestras completo, según corresponda. Esta etapa de refinamiento puede realizarse una única vez (en adelante nos referiremos a este proceso como RP) o ser un proceso iterativo alcanzar la convergencia, con un máximo de  $t_{\max}$  iteraciones (en adelante nos referiremos a este proceso como RPI, véase el algoritmo 2).

Los algoritmos 3, 4, 5 y 6 describen las cuatro variantes propuestas, destacando en color azul las diferencias entre cada uno de los algoritmos y el algoritmo RANSAC original. Adicionalmente,

en la figura 3.2 se recopilan los cuatro algoritmos con el objetivo de facilitar las comparaciones. A continuación, se definen, de forma cualitativa, las variantes propuestas:

- **FM-R1** distingue entre *inliers* y *outliers* de la misma manera que la versión original de RANSAC e incorpora las métricas difusas  $M_i$  únicamente para evaluar la bondad del modelo estimado a partir del conjunto de *inliers*. Finalmente, el modelo es refinado a través de una reestimación no ponderada con el mejor conjunto de *inliers*.
- **FM-R2** se diferencia de FM-R1 incorporando una etapa de RP o RPI basada en el grado de compatibilidad entre el conjunto de *inliers* y el mejor modelo estimado.
- **FM-R3** utiliza los grados de compatibilidad entre el conjunto de muestras  $P$  y el modelo estimado para determinar si una muestra es un *inlier* o un *outlier* introduciendo un nuevo valor umbral  $\sigma_\phi$  sobre el valor entre 0 y 1 generado mediante la métrica difusa correspondiente, y, por tanto,  $\sigma_\phi \in [0, 1]$ , con valores altos denotando mayor compatibilidad con la condición de *inlier*. El resto del algoritmo procede de la misma forma que FM-R2.
- **FM-R4** no clasifica las muestras en *inliers* u *outliers* y utiliza el grado de compatibilidad entre el conjunto de muestras  $P$  y el modelo estimado para evaluar la bondad del modelo estimado. En consecuencia, la reestimación ponderada final, RP o RPI, se realiza con el conjunto total de muestras  $P$ .

Como se puede observar, la relevancia de la información proporcionada por las métricas difusas va en aumento desde FM-R1 hasta FM-R4. Con esto se pretende evaluar el efecto de incorporar en mayor o menor medida métricas difusas en el algoritmo RANSAC original.

---

**Algoritmo 2** Reestimación Ponderada y Ponderada Iterativa

---

**Input:**

- $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}^0$  : modelo de máximo consenso encontrado
- $\mathcal{P}_{in}^0$  : mejor conjunto de *inliers*
- $M_i$  y  $\Phi$  : métrica difusa con parámetros  $\Phi$
- $t_{\max}$  : número máximo de iteraciones en la etapa de refinamiento

**Output:**

- $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}^t$  : modelo refinado
- 

- 1:  $t := 0$
  - 2: **if** RP **then**
  - 3:   Calcular los errores de estimación  $\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}}^t), \forall p_j \in \mathcal{P}_{in}^0$
  - 4:   Estimar el modelo  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}^{t+1}$  utilizando los pesos  $\phi_i(\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}}^t); \Phi)$
  - 5:    $t := t + 1$
  - 6: **else if** RPI **then**
  - 7:   **repeat**
  - 8:     Calcular los errores de estimación  $\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}}^t), \forall p_j \in \mathcal{P}_{in}^0$
  - 9:     Estimar el modelo  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}^{t+1}$  utilizando los pesos  $\phi_i(\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}}^t); \Phi)$
  - 10:     $t := t + 1$
  - 11:   **until** convergencia **or**  $t \geq t_{\max}$
  - 12: **end if**
  - 13: **return**  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}^t$
-

---

**Algoritmo 3** FM-R1

---

**Input:**

$P$  : conjunto total de muestras  $\{p_j\}$   
 $\tau$  : umbral de ruido  
 $M_i$  y  $\Phi$  : métrica difusa con parámetros  $\Phi$   
 $k_{\max}$  : número máximo de iteraciones

**Output:**

$\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$  : modelo estimado

---

```
1:  $\varphi_{\max} := 0$ 
2: for  $k := 1$  to  $k_{\max}$  do
3:   Seleccionar aleatoriamente un conjunto mínimo de muestras  $S_k \subset P$  de tamaño  $s$ 
4:   Estimar el modelo  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}$  a partir de  $S_k$ 
5:   Calcular los errores de estimación  $\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}), \forall p_j \in P$ 
6:   Definir el conjunto de inliers  $\mathcal{P}_{in_k} := \{p_j \in P : |\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k})| \leq \tau\}$ 
7:   Determinar la bondad del modelo:  $\varphi_k := \sum_j \phi_i(\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}); \Phi), \forall p_j \in \mathcal{P}_{in_k}$ 
8:   if  $\varphi_k > \varphi_{\max}$  then
9:      $\varphi_{\max} := \varphi_k, \mathcal{M}_{\hat{\Theta}} := \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}, \mathcal{P}_{in} := \mathcal{P}_{in_k}$ 
10:  end if
11: end for
12: Reestimar  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$  mediante  $\mathcal{P}_{in}$ 
13: return  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$ 
```

---

---

**Algoritmo 4** FM-R2

---

**Input:**

$P$  : conjunto total de muestras  $\{p_j\}$   
 $\tau$  : umbral de ruido  
 $M_i$  y  $\Phi$  : métrica difusa con parámetros  $\Phi$   
 $k_{\max}$  : número máximo de iteraciones

**Output:**

$\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$  : modelo estimado

---

```
1:  $\varphi_{\max} := 0$ 
2: for  $k := 1$  to  $k_{\max}$  do
3:   Seleccionar aleatoriamente un conjunto mínimo de muestras  $S_k \subset P$  de tamaño  $s$ 
4:   Estimar el modelo  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}$  a partir de  $S_k$ 
5:   Calcular los errores de estimación  $\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}), \forall p_j \in P$ 
6:   Definir el conjunto de inliers  $\mathcal{P}_{in_k} := \{p_j \in P : |\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k})| \leq \tau\}$ 
7:   Determinar la bondad del modelo:  $\varphi_k := \sum_j \phi_i(\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}); \Phi), \forall p_j \in \mathcal{P}_{in_k}$ 
8:   if  $\varphi_k > \varphi_{\max}$  then
9:      $\varphi_{\max} := \varphi_k, \mathcal{M}_{\hat{\Theta}} := \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}, \mathcal{P}_{in} := \mathcal{P}_{in_k}$ 
10:  end if
11: end for
12: Reestimar  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$  mediante el algoritmo 2
13: return  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$ 
```

---

---

**Algoritmo 5** FM-R3

---

**Input:**

$P$  : conjunto total de muestras  $\{p_j\}$   
 $\sigma_\phi$  : umbral de grado de cercanía  
 $M_i$  y  $\Phi$  : métrica difusa con parámetros  $\Phi$   
 $k_{\max}$  : número máximo de iteraciones

**Output:**

$\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$  : modelo estimado

---

```
1:  $\varphi_{\max} := 0$ 
2: for  $k := 1$  to  $k_{\max}$  do
3:   Seleccionar aleatoriamente un conjunto mínimo de muestras  $S_k \subset P$  de tamaño  $s$ 
4:   Estimar el modelo  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}$  a partir de  $S_k$ 
5:   Calcular los errores de estimación  $\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}), \forall p_j \in P$ 
6:   Definir el conjunto de inliers  $\mathcal{P}_{in_k} := \{p_j \in P : \phi_i(\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}); \Phi) \geq \sigma_\phi\}$ 
7:   Determinar la bondad del modelo:  $\varphi_k := \sum_j \phi_i(\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}); \Phi), \forall p_j \in \mathcal{P}_{in_k}$ 
8:   if  $\varphi_k > \varphi_{\max}$  then
9:      $\varphi_{\max} := \varphi_k, \mathcal{M}_{\hat{\Theta}} := \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}, \mathcal{P}_{in} := \mathcal{P}_{in_k}$ 
10:  end if
11: end for
12: Reestimar  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$  mediante el algoritmo 2
13: return  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$ 
```

---

---

**Algoritmo 6** FM-R4

---

**Input:**

$P$  : conjunto total de muestras  $\{p_j\}$   
 $M_i$  y  $\Phi$  : métrica difusa con parámetros  $\Phi$   
 $k_{\max}$  : número máximo de iteraciones

**Output:**

$\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$  : modelo estimado

---

```
1:  $\varphi_{\max} := 0$ 
2: for  $k := 1$  to  $k_{\max}$  do
3:   Seleccionar aleatoriamente un conjunto mínimo de muestras  $S_k \subset P$  de tamaño  $s$ 
4:   Estimar el modelo  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}$  a partir de  $S_k$ 
5:   Calcular los errores de estimación  $\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}), \forall p_j \in P$ 
6:   Determinar la bondad del modelo:  $\varphi_k := \sum_j \phi(\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}); \Phi), \forall p_j \in P$ 
7:   if  $\varphi_k > \varphi_{\max}$  then
8:      $\varphi_{\max} := \varphi_k, \mathcal{M}_{\hat{\Theta}} := \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}$ 
9:   end if
10: end for
11: Reestimar  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$  mediante el algoritmo 2
12: return  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$ 
```

---

---

**Algoritmo 3** FM-R1

---

**Input:**

$P$  : conjunto total de muestras  $\{p_j\}$   
 $\tau$  : umbral de ruido  
 $M_i$  y  $\Phi$  : métrica difusa con parámetros  $\Phi$   
 $k_{\max}$  : número máximo de iteraciones

**Output:**

$\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$  : modelo estimado

---

```
1:  $\varphi_{\max} := 0$ 
2: for  $k := 1$  to  $k_{\max}$  do
3:   Seleccionar aleatoriamente un conjunto mínimo de
     muestras  $S_k \subset P$  de tamaño  $s$ 
4:   Estimar el modelo  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}$  a partir de  $S_k$ 
5:   Calcular los errores de estimación  $\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}), \forall p_j \in P$ 
6:   Definir el conjunto de inliers  $\mathcal{P}_{in_k} := \{p_j \in P : |\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k})| \leq \tau\}$ 
7:   Determinar la bondad del modelo:  $\varphi_k := \sum_j \phi_i(\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}); \Phi), \forall p_j \in \mathcal{P}_{in_k}$ 
8:   if  $\varphi_k > \varphi_{\max}$  then
9:      $\varphi_{\max} := \varphi_k, \mathcal{M}_{\hat{\Theta}} := \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}, \mathcal{P}_{in} := \mathcal{P}_{in_k}$ 
10:  end if
11: end for
12: Reestimar  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$  mediante  $\mathcal{P}_{in}$ 
13: return  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$ 
```

---

---

**Algoritmo 5** FM-R3

---

**Input:**

$P$  : conjunto total de muestras  $\{p_j\}$   
 $\sigma_\phi$  : umbral de grado de cercanía  
 $M_i$  y  $\Phi$  : métrica difusa con parámetros  $\Phi$   
 $k_{\max}$  : número máximo de iteraciones

**Output:**

$\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$  : modelo estimado

---

```
1:  $\varphi_{\max} := 0$ 
2: for  $k := 1$  to  $k_{\max}$  do
3:   Seleccionar aleatoriamente un conjunto mínimo de
     muestras  $S_k \subset P$  de tamaño  $s$ 
4:   Estimar el modelo  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}$  a partir de  $S_k$ 
5:   Calcular los errores de estimación  $\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}), \forall p_j \in P$ 
6:   Definir el conjunto de inliers  $\mathcal{P}_{in_k} := \{p_j \in P : \phi_i(\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}); \Phi) \geq \sigma_\phi\}$ 
7:   Determinar la bondad del modelo:  $\varphi_k := \sum_j \phi_i(\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}); \Phi), \forall p_j \in \mathcal{P}_{in_k}$ 
8:   if  $\varphi_k > \varphi_{\max}$  then
9:      $\varphi_{\max} := \varphi_k, \mathcal{M}_{\hat{\Theta}} := \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}, \mathcal{P}_{in} := \mathcal{P}_{in_k}$ 
10:  end if
11: end for
12: Reestimar  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$  mediante el algoritmo 2
13: return  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$ 
```

---

---

**Algoritmo 4** FM-R2

---

**Input:**

$P$  : conjunto total de muestras  $\{p_j\}$   
 $\tau$  : umbral de ruido  
 $M_i$  y  $\Phi$  : métrica difusa con parámetros  $\Phi$   
 $k_{\max}$  : número máximo de iteraciones

**Output:**

$\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$  : modelo estimado

---

```
1:  $\varphi_{\max} := 0$ 
2: for  $k := 1$  to  $k_{\max}$  do
3:   Seleccionar aleatoriamente un conjunto mínimo de
     muestras  $S_k \subset P$  de tamaño  $s$ 
4:   Estimar el modelo  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}$  a partir de  $S_k$ 
5:   Calcular los errores de estimación  $\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}), \forall p_j \in P$ 
6:   Definir el conjunto de inliers  $\mathcal{P}_{in_k} := \{p_j \in P : |\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k})| \leq \tau\}$ 
7:   Determinar la bondad del modelo:  $\varphi_k := \sum_j \phi_i(\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}); \Phi), \forall p_j \in \mathcal{P}_{in_k}$ 
8:   if  $\varphi_k > \varphi_{\max}$  then
9:      $\varphi_{\max} := \varphi_k, \mathcal{M}_{\hat{\Theta}} := \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}, \mathcal{P}_{in} := \mathcal{P}_{in_k}$ 
10:  end if
11: end for
12: Reestimar  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$  mediante el algoritmo 2
13: return  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$ 
```

---

---

**Algoritmo 6** FM-R4

---

**Input:**

$P$  : conjunto total de muestras  $\{p_j\}$   
 $M_i$  y  $\Phi$  : métrica difusa con parámetros  $\Phi$   
 $k_{\max}$  : número máximo de iteraciones

**Output:**

$\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$  : modelo estimado

---

```
1:  $\varphi_{\max} := 0$ 
2: for  $k := 1$  to  $k_{\max}$  do
3:   Seleccionar aleatoriamente un conjunto mínimo de
     muestras  $S_k \subset P$  de tamaño  $s$ 
4:   Estimar el modelo  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}$  a partir de  $S_k$ 
5:   Calcular los errores de estimación  $\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}), \forall p_j \in P$ 
6:   Determinar la bondad del modelo:  $\varphi_k := \sum_j \phi(\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}); \Phi), \forall p_j \in P$ 
7:   if  $\varphi_k > \varphi_{\max}$  then
8:      $\varphi_{\max} := \varphi_k, \mathcal{M}_{\hat{\Theta}} := \mathcal{M}_{\hat{\Theta}_k}$ 
9:   end if
10: end for
11: Reestimar  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$  mediante el algoritmo 2
12: return  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$ 
```

---

Figura 3.2: Diferencias entre los algoritmos FM-R y el algoritmo RANSAC original. Las diferencias están destacadas en color azul.

## Capítulo 4

# Metodología experimental

En este capítulo se presentan los modelos que serán objeto de estimación en capítulos posteriores. Además, se describe el procedimiento de generación de los *datasets* sintéticos a partir de los cuales se estimarán los modelos presentados para evaluar los algoritmos FM-R. Por último, se describen tanto los parámetros configurables del proceso de estimación como las métricas que serán utilizadas para determinar la bondad de una estimación.

### 4.1. Definición de los modelos considerados

En esta sección se presentan los modelos  $\mathcal{M}_\Theta$  que serán objeto de estimación en capítulos posteriores. Asimismo, se define el vector de parámetros  $\Theta$  que describe a cada modelo.

#### 4.1.1. Hiperplanos

Un hiperplano  $h$  puede definirse como un subespacio lineal de un espacio vectorial  $v$  tal que la base de  $h$  tiene cardinalidad uno menos que la cardinalidad de la base  $v$ . Es decir, si  $v$  es un espacio vectorial  $n$ -dimensional entonces  $h$  es un subespacio  $(n - 1)$ -dimensional.

El modelo de hiperplano  $n$ -dimensional puede definirse a partir de un vector normal  $w$  y un punto contenido en el hiperplano  $p_o$  en el espacio  $n$ -dimensional de tal manera que cualquier punto  $p$  del hiperplano cumple lo siguiente:

$$w^T(p - p_o) = w^T \cdot p + w_o = 0. \quad (4.1)$$

A partir de esta expresión, el vector de parámetros de un hiperplano se define como  $\Theta = (w^T, w_o)$ . De esta manera, para sintetizar un modelo de hiperplano  $\mathcal{M}_{\Theta^*}$  se establece el valor de cada parámetro de  $\Theta^* = (w^{T,*}, w_o^*)$  de forma aleatoria dentro de un rango configurable.

