



Universitat
de les Illes Balears

TRABAJO DE FIN DE GRADO

EL EFECTO DE LAS LENTES GRAVITACIONALES SOBRE LAS ONDAS GRAVITACIONALES - IMÁGENES DUPLICADAS

Ángel Garrón Fernández-Pacheco

Grado de Física

Facultad de ciencias

Año académico 2021-22

EL EFECTO DE LAS LENTES GRAVITACIONALES SOBRE LAS ONDAS GRAVITACIONALES - IMÁGENES DUPLICADAS

Ángel Garrón Fernández-Pacheco

Trabajo de Fin de Grado

Facultad de ciencias

Universidad de las Islas Baleares

Año académico 2021-22

Palabras clave del trabajo:

Onda gravitacional, lente gravitacional, inferencia bayesiana

Nombre del tutor: David Benjamin Keitel

Se autoriza la Universidad a incluir este trabajo en el Repositorio Institucional para su consulta en acceso abierto y difusión en línea, con fines exclusivamente académicos y de investigación

Autor/a		Tutor/a	
Sí	No	Sí	No
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Resumen

Desde la primera detección de una señal de onda gravitacional en el año 2015 por los detectores LIGO Hanford y LIGO Louisiana [1], se ha abierto una fascinante línea de investigación en la astronomía, que nos brinda la posibilidad de obtener información del universo mediante señales de naturaleza diferente a la electromagnética. Debido a los grandes esfuerzos para mejorar la sensibilidad de los detectores, se prevé que en los próximos años crecerá enormemente el número de detecciones de ondas gravitacionales, con el comienzo del cuarto periodo de observación O4, que llevarán a cabo los detectores LIGO, Virgo y KAGRA en el 2023.

La teoría de la relatividad general predice que las ondas electromagnéticas son desviadas al pasar cerca de un objeto masivo, un fenómeno llamado lente gravitacional o, en inglés, lensing, que ya ha sido observado en múltiples ocasiones y utilizado para distintos estudios en astronomía [2]. Algo menos estudiado, debido a su menor disponibilidad, es la desviación de las ondas gravitacionales al pasar cerca de un objeto masivo, aunque la teoría de la relatividad general también predice que esto debería suceder.

Para determinar si una onda gravitacional ha sufrido lensing, la estadística bayesiana permite comparar las probabilidades de que dos hipótesis sean ciertas: la hipótesis de que se ha producido lensing y la de que no se ha producido [3]. Este proyecto se centra en estudiar el factor de Bayes encontrado para varios pares de señales que podrían provenir del mismo evento tras pasar cerca de una lente gravitacional, comprobando la robustez de los métodos utilizados para obtener este factor. Para estos cálculos se utilizarán las distribuciones de probabilidad a posteriori calculadas con varias formas de onda disponibles. Además, se generarán distribuciones de probabilidad a posteriori para dos eventos utilizando tres formas de onda. Para ello se recurrirá al algoritmo `parallel nested sampling`.

Resum

Des de la primera detecció d'un senyal d'ona gravitacional l'any 2015 pels detectors LIGO Hanford i LIGO Louisiana [1], s'ha obert una línia de recerca fascinant a l'astronomia, que ens brinda la possibilitat d'obtenir informació de l'univers mitjançant senyals de naturalesa diferent a l'electromagnètica. A causa dels grans esforços per millorar la sensibilitat dels detectors, es preveu que en els propers anys creixerà enormement el nombre de deteccions d'ones gravitacionals, amb el començament del quart període d'observació O4, que duran a terme els detectors LIGO, Virgo i KAGRA el 2023.

La teoria de la relativitat general prediu que les ones electromagnètiques són desviades en passar a prop d'un objecte massiu, un fenomen anomenat lensing, que ja ha estat observat en múltiples ocasions i utilitzat per a diferents estudis a l'astronomia [2]. Una mica menys estudiat, a causa de la seva menor disponibilitat, és la desviació de les ones gravitacionals en passar a prop d'un objecte massiu, encara que la teoria de la relativitat general també prediu que això hauria de passar.

Per determinar si un senyal d'ona gravitacional ha patit lensing, l'estadística bayesiana permet comparar les probabilitats que dues hipòtesis siguin certes: la hipòtesi que s'ha produït lensing i que no s'ha produït [3]. Aquest projecte se centra a estudiar el factor de Bayes trobat per a diferents parells de senyals que podrien provenir del mateix esdeveniment després de passar a prop d'una lent gravitacional, comprovant la robustesa dels mètodes utilitzats per obtenir aquest factor. Per a aquests càlculs es faran servir les distribucions de probabilitat a posteriori calculades amb diverses formes d'ona disponibles. A més, es generaran distribucions de probabilitat a posteriori per a dos esdeveniments fent servir tres formes d'ona. Per això es recorrerà a l'algorisme `parallel nested sampling`.

Summary

Since the first detection of a gravitational wave signal in 2015 by the LIGO Hanford and LIGO Louisiana detectors [1], a fascinating line of research has been opened in astronomy, which gives us the possibility of obtaining information about the universe through signals of a different nature than the electromagnetic. Due to the great efforts to improve the sensitivity of the detectors, it is expected that in the coming years the number of gravitational wave detections will grow enormously, with the beginning of the fourth observation period O4, which is expected to be carried out by the LIGO, Virgo and KAGRA in 2023.

The theory of general relativity predicts that electromagnetic waves are deflected when passing near a massive object, a phenomenon called lensing, which has already been observed on many occasions and used for various studies in astronomy [2]. Something less studied due to its lower availability is the deflection of gravitational waves when passing close to a massive object, although the theory of general relativity also predicts that this should happen.

To determine whether a gravitational wave signal has been lensed, Bayesian statistics allow us to compare the probabilities that two hypotheses are true: the hypothesis that lensing has occurred and the hypothesis that it has not [3]. This project focuses on studying the Bayes factor found for different pairs of signals that could come from the same event after passing close to a gravitational lens, checking the robustness of the methods used to obtain this factor. For these calculations, the posterior probability distributions calculated with several available waveforms will be used. In addition, posterior probability distributions will be generated for two events, using three waveforms. For this, the `parallel nested sampling` algorithm will be used.

