



Universitat
de les Illes Balears

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

DESARROLLO DE UN PROGRAMA DE RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES DE EINSTEIN EN EL FORMALISMO 3+1

David Villar Mateo

Máster Universitario en Física Avanzada y Matemáticas Aplicadas

(Especialidad de *Astrofísica y Relatividad*)

Centro de Estudios de Postgrado

Año Académico 2020-21

DESARROLLO DE UN PROGRAMA DE RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES DE EINSTEIN EN EL FORMALISMO 3+1

David Villar Mateo

Trabajo de Fin de Máster

Centro de Estudios de Postgrado

Universidad de las Illes Balears

Año Académico 2020-21

Palabras clave del trabajo:

Relatividad General, Ecuaciones de Einstein, Formalismo 3+1, Relatividad Numérica, Agujero Negro.

Nombre Tutor/Tutora del Trabajo: Carlos Palenzuela Luque

Resumen

En este trabajo se ha buscado realizar un programa capaz de resolver numéricamente las ecuaciones de Einstein, $G_{\mu\nu} = (8\pi G/c^4)T_{\mu\nu}$, evolucionando las componentes de la métrica que describen el espacio-tiempo en la teoría de la Relatividad General. Durante este proceso, se ha ampliado el conocimiento en posibles formulaciones de las ecuaciones de Einstein y en la aplicación de métodos numéricos, así como alcanzar una cierta experiencia práctica a la hora de desarrollar un código complejo desde cero.

El espacio-tiempo que queremos resolver se puede describir matemáticamente como una variedad 4-dimensional descrita por un tensor, llamado métrica, con el que podemos calcular las distancias entre puntos. Esta métrica contiene información del espacio-tiempo, y es el tensor que queremos resolver mediante las ecuaciones de Einstein. Estas ecuaciones son covariantes (independientes del sistema de coordenadas). Para conseguir una descripción más intuitiva de la variedad hay que dejar de usar la notación covariante y separar explícitamente el espacio del tiempo. La descomposición 3+1 permite realizar una partición de esta variedad en hipersuperficies tridimensionales (que podemos asociar con el espacio) parametrizadas según una variable real (que asociaremos con el tiempo). Cómo se determinan estas superficies y los observadores que asociamos a nuestras coordenadas viene dado por la función lapso y por el vector desplazamiento, conocidas como condiciones de *slicing* o de gauge. El lapso indica cómo de separadas están las hipersuperficies, mientras que el vector desplazamiento nos dice cómo varían las coordenadas con respecto a las líneas que siguen los vectores normales a dichas hipersuperficies. Esta descripción del espacio tiempo es la que ha sustentado el formalismo de evolución temporal que se ha utilizado para las simulaciones contenidas en este trabajo, ya que ha permitido plantear la evolución del sistema como un problema de Cauchy (o de condiciones iniciales). En este trabajo hemos utilizado observadores normales tales que el valor del vector desplazamiento es cero, mientras que para el lapso hemos usado la familia de condiciones de *slicing* genérica de Bona-Masso.

Con este objetivo en mente se ha realizado una sección introductoria comentando la motivación de desarrollar este tipo de programas en el contexto actual de la relatividad numérica. Seguidamente,

un capítulo más teórico en el que se exponen los conceptos necesarios para entender cómo se ha planteado el trabajo de resolución de las ecuaciones a un nivel más formal. A continuación, un breve capítulo expone los métodos numéricos utilizados a lo largo del proceso. Finalmente se han recogido los resultados obtenidos por las distintas ejecuciones del programa, desarrollado en código Python.

Para el primer caso que se ha hecho evolucionar, el más sencillo, el espacio-tiempo descrito contaba con solamente dos dimensiones (i.e., una dimensión espacial y la otra temporal). Se ha introducido artificialmente un pulso en la función lapso. Tal y como se esperaba, ha evolucionado como si de una ecuación de ondas se tratase. Más que una motivación física, este sistema se ha presentado como primera toma de contacto con la resolución de las ecuaciones de Einstein y para adquirir experiencia que nos pueda resultar útil a la hora de resolver problemas más complejos.

En segundo lugar, se da el salto de coordenadas espaciales cartesianas a esféricas. Comenzamos definiendo un espacio tridimensional además de la dimensión temporal. Gracias a la simetría esférica todos los campos involucrados sólo presentarán dependencia en la coordenada radial. Con esto podemos seguir un planteamiento similar al empleado en el caso unidimensional, lo que simplifica bastante las ecuaciones. Imitando la primera simulación se ha hecho evolucionar con éxito una perturbación en la función lapso que se ha propagado como una onda, con la diferencia de que en este caso la amplitud de las resultantes ha variado según se acercan o se alejan del centro de coordenadas. Con este sistema también nos hemos asegurado de que las ecuaciones de evolución están bien implementadas para el caso de vacío en tres dimensiones.

Entre estos dos primeros casos, además de incrementar el número de variables utilizadas para describir el espacio-tiempo, también hemos tenido que cambiar la ecuación de evolución del lapso, aunque dentro de las familias definidas por las condiciones de gauge de Bona-Masso. El motivo es que el *slicing* armónico empleado anteriormente (la función constante) no es la más robusta para espacios con campos gravitacionales fuertes, como los que queremos evolucionar. La nueva función de *slicing* escogida será pues la condición $1+\log$. También hemos tenido que modificar las condiciones de contorno que ya no podían ser periódicas, puesto que los extremos del dominio donde resolvemos las ecuaciones tienen distintas interpretaciones físicas (en un extremo se han impuesto condiciones de simetría por ser el origen de coordenadas y en el otro las condiciones de frontera radiativas). Por último nos hemos encontrado con la necesidad de buscar ecuaciones de evolución que fueran regulares en el origen del sistema de coordenadas, donde la coordenada radial se anula.

Una vez el programa funcionaba en el vacío, hemos alcanzado el objetivo de calcular la evolución del agujero negro de Schwarzschild. Se ha definido el problema en coordenadas isotrópicas para eliminar la singularidad en el horizonte de eventos y poder hacer evolucionar el programa para cualquier valor de la nueva coordenada radial. Los resultados se han podido comparar con los encontrados en la literatura de manera bastante satisfactoria.

Finalmente hemos intentado realizar simulaciones en las que había un campo escalar auto-gravitante, pero no han funcionado ya que en todas las simulaciones acababan apareciendo oscilaciones violentas en la región del origen. Incluso se ha probado a cambiar la condición de *slicing* a *maximal slicing*, pero su implementación no se debe haber realizado bien ya que tampoco era capaz de hacer evolucionar el agujero negro, mientras que la condición $1+\log$ sí lo ha hecho.

Agradecimientos

A mi familia, por haberme animado y apoyado a tomar la acertada decisión de continuar mis estudios en el campo con el que más disfruto.

Y a mi tutor, Carlos, por la infinita paciencia que ha demostrado conmigo.

Tabla de Contenidos

1	Introducción	1
1.1	Contexto actual de la Relatividad Numérica	1
1.2	Estudio de estrellas Proca y estrellas de Bosones	2
1.3	Objetivos y estructura del Trabajo	3
2	Descomposición 3+1 de la Relatividad General	5
2.1	Ecuaciones de Einstein	6
2.2	Descomposición 3+1	6
2.2.1	Foliación de variedades	6
2.2.2	Parametrización de hipersuperficies y Métrica inducida	8
2.2.3	Curvatura extrínseca y derivada de Lie	10
2.3	Ecuaciones de evolución	11
2.3.1	Ligaduras Hamiltoniana y de momento	12
2.3.2	Coordenadas Cartesianas 1+1	13
2.3.3	Simetría esférica	15
2.3.4	Campo escalar en simetría esférica	19
2.4	Condiciones de contorno	20
3	Métodos numéricos	22
3.1	Método de líneas	22
3.2	Operadores de derivada discreta	23
3.3	Evolución temporal	24
3.4	Disipación numérica y limitadores de pendiente	26
4	Simulaciones numéricas	27
4.1	Espacio tiempo cartesiano	27
4.1.1	Definición del dato inicial	27
4.1.2	Evolución del pulso en 1+1	29

4.2 Pulso gaussiano en coordenadas esféricas	31
4.2.1 Definición del dato inicial	31
4.2.2 Evolución del pulso	31
4.3 Agujero negro de Schwarzschild	33
4.3.1 Definición del dato inicial	34
4.3.2 Evolución del agujero negro de Schwarzschild	34
4.4 Campo escalar auto-gravitante	40
4.4.1 Definición del dato inicial	40
4.4.2 Evolución del campo escalar	41
5 Conclusiones	45

Lista de Figuras

2.1	Esquema de foliación de una variedad, separada en hipersuperficies en las que el parámetro t es constante.	7
2.2	Representación esquemática de cómo se relacionan los diferentes parámetros entre dos superficies infinitesimalmente cercanas.	9
3.1	Esquema gráfico del planteamiento de la condición de estabilidad CFL.	25
4.1	Evolución de muestra de la propagación con la forma de la derivada de un pulso gaussiano en la función lapso.	29
4.2	Evolución temporal del campo lapso y de la componente g_{xx} de la métrica. En cian el dato inicial, en trazo entrecortado algunos pasos intermedios y en azul oscuro la posición final.	30
4.3	Imagen de la figura 10.3 del libro de M. Alcubierre con la evolución del campo lapso excitando el modo de propagación positiva.	30
4.4	Evolución temporal del campo lapso y de la componente g_{rr} de la métrica. En cian el dato inicial y algunos pasos intermedios, y en azul oscuro los valores finales.	32
4.5	Función lapso atravesando el origen de coordenadas partiendo de una perturbación gaussiana sobre ella misma.	33
4.6	Evolución temporal del lapso obtenido y resultados expuestos en la figura 10.11 del libro de de M. Alcubierre. En cian el dato inicial y en azul oscuro el perfil final.	35
4.7	Simulación de agujero negro con definición espacial aumentada a $\Delta x = 0.0025$.	36
4.8	Evolución del mismo sistema que el mostrado por Alcubierre ampliando el tiempo de simulación hasta $t = 30$.	37
4.9	Evolución temporal de la métrica radial obtenida y resultados expuestos en la figura 10.8 del libro de de M. Alcubierre. En cian el dato inicial y los pasos intermedios y en azul oscuro el perfil final.	38
4.10	Resultados obtenidos al intentar hacer evolucionar el agujero negro de Schwarzschild con la condición de <i>maximal slicing</i> .	40

4.11 Valores del campo escalar: a la izquierda evolucionado hasta $t = 3$, a la derecha	
los resultados expuestos en la figura 10.12 del libro de de M. Alcubierre, evolución	
hasta $t = 20$.	42
4.12 Simulación del campo escalar con resultados más satisfactorios.	43
4.13 Evolución del lapso de la simulación del campo escalar. Se muestra solamente la	
mitad de la secuencia ya que a partir de entonces la magnitud del campo en el origen	
reescala el gráfico y no se puede apreciar nada.	44

Nomenclatura y Notación

Se usará el sistema de unidades geométricas a lo largo de todo el trabajo, es decir que las constantes de la naturaleza se fijarán en el valor unidad para simplificar notación. En particular, asumiremos que la velocidad de la luz es $c = 1$ y la constante gravitatoria $G = 1$. Esto permite utilizar de manera práctica unidades de longitud para el resto de magnitudes, expresando por ejemplo el tiempo como $t \rightarrow ct$ o la masa como $M \rightarrow GM/c^2$.

Las derivadas parciales se expresan como: $\frac{\partial T}{\partial x^\mu} = \partial_\mu T$; o bien con la coordenada explícitamente (en caso de contar con nombre propio como t, x, r, θ, ϕ) como por ejemplo: $\frac{\partial T}{\partial x^0} = \frac{\partial T}{\partial t} = \partial_t T$.

Este trabajo asume que el/la lector/a tiene nociones de Relatividad General, así como el conocimiento de conceptos básicos sobre tensores, geometría diferencial (como por ejemplo el transporte paralelo o el de derivada de Lie) y variedades. Recordemos que variedad es la definición formal matemática de lo que intuitivamente podríamos denominar como un espacio n-dimensional continuo y “suave”. Ejemplos de variedades serían el espacio euclídeo 3D como 3-variedad, el espacio-tiempo como una 4-variedad curva o la superficie de una esfera como una 2-variedad curva y cerrada.

La signatura de la métrica a lo largo del trabajo se toma como $(-, +, +, +)$. Los índices griegos $\mu, \nu, \alpha, \beta, \dots$ se usan para denotar los índices del espacio tiempo que van desde 0 hasta 3; mientras que las letras de nuestro alfabeto i, j, k, \dots se usarán para índices espaciales, que irán desde 1 hasta 3.

Capítulo 1

Introducción

1.1 Contexto actual de la Relatividad Numérica

La detección directa de las ondas gravitacionales hace pocos años supuso no sólo la confirmación de la existencia de esas ondas, sino también un cambio radical en el campo de la Astrofísica y la Relatividad Numérica. La capacidad de detectar sistemas binarios de agujeros negros^[1] o de estrellas de neutrones^[2] ha puesto sobre la mesa la necesidad de tener modelos que nos permitan distinguir entre diferentes tipos de sistemas. El desarrollo de estos modelos entra en el campo de la Relatividad Numérica, que se encarga de simular estos escenarios variando parámetros (como la masa de los cuerpos, el momento angular del sistema, las distintas posibilidades de combinación de objetos astrofísicos que orbitan, etc.) para tener una referencia de plantillas con las que cotejar las medidas ofrecidas por los detectores. En otras palabras, las simulaciones numéricas de las ecuaciones de Einstein con la distribución de dos cuerpos astrofísicos orbitando entre si ofrecían datos que resultaron ser compatibles con las perturbaciones del espacio-tiempo detectadas en los grandes interferómetros.

Estos detectores han abierto una ventana para estudiar fenómenos físicos de los que no había datos disponibles hace apenas una década y que podrían suponer avances significativos en cómo entendemos hoy en día la Relatividad General y la interacción gravitatoria, así como la manera en que otros campos se comportan en regímenes alejados de los que podemos observar o reproducir en la Tierra. Por esa misma ventana podemos asomarnos para buscar la existencia de objetos que hasta ahora son puramente teóricos, ya que aun no se han podido detectar a través de radiación electromagnética. Algunos de estos objetos son las estrellas formadas por condensados de Bose-Einstein, como por ejemplo las estrellas de bosones^[2] o las estrellas Proca^[3]. Estos objetos, pese

¹en adelante nos podemos referir a ellos como BH por sus siglas en inglés

²en adelante nos podemos referir a ellas como BS por sus siglas en inglés

a no emitir radiación electromagnética, sí que podrían identificarse por medio de la detección de las señales gravitacionales que puedan generar, de manera similar a como se confirmó en su día la colisión de dos agujeros negros. Debido a esta característica de no interactuar con el campo electromagnético se han considerado como candidatos de parte de la materia oscura presente en el universo [4] [5].

1.2 Estudio de estrellas Proca y estrellas de Bosones

Estos sistemas, puramente teóricos por el momento, consisten en un campo escalar clásico que describe un conjunto cuántico de partículas bosónicas en el mismo estado. Desde hace ya unos años se ha estado estudiando la dinámica de las estrellas formadas por estos campos escalares [6], y en particular viendo cómo se comportan ante perturbaciones pequeñas (para comprobar la estabilidad) o más grandes (en las que la estrella colapsa en un agujero negro). También se ha estudiado la interacción de sistemas binarios de estrellas de bosones, con la intención de saber qué comportamientos esperar y cómo serían las ondas gravitacionales emitidas durante la colisión [7].

Estas estrellas, en alguna región del espacio de parámetros, pueden presentar comportamientos compatibles con los de agujeros negros. Una forma sencilla de entender las estrellas de bosones es como un campo escalar localizado en un sector determinado del espacio. Estos cuerpos tienen las características de un objeto compacto que no interactúa con la materia clásica, es decir, que no incluye acoplamientos directos con el campo electromagnético ni con ningún otro en general. Se comporta pues de una manera parecida a los agujeros negros, que sólo interactúan con el resto de la materia a través de la gravedad.