#### 4.1.2. Elipses

Una elipse puede definirse como una trayectoria curvada en torno a dos puntos focales, de tal manera que la suma de las distancias entre cualquier punto de la trayectoria y los

dos puntos focales es constante. La línea recta que une ambos puntos focales define el eje mayor de la elipse y, cuanto más cercano a cero sea el valor de su longitud, más parecida será la elipse a una circunferencia. El eje menor es perpendicular al eje mayor y contiene el centro de la elipse, el punto del eje mayor equidistante de los focos. Por otro lado, una elipse puede ser definida formalmente a partir de:

$$\begin{aligned} p_x &= p_{x_o} + A \cdot \cos(\gamma) \cdot \cos(\psi) - B \cdot \sin(\gamma) \cdot \sin(\psi) \\ p_y &= p_{y_o} + A \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(\psi) + B \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\psi), \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde el punto  $(p_{x_o}, p_{y_o})$  es el centro de la elipse;  $2A$  y  $2B$  definen las longitudes de los semiejes de la elipse en  $x$  e  $y$ , respectivamente;  $\gamma$  establece la rotación de los semiejes de la elipse sobre el eje  $z$  en sentido antihorario; y  $\psi$  es el ángulo que forma una recta que pasa por el origen y el punto  $(p_x, p_y)$  respecto del semieje en  $x$  de la elipse. Otra forma conveniente de definir una elipse es a partir de la ecuación general:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2fy + g = 0, \quad (4.3)$$

y, de esta manera, el vector de parámetros puede definirse como  $\Theta = (a, b, c, d, f, g)$ . Por tanto, para sintetizar un modelo de elipse  $\mathcal{M}_{\Theta^*}$  se podría establecer el valor de cada parámetro de  $\Theta^* = (a, b, c, d, f, g)^*$  de forma aleatoria dentro de un rango configurable. Una forma más intuitiva de generar modelos de elipses es a partir de los parámetros de las expresiones presentadas en (4.2). De esta manera, se establecen rangos de valores dentro los cuales se generan los valores de las longitudes de los semiejes  $2A$  y  $2B$ , rotaciones sobre el  $z$  con un ángulo  $\gamma$  y centro de la elipse  $(p_{x_o}, p_{y_o})$  para definir cada modelo  $\mathcal{M}_{\Theta^*}$  y, a partir de estos, obtener el vector de parámetros  $\Theta^*$ .

### 4.1.3. Homografías de similitud

Una homografía  $H$  se puede emplear para definir la transformación 2D entre una superficie plana en una imagen  $P_1$  y el conjunto de correspondencias de  $P_1$  en otra imagen  $P_2$ . De forma general, esta transformación se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} p_{x_1} \\ p_{y_1} \\ 1 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} p_{x_2} \\ p_{y_2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} \\ h_{20} & h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x_2} \\ p_{y_2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

donde los puntos  $(p_{x_1}, p_{y_1})$  y  $(p_{x_2}, p_{y_2})$  representan respectivamente puntos de  $P_1$  y  $P_2$ .

Un caso particular de homografía es la homografía de similitud, una transformación de cuatro grado de libertad entre las imágenes consideradas:

$$H = R - \frac{T \cdot n^T}{d} = \begin{bmatrix} s \cdot \cos(\alpha) & -s \cdot \sin(\alpha) & tx \\ s \cdot \sin(\alpha) & s \cdot \cos(\alpha) & ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

donde  $\alpha$  define una rotación sobre el eje  $z$  (el eje óptico de la cámara),  $(t_x, t_y)$  define una traslación sobre el plano  $xy$  y  $s$  es una factor de escala. Por tanto, se puede definir el vector



de parámetros como  $\Theta = (s, \alpha, t_x, t_y)$ . En lugar de establecer el valor de cada parámetro de  $\Theta^*$  de  $\mathcal{M}_{\Theta^*}$  de forma aleatoria dentro de un rango configurable, se ha optado por generar aleatoriamente dos posiciones de cámara, considerando los grados de libertad que permite la homografía de similitud, y definir la homografía de similitud  $H$  a partir de las posiciones de cámara resultantes  $C1$  y  $C2$ .

## 4.2. Generación de conjuntos sintéticos de muestras

En esta sección se describe el procedimiento de generación de conjuntos sintéticos de muestras para cada uno de los modelos presentados en la sección anterior. El objetivo principal de este procedimiento es poder controlar del ruido que afecta tanto a los *inliers* como a los *outliers*, así como la proporción de *outliers*  $\omega$  en el *dataset*. De esta forma se pretende determinar la robustez de las diferentes variantes de RANSAC que se consideran en este trabajo.

### 4.2.1. Hiperplanos

En el caso de los hiperplanos, las muestras que se ajustan a un modelo de hiperplano, es decir, los puntos que se consideran *inliers*  $p_{in}$ , se generan desplazando la posición de un punto aleatorio del hiperplano en dirección  $w^T$  una distancia  $d$  generada aleatoriamente según una distribución Gaussiana  $\mathcal{N}(0, \sigma)$ . Por tanto, los *inliers* pasan de estar contenidos en el hiperplano a situarse en sus proximidades mediante la expresión  $p_{in} = p + \mathcal{N}(0, \sigma) \cdot w^T$ . De esta manera, si la función que mide el error  $\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\Theta})$  entre una muestra  $p_j$  y el modelo  $\mathcal{M}_{\Theta}$  proporciona la mínima distancia entre ambos, los errores  $\epsilon$  de los *inliers* respecto del modelo siguen una distribución Gaussiana  $\mathcal{N}(0, \sigma)$ . Por otra parte, los *outliers* se distribuyen de manera uniforme dentro de un hipercubo de lado  $l$  y fuera de la banda  $\pm 3\sigma$  centrada en el modelo original  $\mathcal{M}_{\Theta^*}$ , con el objetivo de tener control efectivo sobre la proporción de *outliers*. La figura 4.1 muestra ejemplos de conjuntos de muestras, es decir *datasets*, afectados por distintas proporciones de *outliers*  $\omega$  y magnitud de ruido  $\sigma$ , que contienen un modelo de recta en dos dimensiones, es decir, un hiperplano de dos dimensiones.

### 4.2.2. Elipses

En el caso de las elipses, los *inliers*  $p_{in}$  se generan desplazando la posición de un punto aleatorio  $p$  sobre la elipse en dirección normal a la elipse una distancia  $d$ , cuyo valor es una muestra aleatoria de una distribución Gaussiana  $\mathcal{N}(0, \sigma)$ . Por tanto, los *inliers* pasan de ser puntos contenidos en la elipse a situarse en sus proximidades mediante la expresión  $p_{in} = p + \mathcal{N}(0, \sigma) \cdot \vec{n}$ , donde  $\vec{n} = (2(ax + by + d), 2(bx + cy + f))$  es el vector gradiente en un punto de la elipse. Debido a que se ha establecido que la función que determina el error  $\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\Theta})$  devuelve la distancia mínima entre un punto  $p_j$  y el modelo  $\mathcal{M}_{\Theta}$ , la distribución de errores no sigue una distribución Gaussiana  $\mathcal{N}(0, \sigma)$ . En consecuencia, para poder establecer un valor umbral de ruido de manera similar al procedimiento seguido en

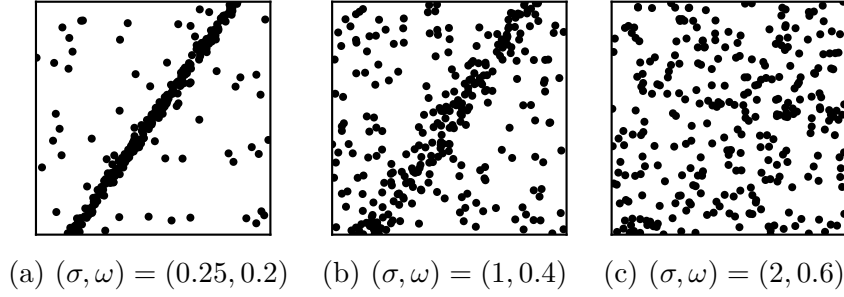


Figura 4.1: Ejemplos de *datasets* con distintos valores de parámetros de ruido  $(\sigma, \omega)$  considerados en la estimación de rectas 2D, como caso particular de hiperplano. El modelo original contenido en todos los ejemplos es  $0.82x - 0.58y + 0.00 = 0$ .

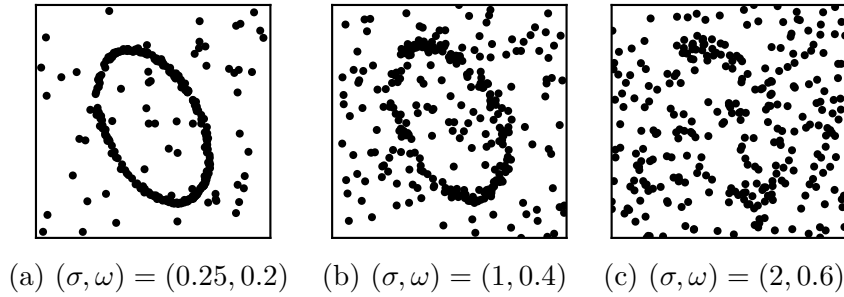


Figura 4.2: Ejemplos de *datasets* con distintos valores de parámetros de ruido  $(\sigma, \omega)$  considerados en la estimación de elipses. El modelo original contenido en todos los ejemplos es  $0.054x^2 + 0.034xy + 0.029y^2 = 1$ .

los hiperplanos, se ha determinado, de manera empírica, un intervalo de  $\pm 1.3\sigma$  centrado en el modelo dentro del cual se encuentran el 99,7% de los errores de los *inliers*. Por otra parte, los *outliers* se distribuyen de manera uniforme dentro de un cuadrado de lado  $l$  y fuera de la banda  $\pm 1.3\sigma$  centrada en el modelo  $\mathcal{M}_\Theta$  con el objetivo de tener control efectivo sobre la proporción de *outliers*. La figura 4.2 muestra ejemplos de *datasets*, afectados por distintas proporciones de *outliers*  $\omega$  y magnitud de ruido  $\sigma$ .

### 4.2.3. Homografías

Para sintetizar un *dataset* en este caso, dada una colección de puntos aleatorios de una escena plana, estos se proyectan en los planos imagen de la cámara en dos posiciones diferentes  $C1$  y  $C2$ , asumiendo una lente con distancia focal  $f = 10 \text{ mm}$  y un sensor con tamaño de píxel  $s_x = s_y = 10 \text{ }\mu\text{m}$ . De esta manera, la imagen proyectada en coordenadas píxel viene dada por:

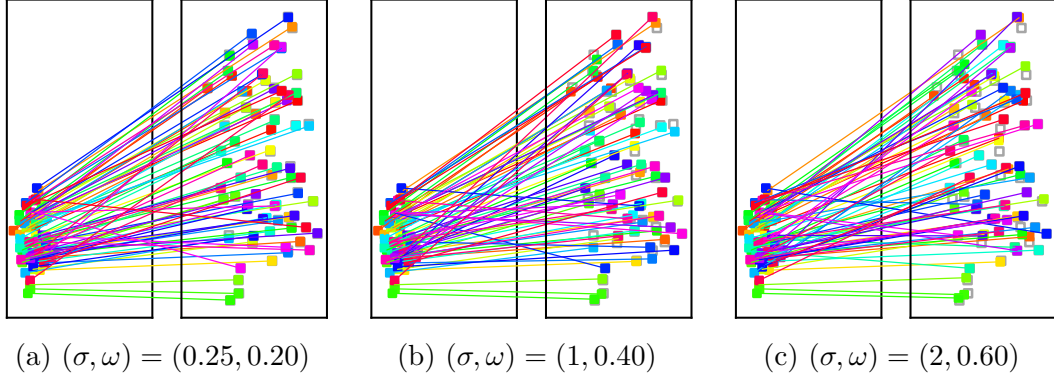


Figura 4.3: Ejemplos de *datasets* con distintos valores de parámetros de ruido  $(\sigma, \omega)$  considerados en la estimación de homografías de similitud. A la izquierda de cada ejemplo se representa la imagen  $P_1$  y a la derecha la imagen  $P_2$  y la transformación con la homografía original  $H^*P_1$  con recuadros grises. El modelo original contenido en todos los ejemplo está descrito por los parámetros  $(s, \alpha, t_x, t_y) = (3.00, -0.28, -1271.51, -287.42)$ .

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fs_x & 0 & o_x \\ 0 & fs_y & o_y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(C_\beta) & -\sin(C_\beta) & 0 & C_X \\ \sin(C_\beta) & \cos(C_\beta) & 0 & C_Y \\ 0 & 0 & 1 & C_Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_X \\ p_Y \\ p_Z \\ 1 \end{bmatrix},$$

donde  $(o_x, o_y)$  coincide con el centro óptico de la cámara y  $[p_X, p_Y, p_Z, 1]^T$  es un punto del plano en el espacio 3D.

Por otra parte, en cuanto a la generación del ruido que afecta a los *inliers*, cada punto de la proyección en la cámara  $C_2$  se desplaza en el eje  $x$  e  $y$  a partir de una muestra de una distribución Gaussiana  $\mathcal{N}(0, \sigma)$  independiente para cada eje:  $p_x = p_x + \mathcal{N}(0, \sigma)$  y  $p_y = p_y + \mathcal{N}(0, \sigma)$ . Además, se ha considerado que la distancia entre  $P_2$  y la transformación  $HP_1$  proporciona el error de reproyección  $\epsilon((P_1; P_2); H) = d(HP_1, P_2)$ , donde  $d(HP_1, P_2)$  denota la distancia euclídea en píxeles. Por tanto, el conjunto de errores  $\epsilon^2$  sigue una distribución chi-cuadrada  $\chi_n^2$  con  $n = 2$  grados de libertad. De esta manera, el error  $\epsilon_j^2$  estará por debajo del umbral  $\tau^2 = \sigma^2 \cdot \chi_n^{-1}(p)$ , donde  $\chi_n^{-1}$  es la función de distribución chi-cuadrada acumulada inversa y  $p$  es la probabilidad con la que se cumple esta premisa. Por ejemplo, estableciendo un valor de  $p = 99.7\%$  el valor del umbral de ruido adecuado sería  $\tau = 3.41\sigma$ . Los *outliers*, en este caso, se generan desemparejando una proporción de correspondencias verdaderas de manera aleatoria. La figura 4.3 muestra ejemplos de *datasets*, afectados por distintas proporciones de *outliers*  $\omega$  y magnitud de ruido  $\sigma$ .

### 4.3. Configuración del proceso de estimación

Un proceso de estimación está definido por el *dataset* correspondiente al modelo  $\mathcal{M}_{\Theta^*}$  que se pretende estimar y por los parámetros configurables del algoritmo de estimación. En el caso de los algoritmos FM-R, es necesario definir los valores de los parámetros enumerados en la tabla 4.1.

Parámetro	Descripción
$s$	Conjunto mínimo de muestras
$\tau$	Valor umbral de ruido utilizado por FM-R1 y FM-R2
$p$	Probabilidad con la que se encuentra al menos un conjunto mínimo de muestras $S$ formado únicamente por <i>inliers</i> en $k_{\max}$ iteraciones
$\omega$	Proporción de <i>outliers</i> para determinar el número de iteraciones $k_{\max}$ a partir de la expresión 2.3
$\Phi = (n, \theta)$	Parámetros configurables de las métricas difusas incorporadas en FM-R
$\sigma_\phi$	Valor umbral basado en el grado de pertenencia de una muestra al conjunto de <i>inliers</i> utilizado en FM-R3

Tabla 4.1: Parámetros configurables de los algoritmos FM-R.

A modo de resumen, en la figura 4.4 se describe de forma gráfica el proceso de generación del conjunto sintético de muestras y el proceso de estimación, junto con las variables de las que dependen. En adelante, se denomina como prueba de estimación al conjunto de ambos procesos.

Por último, con el objetivo de comparar la bondad de los distintos estimadores, en una prueba de estimación de un determinado modelo  $\mathcal{M}_{\Theta^*}$  contenido en un *dataset* con parámetros de ruido  $(\sigma, \omega)$ , todos los estimadores seleccionan la misma secuencia de conjuntos mínimos  $S$  seleccionados en cada iteración. De esta manera, se eliminan efectos debidos a la aleatoriedad que puedan influir en la bondad de la estimación de un mismo modelo mediante distintos estimadores.

#### 4.3.1. Medición de la precisión de una estimación

A partir de los vectores de parámetros del modelo original y estimado, se puede obtener diversas mediciones para evaluar la bondad del modelo estimado en cuanto a la precisión respecto del modelo original. Una manera directa de evaluación es calcular los errores relativos y absolutos de cada una de las componentes del vector de parámetros del modelo estimado  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$  respecto del vector de parámetros del modelo original  $\mathcal{M}_{\Theta^*}$ . No obstante, la cantidad de componentes del vector de parámetros puede ser elevada en casos como los hiperplanos y, en consecuencia, los valores de errores relativos o absolutos pueden no ser fácilmente interpretables. Por consiguiente, se proponen distintas formas de medir la precisión de las estimaciones para cada uno de los modelos presentados en este capítulo.

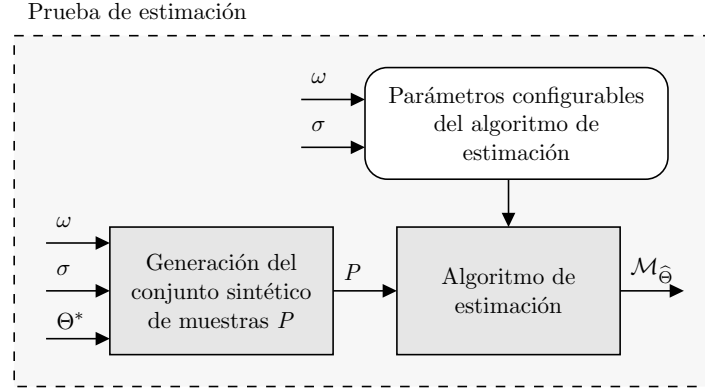


Figura 4.4: Diagrama de una prueba de estimación. Se incluyen los procesos de generación del conjunto sintético de muestras  $P$  y el proceso de estimación con el algoritmo correspondiente.

## Hiperplanos

En el caso del modelo de hiperplanos, una medida adecuada de la precisión de estimación es el ángulo  $\varepsilon$  entre los vectores normales del hiperplano  $w^T$  original y el estimado. Evitando la alusión al término independiente  $w_o$  que indica el origen del hiperplano en el espacio, el valor de  $\varepsilon$  resulta una medida de precisión de la estimación intuitiva y estrechamente relacionada con el modelo.