Índice

1. Teoría de las ondas gravitacionales	6
1.1. Linealización y propagación de las ondas gravitacionales	6
1.2. Ondas gravitacionales procedentes de la fusión de dos agujeros negros	7
2. Observaciones de ondas gravitacionales	8
2.1. Cronología de las observaciones	9
2.2. Detectores	9
2.3. Curvas de ruido y observación de señales procedentes de BBHs	10
3. Estimación de parámetros	11
3.1. Inferencia Bayesiana	11
3.2. Nested Sampling	12
4. Efecto de lente gravitacional	13
5. Métodos para la detección de imágenes duplicadas	14
5.1. Integral de solapamiento	14
5.2. Otros métodos para el análisis de datos	16
6. Resultados	16
6.1. Algoritmos para el cálculo de la integral de solapamiento de las distribuciones de probabilidad a posteriori y su estabilidad numérica	16
6.2. Reproducción de los factores de Bayes para GWTC-2	19
6.3. Diferencias entre distintas formas de onda para los eventos de GWTC-2	20
6.4. Análisis de los eventos GW191103 y GW191105	22
6.5. Estimación de parámetros para los eventos GW191103 y GW191105	24
7. Conclusiones	28

1. Teoría de las ondas gravitacionales

1.1. Linealización y propagación de las ondas gravitacionales

Las ondas gravitacionales fueron predichas por Einstein en 1916 [4]. En esta sección se derivarán las soluciones de onda de las ecuaciones de Einstein linealizadas y en el vacío siguiendo [5]. Se asumirá que en una región del espacio la métrica puede expresarse como:

$$g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski y $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ es la deformación del espacio-tiempo. Sustituyendo (1.1) en la expresión de la conexión $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\lambda}} \right)$ se tiene:

$$\Gamma_{\mu\rho}^{\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\nu\lambda} (\partial_{\rho}h_{\lambda\mu} + \partial_{\mu}h_{\lambda\rho} - \partial_{\lambda}h_{\mu\rho}). \quad (1.2)$$

Ahora, se calcula el tensor de Riemann hasta primer orden en h :

$$R_{\mu\rho\sigma}^{\nu} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\sigma}^{\nu}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\rho}^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} + \Gamma_{\lambda\rho}^{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\sigma}^{\nu}\Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} \simeq \partial_{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\nu} - \partial_{\sigma}\Gamma_{\mu\rho}^{\nu}. \quad (1.3)$$

Sustituyendo (1.2) en (1.3) y bajando índices:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} \simeq \frac{1}{2}(\partial_{\rho}\partial_{\nu}h_{\mu\sigma} + \partial_{\sigma}\partial_{\mu}h_{\nu\rho} - \partial_{\rho}\partial_{\mu}h_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma}\partial_{\nu}h_{\mu\rho}). \quad (1.4)$$

Teniendo en cuenta las relaciones anteriores, las ecuaciones de Einstein $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$ pueden expresarse como:

$$\square \bar{h}_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}\partial^{\rho}\partial^{\lambda}\bar{h}_{\rho\lambda} - \partial^{\rho}\partial_{\nu}\bar{h}_{\rho\sigma} - \partial^{\rho}\partial_{\sigma}\bar{h}_{\rho\nu} + \mathcal{O}(h^2) = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\nu\sigma}, \quad (1.5)$$

donde \square es el operador D'Alembertiano y se ha utilizado la definición del tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu}$ y la curvatura escalar $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$. Además, se ha definido la cantidad:

$$\bar{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h, \quad (1.6)$$

siendo $h = \eta_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta}$.

A continuación, se impone la condición del gauge de Lorenz:

$$\partial_{\nu}\bar{h}^{\mu\nu} = 0, \quad (1.7)$$

con lo que (1.5) queda:

$$\square \bar{h}_{\nu\sigma} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\nu\sigma}. \quad (1.8)$$

En el vacío, el tensor de energía-momento vale cero, por lo que:

$$\square \bar{h}_{\nu\sigma} = 0, \quad (1.9)$$

que tiene la forma de una ecuación de ondas, cuyas soluciones serán las ondas gravitacionales. A continuación, se impone el gauge transversal de traza nula (en inglés, transverse traceless gauge o TT), que da las condiciones $h^{00} = 0$, $h^{0i} = 0$, $\partial_i h^{ij} = 0$ y $h^{ii} = 0$. Por fin, se llega a la solución para la propagación en dirección z :

$$h_{ij}^{TT}(t, z) = \begin{pmatrix} h_+(t) & h_{\times}(t) & 0 \\ h_{\times}(t) & -h_+(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos \left[\omega(t) \left(t - \frac{z}{c} \right) \right]. \quad (1.10)$$

Las componentes $h_+(t)$ y $h_\times(t)$, que definen la polarización de la onda gravitacional (ver Figura 1), y la frecuencia angular $\omega(t)$ tienen una dependencia temporal debido a la evolución de la fuente.

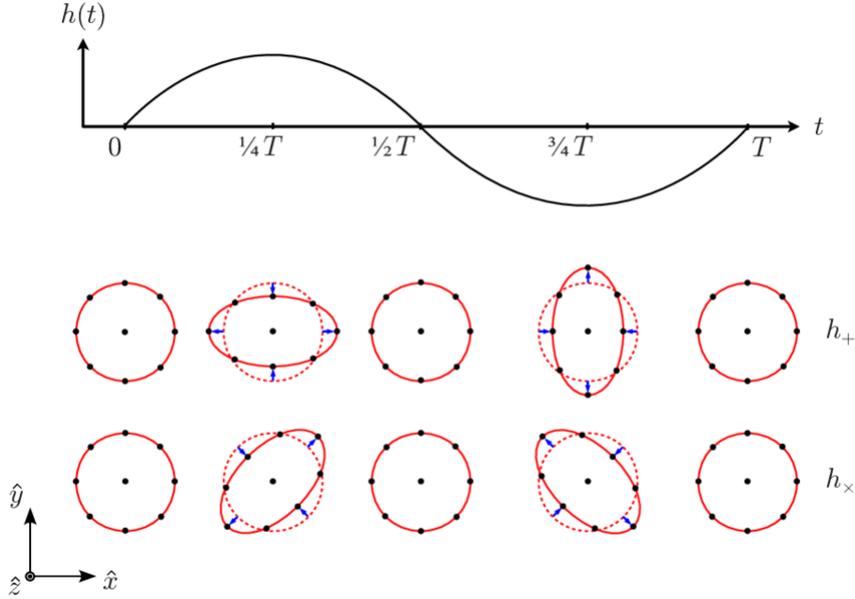


Figura 1: Las dos polarizaciones de las ondas gravitacionales, h_+ y h_\times , y su efecto sobre un anillo de partículas de prueba. Imagen tomada de [6].

1.2. Ondas gravitacionales procedentes de la fusión de dos agujeros negros

En la Sección 1.1 se ha hablado de la lineación de las ecuaciones de Einstein para obtener una solución analítica de las ondas gravitacionales. Este enfoque es válido para analizar el comportamiento de su propagación lejos de la fuente, pero a la hora de estudiar su generación es necesario utilizar métodos más sofisticados. Lo más sencillo es utilizar la expresión analítica del cuadrupolo dominante para el cálculo de la deformación h , aunque para obtener resultados más precisos, se deben utilizar diversos formalismos, que se explican más adelante.

Este proyecto se centra en estudiar las ondas gravitacionales producidas por la fusión de dos agujeros negros (BBH, de binary black hole system en inglés). Para el análisis de los datos procedentes de estos fenómenos es necesario disponer de modelos teóricos, que corresponden a soluciones aproximadas de las ecuaciones de Einstein y se utilizan para describir los datos experimentales con una serie de parámetros que deben ser calibrados [7]. En la práctica, muchos de estos modelos dividen el proceso de fusión en distintas etapas (Figura 2), cada una con un enfoque teórico diferente:

- **Inspiralling phase.** Se utiliza la aproximación Post-Newtoniana [8] o el modelo de effective one body (EOB) [9].
- **Merger.** Para esta etapa hay que utilizar relatividad numérica [10], ya que las ecuaciones de Einstein no tienen una solución analítica sencilla con buena aproximación.
- **Ringdown.** En esta fase se pueden utilizar las expresiones analíticas derivadas para un agujero negro en rotación (agujero negro de Kerr), añadiéndoles una perturbación [11]. De esta manera, se tiene en cuenta que, en los primeros instantes del ringdown, el agujero negro producto de la fusión no tiene una buena simetría esférica.