Dadas estas características, se requiere de un estudio teórico que determine las características de las ondas gravitacionales que podemos esperar y cuáles serían las diferencias con respecto a las emitidas por agujeros negros [8]. Estos estudios servirán tanto para saber buscar estas diferencias como para interpretarlas correctamente, y poder distinguir la naturaleza de estos sistemas binarios en colisión en posibles medidas observacionales futuras. Por un lado se puede optar por la detección directa ya que las BS no cuentan con un horizonte de eventos ni superficie rígida, como postulan Vincent et al. (2016) [9] donde se estudian los efectos visibles de tener una estrella de bosones en el centro de la Vía Láctea (Sgr A*), en vez de un agujero negro de Kerr. También contamos con estudios buscando evidencias con rayos X en sistemas binarios (Yuan et al. , 2004) [10], en el que se han buscado estallidos (*bursts*) que confirmen que se trata de BS en lugar de BH, aunque sin resultados.

También se ha postulado la existencia de BS supermasivas en los núcleos galácticos en el tra-

bajo de Kesden et al.(2005) [11]. La motivación de buscarlas en esas condiciones es que, siempre que la interacción de los objetos compactos en la fase de espiral con la BS central sea puramente gravitatoria, existirán orbitas estables en la superficie de las estrellas de bosones. Las geodésicas de los objetos compactos en estos sistemas mostrarán una precesión pericéntrica extrema y otras características que hacen que las ondas gravitacionales emitidas se distingan fácilmente de las emitidas durante la caída en espiral en un agujero negro. El estudio se ha enfocado en buscar la huella que dejarían las fases de caída en espiral de objetos de masa estelar al orbitar una BS supermasiva ya que, al carecer de un horizonte de eventos, las ondas gravitacionales emitidas contrastarían con las de un núcleo galáctico constituido por un BH supermasivo.

Finalmente, comentar que estudios recientes como el de J. C. Bustillo et al (2021) [12] ya relacionan la observación de fusiones de objetos compactos como eventos compatibles con estrellas Proca, ya que son consistentes con las señales simuladas numéricamente de colisiones frontales de dos estrellas (de igual masa y espín) de bosones vectoriales sin horizonte. La confirmación de la interpretación de la estrella de Proca en el señal analizado, que consideran estadísticamente preferible, proporcionaría la primera evidencia de una partícula de materia oscura largamente buscada.

1.3 Objetivos y estructura del Trabajo

El objetivo principal es presentar el trabajo llevado a cabo para construir un código capaz de resolver las ecuaciones de Einstein usando las técnicas de la Relatividad Numérica. Para simplificar el problema y poder ejecutar el código en un ordenador, impondremos algunas simetrías en el espacio-tiempo, como el uso de geometría cartesiana con topología de anillo o un espacio tridimensional con simetría esférica en el que todos los campos quedan determinados por el valor de la coordenada radial.

Por medio de las ecuaciones de Einstein se ha desarrollado un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales altamente no lineales que hay que evolucionar partiendo de un cierto dato inicial, imponiendo condiciones de frontera radiativas o condiciones de simetría en algunos límites de la ventana de cálculo, en función de la topología del escenario en el que se resuelvan.

Cabe remarcar que el objetivo de este trabajo es la adquisición de experiencia en el diseño y ejecución de este tipo de códigos. Debido a las limitaciones temporales de esta tesis, no se pretende de manera realista una meta más allá en el campo de la investigación. Por ello se compararán los resultados obtenidos a partir del código construido aquí con los hallados en la literatura, en

concreto en el libro del Dr. Miguel Alcubierre: *Introduction to 3+1 numerical relativity* [13].

El trabajo está constituido por este primer capítulo de introducción seguido de uno más extenso dedicado a los aspectos más teóricos que constituyen el núcleo del posterior trabajo de programación: la presentación de conceptos utilizados para definir el problema, la obtención de las ecuaciones de evolución que seguirán los campos a lo largo del proyecto, y el estudio de las condiciones del escenario sobre el que se resolverán. A continuación, se ha incluido un breve capítulo en el que se comenta cómo se lleva a cabo el planteamiento numérico utilizado para resolver las simulaciones propuestas y, finalmente, un último capítulo en el que se exponen y comentan los resultados obtenidos en cada caso.

Capítulo 2

Descomposición $3+1$ de la Relatividad General

Hace no mucho más de un siglo, los Principios de Equivalencia y de Covariancia llevaron a Einstein a la idea de que la gravedad se podía identificar con la curvatura del espacio tiempo. Este principio establecía que en caída libre la acción de la gravedad dejaba de hacerse patente y las leyes de la física retomaban la forma que mostrarían en la Relatividad Especial. Por tanto, existía un sistema de referencia inercial llamado de caída libre.

En presencia de un campo gravitatorio se daría que, localmente, el espacio presenta una métrica de Minkowski y por lo tanto tendríamos sistema de referencia inercial. Si este campo no es uniforme (así pasará siempre en la naturaleza para escalas suficientemente grandes) no es posible unir todos estos sistemas locales en un sistema inercial global, ya que cada localización presenta aceleraciones que diferirán en magnitud y dirección.

Así pues, el término Relatividad General lo que nos indica es la intención de generalizar la Relatividad Especial considerando que de manera local la métrica del Espacio-tiempo es la de Minkowski. Como ya se ha comentado anteriormente en otras palabras, debido a la curvatura del espacio-tiempo en presencia de materia o energía será imposible establecer una correspondencia con un sistema de referencia inercial universal que cuente con esta forma simple de la métrica en todos sus puntos.

Con este punto de partida, Einstein desarrolló un marco teórico que relacionaba la curvatura del espacio-tiempo con las distribuciones de masa y energía contenidas en él.

2.1 Ecuaciones de Einstein

Desde un punto de vista más formal la manera de relacionar la geometría del espacio tiempo con las distribuciones de masa y energía se expresa con la siguiente ecuación:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

donde G es el conocido tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (2.2)$$

La igualdad tensorial (2.1) relaciona el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ con el tensor impulso-energía $T_{\mu\nu}$. El factor que precede a este último contiene también las constantes G y c que recordemos que toman valor unidad en unidades naturales. Los términos involucrados son la métrica riemanaiana, $g_{\mu\nu}$, y el tensor y escalar de Ricci, $R_{\mu\nu}$ y R , que no son más que contracciones de los índices del tensor de curvatura de Riemann.

2.2 Descomposición 3+1

Pasemos a explicar el formalismo en el que se fundamenta este estudio, para el que serán necesarios unos conceptos previos brevemente descritos en las secciones siguientes y que nos permitirán llegar a las ecuaciones de evolución.

2.2.1 Foliación de variedades

El formalismo aquí explicado requiere el concepto de foliación, que consiste en hacer una división del espacio-tiempo de manera que sólo las derivadas temporales se transformen en momento, y no lo hagan las espaciales. De esta manera, podremos suponer que hemos dividido nuestra variedad en folios donde podemos identificar cada uno con nuestro espacio tiempo tridimensional, asociados a un valor concreto de algún parámetro de tiempo. Asumimos pues una foliación del espacio-tiempo en términos de hipersuperficies S de la variedad M . Así, podemos identificar nuestro espacio-tiempo como el caso de una variedad Lorentziana¹ (con una métrica local que corresponde a la de Minkowski) difeomórfica a $\mathfrak{R} \times S$, donde S hace referencia a la variedad que representará el “espacio” y $t \in \mathfrak{R}$ representará el “tiempo”.

Es importante destacar que el corte particular del espacio-tiempo en “instantes de tiempo” es

¹Recordemos que grupo de Lorentz \mathcal{L} es el grupo de todas las transformaciones de Lorentz del espacio de Minkowski.

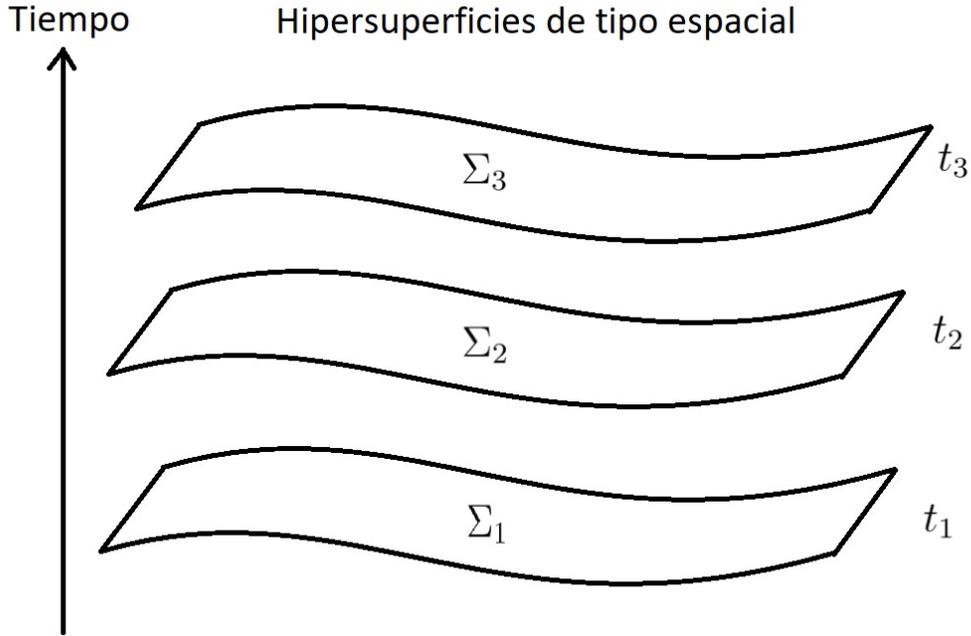


Figura 2.1: Esquema de foliación de una variedad, separada en hipersuperficies en las que el parámetro t es constante.

una elección arbitraria, nada intrínseco al mundo (o al sistema). En otras palabras, se puede realizar el siguiente difeomorfismo de muchas maneras válidas:

$$\Phi : M \longrightarrow \mathfrak{R} \times S,$$

Lo que nos ofrece la posibilidad de definir la coordenada de tiempo t de infinitas maneras distintas en la variedad M de espacio-tiempo.

Finalmente concretar que, para simplificar, se considerarán subvariedades $\Sigma \subset M$ como cortes de la variedad que tienen la misma coordenada temporal ($t = cte = t_0$), denominadas como Σ_{t_0} (debemos tener en mente que este parámetro no tiene por qué coincidir con el tiempo propio de ningún observador en particular ya que no es una medida física). Todos los puntos de una misma hipersuperficie estarán relacionados entre ellos por intervalos de tipo espacio. Debido a esta particularidad, a esta partición de la variedad también se le llama *sincronización*. Esta descripción se puede observar de manera más visual en la figura [2.1](#).

Recordemos que para determinar la evolución temporal de un problema físico se enfoca éste como un problema de *Cauchy*, en el que a partir de unas condiciones iniciales (y de contorno)

las ecuaciones fundamentales deben predecir la futura evolución del sistema. Con las ecuaciones de Einstein (2.1) en notación covariante, que trata por igual el tiempo y el espacio, esto resulta muy complicado. La foliación de variedades brinda la posibilidad de hacer una distinción clara entre estas dos entidades que permita una comprensión clara por nuestra parte del sistema que estamos resolviendo.

2.2.2 Parametrización de hipersuperficies y Métrica inducida

Tomemos dos hipersuperficies: Σ_t , y la adyacente Σ_{t+dt} . La geometría de la región contenida entre esas dos hipersuperficies (ver figura 2.2) queda determinada por los siguientes parámetros:

- La función lapso es la que nos indica la separación entre hipersuperficies, midiendo el tiempo propio entre éstas; es decir, de la manera que un observador lo haría en caso de moverse con una trayectoria en la dirección normal siguiendo la relación:

$$d\tau = \alpha(t, x^j)dt. \quad (2.3)$$

- El vector desplazamiento nos indica la velocidad relativa entre los observadores normales a Σ_t y las líneas que mantienen fijas las coordenadas espaciales x^i al pasar de una hipersuperficie a la siguiente:

$$x_{t+dt}^i = x_t^i - \beta^i(t, x^j)dt. \quad (2.4)$$

- La métrica inducida γ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), o tridimensional, que mide las distancias dentro de las propias superficies como:

$$dl^2 = \gamma_{ij}dx^i dx^j. \quad (2.5)$$

Con tal de especificar una foliación de la variedad, debemos decidir la manera en la que definiremos nuestra función lapso tras cada paso temporal. Evidentemente, hay infinitas maneras de hacerlo, pero a lo largo de este trabajo se hará juntando dos condiciones de *slicing* en concreto: las condiciones de *slicing* algebraicas en que la función lapso queda especificado como una función de las variables geométricas métrica y curvatura extrínseca, y las condiciones de *slicing* de derivada temporal, en las que se especifica una derivada temporal del lapso como alguna función de las cantidades geométricas y se hace evolucionar como una más de las variables dinámicas [14].

Recordemos que, como se ha dicho anteriormente, estos parámetros dependerán de la manera en que hemos foliado el espacio-tiempo y que su definición no es única. Tampoco lo es la manera en que el sistema de coordenadas espacial se propaga de una hipersuperficie a otra (las condiciones de *slicing*). Como resumen podemos decir que el lapso y el vector desplazamiento son funciones

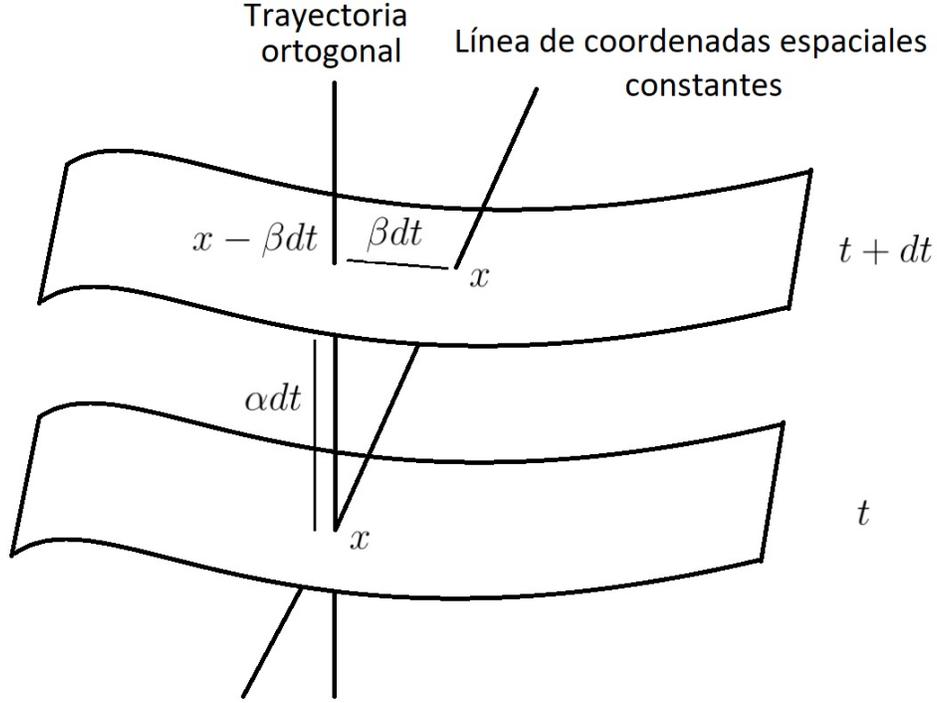


Figura 2.2: Representación esquemática de cómo se relacionan los diferentes parámetros entre dos superficies infinitesimalmente cercanas.

de especificación libre que llevan información sobre la elección del sistema de coordenadas, y se conocen como *funciones de gauge*².

Las funciones de gauge dependerán de las coordenadas espaciales x^j y de la coordenada temporal t . La métrica del espacio-tiempo se puede escribir fácilmente como función de estos parámetros como sigue:

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_i \beta^i) dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.6)$$

donde $\beta_i = \gamma_{ij} \beta^j$ (a partir de aquí asumimos que los índices de los vectores y tensores puramente espaciales se suben y bajan por medio de la métrica espacial: γ_{ij}). De una manera más compacta, tenemos que:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_k \beta^k & \beta_i \\ \beta_j & \gamma_{ij} \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/\alpha^2 & \beta^i/\alpha^2 \\ \beta^j/\alpha^2 & \gamma^{ij} - \beta^i \beta^j/\alpha^2 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

²La notación aquí seguida no es universal, y en algunas fuentes se puede encontrar escrito el lapso como N y el desplazamiento como N^i .