## Elipses

En el caso de las elipses, se ha optado por utilizar el máximo error relativo  $\varepsilon$  entre el vector de parámetros estimado  $\hat{\Theta}$  y original  $\Theta^*$ . De esta manera, el valor de  $\varepsilon$  se calcula como:

$$\varepsilon = \max_{q_i \in \{a, b, c, d, e, f\}} \left\{ \frac{|\hat{q}_i - q_i^*|}{q_i^*} \right\} \times 100. \quad (4.6)$$

## Homografías

En cuanto a la evaluación de la bondad de las estimaciones de homografías, se presentan valores de la raíz del error cuadrático medio o *Root Mean Square Error* (RMSE), por su traducción al inglés. Los valores de RMSE se calculan a partir de los errores de reproyección entre el modelo estimado y el modelo original como:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{(d(H^*P_1, P_2) - d(\hat{H}P_1, P_2))^2}{n_{\text{inliers}}}}, \quad (4.7)$$

donde  $H^*$  y  $\hat{H}$  son las homografías original y estimada, respectivamente, y  $n_{inliers}$  el número de *inliers*, ya que en el cálculo del RMSE se incluirán únicamente las correspondencias consideradas como *inliers* del modelo original.

#### 4.3.2. Configuración de un conjunto de pruebas de estimación

Un conjunto de pruebas hace referencia a un conjunto de  $K$  pruebas de estimación donde tanto los parámetros del ruido  $(\sigma, \omega)$  que afecta al *dataset* como los parámetros configurables de los algoritmos de estimación se mantienen constantes. Con el objetivo de obtener métricas que sean estadísticamente representativas, en las  $K$  pruebas de estimación varía únicamente el vector de parámetros del modelo original  $\Theta^*$ . De esta manera, se obtienen  $K$  valores de una determinada medida de precisión de estimación y se analizan valores estadísticos como percentiles y valores promedio.

## Capítulo 5

# Análisis de comportamiento de los algoritmos FM-R

En este capítulo se analiza el comportamiento de los algoritmos FM-R propuestos en este TFM. Este análisis se realiza a partir de medidas de calidad de estimación de rectas 2D, con el objetivo de seleccionar aquellos algoritmo FM-R que sobresalen sobre los otros. En el capítulo siguiente, se consideran otros problemas de estimación para evaluar de manera más amplia los algoritmos FM-R escogido en esta primera fase de la metodología. La segunda fase servirá, por tanto, de confirmación y para acabar la evaluación. Al final del capítulo se compara la calidad de la estimación de los algoritmos FM-R con los algoritmos RANSAC y MSAC originales. Se consideran estos dos algoritmos por ser los más parecidos a nivel computacional.

### 5.1. Caracterización de las métricas difusas

Como ya se ha presentado en el capítulo 3, los algoritmos FM-R incorporan métricas difusas en diversas etapas y de una forma diferente. Con el objetivo de analizar el comportamiento de los algoritmos propuestos, estableciendo distintos valores de sus parámetros configurables, se presentan estimaciones de modelos de rectas 2D a partir de conjuntos de muestras con diversos valores de los parámetros de ruido  $(\sigma, \omega)$ .

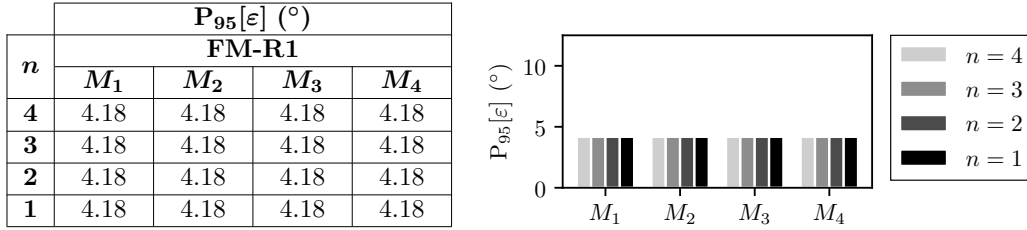
Las estimaciones que se presentan en las siguientes secciones se realizan con el algoritmo FM-R1 cuyos parámetros configurables se han establecido teniendo conocimiento previo de los parámetros de ruido. Asimismo, se ha analizado la dependencia de cada variante respecto de la disponibilidad de esta información. Si no se indica lo contrario, el conjunto de muestras está formado por un total de  $n_P = 300$  puntos y los valores de los parámetros de ruido se establecen como  $(\sigma, \omega) = (1, 0.4)$ . Se establece un valor de  $\tau = 3\sigma$  y, por último, el número de iteraciones  $k_{\max}$  se calcula en función de la proporción de *outliers* conocida mediante la expresión 2.3 fijando una probabilidad  $p = 0.99$ .

En cuanto a la medida de calidad de la estimación, se presentan valores del percentil  $P_{95}$  del ángulo  $\varepsilon$  en grados entre el vector normal del modelo original y el del modelo estimado.

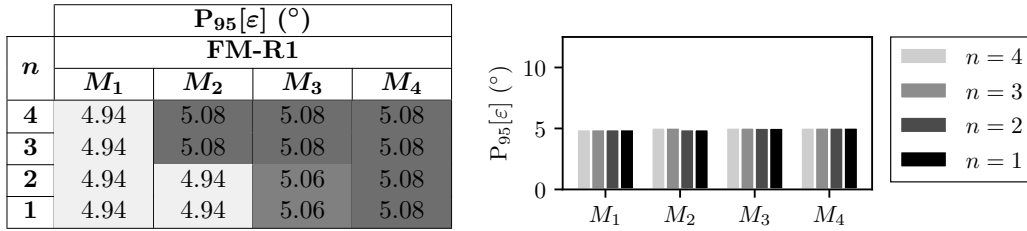
Esta medida se denota como  $P_{95}[\varepsilon]$ . Se han realizado un total de 500 estimaciones variando únicamente el vector de parámetros  $\Theta^*$  del modelo original.

### 5.1.1. Dependencia de la proporción de *outliers*

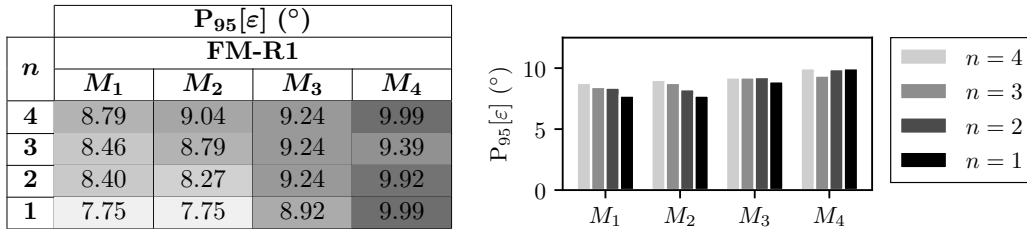
En esta sección se presentan y analizan los resultados de estimaciones con FM-R1 estableciendo tres proporciones de *outliers*  $\omega$  distintas y variando el valor del parámetro  $n$ . Los resultados obtenidos se recogen en la figura 5.1, donde los valores representados en las tablas indican una mayor precisión respecto del resto de valores con un tono de gris más claro. El valor del umbral  $\theta$  se establece como  $\theta = \tau$ .



(a) Proporción de *outliers*  $\omega = 0.20$



(b) Proporción de *outliers*  $\omega = 0.40$



(c) Proporción de *outliers*  $\omega = 0.60$

Figura 5.1: Evaluación de las estimaciones con FM-R1: dependencia de la precisión con la proporción de *outliers*  $\omega$  y del parámetro  $n$ .

Tal como se puede observar, por una parte, los resultados de las estimaciones donde la proporción de *outliers* es igual o inferior al 40% no presentan variaciones significativas ante el cambio de valores de  $n$ . Por otra parte, cuando la proporción de *outliers* es del 60%, se puede apreciar una ligera tendencia de mejora de las estimaciones con  $M_1$ ,  $M_2$  y



$M_3$  y un valor de  $n = 1$  y  $n = 2$ .

Los resultados de las estimaciones indican que, en general, la influencia del parámetro  $n$  sobre el algoritmo FM-R1 no es significativa. No obstante, debido a que estableciendo un valor de  $n = 1$  las métricas difusas  $M_1$  y  $M_2$  son idénticas, y las diferencias con el caso  $n = 2$  no son relevantes, en adelante se selecciona un valor fijo de  $n = 2$  ya que es uno de los valores con el que FM-R1 consigue resultados ligeramente mejores en términos de precisión de la estimación para cualquier proporción de *outliers*.

### 5.1.2. Dependencia del umbral de ruido

En esta sección se presentan y analizan los resultados de estimaciones estableciendo distintos valores del factor  $\kappa$ , donde  $\tau, \theta = \kappa \cdot \sigma$ . Los resultado se pueden encontrar en la figura 5.2.

En los resultados de las estimaciones se puede apreciar una mejora de la estimación para un valor de  $\kappa = 3$ . Por una parte, las estimaciones para un valor de  $\kappa < 3$  empeoran debido a que incluyen proporciones menores de *inliers* tanto en la estimación del modelo en cada iteración como en la reestimación final. Por otra parte, las estimaciones para un valor de  $\kappa > 3$  incorporan una proporción de *outliers* superior a las estimaciones para un valor de  $\kappa = 3$ , empeorando ligeramente el resultado de las estimaciones. No obstante, los resultados indican que hay poca variación en la precisión de las estimaciones para valores de  $\kappa$  entre 2 y 4, con  $\kappa = 3$  como mejor elección, como era de esperar. Valores de  $\kappa$  demasiado alejados sí afectan de forma más importante. En conclusión, parece que no es crítico disponer de conocimiento preciso sobre el ruido que afecta a los *inliers* del problema.

En las estimaciones posteriores se seleccionará un valor de  $\kappa = 3$  para poder aislar el efecto de fijar adecuadamente  $\Theta$  del efecto de otros parámetros.

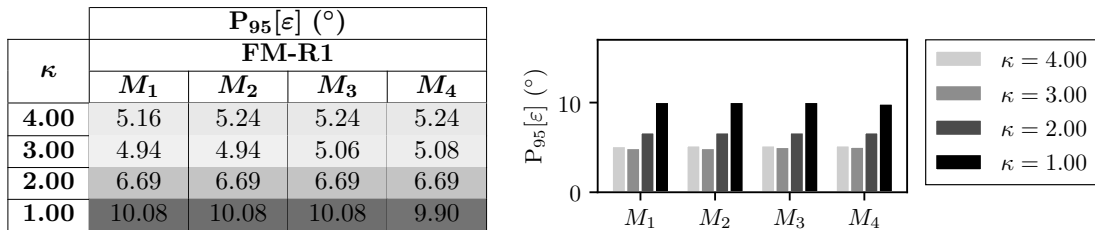


Figura 5.2: Evaluación de las estimaciones con FM-R1: dependencia de la precisión respecto del factor  $\kappa$ .

### 5.1.3. Dependencia entre el umbral de ruido $\tau$ y el parámetro $\theta$

Hasta este momento se ha seleccionado un valor de  $\theta$  igual al del umbral de ruido  $\tau$  debido a que son dos parámetros estrechamente relacionados. En esta sección se presentan y analizan los resultados de estimaciones variando los valores de  $\theta$  fijando un valor de

$\tau = 3\sigma$  con el objetivo de analizar la dependencia entre el valor de umbral de ruido y el parámetro  $\theta$ . La figura 5.3 muestra los resultados de las estimaciones con FM-R1.

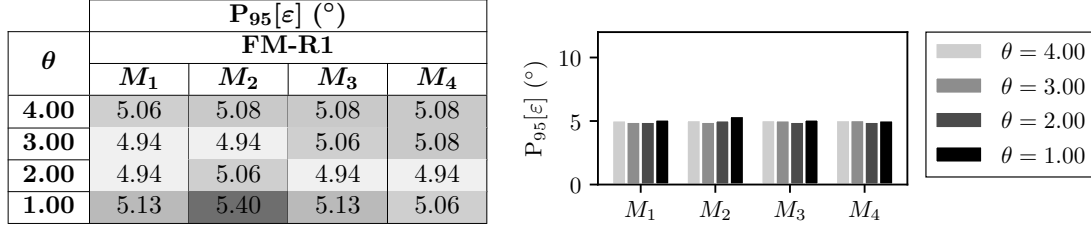


Figura 5.3: Evaluación de las estimaciones con FM-R1: dependencia entre el umbral de ruido  $\tau$  y el parámetro  $\theta$ .

Los resultados indican que la influencia del parámetro  $\theta$  en las estimaciones con FM-R1, al igual que la influencia del parámetro  $n$ , no es significativa. Sin embargo, pueden observarse ligeras tendencias indicando que los valores de  $\theta$  adecuados para conseguir estimaciones de mayor calidad son similares a los de  $\tau$  y, por consiguiente, en las estimaciones posteriores se establecen valores de  $\theta = \tau$ .

#### 5.1.4. Dependencia de la magnitud del ruido aleatorio

En esta sección se presentan y analizan los resultados de estimaciones con FM-R1 estableciendo distintos valores de magnitud de ruido aleatorio  $\sigma$ . Los resultados se muestran en la figura 5.4.

Los resultados indican que las diferencias entre las estimaciones de FM-R1 utilizando las distintas métricas difusas solo es significativa cuando el valor de la magnitud de ruido aleatorio es elevada ( $\sigma = 2$ ). En esta situación,  $M_3$  y  $M_4$  consiguen una peor calidad en la estimación mientras que  $M_1$  y  $M_2$  consiguen resultados ligeramente mejores en términos de precisión.

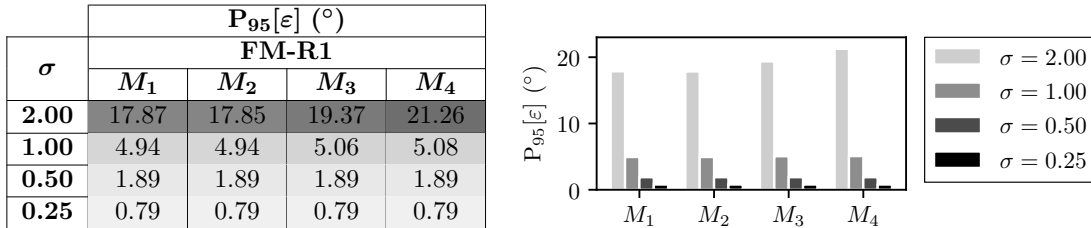
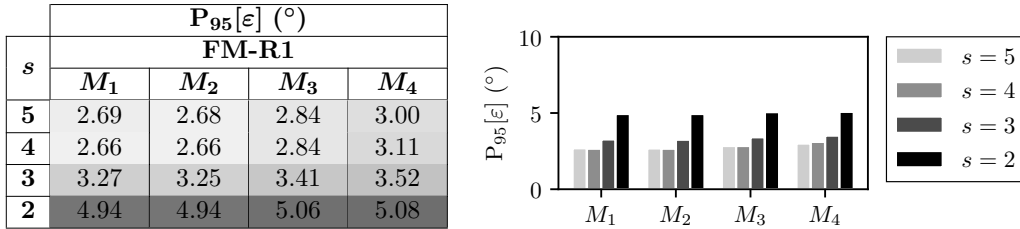


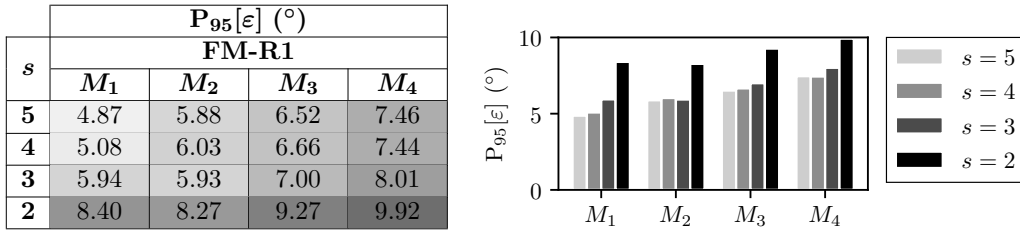
Figura 5.4: Evaluación de las estimaciones de FM-R1: dependencia de la precisión de la magnitud del ruido  $\sigma$ .

### 5.1.5. Dependencia del tamaño del conjunto mínimo $S$

El efecto en la estimación del tamaño del conjunto  $S$  se corresponde, en gran medida, con el número de iteraciones  $k_{\max}$  que se realizan en el bucle principal. A medida que aumenta el tamaño de  $S$ , aumenta el número de iteraciones teóricas totales  $k_{\max}$  calculado mediante la expresión (2.3). Como ya se ha señalado en el capítulo 3, el valor de  $k_{\max}$  asegura seleccionar al menos un conjunto mínimo  $S$  no contaminado por *outliers* con una probabilidad  $p$ , lo que resulta en un aumento en la calidad de la estimación cuanto mayor sea el tamaño de  $S$  y/o cuanto mayor sea la probabilidad  $p$ . Con el objetivo de ver la influencia del tamaño del conjunto mínimo en la estimación y teniendo en cuenta el efecto de  $k_{\max}$  en el coste computacional, la figura 5.5 muestra resultados de estimaciones con FM-R1 estableciendo dos valores de proporciones de *outliers* distintos y variando el tamaño  $s$  del conjunto mínimo  $S$ .