Han sido desarrollados diversos modelos, como los de la familia PHENOMX, cuyas características quedan resumidas en la Tabla 1. Estos modelos simulan la señal de onda gravitacional en el espacio de frecuencias y utilizan la relatividad numérica para calibrar parámetros libres en las fórmulas analíticas. Estos parámetros también se ajustan imponiendo continuidad de la solución entre las distintas etapas del proceso [7, 12, 13]. El modelo más simple de esta familia, el IMRPHENOMXAS, modela los modos del armónico esférico con $l = |m| = 2$ de dos agujeros negros en una órbita casi circular y sin precesión [7].

Otro modelo de la misma familia, IMRPHENOMXHM, es una mejora del anterior, ya que incluye los armónicos $(l, |m|) = (2, 2), (2, 1), (3, 3), (3, 2), (4, 4)$ y efectos de la mezcla de armónicos para $(l, |m|) = (3, 2)$ [12].

Los modelos IMRPHENOMXP y IMRPHENOMXPHM tienen en cuenta los mismos armónicos que IMRPHENOMXAS y IMRPHENOMXHM, respectivamente. Se diferencian en que incorporan la precesión de los espines del sistema de agujeros negros, que se incluye haciendo un mapeo aproximado entre los sistemas con y sin precesión [13].

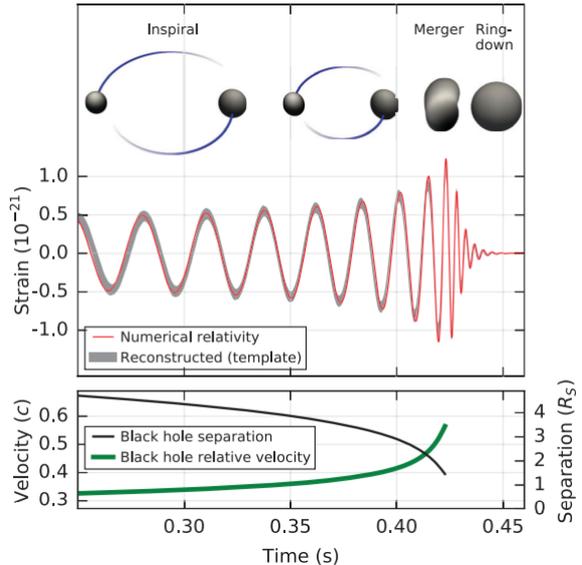


Figura 2: Fases del proceso de fusión de dos agujeros negros: inspiral, merger y ringdown. En la figura superior se muestra la deformación (strain) en función del tiempo y, en la inferior, la separación entre los dos agujeros negros y su velocidad relativa en función del tiempo. Imagen tomada de [1].

Modelo	Espines	Modos (l, m)
XAS	Alineados	$(2, 2)$
XHM	Alineados	$(2, 2), (2, 1), (3, 3), (3, 2), (4, 4)$
XP	Precesión	$(2, 2)$
XPHM	Precesión	$(2, 2), (2, 1), (3, 3), (3, 2), (4, 4)$

Tabla 1: Diferentes modelos de la familia PHENOMX. Los modelos XAS y XP solo tienen en cuenta los efectos del cuadrupolo dominante, mientras que los modelos XHM y XPHM incluyen los efectos de los armónicos esféricos de órdenes superiores.

2. Observaciones de ondas gravitacionales

Las ondas gravitacionales están originadas por objetos masivos acelerados. Las ondas detectables a día de hoy se producen por eventos muy violentos, como la colisión de BBHs, dos estrellas de neutrones (BNS, de binary neutron star en inglés), la explosión de supernovas o la rotación de estrellas de neutrones sin una buena simetría esférica [14]. Los eventos de colisión de BBHs y BNSs reciben el nombre de CBC (del inglés, compact binary coalescence).

2.1. Cronología de las observaciones

A la fecha de la realización de este trabajo, han sido publicados los resultados de tres periodos de observación (O1, O2, O3a y O3b, Figura 3). En el primero, O1 (del 12 de septiembre del 2015 al 19 de enero del 2016), se han producido 3 detecciones [16]. También se han publicado los resultados de O2 (del 30 de noviembre del 2016 al 25 de agosto del 2017), con 8 detecciones [17], una de las cuales se trata de la coalescencia de BNS, GW170817 [18].

En cuanto a O3, se han publicado los resultados de la primera parte, O3a (del 1 de abril del 2019 al 1 de octubre del 2019), con sustancialmente más detecciones que los periodos de observación anteriores, entre las cuales se encuentra un evento, GW190425 [19], consistente con la coalescencia de BNS, y de la segunda parte, O3b (del 1 de noviembre del 2019 al 27 de marzo del 2020), lo que hace un total de 90 detecciones para el tercer periodo de observación [20].

Estas detecciones no solo tienen un enorme interés para la astronomía, abriendo un nuevo canal para la recopilación de información proveniente del Universo, sino que proporcionan un test más de la teoría de la relatividad general. Las ondas gravitacionales han demostrado ser una herramienta muy valiosa para la caracterización de los eventos más misteriosos del Universo.

2.2. Detectores

Para estas detecciones de ondas gravitacionales se han utilizado los interferómetros de LIGO Hanford, LIGO Livingston (Figura 4a) y Virgo. Los dos detectores de LIGO se encuentran separados por, aproximadamente, 3000 km [21], lo que permite que se pueda diferenciar mejor una señal de onda gravitacional del ruido debido a vibraciones en los alrededores, ya que la señal es detectada en ambos interferómetros con una separación temporal de, como máximo¹, 10 ms [1].

Estos detectores registran la deformación del espacio (strain), definida como $h = \Delta L/L$, donde L es la distancia entre dos puntos de referencia que actúan como masas de prueba y ΔL la variación de esta distancia [22]. El funcionamiento de estos detectores se basa en un interferómetro de Michelson modificado, que mide la diferencia en la longitud de sus dos brazos en direcciones ortogonales (ver Figura 4b). Los interferómetros utilizados en los detectores de LIGO poseen brazos de 4 km de longitud [23]. La variación en la longitud de los brazos debido a las ondas gravitacionales hace que haya un desfase entre los dos láseres que vuelven al divisor de haz, que queda registrado en el fotodetector y tiene una relación de proporcionalidad con la deformación h . Para aumentar la sensibilidad, estos detectores incluyen cavidades ópticas de resonancia [1]. La sensibilidad de los detectores queda resumida por la curva de ruido (ver Sección 2.3).

¹Dependerá de la orientación de la Tierra respecto a la fuente de ondas gravitacionales, pudiendo llegar a ser nula esta separación temporal.