Consideremos ahora el vector normal n^μ a las superficies. Este vector se puede escribir a partir de las funciones de gauge como:

$$n^\mu = \left(\frac{1}{\alpha}, \frac{-\beta^i}{\alpha} \right) ; \quad n_\mu = (-\alpha, 0). \quad (2.9)$$

Con la definición de este vector podemos escribir algunas cantidades de manera más formal, desligada de la elección del sistema de coordenadas adaptado a la foliación. La métrica espacial inducida en cada hipersuperficie Σ viene dada por la expresión:

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu. \quad (2.10)$$

Pese a que la 3-métrica pueda parecer un tensor cuadridimensional por los índices griegos, podemos apreciar que con las igualdades mostradas más arriba la componente temporal se vuelve trivial. Además, y como veremos más adelante, la ecuación (2.10) nos indica que la métrica espacial no es nada más que el proyector de la variedad sobre las hipersuperficies tridimensionales.

2.2.3 Curvatura extrínseca y derivada de Lie

Al considerar las hipersuperficies que constituyen nuestra foliación debemos distinguir entre la curvatura intrínseca, que proviene de la geometría interna de estas hipersuperficies, y la curvatura extrínseca asociada con cómo están inmersas en la variedad cuatri-dimensional que asociamos con nuestro espacio-tiempo. Se puede obtener la curvatura intrínseca a partir del cálculo del tensor de Riemann definido con la métrica espacial γ_{ij} . La curvatura extrínseca, por otro lado, se define en términos de qué le sucede al vector normal a las hipersuperficies cuando es transportado paralelamente de un punto de la subvariedad a otro. En general, encontraremos que al transportar paralelamente un vector normal desde un punto a otro cercano en la misma Σ_t obtendremos un nuevo vector que ya no será normal a la hipersuperficie. El *tensor de curvatura extrínseca*, denominado con $K_{\alpha\beta}$, es el que contiene la información de cómo cambian estos vectores normales bajo transformaciones de transporte paralelo.

Con motivo de definir la curvatura extrínseca tenemos que definir el operador de proyección sobre las hipersuperficies espaciales:

$$P_\beta^\alpha := \delta_\beta^\alpha + n^\alpha n_\beta, \quad (2.11)$$

que como hemos comentado antes no es más que la métrica espacial con un índice arriba; $P_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}$. Tomando (2.11) podemos definir entonces la curvatura como el proyector aplicado al transporte

paralelo del vector normal a la hipersuperficie:

$$K_{\mu\nu} := -P_{\mu}^{\alpha} \nabla_{\alpha} n_{\nu} = -(\nabla_{\mu} n_{\nu} + n_{\mu} n^{\alpha} \nabla_{\alpha} n_{\nu}), \quad (2.12)$$

que asumiremos simétrico desde un principio, $K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu}$, ya que la esta demostración es algo tediosa. Este tensor es puramente espacial tal y como podemos comprobar de manera sencilla: $n^{\mu} K_{\mu\nu} = n^{\nu} K_{\mu\nu} = 0$.

A partir de la definición anteriormente expuesta en (2.12) no es difícil mostrar que podemos escribir la curvatura extrínseca $K_{\mu\nu}$ de una manera equivalente por medio de usar la derivada de Lie de la métrica espacial a lo largo del vector normal, esto es:

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_{\vec{n}} \gamma_{\mu\nu}. \quad (2.13)$$

2.3 Ecuaciones de evolución

A partir de las propiedades de la derivada de Lie y de la condición de perpendicularidad con la superficie del vector normal \vec{n} , observamos que para cualquier función escalar ϕ se da:

$$\mathcal{L}_{\vec{n}} \gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{\phi} \mathcal{L}_{\phi \vec{n}} \gamma_{\mu\nu}, \quad (2.14)$$

propiedad que nos resultará útil para el caso particular en el que el campo escalar sea la función lapso α , ya que según las anteriores definiciones geométricas se da que $t = \alpha \vec{n} + \vec{\beta}$ y así encontramos:

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\alpha} \mathcal{L}_{\alpha \vec{n}} \gamma_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\alpha} \left(\mathcal{L}_{\vec{t}} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \right) \gamma_{\mu\nu}, \quad (2.15)$$

que nos lleva a:

$$\left(\mathcal{L}_{\vec{t}} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \right) \gamma_{\mu\nu} = -2\alpha K_{\mu\nu}. \quad (2.16)$$

De esta última igualdad podemos tomar sólo las componentes espaciales, y usando que en coordenadas adaptadas la derivada de Lie se convierte en la derivada parcial con respecto al tiempo, $\mathcal{L}_{\vec{t}} = \partial_t$, la anterior igualdad se puede escribir como:

$$\partial_t \gamma_{ij} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij}, \quad (2.17)$$

que podemos reescribir como:

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i, \quad (2.18)$$

sólo reordenando y usando la derivada covariante tridimensional, es decir, la asociada a la métrica γ_{ij} que no es nada más que $D_\mu := P_\mu^\alpha \nabla_\alpha$. Tal y como haremos más adelante, una elección del gauge en la que el vector desplazamiento β^i sea nulo simplificará considerablemente las ecuaciones de evolución.

Con esto tenemos una ecuación que nos describe la evolución temporal de la métrica inducida, pero para cerrar correctamente el sistema será necesaria otra que nos indique cómo evolucionará el tensor de curvatura extrínseca K_{ij} . Cabe destacar que hasta ahora sólo hemos trabajado con conceptos puramente geométricos, sin llegar a usar ecuaciones de campo de Einstein. Y precisamente de éstas obtendremos las ecuaciones de evolución de K_{ij} . Dicho en otras palabras: la evolución de la 3-métrica es puramente cinemática, mientras que la dinámica del sistema estará contenida en las ecuaciones de evolución para K_{ij} .

Volviendo a la evolución temporal de la curvatura, la obtención de esta ecuación es bastante directa, pero debido a su longitud esta parte se omite y pasamos a comentar directamente la ecuación. El proceso consiste en una contracción de las ecuaciones de campo de Einstein en el formalismo 3+1. Esto es: hacer contracciones del tensor de Riemann con \vec{n} y sobre la hipersuperficie con el operador proyector P_μ^ν , donde intervienen las relaciones de Gauss-Codazzi.

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} = & -D_i D_j \alpha + \alpha \left[{}^{(3)}R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K_j^k \right] \\ & + 4\pi\alpha \left[\gamma_{ij}(S - \rho) - 2S_{ij} \right] + \mathcal{L}_{\vec{\beta}} K_{ij}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

En esta ecuación se ha definido la cantidad $\rho := n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}$ para designar la densidad local de energía que corresponde a los observadores de las trayectorias normales a las hipersuperficies. De manera similar se ha definido $S_{\mu\nu} := P_\mu^\alpha P_\nu^\beta T_{\alpha\beta}$ como el tensor de estrés espacial medido de nuevo por los mismos observadores (con $S := S_\mu^\mu$).

2.3.1 Ligaduras Hamiltoniana y de momento

Antes de desarrollar las ecuaciones de evolución bajo condiciones de simetría específicas, introduciremos dos ecuaciones de ligadura de gran importancia para su obtención. Las ligaduras aquí presentadas son las que permitirán solventar algunos problemas que aparezcan, como el de irregularidad en el origen en coordenadas esféricas.

Estas ligaduras provienen de hacer la proyección del tensor de Riemann sobre las hipersuperficies y, gracias a las ecuaciones de Gauss-Codazzi, relacionarlo con las ecuaciones de momento y densidad de energía de la materia sin llegar a contener derivadas temporales de ningún campo. Así, tenemos

por un lado que:

$$\begin{aligned}
P^{\alpha\mu} P^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\nu\mu} &= (g^{\alpha\mu} + n^\alpha n^\mu)(g^{\beta\nu} + n^\beta n^\nu) R_{\alpha\beta\nu\mu} \\
&= R + 2n^\mu n^\nu R_{\mu\nu} \\
&= 2n^\mu n^\nu G_{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{2.20}$$

con $G_{\mu\nu}$ el tensor de Einstein. Por otro lado, las ya mencionadas relaciones de Gauss-Codazzi implican que:

$$P^{\alpha\mu} P^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\nu\mu} = {}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu}. \tag{2.21}$$

Comparando estos dos últimos resultados, y a través de las ecuaciones de campo para transformar el tensor de Einstein obtenemos la *ligadura Hamiltoniana* o de energía:

$${}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} = 16\pi\rho, \tag{2.22}$$

donde $\rho := n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}$, la densidad local de energía medida por los observadores de las líneas normales. Observemos que no solamente carece de derivadas temporales (con lo que implica que se cumplirá en todo momento), si no que además está desvinculada de las funciones de gauge. Es decir, que no es una ecuación de evolución, sino una ligadura que se satisface para cualquier instante.

Por otro lado, a partir de la componente mixta del tensor de Einstein y con las relaciones de Codazzi-Minardi podemos obtener mediante las ecuaciones de campo una nueva ligadura, que es:

$$D_\mu(K^{\alpha\mu} - \gamma^{\alpha\mu} K) = 8\pi j^\alpha, \tag{2.23}$$

con $j^\alpha := -P^{\alpha\mu} n^\nu T_{\mu\nu}$ la densidad de momento que miden los observadores sobre las trayectorias normales. Nótese que pese a que α es un índice libre, el caso particular $\alpha = 0$ es trivial. De nuevo, al no tener derivadas temporales estamos ante una ecuación de ligadura y no de evolución. Esta es la ligadura de momento.

2.3.2 Coordenadas Cartesianas 1+1

Una vez establecidas las ecuaciones de evolución en el formalismo 3 + 1 (2.18) y (2.19) podemos hilar más fino al considerar simetrías que nos faciliten la implementación y el cálculo computacional realizado durante la ejecución del programa. En este primer caso se usará un sistema de Relatividad “1+1” consistente en un espacio de una dimensión espacial y la temporal en el vacío. De esta manera el campo gravitacional resulta trivial y no hay verdadera dinámica. En este caso

el tensor de curvatura en una variedad de dos dimensiones pasa a ser el escalar de Ricci, que se anula en el vacío.

Es importante tener en mente que en este tipo de programas la dinámica observada es la de los componentes del gauge, ya que en el vacío no tenemos un tensor impulso energía. Este tipo de estudio se utiliza como ejemplo del comportamiento esperado en un caso sencillo para, posteriormente, dar el salto a más dimensiones o con el efecto de algún campo extra, como los asociados a la materia.

Volviendo a nuestro caso particular, estudiaremos la dinámica del gauge producida por la condición de *slicing* de Bona-Maso con nulo vector de desplazamiento, $\vec{\beta} = 0$, por simplicidad:

$$\partial_t \alpha = -\alpha^2 f(\alpha) K, \quad (2.24)$$

donde $K = \text{tr}K = K_x^x$ en el caso unidimensional y $f(\alpha)$ es la función de *slicing* (corte de la foliación) que sigue el lapso. Para este tramo del trabajo se ha tomado $f(\alpha) = \text{cte} = 1$ ya que evita que haya choques en la simulación cuando se genere un pulso en este campo.

Para describir el resto de ecuaciones de evolución del formalismo 3+1 será útil la definición de las siguientes cantidades auxiliares:

$$D_\alpha := \partial_x \ln \alpha, \quad D_g := \partial_x \ln g, \quad (2.25)$$

con $g := g_{xx}$. Esto facilitará la escritura de la ecuación de evolución de la curvatura extrínseca. Estos campos también tendrán su propia ecuación de evolución, obtenida gracias al hecho de que las derivadas temporal y espacial conmutan. Así obtenemos fácilmente la ecuación para el lapso, y se puede hacer idénticamente para la métrica:

$$\begin{aligned} \partial_t (\partial_x \ln \alpha) &= \partial_x (\partial_t \ln \alpha); \\ \partial_t (\partial_x \alpha / \alpha) &= \partial_x (\partial_t \alpha / \alpha); \\ \partial_t D_\alpha &= \partial_x \left(\frac{-\alpha^2 f K}{\alpha} \right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Finalmente, siguiendo el mismo esquema para la componente g que en la ecuación (2.26) las ecuaciones de evolución quedan así:

$$\partial_t \alpha = -\alpha^2 f K, \quad (2.27)$$

$$\partial_t g = -2\alpha g K, \quad (2.28)$$

$$\partial_t D_\alpha + \partial_x(\alpha f K) = 0, \quad (2.29)$$

$$\partial_t D_g + \partial_x(2\alpha K) = 0, \quad (2.30)$$

$$\partial_t K + \partial_x(\alpha D_\alpha / g) = \alpha (K^2 - D_\alpha D_g / 2). \quad (2.31)$$

2.3.3 Simetría esférica

Tomemos como segundo ejemplo de espacio-tiempo el modelo sometido a simetría esférica. Resulta particularmente interesante por varios motivos, entre ellos porque presenta un espacio tridimensional a diferencia del anterior, pero manteniendo parte de su “sencillez” al tener la dependencia de sus variables dinámicas ligada a una sola variable radial. Por esto, y pese a describir un espacio tiempo de tres dimensiones, el código se sigue considerando unidimensional. Otro motivo destacable de su importancia es que muchos sistemas astrofísicos relevantes como agujeros negros o estrellas de cualquier tipo se pueden asumir simétricamente esféricos bajo una buena aproximación. Esto permite hacer estudios de estabilidad del objeto, colapsos gravitacionales, dinámicas de sus horizontes, etcétera³.

Condiciones de *slicing*

En esta sección del trabajo continuamos con la condición de slicing de Bona-Masso; es decir, con la ecuación de evolución (2.24) pero definiendo el factor de *slicing* como $f(\alpha) = 2/\alpha$, y no como una constante como en caso cartesiano. Seguimos considerando que el lapso y su derivada son campos a evolucionar con su propia ecuación de derivada temporal, ya que nos ha parecido el método más sencillo de aplicar.

Por otro lado, daremos una explicación acerca de la condición de *maximal slicing* que se ha intentado imponer al final del trabajo. Este sistema de definición del lapso asegura una evolución en la que las líneas normales nunca se cruzan. Para ello, se toma la evolución de los elementos de volumen asociados al vector normal de las hipersuperficies. Usando la definición de curvatura

³Destaquemos que bajo esta simetría no se puede dar el estudio de las ondas gravitacionales producidas, ya que es necesario disponer de cuadrupolos para ello y no están permitidos bajo este régimen.

extrínseca (2.12) encontramos que el cambio temporal de estos elementos viene dado por:

$$\nabla_{\mu} n^{\mu} = -K, \quad (2.32)$$

que indica que la tasa de variación del vector normal en el tiempo (ligada a los elementos de volumen) es justamente el valor negativo de la traza de la curvatura extrínseca. Exigir que se mantenga constante (esto es lo que asegura el *maximal slicing*) es equivalente a pedir que:

$$K = \partial_t K = 0. \quad (2.33)$$

Claramente esto requiere no solamente que K tome un valor nulo inicialmente, sino que debe mantenerse a cero durante la evolución. A partir de la ecuación de evolución (2.19) podremos imponer que el valor del campo lapso se ciña a la ecuación:

$$D^2 \alpha = \alpha [K_{ij} K^{ij} + 4\pi(\rho + S)], \quad (2.34)$$

que se conoce con el nombre de, efectivamente, ecuación de *maximal slicing*. Ésta es la que permitirá el cálculo del campo lapso para cada instante temporal, haciendo la doble integral.

Regularización de la métrica

Tengamos en cuenta que las coordenadas esféricas introducidas anteriormente son singulares en el origen, y esta singularidad de coordenadas puede ser fuente de graves problemas numéricos causados por la falta de regularidad de las variables geométricas en ese punto. El problema surge por la presencia de términos en las ecuaciones de evolución que van como $1/r$ cerca del origen, como se verá en breves. Buscando esta regularización nos aseguraremos una evolución estable y bien comportada.