(a) Proporción de *outliers*  $\omega = 0.4$



(b) Proporción de *outliers*  $\omega = 0.6$

Figura 5.5: Evaluación de las estimaciones de FM-R1: dependencia de la precisión del tamaño  $s$  del conjunto mínimo  $S$ . El número de iteraciones  $k_{\max}$  con valores de  $s = (2, 3, 4, 5)$  en función de la proporción de *outliers*  $\omega$  es  $k_{\max} = (11, 19, 34, 57)$  con  $\omega = 0.4$  y  $k_{\max} = (27, 70, 178, 448)$  con  $\omega = 0.6$ .

Por una parte, se observa una mejora significativa al seleccionar  $s = s_{\min} + 1 = 3$  muestras en lugar de seleccionar  $s = s_{\min} = 2$ . Por ejemplo, con  $\omega = 0.4$  la calidad de la estimación mejora en más de  $1.5^{\circ}$  con cualquier métrica difusa con un coste de 8 iteraciones adicionales. En el caso de  $\omega = 0.6$  se consigue mejorar las estimaciones en hasta  $2^{\circ}$ , sin embargo, esta mejora supone realizar 43 iteraciones adicionales. Aunque supone un coste mayor debido a que se realizan un número mayor de iteraciones  $k_{\max}$ , se considerará un valor de  $s = 3$  en las pruebas de estimación posteriores.

### 5.1.6. Conclusiones

El objetivo de las secciones anteriores ha sido el de determinar los valores de los parámetros del algoritmo FM-R1 con los cuales se obtiene una mejor calidad en la estimación.

Por una parte, se ha podido determinar que con valores de  $\tau = 3\sigma$  y  $s = 3$  la calidad de la estimación mejora incorporando cualquier métrica difusa. Por otra parte, en cuanto a los valores de los parámetros de las métricas difusas, se ha podido observar que con valores de  $n = 2$  la calidad de la estimación mejora ligeramente y que no hay evidencias que indiquen que establecer un valor del parámetro  $\theta \neq \tau$  mejore o empeore la calidad de la estimación. Por tanto, en las secciones posteriores se establecen valores de  $\tau = 3\sigma$ ,  $s = 3$  y  $(n, \theta) = (2, \tau)$ , si no se indica lo contrario.

## 5.2. Comparación entre los algoritmos FM-R

Como se ha presentado en el capítulo 3, las variantes FM-R2, FM-R3 y FM-R4 incorporan, en la fase final del algoritmo, una etapa de RP o una etapa de RPI. Además, cabe recalcar que la forma de utilizar la información que proporcionan las métricas difusas es diferente en cada una de las variantes propuestas.

En las siguientes secciones se compara la calidad de la estimación de los algoritmos FM-R. En primer lugar se comparan los algoritmos FM-R que incorporan una etapa de RP y en segundo lugar los algoritmos que incorporan una etapa de RPI. El objetivo final es poder determinar qué variante permite obtener una mejor calidad en la estimación estableciendo un valor de  $\sigma = 1$  y distintos valores de proporción de *outliers*  $\omega$ . Al igual que en la sección 5.1, se han realizado 500 estimaciones variando únicamente el vector de parámetros del modelo original y se presentan valores del percentil  $P_{95}$  del ángulo  $\varepsilon$  en grados entre el vector normal del modelo original y el del modelo estimado representado como  $P_{95}[\varepsilon]$ . Asimismo, se presentan valores del percentil  $P_{95}$  del número de iteraciones  $t$  realizadas en la etapa de RPI, representado como  $P_{95}[t]$ .

### 5.2.1. FM-R con una etapa de RP

En esta sección se presentan y analizan resultados de estimaciones con los algoritmos FM-R con una etapa de RP. En la figura 5.6 se recopilan los resultados de estimaciones con las cuatro variantes propuestas variando la proporción de *outliers* y en la figura 5.7 se presentan resultados de estimaciones con el algoritmo FM-R3 variando la proporción de *outliers* y el valor del umbral  $\sigma_\phi$  (ver algoritmo 5).

A la vista de estos resultados, cabe señalar que: (1) ninguna de las variantes destaca por mejorar la precisión de la estimación en comparación con el resto; (2) en general, FM-R1 consigue una precisión superior para cualquier proporción de *outliers*  $\omega$ ; (3) las variantes propuestas consiguen mejores resultados incorporando las métricas difusas  $M_1$  y  $M_2$  cuando la proporción de *outliers* es elevada, y  $M_3$  y  $M_4$  cuando la proporción de *outliers* es baja. Este último hecho indica la importancia de eliminar la influencia de los *outliers* cuando la proporción de los mismos es elevada.

En cuanto a los resultados obtenidos con FM-R2, FM-R3 y FM-R4 en comparación con FM-R1 se observa que: (1) en las estimaciones con FM-R2 no se aprecia una mejora significativa en la calidad de la estimación, en todo caso, se observa una mejora con  $\omega \geq 0.5$  y un empeoramiento con  $\omega < 0.5$ , ambos poco significativos; (2) en las estimaciones con FM-R3 no se puede apreciar ninguna tendencia de mejora general en cuanto a precisión de estimación con ningún valor de  $\sigma_\phi$  aunque es posible establecer valores de  $\sigma_\phi$  que permiten obtener estimaciones relativamente precisas, destacando los casos en los que la proporción de *outliers* es elevada; (3) las estimaciones con FM-R4 no mejoran de manera general las estimaciones con FM-R1 independientemente de la métrica difusa utilizada.

$\omega$	$P_{95}[\varepsilon]$ ( $^{\circ}$ )			
	FM-R1			
	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
<b>0.60</b>	5.94	5.93	7.00	8.01
<b>0.50</b>	4.03	4.00	4.23	4.75
<b>0.40</b>	3.27	3.25	3.41	3.52
<b>0.20</b>	2.04	2.01	2.04	2.01

$\omega$	FM-R2 con RP			
	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
	<b>0.60</b>	5.79	5.63	6.92
<b>0.50</b>	4.00	3.71	4.22	4.47
<b>0.40</b>	3.80	3.70	3.62	3.74
<b>0.20</b>	2.80	2.61	2.37	2.26

$\omega$	FM-R3 con RP			
	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
	<b>0.60</b>	4.96	5.01	5.86
<b>0.50</b>	4.02	3.93	3.88	4.47
<b>0.40</b>	4.31	3.92	3.68	3.74
<b>0.20</b>	3.91	2.94	2.58	2.26

$\omega$	FM-R4 con RP			
	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
	<b>0.60</b>	6.29	5.63	7.07
<b>0.50</b>	4.41	3.71	4.64	5.44
<b>0.40</b>	4.11	3.70	3.96	4.24
<b>0.20</b>	2.59	2.61	2.36	2.42

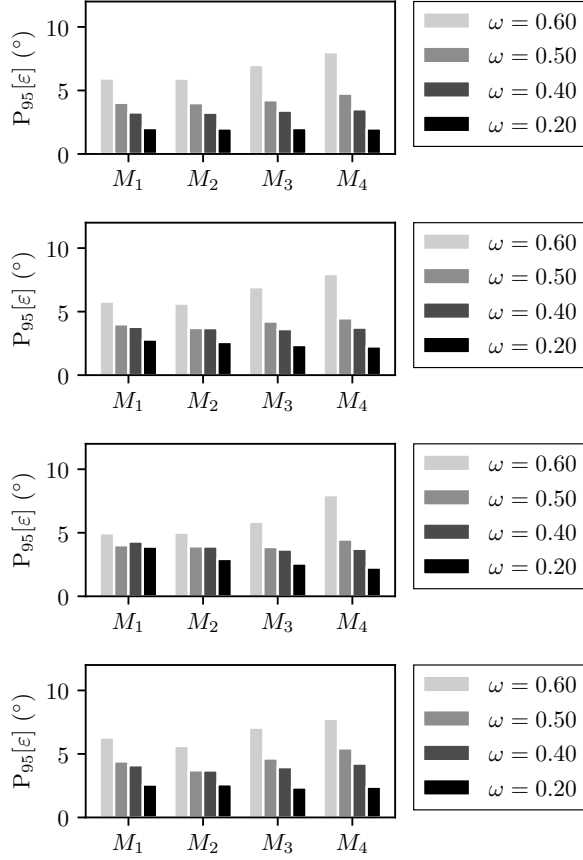


Figura 5.6: Evaluación de las estimaciones con los algoritmos FM-R con una etapa de RP: dependencia de la precisión de la proporción de *outliers*  $\omega$ . En las estimaciones con FM-R3 se ha configurado un valor umbral  $\sigma_{\phi} = 0.5$ .

### 5.2.2. FM-R con una etapa de RPI

En esta sección se presentan y analizan las estimaciones realizadas por las variantes FM-R2, FM-R3 y FM-R4 incorporando una etapa de RPI. Las figuras 5.8 y 5.9 muestra los resultados de estimaciones fijando valores de  $\sigma = 1$  y diferentes valores de proporción de *outliers*  $\omega$ .

A partir de los resultados de estimación se puede determinar que: (1) con FM-R2 la precisión de la estimación es superior de manera general, en comparación con el resto de variantes propuestas incorporando cualquiera de las métricas difusas  $M_i$ , realizando un número de iteraciones  $t$  similar o menor; (2) las métricas difusas con las que se consigue una mejor calidad de la estimación con cualquiera de los algoritmos FM-R son  $M_1$  y  $M_2$ ; a partir de (1) y (2) se puede extraer que (3) eliminar la influencia de los *outliers* cuyo error sea superior a un determinado umbral resulta, en general, conveniente para obtener

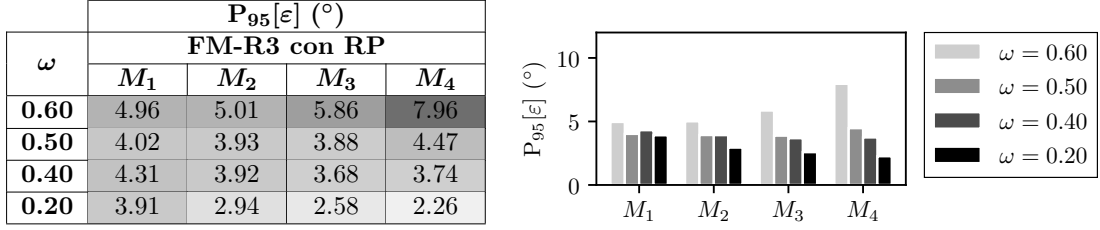
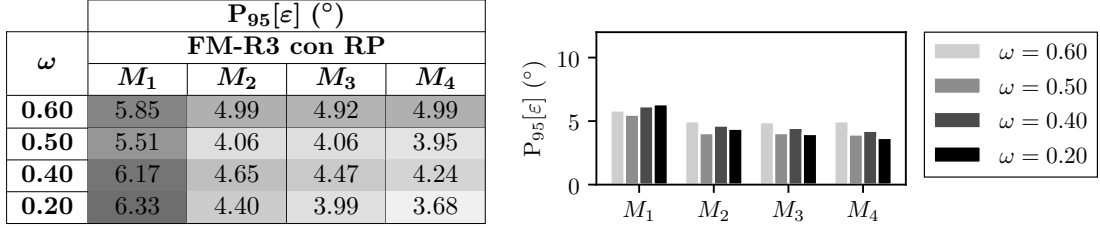
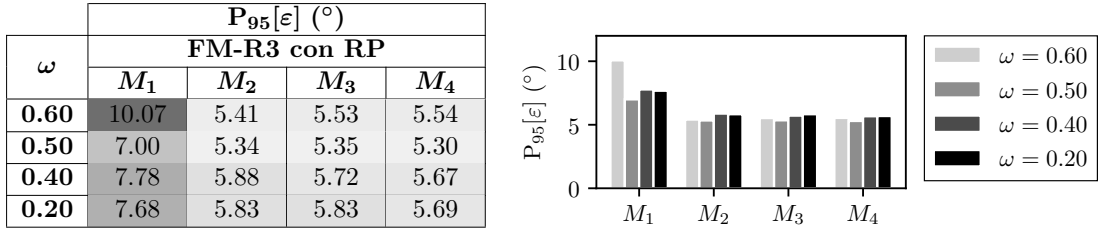
(a) Valor umbral  $\sigma_\phi = 0.50$ (b) Valor umbral  $\sigma_\phi = 0.75$ (c) Valor umbral  $\sigma_\phi = 0.90$ 

Figura 5.7: Resultados de estimaciones con FM-R3 con una etapa de RP: dependencia de la precisión de la proporción de *outliers*  $\omega$  y del valor umbral  $\sigma_\phi$ .

una buena precisión en la estimación; (4) no se han podido observar tendencias claras de mejora en las estimaciones con FM-R3; (5) la precisión de estimación con FM-R4 puede ser similar a la obtenida con FM-R2, exceptuando las estimaciones con la métrica difusa  $M_2$ , en cuyo caso son mejores, y con  $M_4$  ya que las estimaciones con esta última métrica son peores. Este hecho indica que considerar el conjunto completo de muestras permite encontrar el mejor modelo contenido en dicho conjunto en lugar de reestimar el modelo en la etapa de RPI únicamente con el mejor conjunto de *inliers* encontrado en el bucle principal; (6) por último, se puede observar como, a medida que aumenta el número de puntos utilizados en la etapa de RPI, se tiende a realizar más iteraciones principalmente cuando el ratio de *outliers*  $\omega$  es elevado.

Por otra parte, en cuanto a cómo evoluciona tanto la precisión de la estimación como la bondad del modelo estimado  $\varphi$  (ver algoritmos 3-6), la figura 5.10 muestra diferencias entre los valores de  $\varepsilon$  y  $\varphi$  al final y al inicio de la reestimación ponderada iterativa. Por un lado, en cuanto a la bondad del modelo estimado  $\varphi$ , en todos los casos por lo menos el 50 %

		$P_{95}[\varepsilon] (\circ)$			
		FM-R2 con RPI			
$\omega$		$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
<b>0.60</b>		4.57	3.66	5.70	6.69
<b>0.50</b>		3.03	2.55	3.26	3.88
<b>0.40</b>		2.38	2.13	2.44	2.87
<b>0.20</b>		1.78	1.62	1.78	1.79

		FM-R3 con RPI			
$\omega$		$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
<b>0.60</b>		4.32	4.36	5.02	6.69
<b>0.50</b>		3.38	2.90	3.11	3.88
<b>0.40</b>		3.58	2.86	2.81	2.87
<b>0.20</b>		3.05	2.38	1.94	1.79

		FM-R4 con RPI			
$\omega$		$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
<b>0.60</b>		5.29	3.47	6.00	10.37
<b>0.50</b>		3.51	2.55	3.82	5.71
<b>0.40</b>		2.59	2.04	2.73	3.73
<b>0.20</b>		1.63	1.51	1.66	1.94

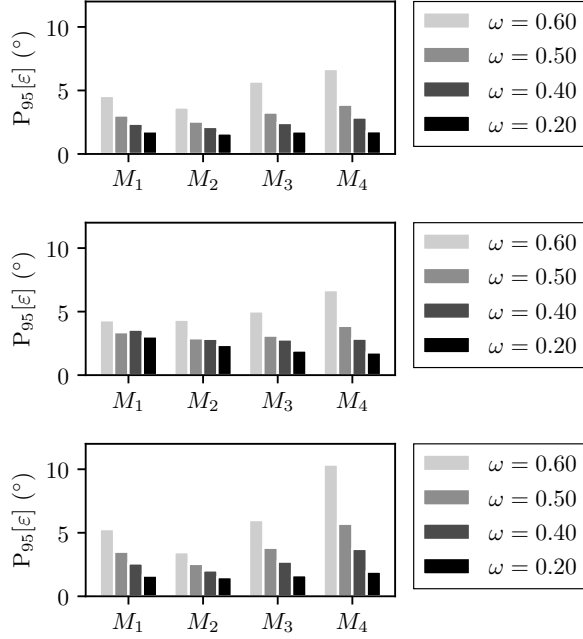


Figura 5.8: Evaluación de las estimaciones con los algoritmos FM-R con una etapa de RPI: dependencia de la precisión de la proporción de *outliers*  $\omega$ . En las estimaciones con FM-R3 se ha configurado un valor umbral  $\sigma_\phi = 0.5$ .

de los valores de  $\varphi$  son mayores respecto de los valores alcanzados antes de la etapa de RPI, exceptuando las variaciones  $\Delta\varphi$  de las estimaciones con FM-R3 incorporando  $M_2$ , en cuyo caso las variaciones de la bondad en la etapa de RPI son menores que en el resto de casos. Por otro lado, respecto a cómo varía el ángulo  $\varepsilon$  entre el vector de parámetros original y el estimado, se puede apreciar una tendencia generalizada de mejora de la precisión, consiguiendo incrementos de precisión en por lo menos el 50% de las estimaciones. A pesar de que, en el 50% de las estimaciones restantes, las estimaciones puedan empeorar en no más de  $\Delta\varepsilon = 5^\circ$ , en el resto de casos se consigue mejorar la calidad de la estimación en mayor medida.

### 5.2.3. Conclusiones

Con la estimación de rectas 2D se ha analizado el comportamiento de los algoritmos FM-R propuestos. Se han presentado estimaciones de modelos con diversos valores de parámetros de ruido  $(\sigma, \omega)$ , configurando el valor de los parámetros  $\tau$ ,  $\theta$ ,  $n$  y  $\sigma_\phi$  de los algoritmos FM-R con los que se consigue una mejor calidad de estimación.