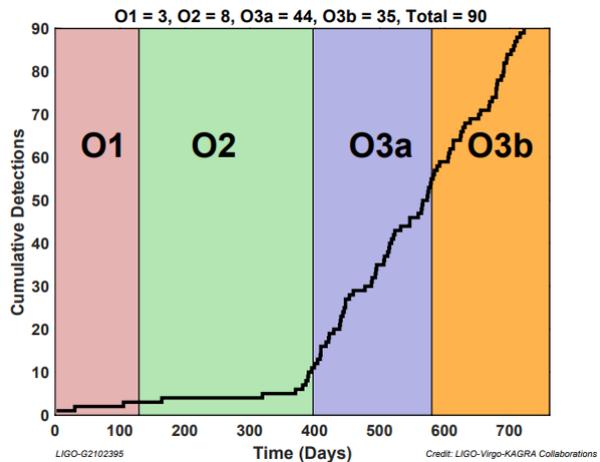


Figura 3: Detecciones acumuladas de ondas gravitacionales en los dos primeros periodos de observación (O1 y O2) y en las dos partes del tercer periodo de observación (O3a y O3b). Imagen tomada de [15].

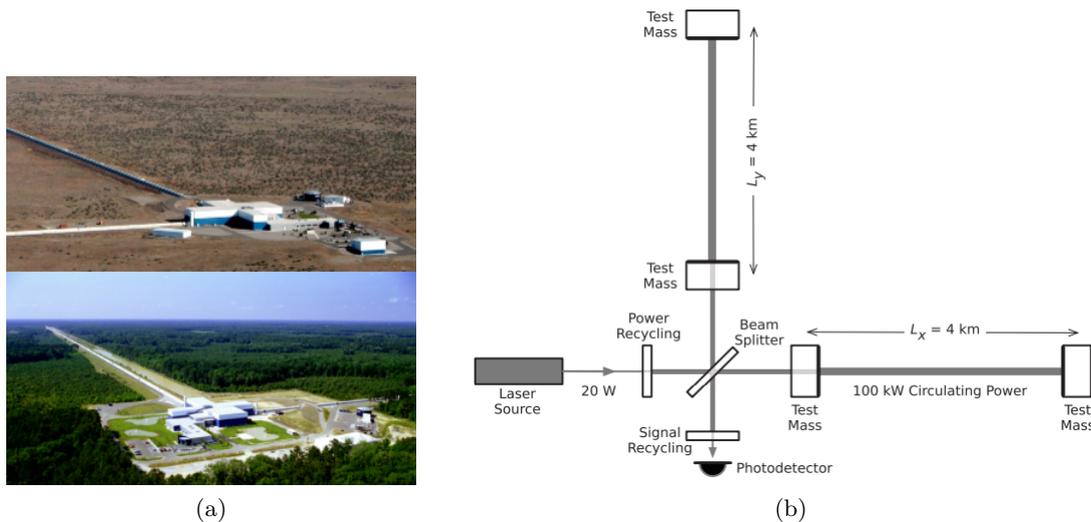


Figura 4: A la izquierda, detectores de LIGO Hanford (foto superior) y LIGO Livingston (foto inferior). Imágenes tomadas de [24, 25]. A la derecha, esquema simplificado del modo de funcionamiento de los interferómetros utilizados en los detectores de LIGO. Imagen modificada a partir de [1].

2.3. Curvas de ruido y observación de señales procedentes de BBHs

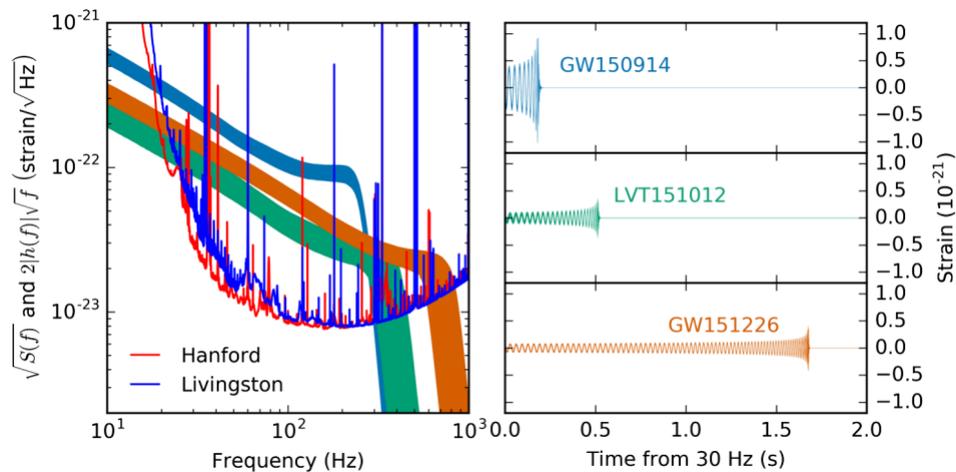


Figura 5: A la izquierda, se muestra la densidad espectral de la amplitud de deformación total debida al ruido en los detectores de LIGO Hanford y LIGO Livingston durante O1. También se muestran las señales de los eventos GW150914, LVT151012 y GW151226 escaladas por el inverso de la raíz cuadrada de la frecuencia. A la derecha, se muestra la evolución temporal de la deformación debida a estas señales. Imagen tomada de [16].

En la Figura 5 se muestra la densidad espectral de la amplitud total debida a la deformación por el ruido para los dos detectores de LIGO durante O1. También se observan las señales de ondas gravitacionales procedentes de tres eventos distintos consistentes con la coalescencia de BBHs. Estas representaciones están escaladas por el inverso de la raíz cuadrada de la frecuencia. Se puede notar que los eventos de menor duración decaen en el gráfico a frecuencias menores, hecho que está relacionado con un mayor radio de Schwarzschild asociado a masas mayores. Este radio mayor provoca que los dos agujeros negros lleguen a la fase de ringdown a frecuencias

orbitales menores. Se puede concluir, por lo tanto, que las señales debidas a la coalescencia de dos agujeros negros de masa muy grande serán más fáciles de detectar que las provocadas por dos agujeros negros más pequeños que se encuentren a la misma distancia. Esto es debido a que la amplitud de la señal es mayor, aunque la estimación de parámetros será menos precisa, ya que cubren un intervalo menor del espectro de frecuencias y la información disponible sobre la forma de onda es menor.

3. Estimación de parámetros

En este proyecto se trabaja con las ondas gravitacionales provenientes de BBHs, que quedan caracterizadas por 15 parámetros. Entre estos parámetros se encuentran las masas² de los dos agujeros negros $m_{1,2}$, las seis componentes de espín de los vectores $\vec{S}_{1,2}$, la distancia de luminosidad D_L , el ángulo de inclinación orbital θ_{JN} , el ángulo de polarización ψ , la fase inicial ϕ_0 , el tiempo de coalescencia t_c , y la localización en el cielo, dada por la ascensión recta α y la declinación δ .