Pese a que estas manipulaciones las podemos identificar como un proceso analítico, los resultados no dejan de ser numéricos y la cancelación puede no darse exactamente, resultando en procesos violentamente inestables cerca del origen al cabo de unos pocos pasos de tiempo. Teniendo esto en cuenta, empecemos por analizar la métrica espacial en simetría esférica, que podemos escribir como:

$$dl^2 = A(r, t) dr^2 + r^2 B(r, t) d\Omega^2, \quad (2.35)$$

siendo A y B las funciones positivas de la métrica, es decir, $A := g_{rr}$ y $B := g_{\theta\theta} = g_{\phi\phi}$. El diferencial $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ es el ángulo sólido. Nótese la factorización en r^2 de las funciones en la parte angular. Esta acción cuenta con la ventaja de hacer explícita la dependencia en r de

los términos de la métrica.

De la misma manera que anteriormente, ahora también trataremos las ecuaciones con las siguientes cantidades auxiliares:

$$D_A := \partial_x \ln A, \quad D_B := \partial_x \ln B. \quad (2.36)$$

Con tal de simplificar notación y el trabajo a realizar con las ecuaciones trabajaremos con la curvatura extrínseca en la forma de sus componentes, esto es:

$$K_A := K_r^r, \quad K_B := K_\theta^\theta = K_\phi^\phi. \quad (2.37)$$

Con estas cantidades bien definidas podemos continuar con la regularización de la métrica en el origen. Es preciso conocer las condiciones de regularidad que los diferentes campos y variables $\{\alpha, D_\alpha, A, B, D_A, D_B, K_A, K_B\}$ deben satisfacer en $r = 0$. Estas condiciones son simplemente las impuestas por el requisito de que las diferentes variables deben estar bien definidas en el origen, e implican el siguiente comportamiento para r pequeño:

$$A \sim A^0 + \mathcal{O}(r^2), \quad B \sim B^0 + \mathcal{O}(r^2), \quad (2.38)$$

$$D_A \sim \mathcal{O}(r), \quad D_B \sim \mathcal{O}(r), \quad (2.39)$$

$$K_A \sim K_A^0 + \mathcal{O}(r^2), \quad K_B \sim K_B^0 + \mathcal{O}(r^2), \quad (2.40)$$

$$\alpha \sim \alpha^0 + \mathcal{O}(r^2), \quad D_\alpha \sim \mathcal{O}(r). \quad (2.41)$$

Estas condiciones son sencillas de implementar numéricamente, ya que basta con añadir en el origen unos cuantos puntos “fantasma” a la malla, y completarlos con un criterio de paridad o de reflexión impar según se espere el comportamiento de cada función: impar si se aproxima con un comportamiento de $\mathcal{O}(r)$ y par cuando lo hace como $\mathcal{O}(r^2)$.

El segundo método de regularización del origen resulta un poco más problemático. Para verlo

con claridad, escribiremos las ecuaciones de evolución para todos los campos involucrados:

$$\partial_t \alpha = -\alpha^2 f K, \quad (2.42)$$

$$\partial_t A = -2\alpha A K_A, \quad (2.43)$$

$$\partial_t B = -2\alpha B K_B, \quad (2.44)$$

$$\partial_t D_\alpha = -\partial_x(\alpha f K), \quad (2.45)$$

$$\partial_t D_A = -2\alpha[K_A D_\alpha + \partial_r K_A], \quad (2.46)$$

$$\partial_t D_B = -2\alpha[K_B D_\alpha + \partial_r K_B], \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_A = & -\frac{\alpha}{A} \left[\partial_r(D_\alpha + D_B) + D_\alpha^2 - \frac{D_\alpha D_A}{2} + \frac{D_B^2}{2} - \frac{D_A D_B}{2} \right. \\ & \left. - AK_A(K_A + 2K_B) - \frac{1}{r}(D_A - 2D_B) \right] + 4\pi\alpha M_A, \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_B = & -\frac{\alpha}{2A} \left[\partial_r D_B + D_\alpha D_B + D_B^2 - \frac{D_A D_B}{2} - \frac{1}{r}(D_A - 2D_\alpha - D_B) \right. \\ & \left. - \frac{2(A-B)}{r^2 B} \right] + \alpha K_B(K_A + 2K_B) + 4\pi\alpha M_B, \end{aligned} \quad (2.49)$$

donde M_A y M_B son expresiones que vienen dadas por:

$$M_A = 2S_B - S_A - \rho, \quad M_B = S_A - \rho, \quad (2.50)$$

con ρ la densidad de energía de la materia, S_{ij} el tensor de estrés sobre el que hemos definido las cantidades $S_A := S_r^r$, $S_B := S_\theta^\theta$.

Entremos pues en tema de regularizar las ecuaciones de evolución cerca del punto singular que es el origen en aquellas que aparezcan términos con el factor $1/r$. Ya que, gracias a la condición dada anteriormente, sabemos que $\{D_\alpha, D_A, D_B\}$ tienen un comportamiento de $\mathcal{O}(r)$ en ese entorno los términos del tipo D/r serán términos regulares, por lo que no supondrán ningún problema y pueden permanecer así.

Sin embargo, la ecuación de evolución de K_B cuenta con el término $(A-B)/Br^2$. Sabiendo que debido a que el espacio tiempo debe ser plano localmente tenemos que A^0 y B^0 deben ser del mismo orden, por lo que $A-B \sim \mathcal{O}(r^2)$. De este modo, aquí sí que será necesaria una intervención. Pese a haber distintas maneras de abordar el tema, algunas más generales, aquí se ha optado por seguir un método más simple para este caso consistente en la aplicación de la siguiente variable auxiliar:

$$\lambda := \frac{1}{r} \left(1 - \frac{A}{B} \right). \quad (2.51)$$

De nuevo usando la propiedad de que el espacio debe ser plano localmente, encontramos que $\lambda \sim \mathcal{O}(r)$ para valores pequeños de r . Por tanto, para regular esta variable en el origen se cuenta con una reflexión impar en el punto $r = 0$, siguiendo el mismo criterio que para el resto de variables. Su evolución se obtiene directamente de su definición:

$$\partial_t \lambda = \frac{2\alpha A}{B} \left(\frac{K_A - K_B}{r} \right). \quad (2.52)$$

Sin embargo, observamos de nuevo el término peligroso en cuanto a posible irregularidad se refiere en esta ecuación de evolución: $(K_A - K_B)/r$. A partir de la ligadura de momento (2.23) se puede evitar el problema reescribiendo este término en función de los otros, dejando finalmente la ecuación de evolución como:

$$\partial_t \lambda = \frac{2\alpha A}{B} \left[\partial_r K_B - \frac{D_B}{r} (K_A - K_B) + 4\pi j_A \right], \quad (2.53)$$

con $j_A := j_r$ la densidad de momento de la materia en la componente radial. Esta ecuación sí que es regular en el origen.

Finalmente, la ecuación para la componente K_B de la curvatura extrínseca queda como:

$$\begin{aligned} \partial_t K_B = -\frac{\alpha}{2A} \left[\partial_r D_B + D_\alpha D_B + D_B^2 - \frac{D_A D_B}{2} - \frac{1}{r} (D_A - 2D_\alpha - D_B) \right. \\ \left. + \frac{2\lambda}{r} \right] + \alpha K_B (K_A + 2K_B) + 4\pi \alpha M_B. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Con estos últimos retoques, finalmente hemos obtenido todas las ecuaciones de evolución para un espacio tiempo bajo condiciones de simetría esférica, que estas son: (2.42) – (2.48), incluyendo las ecuaciones con la variable auxiliar (2.53) y (2.54).

2.3.4 Campo escalar en simetría esférica

Para esta parte del trabajo empezaremos por escribir el tensor de impulso-energía, ya que es el objeto matemático que contiene la información del campo escalar. Para un potencial arbitrario y auto-gravitante $V(\phi)$ tenemos el tensor impulso-energía definido como:

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{g_{\mu\nu}}{2} (\nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi + 2V). \quad (2.55)$$

Una vez definida la forma de este tensor, procedemos al cálculo de sus componentes 3 + 1 usando de nuevo contracción de índices con el vector normal y con los proyectores de las hipersuperficies.

$$\rho = n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} = \frac{1}{2A} \left(\frac{\Pi^2}{B^2} + \Psi^2 \right) + V, \quad (2.56)$$

$$j_A = -n^\mu T_{\mu r} = \frac{\Pi\Psi}{A^{1/2}B}, \quad (2.57)$$

$$S_A = \gamma^{rr} T_{rr} = \frac{1}{2A} \left(\frac{\Pi^2}{B^2} + \Psi^2 \right) - V, \quad (2.58)$$

$$S_B = \gamma^{\theta\theta} T_{\theta\theta} = \frac{1}{2A} \left(\frac{\Pi^2}{B^2} - \Psi^2 \right) - V, \quad (2.59)$$

donde hemos definido:

$$\Pi := (A^{1/2}B/\alpha)\partial_t\phi, \quad \Psi := \partial_r\phi. \quad (2.60)$$

Usando las ecuaciones de campo de Klein-Gordon ($\square\phi = \partial_\phi V$), el hecho de que $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ y la propiedad de que las derivadas parciales temporal y espacial conmutan, se obtienen las ecuaciones de evolución del campo escalar y de sus campos asociados:

$$\partial_t\phi = \frac{\alpha}{A^{1/2}B}\Pi, \quad (2.61)$$

$$\partial_t\Psi = \partial_r \left(\frac{\alpha}{A^{1/2}B}\Pi \right), \quad (2.62)$$

$$\partial_t\Pi = \frac{1}{r^2}\partial_r \left(\frac{\alpha Br^2}{A^{1/2}}\Psi \right) - \alpha A^{1/2}B\partial_\phi V. \quad (2.63)$$

Con estos campos podemos finalmente calcular las cantidades M_A , M_B y j_A de las ecuaciones de evolución en simetría esférica representadas en la sección anterior.

Para un campo escalar auto-gravitante definiremos el potencial como $V(\phi) = m^2\phi^2/2$. En caso contrario se puede definir con $m = 0$ para conseguir $V(\phi) = 0$.

2.4 Condiciones de contorno

Esta sección está enfocada a tratar cómo se van a gestionar los dos extremos de la ventana de cálculo, esto es: para los últimos puntos de ambos extremos de la malla y su entorno. En coordenadas esféricas consideraremos un extremo como el origen de coordenadas (con los dos puntos fantasma que ayudan a la reflexión) y a los puntos más alejados de la malla los denominaremos como $r = \infty$, pese a que al ser un cálculo numérico siempre tendrán un valor finito.

Para la evolución del sistema 1+1 se han puesto unas condiciones de contorno periódicas, ya que es un sistema muy sencillo de implementar. Consiste en conectar los dos extremos de la ventana de cálculo entre si. Con este sistema, cualquier perturbación que alcance uno de los dos extremos de la malla, reaparecerá por el otro gracias a la topología de anillo del escenario.

Como se ha comentado anteriormente en la sección de regularización de la métrica, en situación de simetría esférica lo que se hace en el origen es imponer una reflexión par o impar según la naturaleza de cada campo. En los últimos puntos de la malla, en los que se puede considerar $r = \infty$, consideraremos condiciones de contorno radiativas. De esta manera las perturbaciones que alcancen la frontera o el ruido de alta frecuencia que se pueda generar se perderá a medida que progresivamente alcance el extremo de la ventana de cálculo. Este mecanismo se implementa haciendo evolucionar a cada campo según la siguiente ecuación:

$$\partial_t \phi + v \partial_r \phi + v(\phi - \phi_0)/r = 0, \quad (2.64)$$

donde v es la velocidad de propagación de la información del sistema y ϕ es cualquier campo sobre el que queramos aplicar estas condiciones, con ϕ_0 el valor que toma éste en el infinito.

Con estas condiciones radiativas en la frontera más alejada se consigue que nuestras simulaciones cumplan la propiedad de ser asintóticamente planas cuando tiendan a infinito, tal y como ocurre en la naturaleza.

Capítulo 3

Métodos numéricos

La naturaleza no lineal de los sistemas de ecuaciones de la Relatividad Numérica en general requieren de diferentes técnicas y métodos para asegurarnos la convergencia numérica y la estabilidad de las soluciones. En este capítulo se exponen los métodos numéricos aplicados durante la ejecución del programa, ya que se han programado íntegramente para solucionar los distintos sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Entre ellos se hayan los operadores de diferencias finitas para las derivadas discretas espaciales, los métodos de Runge-Kutta para integración temporal, y las disipación artificial para prevenir los modos de alta frecuencia en las soluciones numéricas [15].

3.1 Método de líneas

Este método separa explícitamente la discretización espacial y la temporal, y nos permite usar distintas discretizaciones espaciales manteniendo el mismo integrador temporal. Para ello debe ser posible poder escribir las ecuaciones de evolución como $\partial_t \mathbf{u} = \mathcal{L}(\mathbf{u})$, con \mathbf{u} el conjunto de campos a evolucionar y $\mathcal{L}(\mathbf{u})$ el operador que contiene derivadas espaciales de cualquier orden de los diferentes campos.

Este sistema de ecuaciones en derivadas parciales en el continuo lo podemos transformar en un sistema semi-discreto haciendo:

1. Una discretización de la coordenada espacial en una dimensión: $x_i = i\Delta x$, de modo que la solución quede definida en una malla de puntos discretos: $\mathbf{U} = \mathbf{u}(x_i)$. A este parámetro Δx lo llamaremos resolución de la malla.
2. La substitución del operador en continuo $\mathcal{L}(\mathbf{u})$ por el operador discreto $L(\mathbf{U})$, substituyendo las derivadas espaciales por un operador discreto de derivada.

Así obtendremos que para cualquier punto x_i de la malla el sistema continuo de ecuaciones en derivadas parciales se convierte en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinario discreto:

$$\partial_t \mathbf{U} = L(\mathbf{U}) + Q_d(U), \quad (3.1)$$

donde el operador Q_d se ha añadido para incluir una disipación artificial por motivos de estabilidad, con el fin de eliminar los modos de alta frecuencia que pueden aparecer a lo largo de la malla y no resolverse adecuadamente durante la evolución.

La discretización total del sistema se da cuando definimos pasos temporales $t^n = n\Delta t$ tales que la solución totalmente discretizada se puede representar para un tiempo n como: $\mathbf{U}^n := \mathbf{u}(x_i, t^n)$. Los sistemas explícitos serán los que permitan escribir la solución del paso futuro explícitamente en términos de la solución en el presente, esto es:

$$\mathbf{U}^{n+1} = T [L(\mathbf{U}^n) + Q_d(\mathbf{U}^n)], \quad (3.2)$$

donde T puede ser un operador complicado dependiendo del integrador temporal elegido para resolver nuestra ecuación diferencial ordinaria.

El sistema discreto será estable¹, consistente y convergente a la solución en el continuo si aplicamos un integrador localmente estable en la evolución temporal, como podría ser un Runge-Kutta de al menos tercer orden.

3.2 Operadores de derivada discreta

El operador numérico encargado de la derivación se basa en el método centrado de diferencias finitas. Para obtener el valor de la derivada en un punto se basa en el valor del campo en los puntos adyacentes y aplica la definición formal de derivada para calcularlo, visualmente:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \implies \phi'(x_0) = \frac{\phi(x_0 + \Delta x) - \phi(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}, \quad (3.3)$$

donde ϕ representa el campo cuya derivada espacial en el punto x_0 nos interesa calcular. En los puntos del contorno esto queda restringido al punto interior y al de la frontera, ya que desconocemos el valor del campo más allá.

¹en la medida de que la condición de Courant-Friedrich-Levy $\Delta t \leq \Delta x/c_h$ se cumpla totalmente en sistemas hiperbólicos, con c_h el valor absoluto del mayor valor propio de velocidad del sistema.