Por una parte, respecto a los resultados con las variantes propuestas, se ha podido comprobar que las estimaciones con FM-R incorporando una etapa de RPI son significativamente mejores en términos de precisión en comparación con las obtenidas incorporando



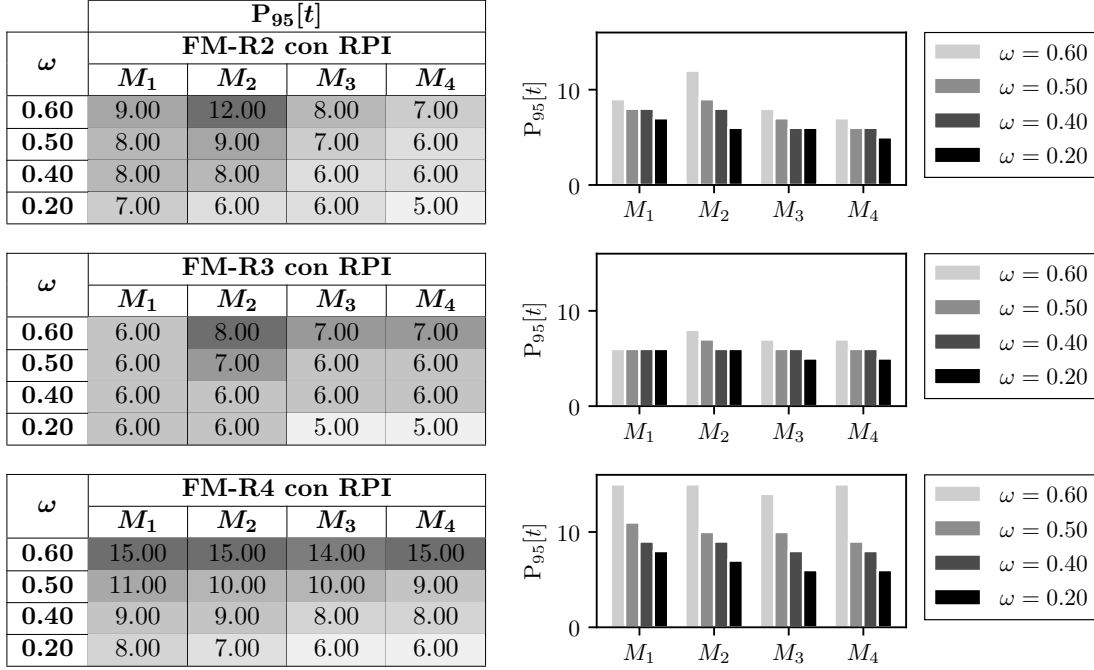


Figura 5.9: Evaluación de las estimaciones con los algoritmos FM-R con una etapa de RPI: dependencia del número de iteraciones  $t$  de la proporción de *outliers*  $\omega$ . En las estimaciones con FM-R3 se ha configurado un valor umbral  $\sigma_\phi = 0.5$ .

una etapa de RP. Sin embargo, esta mejora supone un mayor coste computacional ya que incorporar una etapa de RPI requiere realizar  $t > 1$  iteraciones.

Por otra parte, en cuanto a las variantes que incorporan una etapa de RPI, se puede observar que las estimaciones con FM-R2 y FM-R4 incorporando la misma métrica difusa son, en general, similares en términos de precisión. Sin embargo, FM-R4 tiende a realizar un mayor número de iteraciones en la etapa de RPI, mejorando la calidad de la estimación cuando se incorpora la métrica difusa  $M_2$  en comparación con FM-R2. El hecho de que las estimaciones con FM-R4 $_{M_2}$  sean las mejores en comparación con el resto de casos indica que utilizar la mayor cantidad de información posible permite obtener una mejor calidad de estimación a expensas de realizar un mayor número de iteraciones en la etapa de RPI. No obstante, esto no es aplicable a las estimaciones con FM-R4 incorporando el resto de métricas difusas, en cuyos casos no se mejora la calidad de las estimaciones con FM-R2 a pesar de realizar un mayor número de iteraciones  $t$ .

Por último, el hecho de que las estimaciones con las métricas difusas que anulan la influencia de los *outliers* (métricas difusas  $M_1$  y  $M_2$ ) sean, en general, más precisas indica que, a pesar de hacer una clasificación difusa de las muestras, es también importante eliminar el efecto de las distorsiones excesivas.

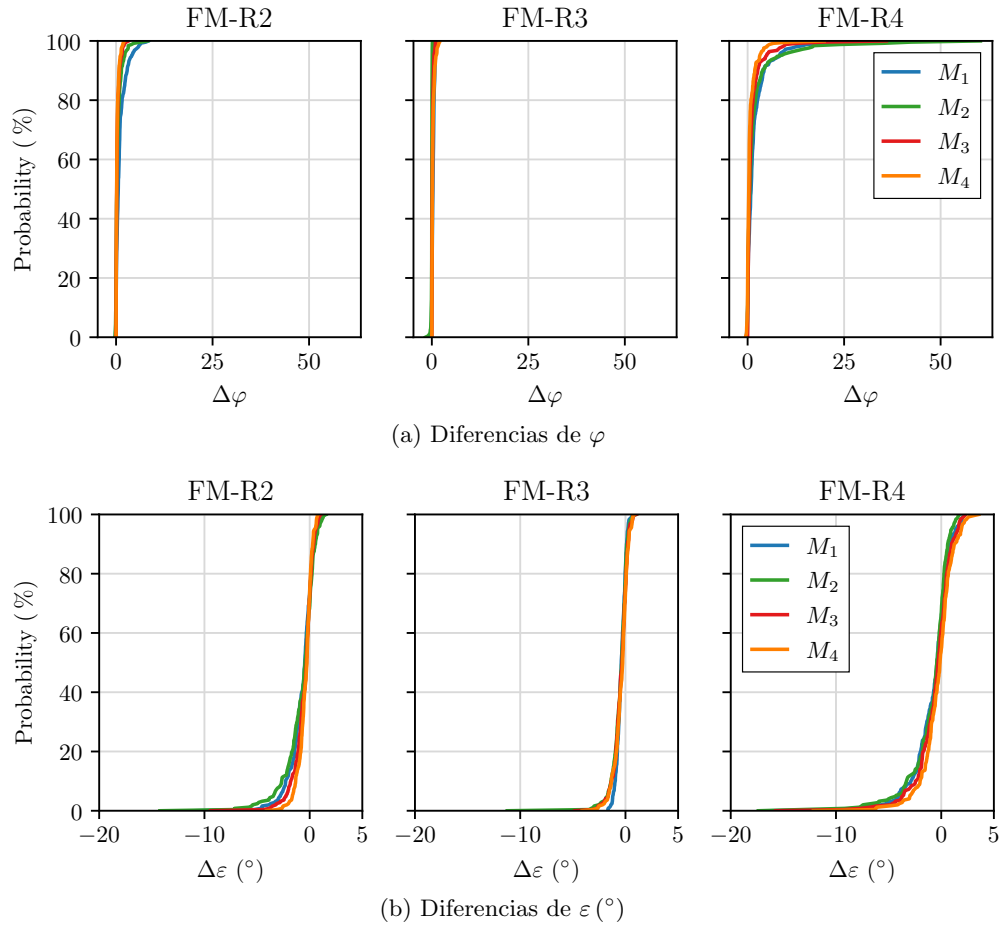


Figura 5.10: Diferencias entre los valores de  $\varepsilon$  y  $\varphi$  al final y al inicio de la etapa de RPI de los algoritmos FM-R. Estas diferencias se denotan como  $\Delta\varepsilon$  y  $\Delta\varphi$ , respectivamente. Los valores presentados han sido obtenidos de estimaciones configurando los parámetros de ruido  $(\sigma, \omega)$  son métricas de estimaciones de modelos contenidos en un conjunto total de muestras  $(\sigma, \omega) = (1, 0.4)$  configurando los parámetros de FM-R con valores de  $\tau = 3\sigma$ ,  $\theta = 3\sigma$ ,  $n = 2$  y  $\sigma_\phi = 0.5$ .

### 5.3. Comparación con otros estimadores robustos

En esta sección se compara la calidad de las estimaciones de los algoritmos FM-R con las versiones originales de los algoritmos RANSAC y MSAC. Se compara con FM-R2, que consigue mejores resultados de estimación en términos de precisión y coste computacional haciendo uso de cualquier métrica difusa  $M_i$ , y también con FM-R4 incorporando  $M_2$ . No se han considerado estimaciones con FM-R3 debido a que no se ha observado una tendencia clara de mejora a pesar de conseguir una precisión de estimación relativamente alta en determinados casos.

Las medidas de precisión presentadas son valores promedio  $\mu[\varepsilon]$  del ángulo  $\varepsilon$  en grados entre el vector normal del modelo original y el estimado. Adicionalmente, se proporcionan valores promedio  $\mu[t]$  del número de iteraciones  $t$  realizadas en la etapa de RPI. Se han realizado un total de 500 estimaciones variando únicamente del vector de parámetros  $\Theta^*$  que describe al modelo original  $\mathcal{M}_{\Theta^*}$ . Si no se indica lo contrario, los parámetros de ruido son  $(\sigma, \omega) = (1, 0.4)$  y los parámetros de los estimadores son  $\tau = 3\sigma$  y  $(n, \theta) = (2, 3\sigma)$ .

#### 5.3.1. Dependencia de los parámetros de ruido

En esta sección se analizan los resultados obtenidos para diferentes proporciones de *outliers*  $\omega$  (ver figura 5.11a) y diferentes valores de la magnitud de ruido  $\sigma$  (ver figura 5.11b).

A partir de los resultados presentados, se puede observar que las variantes FM-R propuestas mejoran de manera general la precisión de las estimaciones en comparación con RANSAC y MSAC exceptuando la variante FM-R4 $_{M_4}$ , cuyos resultados de estimación son menos precisos que los conseguidos con MSAC en la mayoría de los casos. Las estimaciones con FM-R4 $_{M_2}$  son las que consiguen una mejor precisión con cualquier configuración de los parámetros de ruido  $(\sigma, \omega)$  en comparación con el resto de estimadores. La mejora de la precisión de las variantes propuestas respecto de RANSAC y MSAC se ve amplificada a medida que aumenta la proporción de *outliers* o la magnitud de ruido  $\sigma$ ; de la misma manera, el número de iteraciones realizadas en la etapa de RPI también aumenta.

#### 5.3.2. Dependencia del umbral de ruido.

En esta sección se presentan resultados de estimaciones fijando diferentes valores del factor  $\kappa$  y, en función de este factor, los valores de  $\tau, \theta = \kappa \cdot \sigma$  (ver figura 5.11c).

De los resultados se puede extraer que, por un lado, en comparación con RANSAC y MSAC, las variantes propuestas consiguen una mayor precisión de estimación en todos los casos exceptuando las estimaciones con FM-R4 $_{M_4}$ , en cuyo caso no siempre se mejora la precisión de estimación de MSAC. Por otro lado, el valor del umbral de ruido  $\tau, \theta = \kappa \cdot \sigma$  tiene menos influencia en la precisión de la estimación con FM-R4 en comparación con FM-R2. Por último, establecer valores de  $\kappa < 3$  aumenta el número de iteraciones realizadas en la etapa de RPI de ambas variantes, afectando en mayor medida al algoritmo FM-R4.

### 5.3.3. Conclusiones

Como se ha podido ver en las dos secciones anteriores, por una parte, los algoritmos FM-R2 y FM-R4 pueden proporcionar una mejor calidad de estimación en comparación con los algoritmos originales RANSAC y MSAC.

Por otra parte, considerar el conjunto de muestras completo en la etapa de RPI y evitar la clasificación de dicho conjunto en *inliers* y *outliers* (FM-R4) puede resultar conveniente para encontrar el mejor modelo contenido en dicho conjunto en lugar de considerar únicamente el mejor conjunto de *inliers* encontrado en el bucle principal (FM-R2). Sin embargo, esto supone un mayor coste computacional ya que se realizan más iteraciones en la etapa de RPI. Además, una de las propiedades que se puede observar en las estimaciones con FM-R4 es la robustez ante cambios del valor umbral  $\theta$ , consiguiendo resultados precisos a expensas de un mayor coste computacional con valores de  $\theta$  entre 1 y 4, en comparación con FM-R2.

Por último, se presenta un ejemplo gráfico de cómo la variante propuesta FM-R4<sub>M2</sub> mejora la precisión de estimación en comparación con MSAC en un escenario donde los parámetros de ruido son  $(\sigma, \omega) = (1, 0.4)$ . La figura 5.12 muestra la mejor y la peor estimación de FM-R4<sub>M2</sub> en comparación con MSAC, representando adicionalmente la estimación con RANSAC.

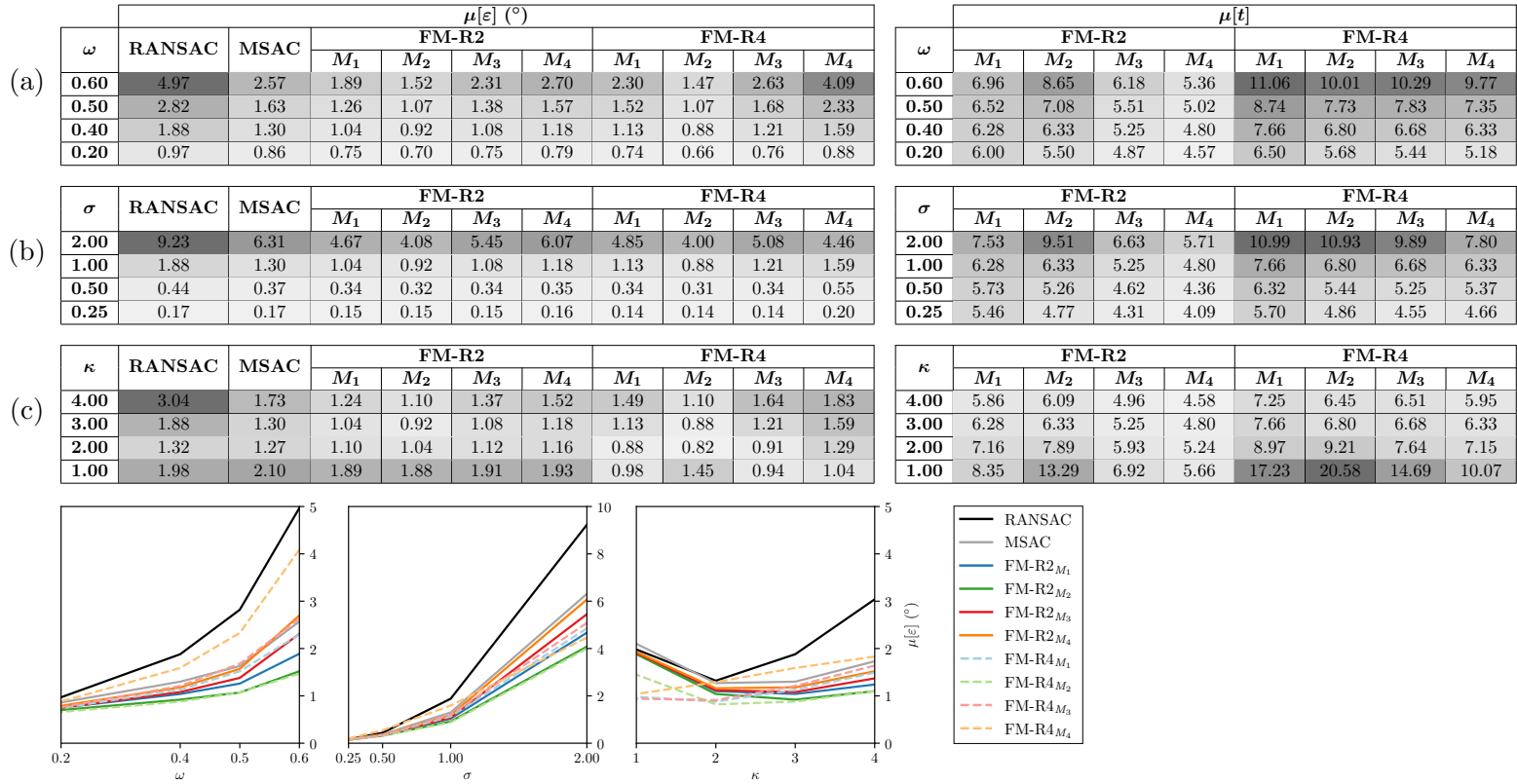


Figura 5.11: Caso de rectas 2D: resultados de estimaciones con diferentes valores de (a) proporción de *outliers*  $\omega$ , (b) magnitudes de ruido aleatorio  $\sigma$  y (c) valores de umbral de ruido  $\tau, \theta = \kappa \cdot \sigma$ . Si no se indica lo contrario, se establecen valores de  $\sigma = 1$ ,  $\omega = 0.4$  y  $\kappa = 3$ . La escala de grises indica con un color más claro una mayor precisión de la estimación o un menor promedio de iteraciones en la etapa de RPI.