3.1. Inferencia Bayesiana

Para hacer una estimación de estos parámetros dado un evento, se utiliza la inferencia bayesiana. En este tipo de estadística las distribuciones de probabilidad a posteriori vienen dadas por $p(\theta|d)$, donde θ representa el conjunto de parámetros y d los datos de la detección. Según el teorema de Bayes, esta distribución viene dada por:

$$p(\theta|d) = \frac{\mathcal{L}(d|\theta)\pi(\theta)}{\mathcal{Z}}, \quad (3.1)$$

donde $\pi(\theta)$ es la distribución de probabilidad a priori de los parámetros³, \mathcal{Z} la evidencia y $\mathcal{L}(d|\theta)$ la verosimilitud, que se calcula como:

$$\mathcal{L}(d|\theta) \propto \exp\left(-\frac{1}{2} \langle d - h(\theta) | d - h(\theta) \rangle\right). \quad (3.2)$$

En la expresión anterior se ha hecho uso del producto interno:

$$\langle a|b \rangle = 2 \int_{f_{\text{low}}}^{f_{\text{upp}}} df \frac{\tilde{a}^*(f)\tilde{b}(f) + \tilde{a}(f)\tilde{b}^*(f)}{S_n(f)}, \quad (3.3)$$

donde los límites f_{low} y f_{upp} pueden ser elegidos de tal forma que la contribución al producto interno de las frecuencias fuera de este intervalo sea despreciable, dependiendo de la forma de onda y la sensibilidad de los detectores. Por otra parte, $\tilde{a}(f)$ y $\tilde{b}(f)$ son las transformadas de Fourier de $a(t)$ y $b(t)$, respectivamente, y $S_n(f)$ la densidad espectral del ruido, que es diferente a cada momento⁴, ya que depende del entorno.

La evidencia \mathcal{Z} viene dada por:

$$\mathcal{Z} = \int d\theta \mathcal{L}(d|\theta)\pi(\theta). \quad (3.4)$$

En la práctica, para obtener $p(\theta|d)$ se debe calcular $\mathcal{L}(d|\theta)$ en todos los puntos del espacio de parámetros donde la distribución de probabilidad a priori sea distinta de cero, pero esto es imposible debido al elevado número de dimensiones. Para obtener una estimación eficiente de $p(\theta|d)$ se utilizan diversos algoritmos de muestreo, que se dividen, principalmente, en dos categorías:

²Las masas medidas por el detector son $m_{1,2} = (1+z)m_{1,2}^{\text{source}}$, ya que incluyen el efecto del redshift z .

³Normalmente se escogen distribuciones a priori uniformes entre una cota inferior y superior donde se supone que estará el valor real del parámetro.

⁴Para el cálculo de las distribuciones de probabilidad a posteriori se hace una estimación de $S_n(f)$ a partir de los datos de la detección.

Markov-Chain Monte Carlo (MCMC) y Nested Sampling. Ambos algoritmos producen una lista de puntos que forman una muestra de $p(\theta|d)$, pero Nested Sampling tiene la ventaja de producir una estimación de la evidencia como producto principal. Además, este algoritmo es más robusto que Markov-Chain Monte Carlo a la hora de muestrear distribuciones multimodales.

3.2. Nested Sampling

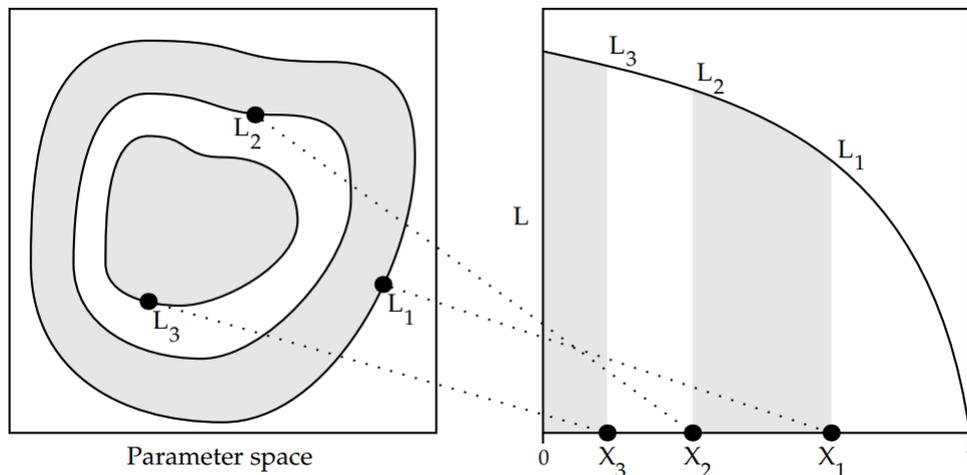


Figura 6: Paso de una integral en el espacio multidimensional de parámetros a una integral unidimensional tomando capas de igual verosimilitud. Imagen tomada de [26].

Este algoritmo permite obtener la evidencia \mathcal{Z} de forma bastante directa a partir de los puntos extraídos durante el muestreo y, como producto secundario, la distribución de probabilidad a posteriori.

Se puede transformar la integral (3.4) sobre todos los parámetros en una integral unidimensional definiendo $X(\lambda) = \int_{\mathcal{L}(\theta) > \lambda} \pi(\theta) d\theta$ [26]. Esta nueva variable X toma valores del 1 al 0 y da la distribución de probabilidad a priori acumulada en regiones del espacio de parámetros donde la evidencia es mayor que λ (ver Figura 6). De esta forma, la evidencia es, simplemente:

$$\mathcal{Z} = \int_0^1 \mathcal{L}(X) dX. \quad (3.5)$$

El algoritmo consiste en tomar un conjunto de puntos aleatorios en el espacio de parámetros, que recibirán el nombre de puntos vivos (en inglés, live points). El punto con la menor verosimilitud se encuentra en $X_0 = 1$, que define un contorno en el espacio de parámetros alrededor de puntos con igual o mayor verosimilitud. Se procede entonces a eliminar este punto del conjunto de live points, con lo que pasa a ser un punto muerto (en inglés, dead point). Entonces, se añade al conjunto de live points otro punto con una verosimilitud mayor a la que tenía el punto eliminado. Para encontrar este nuevo punto se utilizan varios métodos, uno de los cuales consiste en ejecutar una o varias iteraciones del algoritmo MCMC. Un paquete de `python` que implementa este método es `dynesty` [27].

El algoritmo termina cuando la máxima verosimilitud de las calculadas a partir de los live points no incrementa sustancialmente el valor de la evidencia. En la práctica, se calcula $d \ln \mathcal{Z}_i = \ln(\mathcal{L}_{\max} X_i) - \ln(\mathcal{Z}_i)$ y se termina el algoritmo cuando $d \ln \mathcal{Z}_i \leq 0.1$, el umbral que se suele tomar por convenio. Finalmente, se añaden los live points restantes a la lista de dead points.