Siguiendo una notación que haga referencia a la posición de cada punto con un subíndice, la expresión anterior queda como:

$$\phi'_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x}. \quad (3.4)$$

Este operador se puede refinar a partir de combinaciones de la expansión de Taylor en los puntos cercanos al central para obtener un operador de mayor orden, en el que se reduce el error numérico. En nuestro caso hemos utilizado un operador de derivación centrado de diferencias finitas que podemos escribir como:

$$\phi'_i = \frac{-\phi_{i+2} + 8\phi_{i+1} - 8\phi_{i-1} + \phi_{i-2}}{12\Delta x}. \quad (3.5)$$

Usando este operador en lugar del primero conseguimos que el error del operador numérico pase a ser de $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ a $\mathcal{O}(\Delta x^4)$.

Finalizando con el tema de derivación haremos hincapié en un término en concreto que puede dar problemas de continuidad. Se trata de la primera derivada de la ecuación de evolución temporal del campo Π (2.63), de la forma general:

$$T = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 f(r)), \quad (3.6)$$

que puede generar soluciones inestables en los puntos cercanos a $r = 0$. Para ello se ha utilizado el operador auxiliar T' , ya que sin perder generalidad podemos escribirlo de la forma:

$$\frac{1}{r^2} \partial_r = 3\partial_{r^3} \longrightarrow T'_i = 3 \left(\frac{r_{i+1}^2 f(r_{i+1}) - r_{i-1}^2 f(r_{i-1})}{r_{i+1}^3 - r_{i-1}^3} \right). \quad (3.7)$$

3.3 Evolución temporal

La evolución temporal viene descrita por cómo es la derivada respecto del tiempo de cada una de las variables. La información de la que disponemos es una posición en un espacio de fases formado por todos los campos involucrados y reglas acerca de cómo evolucionarán estos. Para obtener el siguiente paso necesitamos deshacer la derivada de los campos en el instante de tiempo de partida por medio de un integrador temporal.

Para el desarrollo del programa se ha elegido el integrador de tiempo de Runge-Kutta (RK de ahora en adelante) que consiste en calcular el siguiente paso temporal de los campos discretizados U^{n+1} a través del cálculo previo de pasos intermedios. El orden del operador elegido indica el número de pasos intermedios U_{k_i} buscados para construir la solución de la integral. Con tal de conseguir estabilidad local y que el método implementado fuera relativamente sencillo de pro-

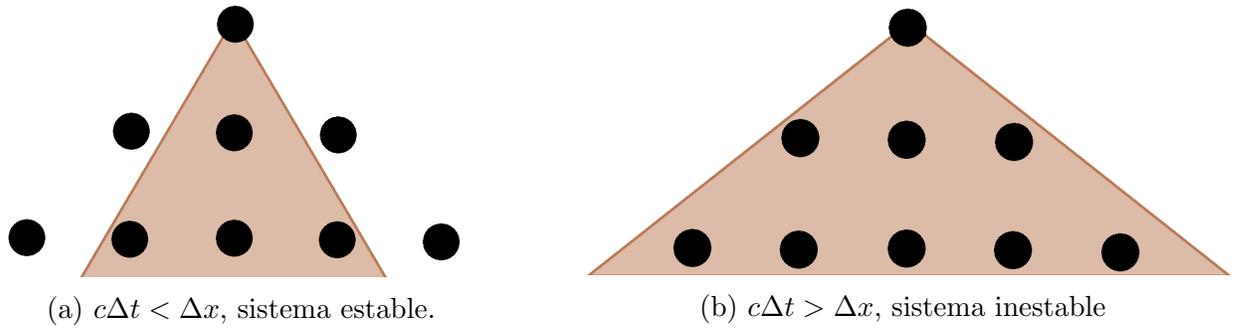


Figura 3.1: Esquema gráfico del planteamiento de la condición de estabilidad CFL.

gramar se ha optado por el esquema de orden cuatro de RK, que con nuestra notación quedaría como:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}_{k_1} &= L(\mathbf{U}^n), \\
 \mathbf{U}_{k_2} &= L\left(\mathbf{U}^n + \frac{1}{2}\mathbf{U}_{k_1}dt\right), \\
 \mathbf{U}_{k_3} &= L\left(\mathbf{U}^n + \frac{1}{2}\mathbf{U}_{k_2}dt\right), \\
 \mathbf{U}_{k_4} &= L(\mathbf{U}^n + \mathbf{U}_{k_3}dt), \\
 \mathbf{U}^{n+1} &= \mathbf{U}^n + \frac{1}{6}dt(\mathbf{U}_{k_1} + 2\mathbf{U}_{k_2} + 2\mathbf{U}_{k_3} + \mathbf{U}_{k_4}).
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Siguiendo este método se puede hacer evolucionar el sistema hasta un tiempo arbitrariamente grande.

Debemos tener en cuenta que el intervalo temporal escogido debe cumplir con la condición de estabilidad de CFL² ya que si la información del sistema se propaga por la malla a mayor velocidad que la capacidad de reacción de ésta el sistema será inestable. Por el contrario, si el dominio numérico es mayor que el dominio físico, el sistema será estable. Esto se muestra en la figura 3.1, donde la región sombreada nos indica la parte de dominio físico; cuando excede a la malla nos encontramos con el sistema inestable. A lo largo del trabajo, nos hemos asegurado de cumplir con este criterio añadiendo un factor menor que uno a la hora de definir el valor de Δt en función de Δx .

²Número de Courant-Friedrichs-Levy.

3.4 Disipación numérica y limitadores de pendiente

Uno de los problemas que conlleva el cálculo numérico es la aparición de “ruido” (i.e., modos de alta frecuencia) en las soluciones obtenidas, producto de los errores en hacer aproximaciones al tratar como discretos campos que son en realidad continuos. Por este motivo se aplica una disipación artificial en todas las ecuaciones de evolución de los distintos campos como se indica en la ecuación (3.1).

El esquema numérico usado es el de Kreiss-Oliger que viene dado por la ecuación:

$$Q_{d,\phi,i} = -\sigma_x(\phi_{i+2} - 4\phi_{i+1} + 6\phi_i - 4\phi_{i-1} + \phi_{i-2}), \quad (3.9)$$

en la que se muestra cómo se evalúa la disipación numérica aplicada al campo ϕ en el punto i de la malla asociada al espacio de soluciones. El parámetro σ_x es el que regula la magnitud de este término y siempre tiene que ser positivo. Vemos que siendo un operador centrado podría presentar problemas en los contornos así que en los puntos en los que no es posible aplicarlo según esta definición impondremos que Q_d tome un valor nulo. Esto se puede hacer ya que esos puntos quedan bien definidos en cualquier sistema usando otros medios; en coordenadas cartesianas tenemos topología de anillo con lo que los extremos de la malla se definen mutuamente, y para esféricas los puntos finales de la malla corresponden a puntos fantasma que se establecen mediante criterios de reflexión de los puntos que los preceden.

Por otro lado, soluciones con crecimientos muy abruptos pueden romper la evolución del código. Por este motivo, se ha implementado el método de *Minmod*³[16] que consiste en un algoritmo de regulador de pendiente. Este método evalúa para cada punto si debe o no aplicarse el criterio de limitación basándose en las diferencias de pendiente entre puntos adyacentes.

³El código de este método se ha visto en la asignatura de Simulaciones Numéricas de Magnetohidrodinámica del curso 2020-2021 en la Universitat de les Illes Balears.

Capítulo 4

Simulaciones numéricas

Con toda la información y herramientas ofrecidas en los capítulos anteriores pasaremos a la parte más práctica del trabajo en la que se muestran los resultados de los códigos de simulación. Ya que en la mayoría de casos se ha seguido la pauta del trabajo realizado en el último capítulo del libro *Introduction to 3+1 numerical relativity* de Alcubierre [13], se usarán algunas gráficas de simulaciones extraídas de éste para verificar el correcto funcionamiento del código desarrollado.

El programa, desarrollado en Python, está diseñado para hacer evolucionar las ecuaciones a través del tiempo, por lo que es crucial determinar el valor del primer paso de manera correcta. En la mayoría de casos este valor se corresponderá con el valor que tome cada campo en las condiciones de vacío (es decir, los valores tomados en las condiciones de contorno radiativas). Sin embargo, en cada sección veremos con más detalle cómo se han definido los datos iniciales para cada simulación.

4.1 Espacio tiempo cartesiano

El primer caso expuesto aquí es el más sencillo posible para el caso que nos ocupa. Los cinco campos involucrados evolucionarán según indican las ecuaciones (2.27)-(2.31) en lo que se conoce como escenario de relatividad de 1+1.

4.1.1 Definición del dato inicial

Como ya hemos comentado, en el vacío todos los campos toman los valores del espacio de Minkowski. Estos valores son: $g_{xx} = \alpha = 1$, y el resto de valores a cero ya que corresponden a derivadas de los anteriores, o en los valores de curvatura que son nulos en un espacio plano.

Sin embargo con tal de no tener la evolución trivial estática que ofrecería el espacio vacío, se

ha introducido una perturbación inicial sobre la función lapso con tal de provocar una reacción, desencadenada por esta inhomogeneidad, que se propague como una onda. Esto debe ser así ya que no hay términos fuente (de materia) que provoquen otra evolución posible.

Modos propios de propagación en coordenadas cartesianas

La “sencillez” de las ecuaciones en coordenadas cartesianas permite hacer un análisis simple del sistema de evolución del cual extraer las combinaciones de campos que forman los modos propios del sistema. Esto brinda la oportunidad de generar estas evoluciones estableciendo valores concretos de los campos a evolucionar.

Contando con un perfil gaussiano h , a modo de prueba empezamos con un dato inicial con el perfil arbitrario sobre el campo lapso, con valor de base¹ el de vacío. El perfil propuesto es de la forma:

$$\alpha = \left(\frac{1 - h'}{1 + h'} \right)^{\sqrt{f}/2}, \quad (4.1)$$

donde el termino f corresponde a la función de *slicing* y h' es la derivada de la función gaussiana. Recordemos que no es necesario que la perturbación generada en el lapso tenga ninguna forma en particular, siempre que ésta cumpla con el requisito de tener como valor de base $\alpha_0 = 1$.

Por otro lado, al escribir las ecuaciones de evolución de forma conservativa a primer orden, es posible hacer un estudio de modos propios de evolución del sistema. Este estudio ofrece tres vectores propios: velocidad negativa, positiva y cero; que podemos escribir como:

$$\omega_0 = D_\alpha/f - D_g/2, \quad \omega_\pm = g^{1/2}K_{xx} \pm D_\alpha/f^{1/2} \quad (4.2)$$

Al disponer de esta información podemos excitarlos a voluntad. La combinación de campos aquí utilizada será la que permite excitar solamente ω_0 y ω_+ , de manera que los perfiles iniciales quedarán definidos por:

$$\begin{aligned} g &= 1 - h'^2 \\ Dg &= -2h'h''/g \\ K_{xx} &= -h''/\sqrt{g}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

¹Con valor de base queremos hacer referencia al valor que toma el campo en las regiones alejadas de la influencia de la perturbación aplicada.

4.1.2 Evolución del pulso en 1+1

Dejamos evolucionar el pulso siguiendo el perfil (4.1) hasta un tiempo suficientemente alto como para certificar que el programa funciona correctamente. En este caso es interesante ver que, como la perturbación inicial tiene una altura muy pequeña, la simulación no precisa de disipación numérica para resolver la solución suavemente. En la figura 4.1 podemos ver cómo la perturbación inicial se separa en dos modos propios que viajan a velocidades de mismo módulo pero de sentidos opuestos y mitad de amplitud. La forma se conserva a lo largo de la evolución. Concluimos pues que se comporta de manera esperada: al no haber términos fuente (como podría ser un campo escalar) los distintos campos propagan la perturbación como si fueran simples ecuaciones de ondas sobre el espacio con métrica plana, esto es, de Minkowski.

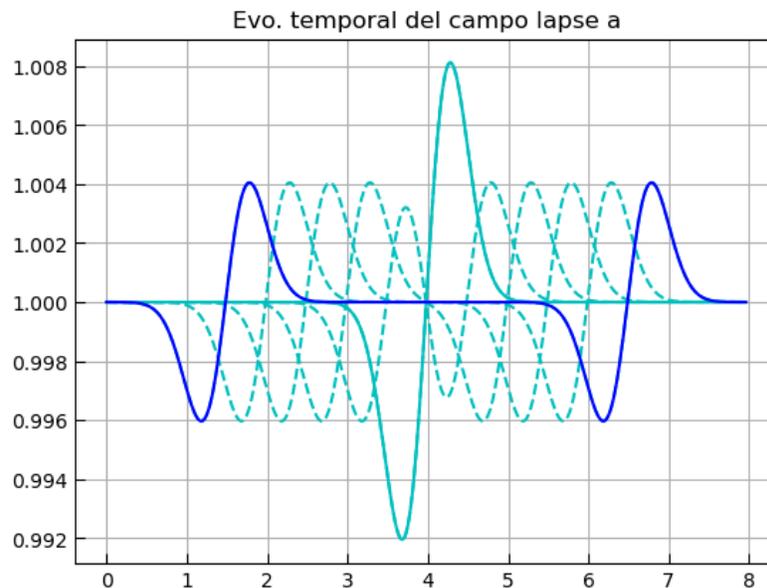


Figura 4.1: Evolución de muestra de la propagación con la forma de la derivada de un pulso gaussiano en la función lapso.

Antes de dejar el espacio cartesiano haremos evolucionar el caso que se corresponde con una combinación de modos propios de propagación del sistema, explicado anteriormente. En la figura 4.2 podemos ver cómo, efectivamente, sólo se excitan el modo derecho y el de velocidad nula. En el gráfico de la función lapso, la perturbación se propaga hacia la derecha, y para la métrica tenemos el mismo comportamiento de propagación más el modo propio que no se propaga, de velocidad cero. En la figura 4.2b podemos ver cómo en el primer paso temporal se inicia la perturbación (línea continua de color cian) y ésta se amplifica quedando estática en la misma posición mientras la componente propia del pulso se propaga hacia la derecha.

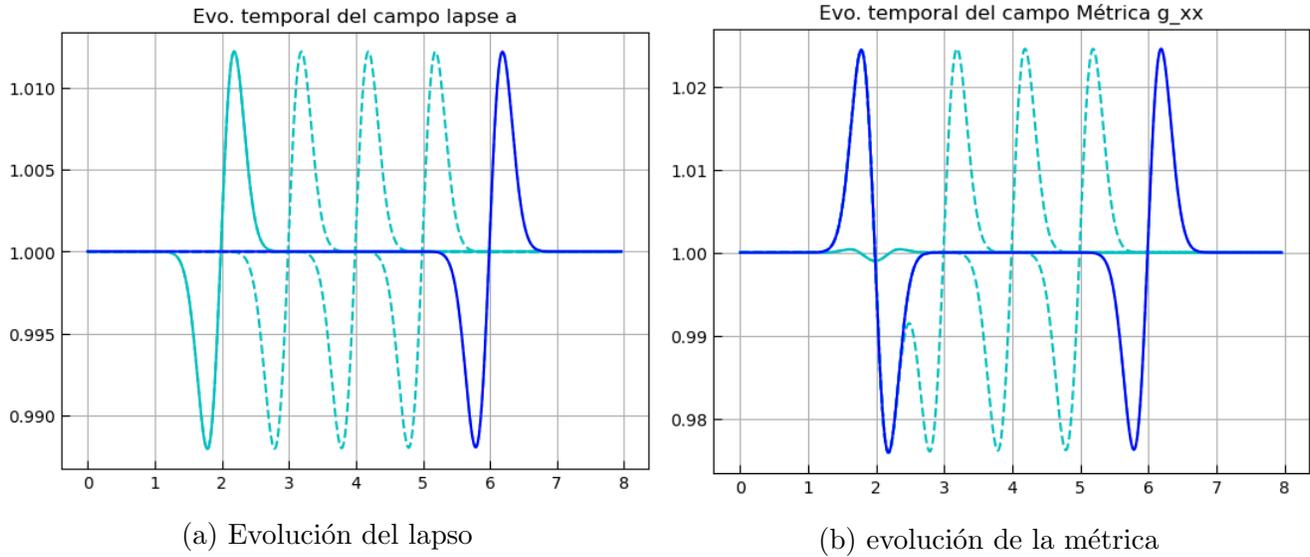


Figura 4.2: Evolución temporal del campo lapso y de la componente g_{xx} de la métrica. En cian el dato inicial, en trazo entrecortado algunos pasos intermedios y en azul oscuro la posición final.