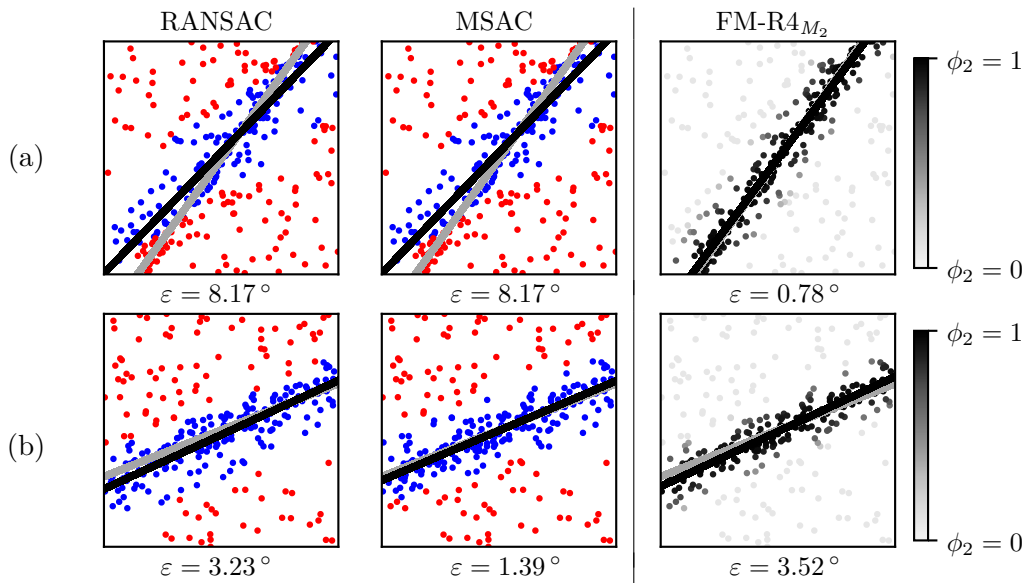


Figura 5.12: Caso de rectas 2D: (a) la mejor y (b) peor estimación encontradas en 500 estimaciones con FM-R4 $M_2$  en comparación con MSAC, adicionalmente se representa la estimación con RANSAC en ambos casos. El modelo original  $\mathcal{M}_{\Theta^*}$  es (a)  $-0.81x + 0.59y + 0.00 = 0$  y (b)  $-0.37x + 0.93y + 0.00 = 0$ . Los parámetros del ruido son en ambos casos  $(\sigma, \omega) = (1, 0.4)$ . Los colores representan: el modelo original/estimado con líneas grises/negras; los *inliers/outliers* en color rojo/azul; y el grado de cercanía al modelo estimado  $\phi_2(\epsilon(p_j; \mathcal{M}_{\hat{\Theta}}); \Phi)$  obtenido con  $M_2$  se representa en escala de grises.

## Capítulo 6

# Otros problemas de estimación

En este capítulo se presentan estimaciones de modelos de hiperplanos, elipses y homografías de similitud con los algoritmos FM-R2 y FM-R4 en comparación con RANSAC y MSAC en términos de precisión de estimación.

### 6.1. Estimación de hiperplanos

En esta sección se considera el caso de hiperplanos 3D, comparando los algoritmos originales RANSAC y MSAC y dos de las variantes propuestas en este documento FM-R2 y FM-R4, ambas con una etapa de RPI.

Las medidas de precisión de estimación presentadas son valores promedio  $\mu[\varepsilon]$  del ángulo  $\varepsilon$  en grados entre el vector normal del modelo original y el estimado. En cuanto a la medida del número iteraciones realizadas en la etapa de RPI, se presentan valores promedio  $\mu[t]$  de las iteraciones  $t$  realizadas en esta etapa. Para obtener cada valor de cada medida se han realizado un total de 500 estimaciones variando únicamente del vector de parámetros  $\Theta^*$  que describe el modelo original  $\mathcal{M}_{\Theta^*}$  que se pretende estimar. Si no se indica lo contrario, los parámetros del ruido son  $(\sigma, \omega) = (1, 0.4)$ , los parámetros de los estimadores son  $\tau = 3\sigma$  para RANSAC, MSAC y FM-R2 y  $(n, \theta) = (2, 3\sigma)$  tanto para FM-R2 como para FM-R4. Además, se selecciona un conjunto mínimo de tamaño  $s = 4$  en cada iteración y se realizan  $k_{\max}$  iteraciones calculadas a partir de la expresión (2.3) fijando una probabilidad  $p = 0.99$ .

#### 6.1.1. Dependencia de los parámetros de ruido

En esta sección se analizan los resultados de estimaciones para diferentes proporciones de *outliers*  $\omega$  (ver figura 6.1a) y diferentes valores de la magnitud de ruido  $\sigma$  (ver figura 6.1b).

En los resultados de estimaciones de hiperplanos 3D se puede observar cómo la precisión de las variantes propuestas supera a la de RANSAC y MSAC en todos los casos exceptuando la combinación FM-R4<sub>M4</sub> en situaciones en las que la proporción de *outliers*

es superior al 40%. Como se pudo observar en el caso de las estimaciones de rectas 2D, la mejora de la precisión de estimación con los algoritmos propuestos en comparación con RANSAC y MSAC es mayor en situaciones en las que la proporción de *outliers*  $\omega$  o la magnitud de ruido  $\sigma$  son elevadas. Comparando las estimaciones con FM-R2 y FM-R4 se puede observar que, haciendo uso de la misma métrica difusa, los resultados de las estimaciones son similares, siendo FM-R4<sub>M<sub>2</sub></sub> la variante que consigue una mayor precisión de estimación en todos los casos. En cuanto al promedio de iteraciones realizadas en la etapa de RPI, se puede observar que FM-R4 realiza un mayor número de iteraciones en comparación con FM-R2 debido a que FM-R4 considera el conjunto de muestras completo, dando lugar a la estimación de un mayor número de modelos antes de llegar a la convergencia.

### 6.1.2. Dependencia del umbral de ruido

En esta sección, se presentan resultados de estimaciones fijando diferentes valores del umbral de ruido  $\tau$  y  $\theta$  a partir del factor  $\kappa$  y la expresión  $\tau, \theta = \kappa \cdot \sigma$  (ver figura 6.1c).

A partir de los resultados se puede determinar que las variantes propuestas mejoran la precisión en comparación con RANSAC y MSAC en todos los casos. Además, se puede observar que el valor del umbral de ruido  $\theta$  afecta en menor medida a la precisión de estimación en el caso de FM-R4 a expensas de realizar un mayor número de iteraciones en la etapa de RPI. En este sentido, destaca FM-R4<sub>M<sub>2</sub></sub> ya que permite conseguir una mayor precisión en todos los casos exceptuando para  $\kappa = 1$ , en comparación con el resto de estimadores.

### 6.1.3. Hiperplanos de mayor dimensionalidad

Para aumentar la complejidad del problema, adicionalmente, en la tabla 6.1 se presentan resultados de estimaciones de hiperplanos 10D con RANSAC, MSAC y FM-R4<sub>M<sub>2</sub></sub>. Como se ha podido observar en los casos de estimaciones de hiperplanos 2D y 3D, FM-R4<sub>M<sub>2</sub></sub> mejora la calidad de la estimación en comparación con RANSAC y MSAC. Cabe destacar que el número de iteraciones realizadas en la etapa de RPI tiende a ser mayor cuanto mayor es el número de dimensiones del hiperplano en situaciones en las que los parámetros de ruido tienen valores extremos elevados ( $\sigma = 1$  o  $\omega = 0.6$ ) o en situaciones en las que el valor umbral  $\tau$  se configura con valores no óptimos. Por último, en la figura 6.2 se representan los percentiles del error de estimación para el caso de hiperplanos 2D, 3D y 10D estableciendo los valores de parámetros de ruido como  $(\sigma, \omega) = (1, 0.4)$ . A partir de los resultados obtenidos para los casos de hiperplanos 2D, 3D, y 10D, se puede observar que el algoritmo propuesto FM-R4<sub>M<sub>2</sub></sub> proporciona una mejor precisión de estimación, en comparación con RANSAC y MSAC, y que esta mejora se ve reflejada en mayor medida cuanto mayor es el número de dimensiones del hiperplano.



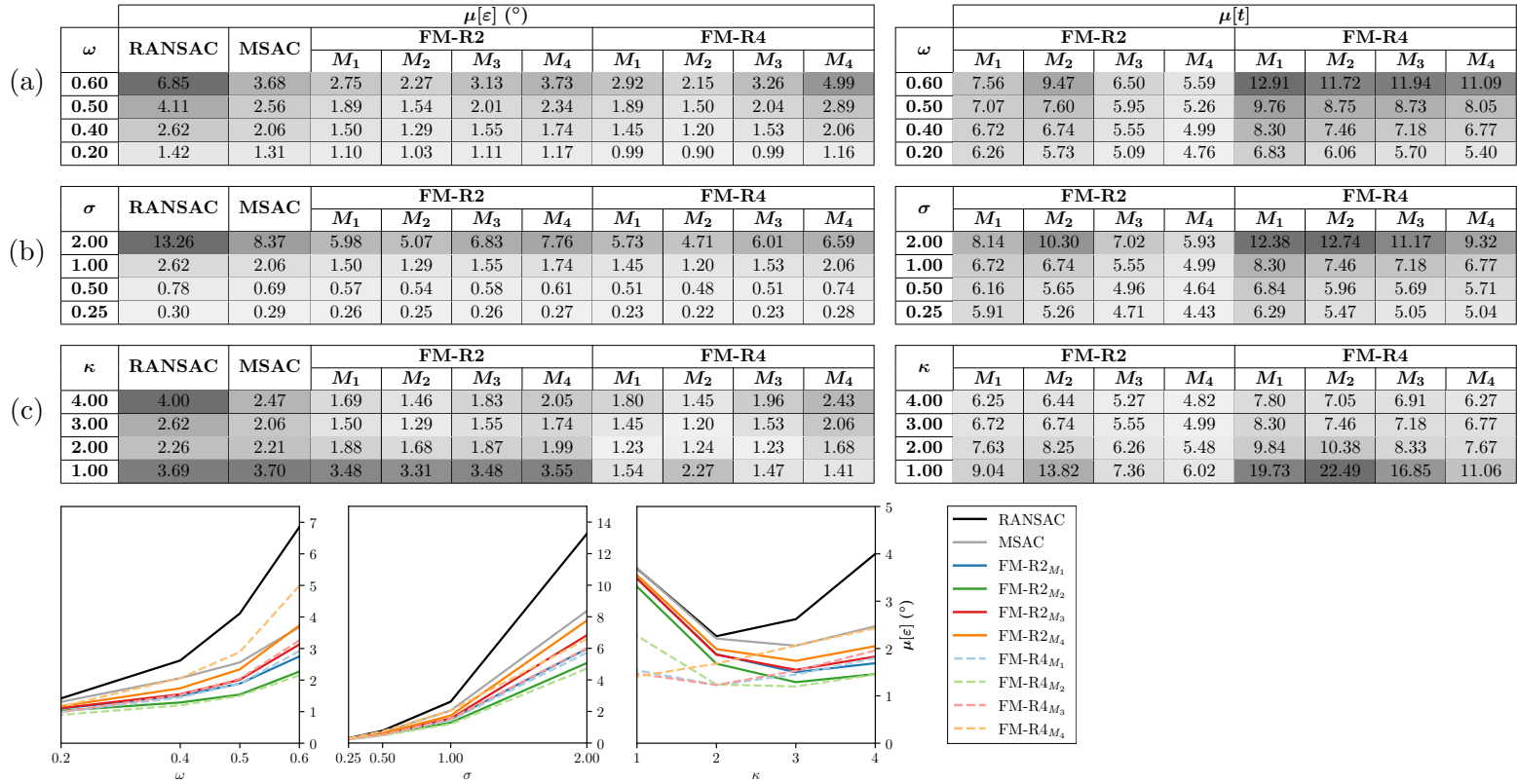


Figura 6.1: Caso de hiperplanos 3D: resultados de estimaciones con diferentes valores de (a) proporción de *outliers*  $\omega$ , (b) magnitudes de ruido aleatorio  $\sigma$  y (c) valores de umbral de ruido  $\tau, \theta = \kappa \cdot \sigma$ . Si no se indica lo contrario, se establecen valores de  $\sigma = 1$ ,  $\omega = 0.4$  y  $\kappa = 3$ . La escala de grises indica con un color más claro una mayor precisión de la estimación o un menor promedio de iteraciones en la etapa de RPI.

		$\mu[\varepsilon] (\text{°})$				
		RANSAC	MSAC	FM-R $_{M_2}$	$\omega$	FM-R $_{M_2}$
(a)	<b>0.60</b>	11.71	9.23	3.21	<b>0.60</b>	18.09
	<b>0.50</b>	7.09	6.53	2.09	<b>0.50</b>	11.49
	<b>0.40</b>	5.37	5.22	1.62	<b>0.40</b>	9.18
	<b>0.20</b>	3.54	3.57	1.17	<b>0.20</b>	7.12

		RANSAC	MSAC	FM-R $_{M_2}$	$\sigma$	FM-R $_{M_2}$
(b)	<b>2.00</b>	33.05	21.51	9.04	<b>2.00</b>	19.75
	<b>1.00</b>	5.37	5.22	1.62	<b>1.00</b>	9.18
	<b>0.50</b>	1.88	1.89	0.67	<b>0.50</b>	7.40
	<b>0.25</b>	0.76	0.77	0.31	<b>0.25</b>	6.60

		RANSAC	MSAC	FM-R $_{M_2}$	$\kappa$	FM-R $_{M_2}$
(c)	<b>4.00</b>	5.89	5.14	1.92	<b>4.00</b>	8.58
	<b>3.00</b>	5.37	5.22	1.62	<b>3.00</b>	9.18
	<b>2.00</b>	6.61	6.64	1.63	<b>2.00</b>	12.87
	<b>1.00</b>	9.65	9.76	3.08	<b>1.00</b>	25.98

Tabla 6.1: Caso de hiperplanos 10D: resultados de estimaciones con diferentes valores de (a) proporción de *outliers*  $\omega$ , (b) magnitudes de ruido aleatorio  $\sigma$  y (c) valores de umbral de ruido  $\tau, \theta = \kappa \cdot \sigma$ . Si no se indica lo contrario, se establecen valores de  $\sigma = 1$ ,  $\omega = 0.4$  y  $\kappa = 3$ . La escala de grises indica una mayor precisión de la estimación o un menor promedio de iteraciones en la etapa de RPI con un color más claro.

#### 6.1.4. Conclusiones

Se ha podido comprobar que las estimaciones con FM-R2 y FM-R4 mejoran, de manera general, la precisión que se puede alcanzar con las versiones originales de RANSAC y MSAC.

Comparando las estimaciones de FM-R2 con FM-R4, FM-R2 consigue generalmente estimaciones de igual o mayor precisión que FM-R4 con un coste computacional asociado a la etapa de refinamiento menor. Sin embargo, FM-R4 es el algoritmo que, junto a la métrica difusa  $M_2$ , consigue la mejor precisión en la mayoría de casos en comparación con el resto de estimadores. Además, cabe subrayar que FM-R4 presenta una mayor robustez ante cambios de valores del umbral de ruido  $\theta$  y, debido a que es un parámetro cuyo valor es habitualmente desconocido, FM-R4 podría ser considerado en términos generales un estimador conveniente para conseguir una buena precisión a expensas de realizar más iteraciones en la etapa de RPI.

## 6.2. Estimación de elipses

En esta sección se presentan resultados de estimaciones para el caso de elipses con los algoritmos originales RANSAC y MSAC y las variantes propuestas en este documento FM-R2 y FM-R4, ambas con una etapa de RPI.

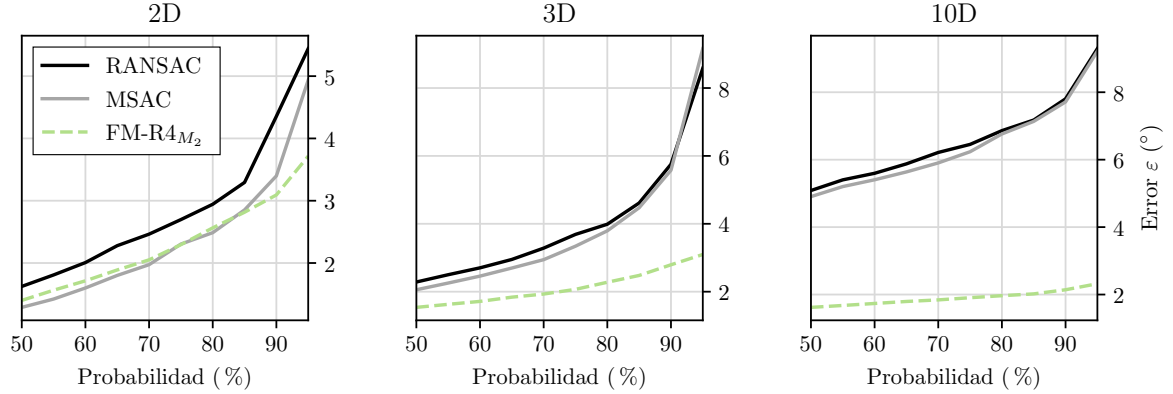


Figura 6.2: Caso de hiperplanos 2D, 3D y 10D: comparación de los percentiles del error de estimación  $\varepsilon$  con RANSAC, MSAC y FM-R4 $M_2$ . Los percentiles han sido obtenidos a partir de 500 valores para cada caso de hiperplano estableciendo los parámetros de ruido como  $(\sigma, \omega) = (1, 0.4)$  y el valor umbral de ruido para RANSAC y MSAC como  $\tau = 3\sigma$  y los parámetros de FM-R4 $M_2$  como  $(n, \theta) = (2, 3\sigma)$ .

Las medidas de precisión que se usan en esta ocasión son valores promedio  $\mu[\varepsilon]$  del error máximo relativo  $\varepsilon$  en tanto por uno entre el vector de parámetros  $\Theta = (a, b, c, d, f, g)$  del modelo original  $\mathcal{M}_{\Theta^*}$  y del modelo estimado  $\mathcal{M}_{\hat{\Theta}}$  según la expresión (4.6). La figura 6.3 muestra tres ejemplos de resultados donde  $\varepsilon$  toma distintos valores representados en este caso en tanto por ciento. En cuanto a la medida de coste computacional de la etapa de RPI, se presentan valores promedio  $\mu[t]$  del número de iteraciones realizadas en esta etapa. Se han realizado un total de 200 estimaciones variando únicamente el vector de parámetros  $\Theta^*$  que describe al modelo original  $\mathcal{M}_{\Theta^*}$ . Si no se indica lo contrario los parámetros del ruido son  $(\sigma, \omega) = (1, 0.4)$ , los parámetros de los estimadores  $\tau = 1.3\sigma$  para RANSAC, MSAC y FM-R2 y  $(n, \theta) = (2, 1.3\sigma)$  para los algoritmos FM-R. Además, se seleccionan un conjunto mínimo de tamaño  $s = 6$  en cada iteración y se realizan  $k_{\max}$  iteraciones calculadas a partir de la expresión (2.3) fijando una probabilidad  $p = 0.99$ .