La evidencia se calcula a partir de la lista de M dead points como:

$$\mathcal{Z} = \sum_{i=1}^M \frac{1}{2} (X_{i-1} - X_{i+1}) \mathcal{L}_i. \quad (3.6)$$

También se puede calcular la distribución de probabilidad a posteriori como:

$$p(\theta|d) = \sum_{i=1}^M p_i(\theta|d), \quad (3.7)$$

donde $p_i(\theta|d)$ es el peso asociado a cada dead point y se obtiene como:

$$p_i(\theta|d) = \frac{\frac{1}{2}(X_{i-1} - X_{i+1})\mathcal{L}_i}{\mathcal{Z}}. \quad (3.8)$$

4. Efecto de lente gravitacional

Cuando la radiación, ya sea electromagnética o en forma de ondas gravitacionales, proveniente de una fuente a distancia D_s , pasa a una distancia ξ de una concentración de masa, llamada lente, su trayectoria es desviada un ángulo $\alpha(\xi)$ [28]. La posición angular de la fuente de radiación vendrá dada, según el observador, por:

$$\beta = \frac{\eta}{D_s}, \quad (4.1)$$

donde η es la posición de la fuente en el plano fuente, que se puede calcular como:

$$\eta = \theta \cdot D_d - D_{ds}\alpha(\xi), \quad (4.2)$$

siendo $\theta = \xi/D_d$ la posición angular de la radiación una vez ha sido desviada por la lente, D_d la distancia entre el plano de la lente y el del observador y D_{ds} la distancia entre el plano de la lente y el de la fuente. Dividiendo (4.2) entre D_s se llega a:

$$\frac{\eta}{D_s} = \frac{\xi}{D_d} - \frac{D_{ds}}{D_s}\alpha(\xi), \quad (4.3)$$

que utilizando las relaciones de las posiciones angulares queda:

$$\beta = \theta - \frac{D_{ds}}{D_s}\alpha(\xi). \quad (4.4)$$

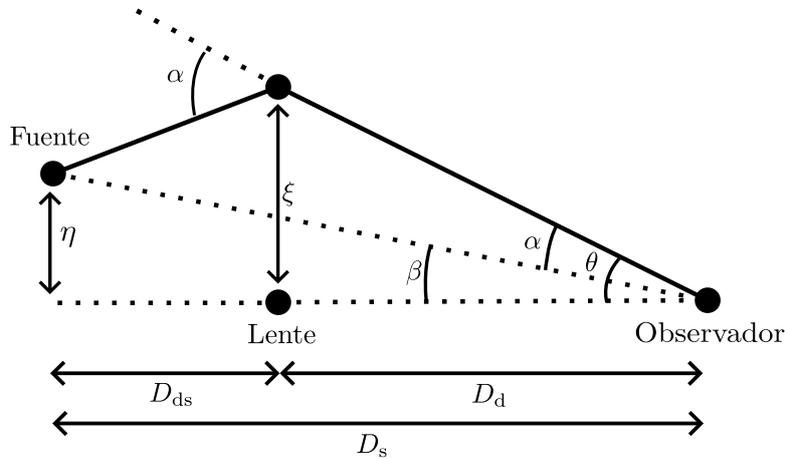


Figura 7: Diagrama del efecto de lente gravitacional. Producción propia.

Estas desviaciones angulares pueden concentrar una cantidad mayor de la luminosidad de las ondas electromagnéticas o gravitacionales de la fuente en la dirección del observador, lo que provoca que la fuente aparezca magnificada⁵ para el observador a causa de la presencia de la lente gravitacional.

Los detectores de ondas gravitacionales no son capaces de identificar la posición en el cielo con suficiente resolución como para que los efectos del lensing sobre los ángulos descritos más arriba sean notorios. Sin embargo, sí es posible observar la magnificación de las ondas gravitacionales a causa de estos efectos, así como el retraso temporal. El cambio en el tiempo que tarda un evento en llegar hasta la Tierra debido al lensing está relacionado con dos factores: el recorrido de las ondas gravitacionales cambia debido a la deformación del espacio-tiempo en la proximidad de un objeto masivo y el tiempo se realentiza cerca de estos objetos [29].

La casuística del lensing es muy variada. Se pueden observar fenómenos strongly lensed, donde la imagen de la fuente se magnifica y, en ocasiones, se duplica. Este es el efecto en el que se centra este trabajo. También se puede encontrar weak lensing, que consiste en la orientación de varios objetos detrás de la lente formando un patrón elíptico alrededor de esta, mientras que su orientación real debería ser aleatoria. Este efecto, pese a haber sido observado para las ondas EM, en el caso de las ondas gravitacionales no sería detectable. Otro fenómeno es el de microlensing, que en el caso de las ondas electromagnéticas consiste en la magnificación de la fuente cuando una lente de masa reducida se desplaza delante suya. En el caso de las ondas gravitacionales, el microlensing provoca que en las formas de onda aparezcan deformaciones dependientes de la frecuencia.

5. Métodos para la detección de imágenes duplicadas

5.1. Integral de solapamiento

Cuando se quieren comparar los datos d_1 y d_2 de dos detecciones para determinar si provienen de un mismo evento que ha sufrido el fenómeno de lensing se puede recurrir a la razón de probabilidades a posteriori, definida como [3]:

$$\mathcal{O}_U^L \equiv \frac{p(\mathcal{H}_L|\{d_1, d_2\})}{p(\mathcal{H}_U|\{d_1, d_2\})}, \quad (5.1)$$

donde $p(\mathcal{H}_L|\{d_1, d_2\})$ es la probabilidad de una señal asumiendo que se haya producido lensing dado el conjunto de datos de las dos detecciones $\{d_1, d_2\}$ y $p(\mathcal{H}_U|\{d_1, d_2\})$ la probabilidad de una señal asumiendo que no se haya producido lensing dado $\{d_1, d_2\}$.

Utilizando (3.1) en (5.1) queda:

$$\mathcal{O}_U^L = \frac{p(\mathcal{H}_L) p(\{d_1, d_2\}|\mathcal{H}_L)}{p(\mathcal{H}_U) p(\{d_1, d_2\}|\mathcal{H}_U)} = \frac{p(\mathcal{H}_L) \mathcal{Z}_L}{p(\mathcal{H}_U) \mathcal{Z}_U}, \quad (5.2)$$

donde $\mathcal{Z}_L = p(\{d_1, d_2\}|\mathcal{H}_L)$ y $\mathcal{Z}_U = p(\{d_1, d_2\}|\mathcal{H}_U)$ son las evidencias de las hipótesis \mathcal{H}_L y \mathcal{H}_U , respectivamente. Se define el siguiente factor de Bayes:

$$\mathcal{B}_U^L \equiv \frac{\mathcal{Z}_L}{\mathcal{Z}_U}. \quad (5.3)$$

Si se asume que d_1 y d_2 son independientes, es decir, no ha habido lensing, la evidencia para la hipótesis \mathcal{H}_U es:

$$\mathcal{Z}_U = p(d_1)p(d_2). \quad (5.4)$$

Por otra parte, la evidencia para \mathcal{H}_L es:

⁵Es decir, con una luminosidad mayor.

$$\mathcal{Z}_L = \int d\theta p(\theta) p(d_1|\theta) p(d_2|\theta), \quad (5.5)$$

donde, esta vez, θ se refiere al conjunto de parámetros que deberían ser comunes para las dos detecciones provenientes de un mismo evento tras haber sufrido lensing, que son las masas $m_{1,2}$, las magnitudes del espín adimensionales $a_{1,2}$, el coseno de los ángulos de inclinación del espín $\theta_{1,2}$, la posición en el cielo, caracterizada por α y δ , y la inclinación orbital θ_{JN} . Por otro lado, la distancia de luminosidad D_L , el tiempo de coalescencia t_c aparente y la fase inicial ϕ_0 son diferentes para cada detección debido al lensing⁶.