Si observamos el libro de M. Alcubierre veremos los mismos resultados, aunque con distinta escala, tal y como muestra la figura [4.3](#).

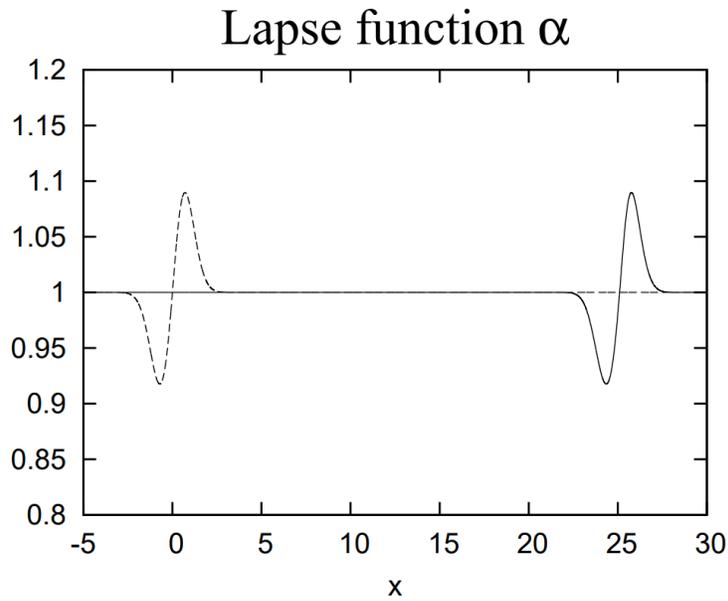


Figura 4.3: Imagen de la figura 10.3 del libro de M. Alcubierre con la evolución del campo lapso excitando el modo de propagación positiva.

4.2 Pulso gaussiano en coordenadas esféricas

La descripción del espacio utilizada a partir de aquí toma un cariz más verosímil, ya que las condiciones de simetría planteadas resultan más ajustadas a las esperadas en un escenario realista; tanto las estrellas como los agujeros negros, en ausencia de rotación, presentan al menos aproximadamente una simetría esférica. Aun así, los términos de materia no se incluirán en el problema hasta el final del capítulo. La evolución del espacio vendrá regulada por las ecuaciones (2.42) – (2.54).

4.2.1 Definición del dato inicial

Igual que para el caso cartesiano, en el vacío todos los campos toman los valores del espacio de Minkowski. Estos son: $A = B = \alpha = 1$, y el resto de campos a cero.

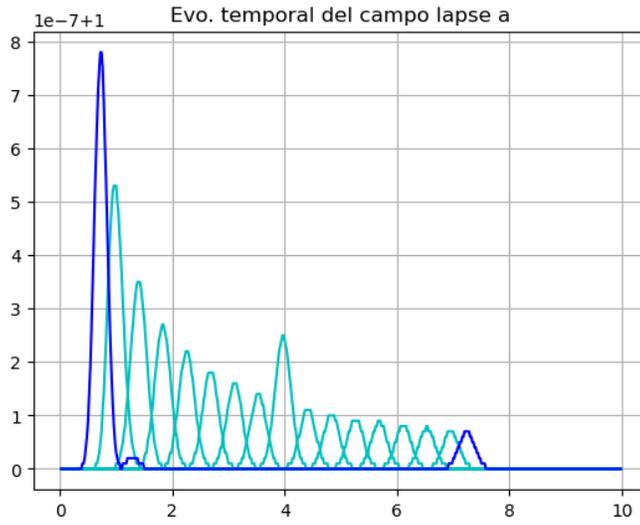
De la misma manera que antes, se ha introducido una perturbación inicial sobre la función lapso. A lo largo de esta sección estaremos trabajando en condiciones de vacío haciendo evolucionar un pulso (de nuevo, a modo de test del programa) sobre dicha función. El comportamiento esperado es de nuevo una evolución equivalente a la ecuación de ondas.

4.2.2 Evolución del pulso

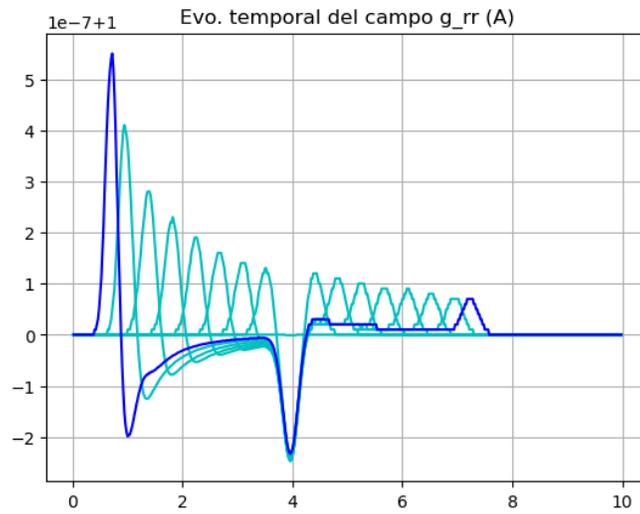
En primer lugar usamos el dato inicial descrito. Igual que para el caso cartesiano, al no tener ningún término fuente, el pulso debe propagarse hacia cada lado como si lo hiciese según una ecuación de ondas.

En este caso, debido a las características del espacio y a la conservación de energía, el pulso que se desplaza hacia el centro (el pico se aproxima al punto $r = 0$) debe ir aumentando su altura a medida que se acerca a éste ya que se está concentrando en un espacio más pequeño a medida que avanza (se reduce su volumen al reducirse el radio). Por el contrario, para el que se aleja, observamos que se va “diluyendo” por el espacio y perdiendo altura. Este fenómeno se aprecia claramente en la figura 4.4. En este caso se ve como si tuviera baja resolución, pero eso es debido principalmente a que la altura del pulso es realmente pequeña (nótese el factor de escala $1e-7$ en el eje de ordenadas) para evitar utilizar términos de disipación numérica.

Es interesante comprobar cómo en la figura 4.4b se puede ver la presencia de un modo propio del sistema con velocidad de propagación cero. Esto es, el pulso generado en medio de los dos que se desplazan, que crece hasta un punto concreto y posteriormente congela su evolución.



(a) Evolución del lapso



(b) evolución de la componente radial de la métrica

Figura 4.4: Evolución temporal del campo lapso y de la componente g_{rr} de la métrica. En cian el dato inicial y algunos pasos intermedios, y en azul oscuro los valores finales.

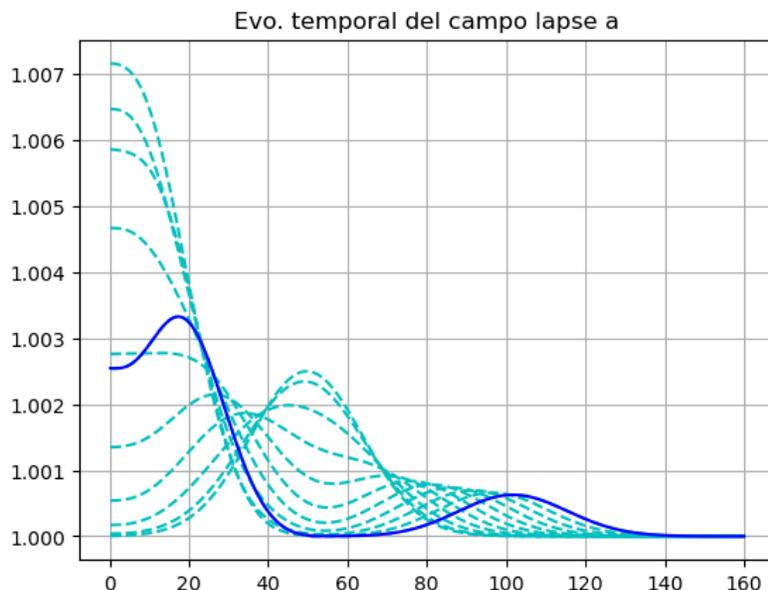


Figura 4.5: Función lapso atravesando el origen de coordenadas partiendo de una perturbación gaussiana sobre ella misma.

Para verificar que en el punto $r = 0$ el programa funcionaba se ha añadido el efecto de un limitador de pendiente, tal y como se ha comentado en el capítulo anterior. En este caso se ha acercado la posición de la perturbación inicial al origen para que se pueda apreciar cada uno de los pulsos que se propagan en direcciones opuestas sin perder de vista cómo influye la presencia del origen. Debemos tener en cuenta que al no tratarse de una situación física la que se está resolviendo, tiene sentido que no se comporte de manera suave usando sólo el efecto de la disipación numérica, por lo que se ha añadido el limitador de pendiente Minmod. Comentado que la simulación cuenta con el efecto de un limitador, vemos que en la figura 4.5 se aprecia cómo el pulso atraviesa el punto $r = 0$ y vuelve hacia el exterior, disminuyendo de nuevo su tamaño.

4.3 Agujero negro de Schwarzschild

Esta sección deja atrás la intención de toma de contacto de la anterior para entrar en un terreno con más riqueza en cuanto a interpretaciones y significado físico. Estos escenarios fueron interesantes para hacer predicciones tanto como para el límite del campo gravitacional débil², como para el caso en el que un cuerpo es lo suficientemente masivo como para colapsar bajo su propio efecto gravitatorio. Ambos casos se pueden describir de igual manera con este modelo de espacio tiempo.

²Por ejemplo, confirmando las predicciones de la Relatividad General en desviación sobre el modelo Newtoniano de las órbitas de planetas, *redshift* gravitacional o efectos de dilatación temporal en satélites.

4.3.1 Definición del dato inicial

Para esta sección haremos uso de las coordenadas isotrópicas, que son las que mantienen la métrica inducida en las hipersuperficies espaciales lo más parecida a la del espacio Euclídeo. Esto permite escribir la métrica espacial como la de Minkowski multiplicada por un factor escalar ψ haciendo el cambio de variable $r = \tilde{r}(1 + M/2\tilde{r})^2$ (nótese que en el límite infinito se acercan arbitrariamente):

$$ds^2 = - \left(\frac{1 - M/2\tilde{r}}{1 + M/2\tilde{r}} \right)^2 dt^2 + \psi^4 (d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega^2). \quad (4.4)$$

En estas coordenadas la métrica será regular en el horizonte de eventos³, ubicado en $\tilde{r} = M/2$. La función escalar que acompaña la métrica espacial se conoce como factor conforme, que es:

$$\psi(r) = 1 + M/2\tilde{r}. \quad (4.5)$$

Usando este factor la métrica espacial queda definida como:

$$dl^2 = \psi^4(\tilde{r})(d\tilde{r}^2 + r^2 d\Omega^2). \quad (4.6)$$

Finalmente identificaremos nuestra coordenada radial con \tilde{r} para aligerar notación, ya que están relacionadas como se ha especificado antes: $r = \tilde{r}\psi(\tilde{r})^2$. Con esto, las componentes radial y angular de la métrica toman los valores de: $A(r, t = t_0) = B(r, t = t_0) = \psi^4(r)$ para el primer instante $t_0 = 0$. El resto de campos, para el tiempo inicial, parten de los valores que toman en condiciones de vacío.

4.3.2 Evolución del agujero negro de Schwarzschild

La evolución de los campos viene dada por las ecuaciones (2.42)–(2.54). Para el factor conforme el valor de M se ha tomado unidad por comodidad a la hora de manipular números⁴.

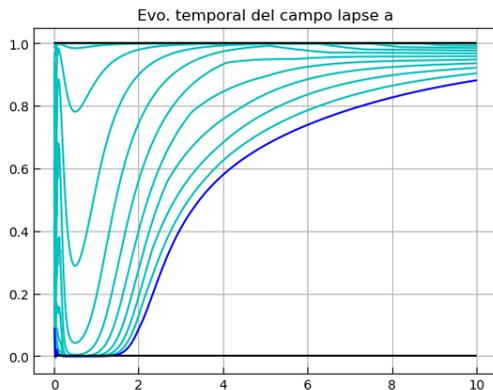
En este caso, será necesario definir de nuevo una función de *slicing* adecuada. En el libro de M. Alcubierre se exponen un par de propuestas para definir el lapso, la de *maximal slicing* y la de *1+log slicing*. En este caso contaremos con la función de *slicing* 1+log, que consiste en describir el factor $f(\alpha)$ como $f = 2/\alpha$ en la ecuación (2.42) y en su derivada, haciendo que el lapso evolucione como un campo más.

³Ahora será singular en $\tilde{r} = 0$, pero deshaciendo el cambio de variable vemos que se corresponde con $r = \infty$, por lo que no se trata de la singularidad física que hay en $r = 0$. Esta singularidad es el resultado de haber compactificado en la región $\tilde{r} \in [0, M/2]$ todo el otro lado del puente de Einstein-Rosen.

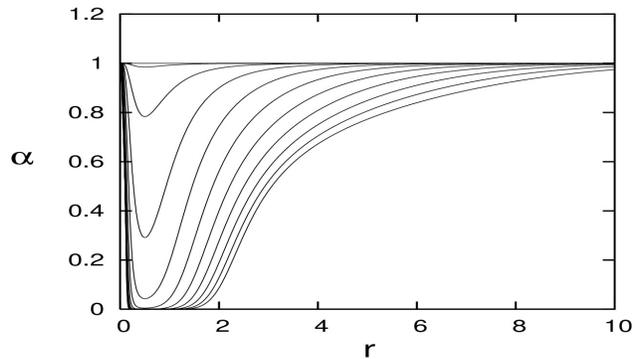
⁴En unidades geométricas el metro de masa equivale a un valor de 1.35×10^{30} gramos, aproximadamente unas 200 veces la masa terrestre.

Veamos los resultados obtenidos en nuestra simulación. Se ha usado una resolución espacial de $\Delta x = 0.01$ en un rango de diez unidades de longitud radial y $\Delta t = \Delta x/2$, que son las resoluciones utilizadas en el libro. El operador derivada es de cuarto orden, igual que el del integrador de Runge-Kutta. A continuación compararemos nuestros resultados de la figura 4.6a con los proporcionados por Alcubierre en 4.6b.

En ambos casos podemos ver cómo la función de lapso cae rápidamente en valor hasta tomar cero alrededor de la singularidad. Este es el comportamiento esperado, que en la literatura se lo conoce como “colapso del lapso”. Es un fenómeno deseable ya que las condiciones de *slicing* no permiten cambios sobre los elementos de volumen, y la única manera de que esto ocurra es congelándolos deteniendo su evolución temporal. Observando las ecuaciones de evolución podemos ver que todas cuentan con el factor α en ellas, así que su anulación en ese entorno indica que ningún otro campo evolucionará en el tiempo.



(a) Evolución del lapso.



(b) evolución del lapso, ejemplo de Alcubierre.

Figura 4.6: Evolución temporal del lapso obtenido y resultados expuestos en la figura 10.11 del libro de de M. Alcubierre. En cian el dato inicial y en azul oscuro el perfil final.

Observamos que en nuestro caso 4.6a al seguir las mismas directrices para la ventana de cálculo que Alcubierre perdemos el hecho de que el lapso en $r = 0$ se mantenga en el valor inicial, algo que si se da en su ejemplo; además de una reducción significativa del valor del campo en el borde exterior. Esto puede deberse a algún cambio en los operadores utilizados, o en el método de integración temporal⁵. Quizás se deba también a los efectos de la disipación numérica ya que puede ir menguando poco a poco el valor de α a medida que pase el tiempo, pues tiene un valor muy

⁵En Alcubierre, el orden de los operadores de derivación no está especificado y se usa un integrador de Crank-Nicholson iterativo de tres pasos en vez de un integrador de RK.