### 6.2.1. Dependencia de los parámetros de ruido

A continuación, se analizan los resultados de las estimaciones variando los valores de los parámetros de ruido  $(\sigma, \omega)$ . Por una parte, se varía la proporción de *outliers*  $\omega$  (ver figura 6.4a) y, por otra parte, la magnitud de ruido aleatorio  $\sigma$  (ver figura 6.4b).

De los resultados se puede extraer que las estimaciones con FM-R2 y FM-R4 son, en general, más precisas en comparación con RANSAC y MSAC, exceptuando las estimaciones de FM-R2 $M_3$  y FM-R2 $M_4$  en situaciones en las que  $\omega = 0.6$  o  $\sigma = 2$  y las estimaciones con FM-R4 $M_4$  en la mayoría de los casos. Esta mejora de precisión de estimación se aprecia en mayor medida en situaciones en las que los parámetros de ruido se establecen con valores elevados ( $\omega = 0.6$  o  $\sigma = 2$ ). Comparando las estimaciones resultantes de FM-R2 y

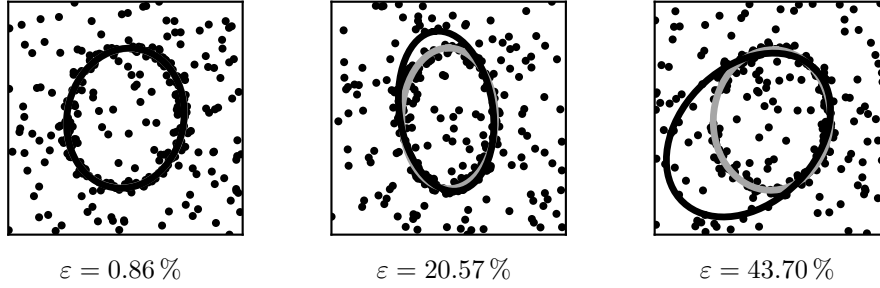


Figura 6.3: Ejemplos de estimaciones con tres valores distintos del error máximo relativo  $\varepsilon$  entre el vector de parámetros original y el estimado. Los parámetros de ruido son  $(\sigma, \omega) = (1, 0.4)$  en todos los casos. El modelo original está representado con una línea gris y el modelo estimado está representado con una línea negra.

FM-R4 se puede concluir que, en general, las estimaciones son similares, exceptuando las estimaciones de FM-R4 $_{M_4}$ , que son peores en la mayoría de casos. Al igual que en el caso de los hiperplanos, FM-R4 $_{M_2}$  es el algoritmo con el que se consigue una mayor precisión en la mayoría de casos en comparación con el resto de estimadores. Por último, en cuanto al promedio de iteraciones de la etapa de RPI, se puede apreciar un aumento significativo del número de iteraciones en las estimaciones con FM-R4.

### 6.2.2. Dependencia del umbral de ruido

En esta sección, se presentan resultados de estimaciones fijando diferentes valores para  $\tau$  y  $\theta$  en función del factor  $\kappa$  a partir de la expresión  $\tau, \theta = \kappa \cdot \sigma$  (ver figura 6.4c).

En los resultados se puede observar una tendencia de mejora de la precisión general con los algoritmos propuestos en comparación con RANSAC y MSAC, exceptuando algunos casos cuando se hace uso de las métricas difusas  $M_3$  y  $M_4$ . Comparando los resultados de las estimaciones de FM-R2 y FM-R4 haciendo uso de las distintas métricas difusas, destaca FM-R4 $_{M_2}$  ya que consigue, de manera general, estimaciones de mayor precisión. Además, la influencia del valor del umbral  $\theta$  se ve atenuada en las estimaciones con este estimador. Sin embargo, como se ha podido observar en las estimaciones de hiperplanos, esta mejora supone realizar un mayor número de iteraciones y, si no se establece el valor de  $\theta$  de manera óptima, el número de iteraciones aumenta en mayor medida en comparación con el caso de los hiperplanos.

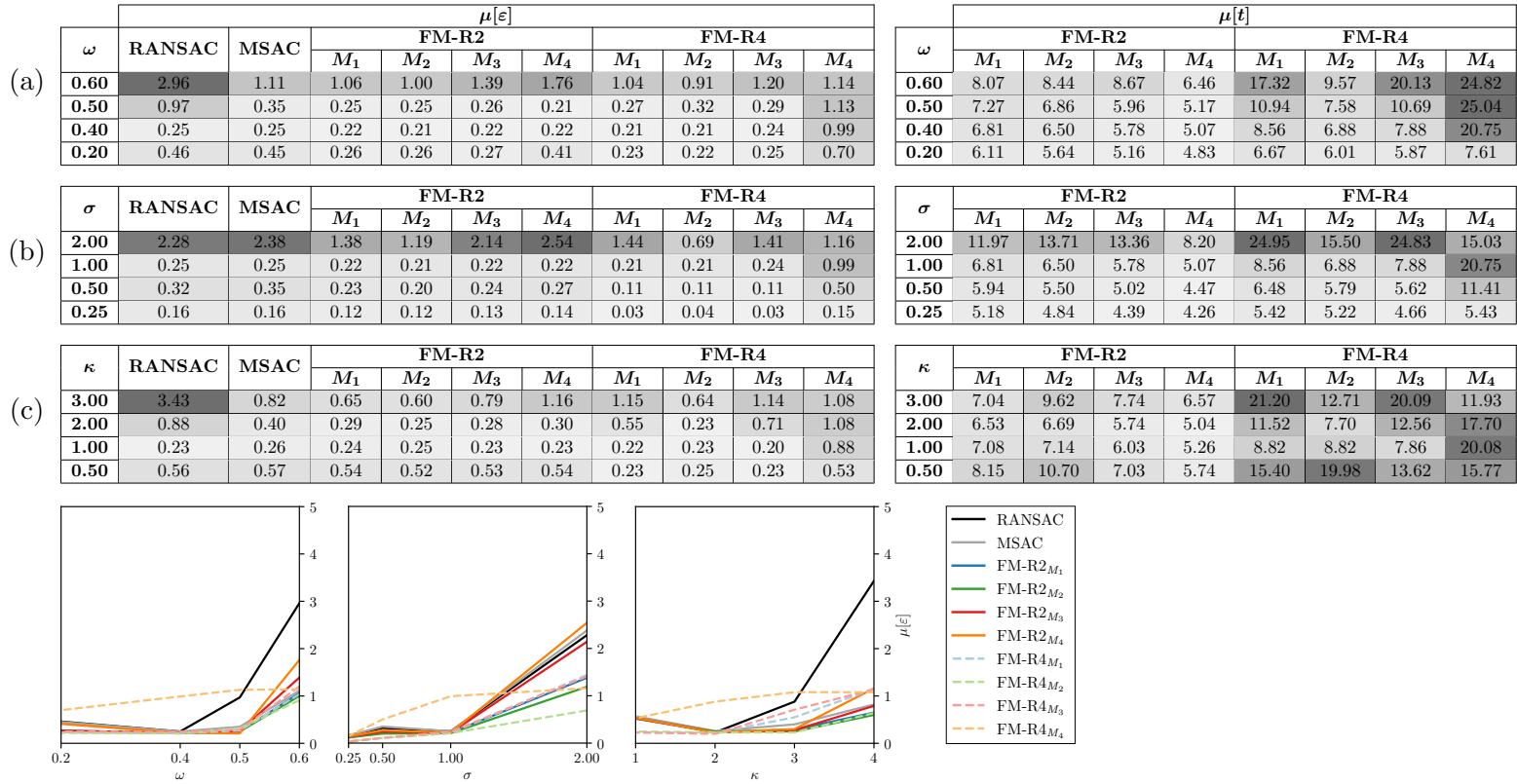


Figura 6.4: Caso de elipses: precisión de la estimación con diferentes valores de (a) proporción de *outliers*  $\omega$ , (b) magnitudes de ruido aleatorio  $\sigma$  y (c) valores de umbral de ruido  $\tau, \theta = \kappa \cdot \sigma$ . Si no se indica lo contrario, se establecen valores de  $\sigma = 1$ ,  $\omega = 0.4$  y  $\kappa = 1.3$ . La escala de grises indica con un color más claro una mayor precisión de la estimación o un menor número de iteraciones  $t$ .

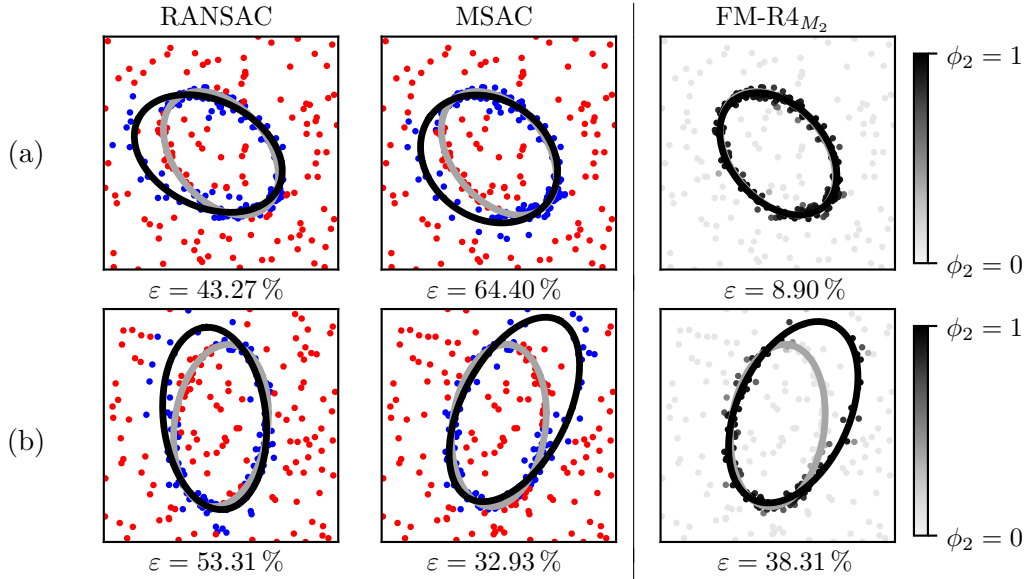


Figura 6.5: Caso de estimación de elipses: (a) la mejor y (b) la peor estimación encontradas en 200 estimaciones con FM-R4<sub>M2</sub> en comparación con MSAC. Los modelos originales  $\mathcal{M}_{\Theta^*}$  son (a)  $0.048x^2 + 0.034xy + 0.042y^2 - 1 = 0$  y (b)  $0.062x^2 - 0.012xy + 0.021y^2 - 1 = 0$ . Los parámetros de ruido son  $(\sigma, \omega) = (1, 0.4)$  y  $\tau, \theta = 1.3$  en todos los casos.

### 6.2.3. Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos, se ha podido comprobar que los algoritmos propuestos pueden proporcionar una mayor precisión de estimación que los algoritmos originales RANSAC y MSAC.

Por otra parte, se ha podido observar ciertas tendencias que también han aparecido en el caso de las estimaciones de hiperplanos. En este sentido, FM-R4<sub>M2</sub> ha demostrado ser el estimador con mayor robustez ante valores no óptimos de  $\theta$  comparado con el resto de estimadores presentados, proporcionando una estimación precisa para cualquiera de los valores de  $\theta$  considerados. Además, FM-R4<sub>M2</sub> vuelve a destacar como el estimador que mejor precisión de estimación consigue de manera general en comparación con los algoritmos clásicos considerados. Esta mejora puede verse reflejada en mayor medida en situaciones en las que los valores de los parámetros de ruido son elevados.

Por último, en la figura 6.5 se representan la mejor y la peor estimación de FM-R4<sub>M2</sub> en comparación con MSAC entre las 200 estimaciones realizadas con valores de los parámetros de ruido  $(\sigma, \omega) = (1, 0.4)$ . Adicionalmente, se representa la estimación en la misma situación para RANSAC.

## 6.3. Estimación de homografías de similitud

En esta sección, se presentan resultados de estimaciones para el caso de homografías de similitud con los algoritmos originales RANSAC y MSAC y dos de las variantes propuestas

en este documento FM-R2 y FM-R4 incorporando la etapa de RPI.

Las medidas de precisión presentadas son valores promedio  $\mu[\varepsilon]$  del error de reproyección RMSE  $\varepsilon$  en píxeles, calculado a partir de los *inliers* del modelo original según la expresión (4.7). En cuanto a la medida de coste computacional de la etapa de refinamiento, se presentan de nuevo valores promedio  $\mu[t]$  de las iteraciones  $t$  realizadas en esta etapa. Se han realizado un total de 500 estimaciones variando únicamente del vector de parámetros  $\Theta^*$  que describe al modelo original  $\mathcal{M}_{\Theta^*}$ . Si no se indica lo contrario, los parámetros de ruido son  $(\sigma, \omega) = (1, 0.4)$ , los parámetros de los estimadores  $\tau = 3.41\sigma$  para RANSAC, MSAC y FM-R2 y  $(n, \theta) = (2, 3.41\sigma)$  para los algoritmos FM-R. Cabe recalcar que se selecciona un conjunto mínimo de tamaño  $s = 3$  en cada iteración y se realizan  $k_{\max}$  iteraciones calculadas a partir de la expresión (2.3) fijando una probabilidad  $p = 0.99$ .

### 6.3.1. Dependencia de los parámetros de ruido

En esta sección se analizan los resultados de estimaciones variando la proporción de *outliers*  $\omega$  (ver figura 6.6a) y, por otra parte, la magnitud de ruido aleatorio  $\sigma$  (ver figura 6.6b).

Por una parte, se puede observar que, de manera general, las variantes propuestas presentan una mayor precisión frente a RANSAC y MSAC. Por otra parte, de manera similar a los casos de hiperplanos y elipses, la calidad de la estimación con FM-R2 y FM-R4 es, en la mayoría de casos, similar ante variaciones de los parámetros de ruido  $(\sigma, \omega)$ . En el caso de estimaciones de homografías de similitud, FM-R4 alcanza una mayor precisión en todos los casos exceptuando las estimaciones con la métrica difusa  $M_4$ , en situaciones en las que la magnitud del ruido es elevada  $\sigma = 2$ . Por último, al contrario que en los modelos considerados en las secciones anteriores, en el caso de las estimaciones de homografías de similitud, la mayor precisión se alcanza por medio de FM-R4 incorporando la métrica difusa  $M_1$ .

### 6.3.2. Dependencia del umbral de ruido

En esta sección se presentan resultados de estimaciones fijando diferentes valores de umbral de ruido  $\tau$  y  $\theta$ , en función del factor  $\kappa$  a partir de la expresión  $\tau, \theta = \kappa \cdot \sigma$  (ver figura 6.6c).

A partir de los resultados obtenidos, se puede destacar que FM-R4 consigue resultados significativamente mejores que RANSAC, MSAC y FM-R2 con cualquiera de los valores de  $\kappa$  consideradores y, de la misma forma que en el caso de estimaciones de hiperplanos y elipses, se considera que FM-R4 es un estimador más robusto ante variaciones de  $\kappa$  en comparación con el resto de estimadores. Por último, FM-R4 $_{M_1}$  es el estimador que mayor precisión proporciona en la mayoría de casos para distintos valores de  $\kappa$ .