Sustituyendo (3.1) en (5.5) resulta:

$$\mathcal{Z}_L = p(d_1) p(d_2) \int d\theta \frac{p(\theta|d_1) p(\theta|d_2)}{p(\theta)}. \quad (5.6)$$

De esta manera, el cálculo del factor de Bayes se hace a partir de una integral de solapamiento de las dos distribuciones de probabilidad a posteriori divididas entre la distribución de probabilidad a priori:

$$\mathcal{B}_U^L = \frac{\mathcal{Z}_L}{\mathcal{Z}_U} = \int d\theta \frac{p(\theta|d_1) p(\theta|d_2)}{p(\theta)}. \quad (5.7)$$

Una forma intuitiva de interpretar este factor es ver que, cuando las distribuciones $p(\theta|d_1)$ y $p(\theta|d_2)$ son semejantes, se obtienen valores elevados de la integral de solapamiento (5.7) (ver Figura 8), siempre que $p(\theta)$ no sea muy elevado en los puntos del espacio de parámetros donde estas distribuciones se asemejan. Esto querría decir que la probabilidad de encontrarse en este punto es demasiado alta como para que tenga relevancia el hecho de que las dos distribuciones sean parecidas.

Para que el factor de bayes sea un buen método a la hora de encontrar candidatos a lensing, se debe utilizar la misma distribución de probabilidad a priori en la obtención de las distribuciones de probabilidad a posteriori de los eventos analizados. Sin embargo, en la realidad se utilizan distintas distribuciones de probabilidad a priori para cada evento (incluso para distintos análisis de un mismo evento). Esto provoca que en los cálculos del factor de Bayes se tenga una normalización ambigua, por lo que, en este trabajo, se añaden gráficos para interpretar el solapamiento entre las distribuciones de probabilidad a posteriori de los pares de eventos analizados.

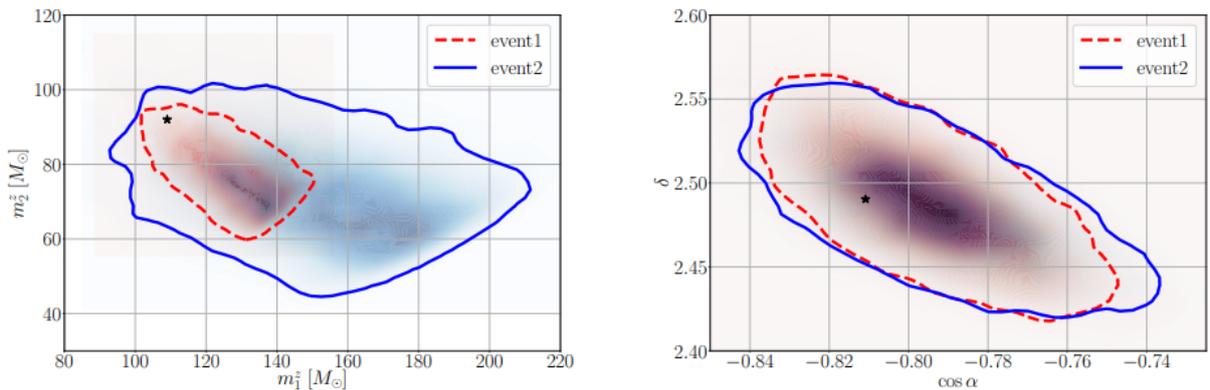


Figura 8: Solapamiento de las proyecciones de las distribuciones de probabilidad a posteriori para dos detecciones simuladas de un mismo evento que ha sufrido lensing en los subespacios (m_1, m_2) y $(\cos \alpha, \delta)$. Imagen tomada de [3].

⁶En este proyecto se ignora el efecto de deformación de las formas de onda con armónicos de orden mayor debido a que el lensing cambia la fase de cada armónico de forma distinta [30].

Este método ha sido utilizado en los datos de O1 y O2 [31] y en los datos de O3a [32] y O3b [33].

5.2. Otros métodos para el análisis de datos

Otros métodos para la detección de imágenes duplicadas y que no se han tratado en este trabajo son Machine Learning y JointPE. El primero, consiste en entrenar una red neuronal utilizando un vasto conjunto de señales de ondas gravitacionales duplicadas simuladas para reconocer candidatos a pares de eventos reales duplicados⁷ [34]. Por otro lado, el método JointPE calcula el factor de Bayes del que se ha hablado en la Sección 5.1 utilizando el muestreo bayesiano directamente sobre los conjuntos de datos de los dos eventos a analizar (ver, por ejemplo [35]).

Aunque dos distribuciones de probabilidad tengan formas muy distintas, se puede dar el caso de que la integral de solapamiento entre ambas dé valores no despreciables (ver Figura 9), sobre todo si el rango dado por las distribuciones de probabilidad a priori es muy grande⁸. La ventaja del método JointPE radica en que se compara directamente la evidencia de las dos hipótesis de interés: la hipótesis de que ha habido lensing y la de que no ha habido. De esta manera, los candidatos serán confirmados como dos detecciones que provienen de un mismo evento cuando el modelo que supone que ha habido lensing y que incluye los parámetros compartidos, da una mayor evidencia en el conjunto de datos de las dos detecciones que la evidencia que se obtendría con los datos de cada detección por separado y si se utilizasen dos conjuntos completos de parámetros. Este método, sin embargo, tiene el inconveniente de que su coste computacional es muy elevado, por lo que suele utilizarse, tan solo, en los pares de eventos que son sospechosos de haber sufrido lensing tras un análisis utilizando el método de la integral de solapamiento o de Machine Learning. Sin embargo, en este trabajo solo se tratará el método de la integral de solapamiento.

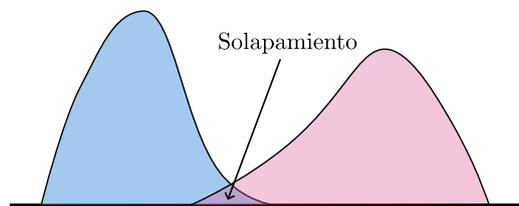


Figura 9: Representación del solapamiento entre dos distribuciones de probabilidad en una dimensión. Producción propia.

6. Resultados

En este proyecto se han llevado a cabo distintos análisis para comprobar la robustez del método de la integral de solapamiento para la identificación de candidatos a haber sufrido lensing. A continuación, se dan los resultados obtenidos.

6.1. Algoritmos para el cálculo de la integral de solapamiento de las distribuciones de probabilidad a posteriori y su estabilidad numérica

Se empieza por comprobar la estabilidad de dos métodos utilizados para el cálculo de la integral de solapamiento (5.7). Para ello, se han adaptado códigos ya existentes [36] modificando

⁷Se habla solo de candidatos porque la probabilidad de tratarse de una falsa alarma es muy elevada.