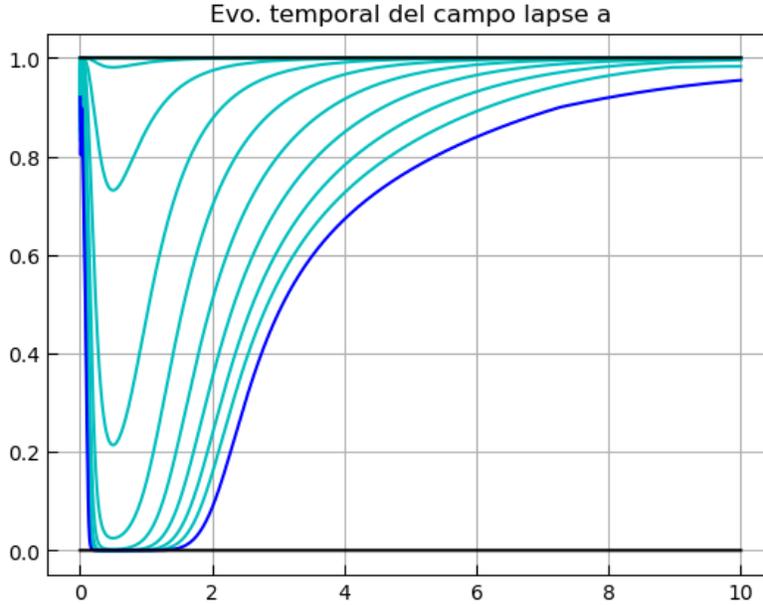


Figura 4.7: Simulación de agujero negro con definición espacial aumentada a $\Delta x = 0.0025$.

pronunciado de pendiente.

Buscando unos resultados más parecidos a los del libro, hemos reducido un orden el operador numérico de la derivada, pero los resultados han empeorado. Sin embargo, aumentando la resolución espacial podemos obtener unos bastante más parecidos tal y como se muestra en la figura 4.7. En este caso el valor del lapso en $r = 0$ se mantiene en 1 durante un largo tiempo, y al finalizar la simulación el valor queda significativamente cerca. Además, el descenso del valor del lapso en las regiones intermedias de la ventana de cálculo se produce de una manera mucho más suave que en comparación con el sistema con los parámetros de referencia del libro 4.6a. Computacionalmente, esto ha significado un aumento del tiempo de cálculo nada despreciable pues éste escala cuadráticamente con la resolución al tratarse de un caso “bidimensional” (hemos reducido Δx y Δt a un cuarto de los valores usados en el caso de Alcubierre).

Si en lugar de evolucionar el sistema hasta $t = 10$ lo hacemos hasta $t = 30$ podemos apreciar cómo la evolución de la función lapso se va estancando tal y como muestra la figura 4.8 en la que se muestra el estado que tenía el lapso cada $t = 1$ unidad. Apreciemos cómo a partir de cierto momento los cambios en el campo se ralentizan hasta el punto de mantenerse prácticamente igual en el tiempo, pues los distintos perfiles prácticamente se superponen entre si. Otra observación interesante es que el valor de α en $r = 0$ ya no se ha mantenido en uno; esto puede deberse a efectos de la disipación incluida en el esquema numérico. No tiene mayor importancia ya que

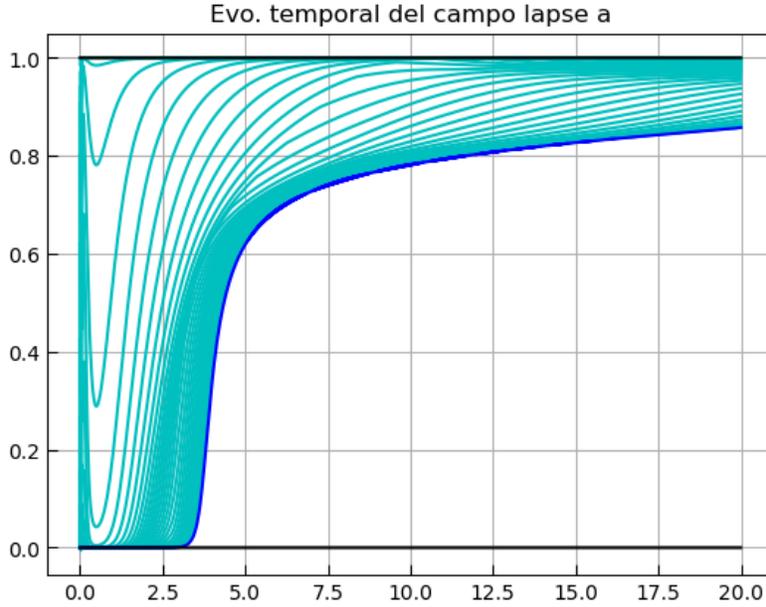


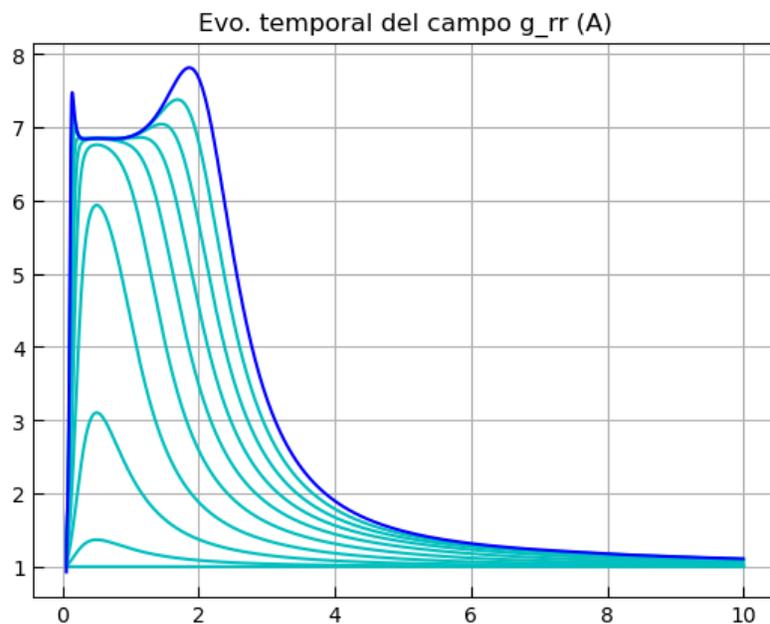
Figura 4.8: Evolución del mismo sistema que el mostrado por Alcubierre ampliando el tiempo de simulación hasta $t = 30$.

la información que se pudiera generar en ese entorno no alcanzará salir del origen, puesto que la evolución temporal de cualquier campo en la región intermedia es imposible mientras el lapso tenga un valor nulo. Lo que sí que es interesante comentar es el hecho de que la región en la que $\alpha = 0$ parece crecer con el tiempo. Esto puede ser efecto de que los observadores de las líneas normales se van viendo absorbidos por el agujero negro

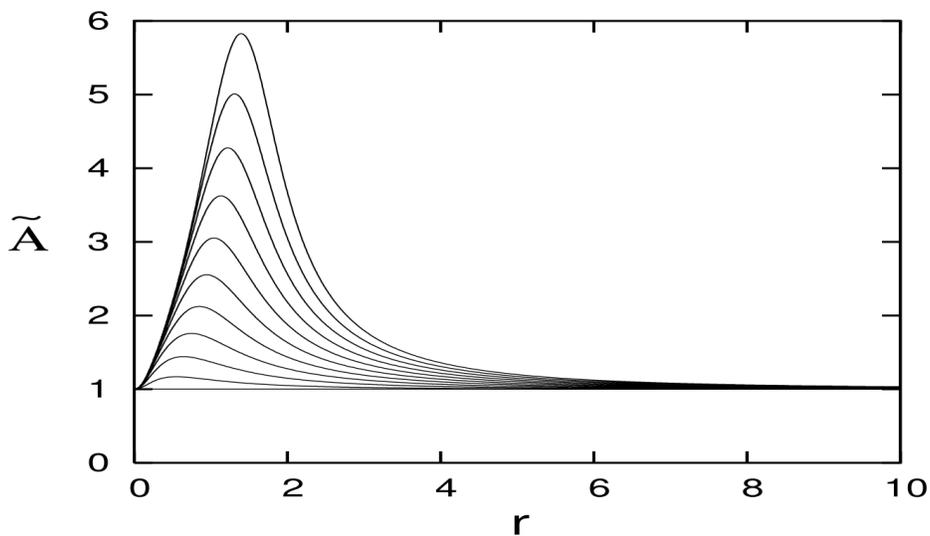
También sería interesante comprobar cómo han evolucionado las funciones de la métrica, aunque no podamos seguir directamente la referencia de Alcubierre ya que en el libro los cálculos se hacen con otras coordenadas y en la condición de *slicing* de *maximal slicing*, en vez del $1+\log$ que nosotros utilizamos en el código. Aún así, podemos comparar las métricas utilizando \tilde{A} , definida como:

$$\tilde{A} := A/\psi^4 = g_{rr}/\psi^4. \quad (4.7)$$

Con esta variable podemos hacer la pertinente comparativa entre el libro y nuestro programa. Recordemos que los resultados extraídos del libro están en un escenario distinto debido a la condición de *slicing* que elige Alcubierre. En la comparativa de la figura [4.9](#) debemos notar en primer lugar que la forma es distinta de una a otra. Esta diferencia se da sobretodo en la parte más cercana a la región de $r = 0$ ya que es donde nuestras simulaciones y las de Alcubierre difieren, al usar nosotros la condición de *slicing* $1+\log$.



(a) Evolución de la métrica radial.



(b) Evolución de la métrica radial, figura de Alcubierre.

Figura 4.9: Evolución temporal de la métrica radial obtenida y resultados expuestos en la figura 10.8 del libro de de M. Alcubierre. En cian el dato inicial y los pasos intermedios y en azul oscuro el perfil final.

Observando estas figuras vemos cómo la métrica radial crece en la región cercana al horizonte del agujero negro. Este fenómeno es conocido como *slice stretching*. Lo que ocurre es una combinación de efectos; el colapso del lapso en la región más central congela el tiempo mientras en el resto de puntos sigue evolucionando, con lo que el resultado es que las hipersuperficies se estiran. Por otro lado, tenemos que nuestras coordenadas están ligadas a los observadores, así pues cuando éstos van cayendo con distintas aceleraciones según su posición respecto al origen la distancia entre ellos aumentará con el tiempo. Aún así, no debemos pasar por alto el hecho más importante: la evolución para radios mayores al horizonte de eventos es muy similar, variando en un factor de altura principalmente. Los perfiles que adopta la métrica para radios mayores a cierto valor de umbral son muy similares.

Por último, y para cerrar la sección del agujero negro, hemos intentado implementar el *maximal slicing* en el código. Para ello α y D_α ya no serán campos independientes que evolucionen con una derivada temporal; pasan a tener el papel de cantidades que se definen a partir de los demás campos siguiendo la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{A} \left[\partial_r^2 \alpha + \left(2/r + D_B + \frac{D_A}{2} \right) \partial_r \alpha \right] = K_A^2 + 2K_B^2. \quad (4.8)$$

Ésta debe integrarse a cada paso que se dé con tal de obtener los valores de α y de D_α ya que son necesarios para calcular cómo evolucionan los demás campos, pues dependen de estos parámetros. La integral se ha hecho imponiendo que el valor de la derivada en el origen tome valor nulo, esto es: $\partial_r \alpha|_{r=0} = 0$, y que el valor del lapso en el infinito debe seguir la ecuación de la condición de contorno radiativa (2.64), es decir: $\alpha|_{r=\infty} = 1 - r_\infty \partial_r \alpha|_{r=\infty}$

Sin embargo la aplicación de éste método no ha resultado satisfactoria ya que la evolución brindada por el programa, además de no coincidir con las observadas en la literatura, acaba por mostrar choques y valores negativos del lapso como muestra la figura 4.10. Por estos motivos se concentraron esfuerzos con la condición de *slicing* de Bona-Masso a lo largo del proyecto, ya que no presentó tantos problemas y parecía más sencilla desde el principio.

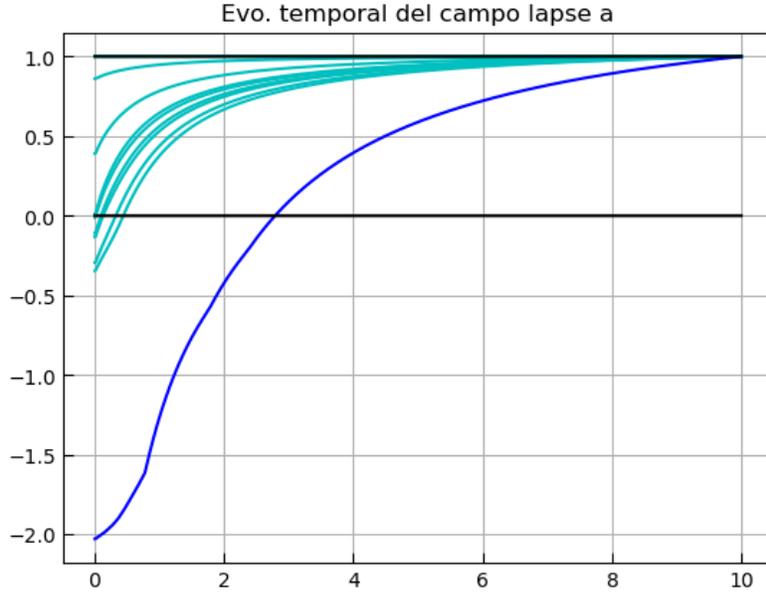


Figura 4.10: Resultados obtenidos al intentar hacer evolucionar el agujero negro de Schwarzschild con la condición de *maximal slicing*.

4.4 Campo escalar auto-gravitante

Finalmente, el campo escalar requiere de la definición de más campos a evolucionar, ya que cuenta con los campos que contienen la información sobre la distribución de materia y densidades de momento. Seguimos un planteamiento parecido a la evolución de los campos en condiciones de vacío, sin embargo el pulso se impone sobre la función del campo ϕ y no en la función lapso.

4.4.1 Definición del dato inicial

Para el campo escalar, el dato inicial utilizado no es un pulso sin más. Se trata de una perturbación que sigue la ecuación:

$$\phi = ar^2 e^{-(r-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad (4.9)$$

con a el parámetro de amplitud de la perturbación, μ y σ la media y desviación del pulso respectivamente. La altura de éste será del orden de $a \sim 0.001$, y además cuenta con el término cuadrático del radio para hacer aun más pequeño el efecto en el origen. El campo Ψ se define como la derivada radial del anterior. Después tomaremos $\Pi(t=0) = 0$ ya que queremos que el pulso inicial se separe en dos separados que viajen uno en el sentido interior y el otro en el exterior, radialmente hablando.

Con $\Pi = 0$ tenemos que $j_A = 0$, así que la ligadura de momento se puede satisfacer con $K_A = K_B = 0$. Con tal de cumplir con la ligadura Hamiltoniana podemos tomar $B = 1$, de

modo que la ecuación se reduce a:

$$\partial_r A = A \left(\frac{1}{r}(1 - A) + 8\pi r A \rho \right). \quad (4.10)$$

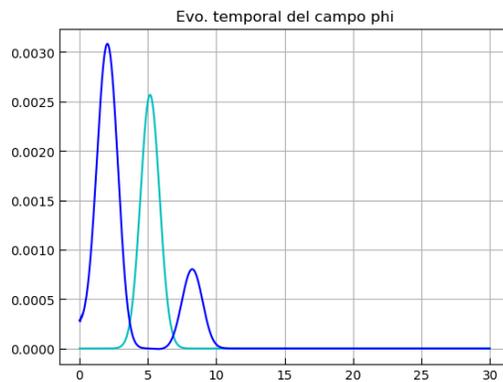
Para resolver esta ecuación usaremos que para el dato inicial tenemos $\rho = \Psi^2/2A$. En la integral se usa un esquema de Runge-Kutta de cuarto orden con la condición de contorno $A(r = 0) = 1$.