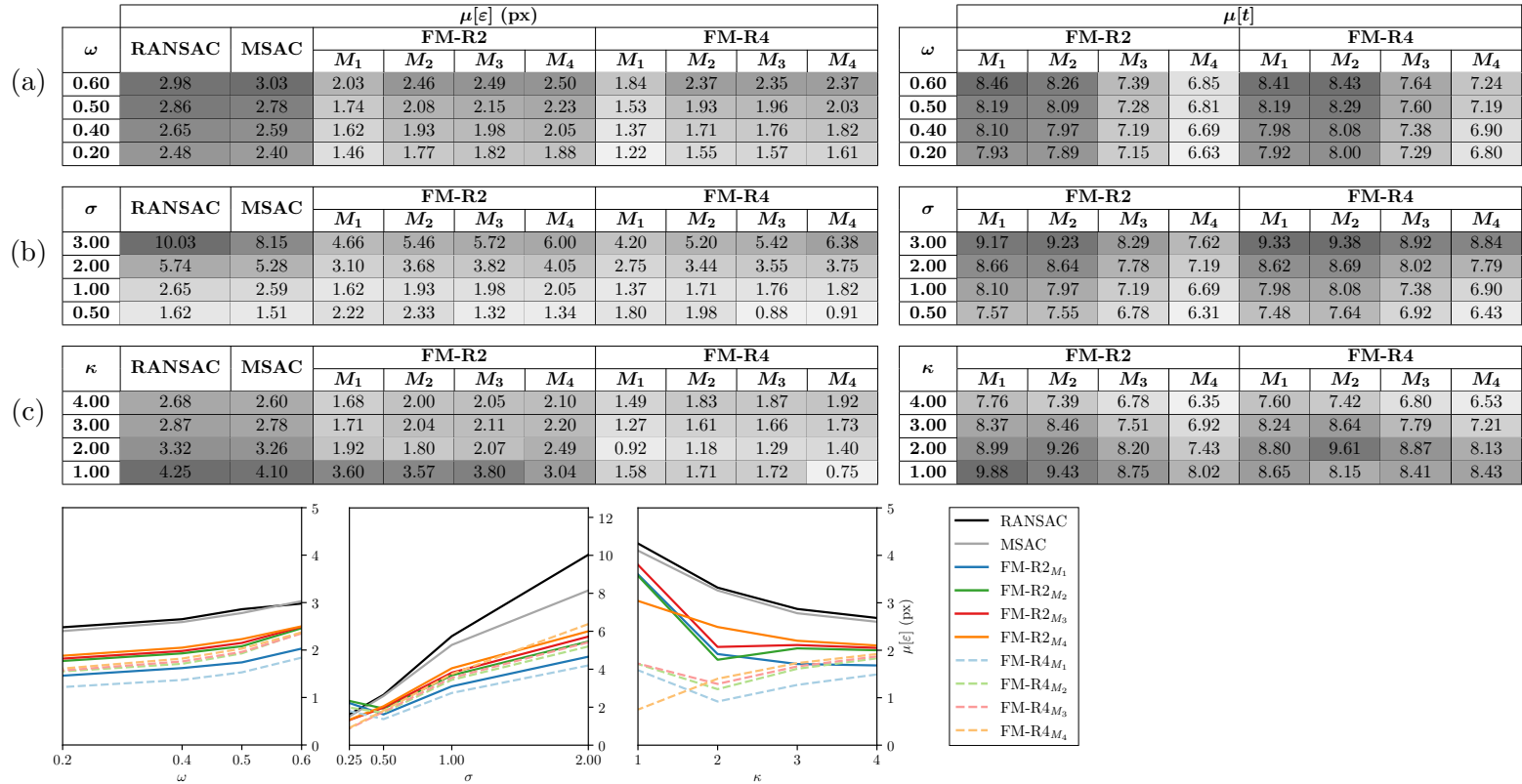


Figura 6.6: Caso de homografías de similitud: precisión de la estimación con diferentes valores de (a) proporción de *outliers*  $\omega$ , (b) magnitudes de ruido aleatorio  $\sigma$  y (c) valores de umbral de ruido  $\tau$ ,  $\theta = \kappa \cdot \sigma$ . Si no se indica lo contrario, se establecen valores de  $\sigma = 1$ ,  $\omega = 0.4$  y  $\kappa = 3.41$ . La escala de grises indica una mayor precisión de la estimación con un color más claro.



### 6.3.3. Conclusiones

De manera similar a los casos de estimaciones de hiperplanos y elipses, se ha podido comprobar que los algoritmos FM-R2 y FM-R4 pueden proporcionar una mayor precisión de estimación que RANSAC y MSAC.

Comparando las estimaciones de FM-R2 con FM-R4, FM-R4 consigue generalmente estimaciones de igual o mayor precisión que FM-R2 con un promedio de iteraciones realizadas en la etapa de RPI ligeramente superior. En este sentido, destaca FM-R4<sub>M1</sub> consiguiendo la mayor precisión en la mayoría de casos en comparación con el resto de estimadores.

Por último, a modo de ejemplo, en la figura 6.7 se presentan la mejor y la peor estimación con FM-R4<sub>M1</sub> en comparación con MSAC entre las 500 estimaciones realizadas con valores de los parámetros de ruido  $(\sigma, \omega) = (1, 0.4)$ .

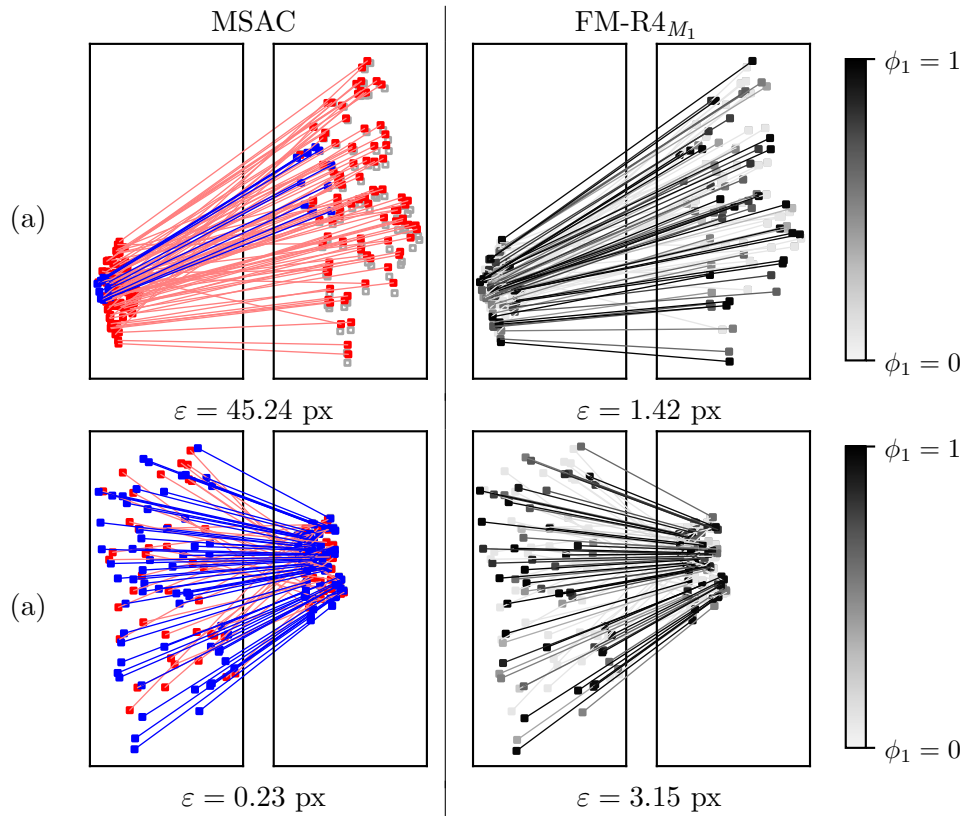


Figura 6.7: Caso de estimación de homografías de similitud: (a) la mejor y (b) la peor estimación encontradas en 500 estimaciones con FM-R4 $M_1$  en comparación con MSAC. Los modelos originales  $\mathcal{M}_{\Theta^*}$  son (a)  $\Theta^* = (3, -0.17, -1187.04, -476.22)$  y (b)  $\Theta^* = (0.33, 0.03, 352.58, 256.32)$  y están representados con recuadros grises sin relleno. Los parámetros de ruido son  $(\sigma, \omega) = (1, 0.4)$  y  $\tau, \theta = 3.41$  en todos los casos.

## Capítulo 7

# Conclusiones y trabajo futuro

En este capítulo se exponen las conclusiones a las que se ha llegado durante el desarrollo de este TFM. Asimismo, se proponen líneas de trabajo a desarrollar con el fin de mejorar los algoritmos FM-R.

### 7.1. Conclusiones

En este TFM se han considerado distintas alternativas para mejorar la precisión y la eficiencia computacional del algoritmo RANSAC. Con el objetivo de evitar la clasificación del conjunto de muestras en *inliers* y *outliers*, estrategia en la que esas variantes de RANSAC basan su funcionamiento, se han propuesto nuevos algoritmos que evitan esta clasificación mediante el uso de métricas difusas. Habiendo definido este objetivo y a partir del proceso de desarrollo de este TFM y de los resultados obtenidos se puede concluir lo siguiente:

- En primer lugar, se han incorporado, en forma de medidas de compatibilidad, los valores de cercanía proporcionados por las métricas difusas tanto en la etapa de evaluación de hipótesis como en una etapa posterior de refinamiento del mejor modelo encontrado. Esta etapa de refinamiento final está basada en una reestimación ponderada, que hace uso de las mismas métricas difusas.
- En segundo lugar, los algoritmos propuestos se han evaluado y comparado entre sí mediante la estimación de rectas 2D. Se ha determinado que la variante FM-R4 haciendo uso de las métricas  $M_1$  o  $M_2$  e incorporando una etapa de RPI consigue una mayor precisión de estimación a expensas de un coste computacional ligeramente mayor en comparación con el resto de variantes propuestas.
- En tercer lugar, se han comparado los algoritmos propuestos con los algoritmos originales RANSAC y MSAC abordando otros problemas de estimación que comprenden hiperplanos, elipses y homografías de similitud. Los resultados experimentales han

demostrado que la precisión de estimación de los algoritmos FM-R propuestos puede ser mayor en comparación con las versiones originales de RANSAC y MSAC. De entre todas las variantes propuestas en este TFM, se ha comprobado que FM-R4 con una etapa de RPI consigue una mayor precisión en comparación con el resto de estimadores presentados. En particular, la incorporación de métricas difusas que son capaces de proporcionar un valor de cercanía igual a 0, es decir,  $\phi_i = 0$ , ha permitido obtener estimaciones más precisas en comparación con aquellas que no poseen dicha cualidad. En consecuencia, se puede concluir que asignar un grado de compatibilidad a cada elemento del conjunto de datos con el modelo estimado puede resultar adecuado para obtener una mayor precisión, sin embargo, es necesario atenuar el efecto de los valores atípicos.

- Por último, se ha podido observar que FM-R4 tolera mejor variaciones del valor umbral  $\theta$  en torno al valor óptimo, proporcionando estimaciones más precisas configurando  $\theta$  en valores no óptimos (valores de  $\tau$  en el caso de RANSAC, MSAC y FM-R2) en comparación con el resto de estimadores presentados.

## 7.2. Trabajo futuro

En este TFM se ha demostrado que los algoritmos FM-R pueden mejorar la precisión de estimación de los algoritmos originales RANSAC y MSAC mediante estimaciones de diversos modelos frecuentemente encontrados en aplicaciones de visión por computador y robótica. Sin embargo, los conjuntos de muestras han sido generados de forma sintética y es necesario validar el uso de los algoritmos FM-R en estimaciones a partir de conjuntos de muestras obtenidos en entornos del mundo real.

En los algoritmos FM-R, la selección del modelo de máximo consenso se basa en la medida de bondad  $\varphi$ , calculada como la suma simple de los grados de compatibilidad  $\phi$  de las diferentes muestras. Una posible línea de trabajo futura podría ser explorar alternativas a la suma simple, es decir incorporar otros operadores de agregación para determinar la bondad del modelo  $\varphi$  estimado en cada iteración a partir de los grados de compatibilidad.

Por último, los algoritmos propuestos incorporan variaciones respecto del algoritmo RANSAC original en las etapas de evaluación de hipótesis y refinamiento. Al evitar la distinción entre *inliers* y *outliers*, el uso de los algoritmos FM-R sería adecuado en situaciones en las que la proporción de *outliers* sea desconocida. En este sentido sería necesario establecer un número de iteraciones  $k_{\max}$  considerando el peor caso, es decir, fijar un número de iteraciones constante y suficientemente alto como para poder conseguir estimaciones precisas. Otra alternativa es establecer un número de iteraciones dinámico, recalculando su valor en cada iteración y comprobar si el número de iteraciones realizadas hasta entonces es suficiente y, de esta manera, evitar establecer una proporción de *outliers* arbitraria. A pesar de que esta última opción resulte más adecuada para FM-R4, se ha demostrado [8–10] que esta alternativa dinámica junto a una selección aleatoria del conjunto mínimo  $S$  dentro del conjunto completo de muestras  $P$  provoca que, en la práctica, el número de iteraciones realizadas difiera significativamente del valor teórico ya que se

realizan un número mayor de iteraciones. Por tanto, será necesario incorporar una estrategia de muestreo que utilice información para guiar la selección del conjunto mínimo  $S$  y así mejorar la eficiencia computacional del algoritmo propuesto. De esta manera, FM-R4 no necesitaría información previa de los parámetros de ruido, exceptuando el valor del umbral  $\theta$  que depende de la magnitud del ruido  $\sigma$ . No obstante, como se ha mencionado anteriormente, la dependencia de la estimación del valor de  $\theta$  es menor en comparación con la del resto de estimadores que clasifican el conjunto de muestras en *inliers* y *outliers*.



# Bibliografía

- [1] M. A. Fischler and R. C. Bolles, “Random sample consensus,” *Communications of the ACM*, vol. 24, no. 6, pp. 381–395, 1981. <https://doi.org/10.1145/358669.358692>
- [2] J. Kacprzyk and W. Pedrycz, *Handbook of Computational Intelligence*. Springer, 2015.
- [3] P. Meer, D. Mintz, A. Rosenfeld, and D. Y. Kim, “Robust regression methods for computer vision: A review,” *International Journal of Computer Vision*, vol. 6, no. 1, pp. 59–70, 1991. <https://doi.org/10.1007/bf00127126>
- [4] P. J. Rousseeuw and A. M. Leroy, *Robust Regression and Outlier Detection*. John Wiley & Sons, Inc., 1987. <https://doi.org/10.1002/0471725382>
- [5] P. J. Huber and E. M. Ronchetti, *Robust Statistics*. John Wiley & Sons, Inc., 2009. <https://doi.org/10.1002/9780470434697>
- [6] P. Torr and A. Zisserman, “MLESAC: A new robust estimator with application to estimating image geometry,” *Computer Vision and Image Understanding*, vol. 78, no. 1, pp. 138–156, 2000. <https://doi.org/10.1006/cviu.1999.0832>
- [7] R. Raguram, O. Chum, M. Pollefeys, J. Matas, and J.-M. Frahm, “USAC: A universal framework for random sample consensus,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 35, no. 8, pp. 2022–2038, 2013. <https://doi.org/10.1109/tpami.2012.257>
- [8] D. Myatt, P. Torr, S. Nasuto, J. Bishop, and R. Craddock, “NAPSAC: High noise, high dimensional robust estimation,” in *Proceedings of the British Machine Vision Conference 2002*. British Machine Vision Association, 2002. <https://doi.org/10.5244/c.16.44>
- [9] O. Chum and J. Matas, “Matching with PROSAC - progressive sample consensus,” in *2005 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR’05)*, vol. 1, 2005, pp. 220–226 vol. 1.
- [10] V. Rodehorst and O. Hellwich, “Genetic algorithm sample consensus (GASAC) - a parallel strategy for robust parameter estimation,” in *2006 Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshop (CVPRW’06)*, 2006, pp. 103–103.

- [11] Kai Ni, Hailin Jin, and F. Dellaert, “GroupSAC: Efficient consensus in the presence of groupings,” in *2009 IEEE 12th International Conference on Computer Vision*, 2009, pp. 2193–2200. <https://doi.org/10.1109/ICCV.2009.5459241>
- [12] M. Rahman, X. Li, and X. Yin, “DL-RANSAC: An improved RANSAC with modified sampling strategy based on the likelihood,” in *2019 IEEE 4th International Conference on Image, Vision and Computing (ICIVC)*, 2019. <https://doi.org/10.1109/icivc47709.2019.8981025>
- [13] J. Zheng, W. Peng, Y. Wang, and B. Zhai, “Accelerated RANSAC for accurate image registration in aerial video surveillance,” *IEEE Access*, pp. 1–1, 2021. <https://doi.org/10.1109/access.2021.3061818>
- [14] O. Chum, J. Matas, and J. Kittler, “Locally optimized RANSAC,” in *Pattern Recognition*, B. Michaelis and G. Krell, Eds. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2003, pp. 236–243.
- [15] J. Matas and O. Chum, “Randomized RANSAC with  $T_{d,d}$  test,” *Image and Vision Computing*, vol. 22, no. 10, pp. 837–842, 2004. <https://doi.org/10.1016/j.imavis.2004.02.009>
- [16] —, “Randomized RANSAC with sequential probability ratio test,” in *Tenth IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV Volume 1)*. IEEE, 2005. <https://doi.org/10.1109/iccv.2005.198>
- [17] D. P. Capel, “An effective bail-out test for RANSAC consensus scoring,” in *Proceedings of the British Machine Vision Conference*. BMVA Press, 2005, pp. 78.1–78.10. <https://doi.org/10.5244/C.19.78>
- [18] I. Kramosil and J. Michálek, “Fuzzy metrics and statistical metric spaces,” *Kybernetika*, vol. 11, pp. 336–344, 1975.
- [19] J.-J. Miñana and O. Valero, “A duality relationship between fuzzy metrics and metrics,” *International Journal of General Systems*, vol. 47, no. 6, pp. 593–612, 2018. <https://doi.org/10.1080/03081079.2018.1487417>
- [20] E. P. Klement, R. Mesiar, and E. Pap, *Triangular Norms*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2000.
- [21] A. George and P. Veeramani, “On some results in fuzzy metric spaces,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 64, no. 3, pp. 395–399, 1994. [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(94\)90162-7](https://doi.org/10.1016/0165-0114(94)90162-7)
- [22] A. Ortiz, E. Ortiz, J. J. Miñana, and O. Valero, “On the Use of Fuzzy Metrics for Robust Model Estimation: a RANSAC-based Approach ,” in *Proceedings of the International Work-conference On Artificial Neural Networks*. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2021, *in press*.



- [23] —, “Hypothesis Scoring and Model Refinement Strategies for FM-based RAN-SAC,” in *Proceedings of the Spanish Conference on Fuzzy Logic and Technologies*. Lecture Notes in Artificial Intelligence. Springer, 2021, *in press*.
- [24] J. J. Miñana, A. Ortiz, E. Ortiz, and O. Valero, “On the standard fuzzy metric: generalizations and application to model estimation ,” in *Proceedings of the Spanish Conference on Fuzzy Logic and Technologies*. Lecture Notes in Artificial Intelligence. Springer, 2021, *in press*.