4.4.2 Evolución del campo escalar

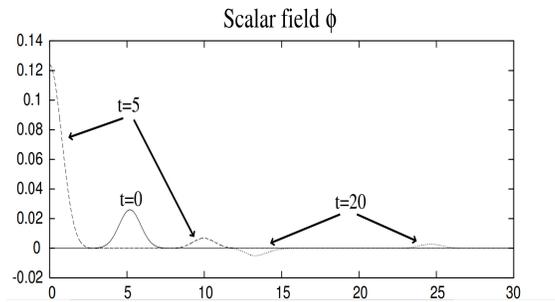
Este último escenario, el más complejo a nivel computacional, es el que involucra la evolución teniendo en cuenta los componentes del tensor impulso-energía. Estas cantidades no evolucionan como un campo más, sino que se determinan en función de los otros tal y como se indica en las ecuaciones (2.50)–(2.63), por lo que en el conjunto de variables dinámicas sólo debemos incorporar a la evolución los tres campos ϕ , Ψ , Π . La condición de *slicing* es la misma que la utilizada en el caso del agujero negro, que toma $f(\alpha) = 2/\alpha$.

En un principio, se ha optado por hacer la evolución de este sistema con el mismo mecanismo que para los otros cálculos realizados a lo largo del trabajo. Sin embargo nos hemos encontrado con que el programa diseñado es incapaz de hacerlo evolucionar ya que constantemente se producen choques de manera violenta e imprevisible. Se ha probado de todo intentando evitarlos: intervención de métodos limitadores de pendiente, aumento del factor de disipación, disipación localizada en los campos que entraban antes en regímenes muy abruptos, modificaciones en las condiciones iniciales, aumento y disminución de la resolución espacial y temporal, reducción del orden de los operadores de derivada (para hacerlos menos sensibles a cambios abruptos), etc. Por desgracia, ninguno ha sido capaz de hacer evolucionar el ejemplo del campo escalar que propone Alcubierre, centrado en $\mu = 5$. Ninguno de todos estos recursos (y combinaciones de ellos) ha podido impedir que los campos en el origen se amplifiquen tanto que a la mínima que la cola del pulso interno tiene algún efecto sobre $r = 0$ esto genere una reacción en cadena en todos los campos que impida su evolución. En la figura 4.11a podemos ver cómo el programa se detiene cuando el pulso llega al origen. El resto de campos ya presentaban un comportamiento hostil en ese entorno antes de que el pulso llegase.

En un intento de conseguir mejores resultados, hemos ubicado el pulso inicial más cerca del origen de coordenadas. El motivo es que, en las simulaciones que se pretendían usar como ejemplo comparativo, la simulación es altamente sensible a las amplitudes de este campo llegando al punto en que el valor del parámetro de amplitud de $a = 0.001$ atraviesa el origen cuando llega y una de $a = 0.002$ es capaz de hacer colapsar la función lapso, dando a entender que se genera un agujero



(a) Evolución del campo escalar proporcionada por el programa diseñado.



(b) Evolución del campo escalar del libro de Alcubierre

Figura 4.11: Valores del campo escalar: a la izquierda evolucionado hasta $t = 3$, a la derecha los resultados expuestos en la figura 10.12 del libro de de M. Alcubierre, evolución hasta $t = 20$.

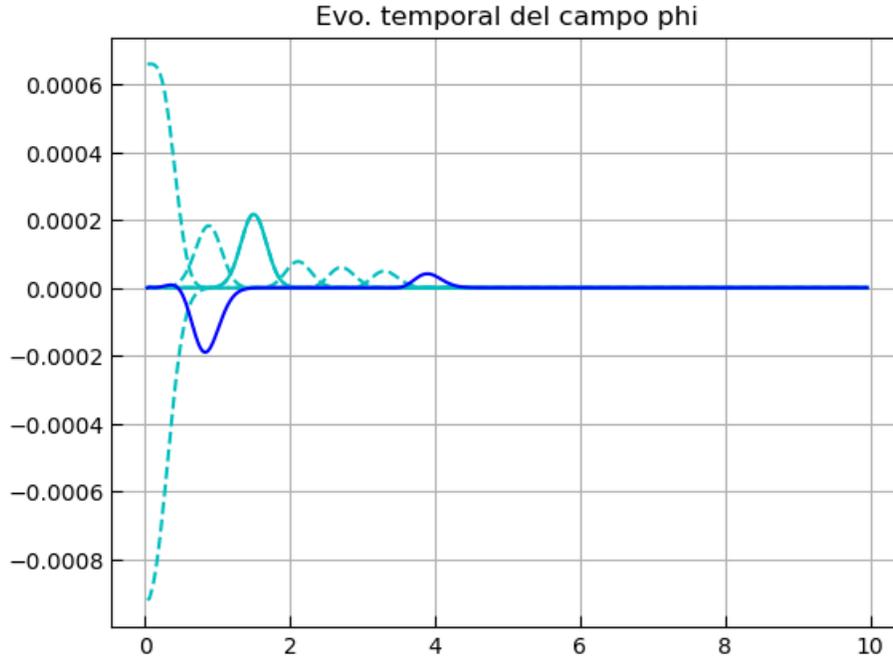


Figura 4.12: Simulación del campo escalar con resultados más satisfactorios.

negro. Por este motivo se ha elegido una ubicación más cercana, para contar también con el término r^2 para reducir amplitud inicial. También hemos reducido la resolución haciendo $\Delta x = 0.03$ y se ha usado un operador de derivada centrada de segundo orden. Con esto se busca retrasar la aparición de choques al tener un operador menos sensible a los cambios abruptos. También añadimos el efecto de limitadores de pendiente *Minmod* en los campos que antes empiezan a mostrar un mal comportamiento. El resultado se puede observar en la figura [4.12](#).

Con estas condiciones de partida, vemos que el programa parece funcionar correctamente, pero sencillamente no es capaz de hacer frente a las oscilaciones que sacuden el resto de campos. Realmente, aún que todos presenten choques alrededor del origen, los primeros en mostrar problemas son las componentes de la curvatura extrínseca.

Otro problema al que se enfrenta el desarrollo del código es la evolución del lapso, como muestra la figura [4.13](#). Pese a no haber tocado su ecuación de evolución en ningún momento (no era algo requerido, pues no intervienen términos de masa en su derivada temporal) éste evoluciona de una manera inusual e inesperada: su valor crece en el tiempo, en lugar de disminuir. Al haber presencia de masa o energía recordemos que el efecto relativista que esto conlleva es una dilatación temporal;

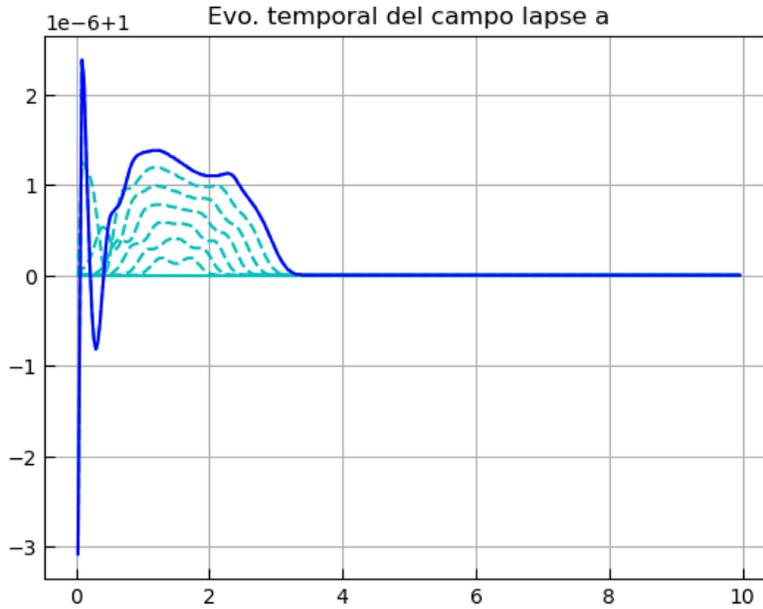


Figura 4.13: Evolución del lapso de la simulación del campo escalar. Se muestra solamente la mitad de la secuencia ya que a partir de entonces la magnitud del campo en el origen reescala el gráfico y no se puede apreciar nada.

sin embargo el lapso aumenta, haciendo que el tiempo entre hipersuperficies pase más rápido⁶ que en las regiones donde se supone que hay espacio vacío. En definitiva, lo que indica esta figura es que hay algún problema en la evolución además de los choques que se puedan producir; y de hecho quizás no sean problemas independientes. El inconveniente es que no se ha encontrado el origen de ninguno de estos fenómenos. Por último, y como último recurso, se intentó implementar también aquí una evolución del sistema bajo las condiciones de *maximal slicing*. El resultado no es distinto al del intento con el agujero negro; el programa no sólo no funciona como debería, sino que presenta choques. Por ese motivo los intentos con esta condición se dejaron de lado.

⁶Recordemos que la máxima dilatación temporal sucede cuando colapsa el lapso a cero, como pasaba en el caso del agujero negro de Schwarzschild

Capítulo 5

Conclusiones

A lo largo del trabajo realizado se ha conseguido calcular correctamente la solución numérica de las ecuaciones de Einstein en dos sistemas concretos; un espacio unidimensional cartesiano con topología de anillo y un espacio tridimensional bajo simetría esférica. El programa ha seguido una evolución creciente en complejidad, partiendo desde el sistema más sencillo posible hasta la evolución de un campo escalar auto-gravitante en simetría esférica. Esta implementación progresiva es lo que nos ha permitido ir haciendo arreglos sobre el código a medida que la dificultad en la descripción del espacio-tiempo y de las ecuaciones a resolver se incrementaba.

Los resultados obtenidos han sido los esperados en los casos más sencillos y en la implementación de la geometría de Schwarzschild para el agujero negro, pero no ha sido posible realizar satisfactoriamente simulaciones en las que interviniera el campo escalar. La causa de los problemas observados parece deberse a un error en el código de evolución, ya que la función lapso evoluciona de una forma que no es natural. Al contrario de lo que cabría esperar, ésta crece en los puntos con mayor presencia de campo escalar. Sin embargo ha resultado imposible identificar el origen del fallo. Por otro lado, la aparición de violentas oscilaciones en el origen de coordenadas imposibilita la evolución para tiempos demasiado grandes. Sólo se ha podido hacer evolucionar el programa por medio de estrategias que suavicen estos choques y aún así las soluciones obtenidas han sido inestables. El hecho de haber intentado la implementación del *maximal slicing* en un sistema que probablemente tenía un fallo ha supuesto un retraso considerable. Habría sido mucho mejor empezar a probarlo en un escenario en el que tuviéramos más control, como el del agujero negro puesto que ya sabíamos que ahí las ecuaciones sí funcionaban, o sobre el caso 1+1 en cartesianas que era el más simple de todos.

Visto con perspectiva quizás se han invertido mucho tiempo y esfuerzos en poner “parches” al código del campo escalar cuando ya se intuía que los problemas de evolución no tenían pinta de resolverse. Es posible que si en lugar de buscar el valor óptimo de los parámetros de disipación, resolución de la malla, o del orden de la derivada, se hubiera dedicado ese tiempo en corregir la implementación del código resolviendo las ecuaciones bajo la condición de *maximal slicing* lo hubiésemos logrado, y las conclusiones serían otras. La estrategia de desarrollar un programa sencillo que ir ampliando según lo requieran las necesidades del cálculo funciona muy bien para la primera toma de contacto, pero una vez se tiene el problema madurado puede ser conveniente considerar replantear el código cuando el error persiste.

Finalmente, en cuanto al resto de resultados cabe decir que sí que han sido satisfactorios en un mayor grado. Las simulaciones se pueden seguir hasta tiempos arbitrariamente altos y la variación de parámetros no supone ningún inconveniente (dentro de unos límites sensatos y siguiendo los criterios de estabilidad). Además, en los casos de los campos cuyos resultados podemos comparar con los encontrados en la literatura muestran comportamientos similares, cuando no iguales.

Sin embargo no debemos perder de vista que la evolución del escenario del agujero negro para el caso $1+\log$ está “blindada” respecto a lo que pueda pasar en los puntos cercanos a cero. Esto quiere decir que si también hubiese habido problemas de evolución en ese entorno (como los que se han dado en el caso del campo escalar) no se hubiesen percibido como algo dramático ya que el campo lapso colapsa en la región implicada. Pero cabe la posibilidad de que por ese motivo la evolución con las condiciones de *maximal slicing* tampoco haya sido posible para el caso de Schwarzschild, y entonces el problema no estaría en la implementación de las integrales. Para salir de dudas habría sido conveniente aplicarlo sobre el caso más sencillo, el problema $1+1$ en coordenadas cartesianas.

En cualquier caso, se ha ganado experiencia a la hora de escribir un código de evolución de sistemas hiperbólicos empezando desde cero. Este conocimiento es aplicable a otros problemas, y lo suficientemente general para aplicarlo sobre otros campos, ya que encontrar los fallos de evolución que hayamos podido cometer en este programa es una cuestión de tiempo.

Referencias

- [1] B.P. Abbott et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116:061102, Feb 2016.
- [2] Tanja Hinderer, Samaya Nissanke, Francois Foucart, Kenta Hotokezaka, Trevor Vincent, Mansi Kasliwal, Patricia Schmidt, Andrew R. Williamson, David A. Nichols, Matthew D. Duez, and et al. Distinguishing the nature of comparable-mass neutron star binary systems with multimessenger observations: Gw170817 case study. *Physical Review D*, 100(6), Sep 2019.
- [3] Richard Brito, Vitor Cardoso, Carlos A.R. Herdeiro, and Eugen Radu. Proca stars: Gravitating bose–einstein condensates of massive spin 1 particles. *Physics Letters B*, 752:291–295, Jan 2016.
- [4] R. Sharma, S. Karmakar, and S. Mukherjee. Bosen star and dark matter, 2008.
- [5] Davide Guerra, Caio F.B. Macedo, and Paolo Pani. Axion boson stars. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2019(09):061–061, Sep 2019.
- [6] N. Sanchis-Gual, F. Di Giovanni, M. Zilhão, C. Herdeiro, P. Cerdá-Durán, J.A. Font, and E. Radu. Nonlinear dynamics of spinning bosonic stars: Formation and stability. *Physical Review Letters*, 123(22), Nov 2019.
- [7] Steven L. Liebling and Carlos Palenzuela. Dynamical boson stars. *Living Rev. Relativity*, (15), 2012; Online article: cited 2021.
- [8] Carlos Palenzuela, Paolo Pani, Miguel Bezares, Vitor Cardoso, Luis Lehner, and Steven Liebling. Gravitational wave signatures of highly compact boson star binaries. *Phys. Rev. D*, 96:104058, Nov 2017.
- [9] F H Vincent, Z Meliani, P Grandclément, E Gourgoulhon, and O Straub. Imaging a boson star at the galactic center. *Classical and Quantum Gravity*, 33(10):105015, apr 2016.

- [10] Ye-Fei Yuan, Ramesh Narayan, and Martin J. Rees. Constraining alternate models of black holes: Type i x-ray bursts on accreting fermion-fermion and boson-fermion stars. *The Astrophysical Journal*, 606(2):1112–1124, may 2004.
- [11] Michael Kesden, Jonathan Gair, and Marc Kamionkowski. Gravitational-wave signature of an inspiral into a supermassive horizonless object. *Phys. Rev. D*, 71:044015, Feb 2005.
- [12] Juan Calderón Bustillo, Nicolas Sanchis-Gual, Alejandro Torres-Forné, José A. Font, Avi Vajpeyi, Rory Smith, Carlos Herdeiro, Eugen Radu, and Samson H.W. Leong. Gw190521 as a merger of proca stars: A potential new vector boson of 8.7×10^{13} ev. *Physical Review Letters*, 126(8), Feb 2021.
- [13] Miguel Alcubierre. *Introduction to 3+1 numerical relativity*. International series of monographs on physics. Oxford Univ. Press, Oxford, 2008.
- [14] Miguel Alcubierre. Hyperbolic slicings of spacetime: singularity avoidance and gauge shocks. *Classical and Quantum Gravity*, 20(4):607–623, Jan 2003.
- [15] Carlos Palenzuela, Borja Miñano, Daniele Viganò, Antoni Arbona, Carles Bona-Casas, Andreu Rigo, Miguel Bezares, Carles Bona, and Joan Massó. A simflowny-based finite-difference code for high-performance computing in numerical relativity. *Classical and Quantum Gravity*, 35(18):185007, Aug 2018.
- [16] Ling Zou. Understand slope limiter – graphically, 2021.