⁸Recordemos que el integrando de (5.7) está escalado por el inverso de la distribución de probabilidad a priori que, en el caso de que sea uniforme, corresponde a multiplicar por el volumen dado por el rango de sus parámetros.

la forma en que la integral de solapamiento para los parámetros de la posición en el cielo se calcula. Uno de estos métodos está basado en KDEs (del inglés, kernel density estimation) y, el otro, en histogramas. En la práctica, se debe calcular la integral:

$$\int d\theta p(\theta|d_1)p(\theta|d_2). \quad (6.1)$$

Esto es debido a que la distribución de probabilidad a priori es constante dentro de un intervalo en los análisis realizados para los datos de GWTC, por lo que sale de la integral. Entonces, se llega a (5.7) multiplicando (6.1) por el volumen dado por estas distribuciones (ver Tabla 2).

	$m_1 [M_\odot]$	$m_2 [M_\odot]$	α	$\sin \delta$	a_1	a_2	$\cos \theta_1$	$\cos \theta_2$	$\cos \theta_{JN}$
Mínimo	2	2	0	-1	0	0	-1	-1	-1
Máximo	200	200	2π	1	1	1	1	1	1

Tabla 2: Rangos entre los cuales las distribuciones a priori de los distintos parámetros son distintas de cero y uniformes.

El método KDE consiste en aproximar la lista de puntos de las distribuciones de probabilidad a posteriori con una función analítica (ver [37]), dada por:

$$\hat{p}_n(x) = \frac{1}{nh^d} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right), \quad (6.2)$$

donde K es una función suave llamada kernel (en este proyecto se utilizará una función gaussiana), h es el ancho de banda y la suma se extiende sobre los n puntos $X_i \in \mathbb{R}^d$ de la distribución de dimensión d . Una vez se tiene la función analítica, se procede a calcular la integral de solapamiento (6.1) con las distribuciones obtenidas para los datos d_1 y d_2 .

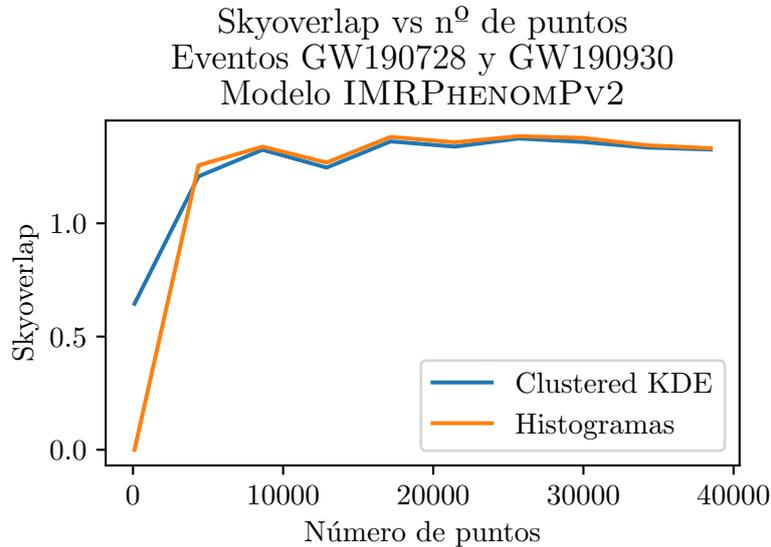


Figura 10: Valor de la integral de solapamiento (6.1) calculada con los parámetros que dan la posición en el cielo α y δ (skyoverlap) a medida que se aumenta el número de puntos tomados de las distribuciones de probabilidad a posteriori de los eventos GW190728 y GW190930 con la forma de onda IMRPHENOMPv2 [38, 39], que es un predecesor de la familia de modelos más moderna PHENOMX.

El procedimiento discutido hasta ahora funciona bien para los parámetros intrínsecos, pero los skymaps (el subespacio de parámetros α y δ) tienen, a menudo, una estructura muy complicada, formando acumulaciones de probabilidad (clusters) en distintas regiones del cielo. Como los parámetros relacionados con la posición en el cielo son aproximadamente independientes de los intrínsecos, se puede separar el cálculo de la integral de solapamiento de estos dos parámetros del resto. Por este motivo, se ha experimentado con el módulo `ligo.skymap` [40] basándose en trabajos anteriores del tutor de este proyecto. Este método divide las distribuciones de probabilidad a posteriori en clusters y utiliza el método KDE en cada uno (clustered KDE), sumando luego todas las contribuciones a la integral de solapamiento restringida a los parámetros de la posición en el cielo (skyoverlap).

Otro método alternativo para calcular (6.1), que es el utilizado en [32], es el de los histogramas, consistente en dividir el espacio de parámetros (α y δ) en una cuadrícula formada por bins de igual tamaño. Entonces, se lleva la cuenta del número de puntos de las distribuciones que caen en un determinado bin, con lo que se obtiene la altura de las barras del histograma de dos dimensiones. Para calcular la integral de solapamiento (6.1) solo hay que multiplicar la altura de cada barra del histograma obtenido con la distribución de un evento por la barra correspondiente a la misma localización en el cielo del histograma calculado con la distribución del otro evento. Por último, se suman todos estos productos y se multiplica por el área de cada bin. El método de los histogramas no se podría utilizar con todo el conjunto de parámetros considerados en el análisis del lensing ya que, para dimensiones mayores a 3, el problema se vuelve intratable computacionalmente.

Para demostrar la estabilidad numérica de los algoritmos propuestos se ha utilizado el par de eventos GW190728 y GW190930 del catálogo GWTC-2 [41], cuyas distribuciones de probabilidad a posteriori han sido tomadas de [42]. En la Figura 10 se compara la integral de solapamiento (6.1) calculada con los parámetros α y δ (skyoverlap) con los dos métodos discutidos y utilizando la forma de onda IMRPHENOMPv2 a medida que se aumenta el número de muestras tomadas de las distribuciones. Se puede observar que ambos métodos llegan a un buen acuerdo incluso con un número de muestras reducido. Pero el método de los histogramas es mucho más rápido que el de clustered KDE (toma aproximadamente 2 minutos frente a las 2 horas del método clustered KDE). Por lo tanto, parece más conveniente el uso del método de los histogramas en el cálculo del skyoverlap que se llevará a cabo en las siguientes secciones.

Para obtener el factor de Bayes $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}^L$ dado por (5.7) para todos los parámetros con ambos métodos, se debe multiplicar la integral de solapamiento restringida a los parámetros de la posición en el cielo por la obtenida utilizando el método KDE⁹ cuando se tienen en cuenta los parámetros intrínsecos (esta vez, multiplicando por el volumen dado por los rangos de las distribuciones de probabilidad a priori).

Se ha visto que el skyoverlap converge rápidamente con un número pequeño de muestras tomadas de las distribuciones de probabilidad a posteriori tanto cuando se utiliza el método de clustered KDE como el método de los histogramas. En la Figura 11 se muestra que ocurre lo mismo con $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}^L$, donde se ha utilizado el ejemplo del par de eventos GW190728 y GW190930 con la forma de onda IMRPHENOMPv2, tal y como se ha hecho en la Figura 10.

⁹Esta vez no he utilizado el método clustered KDE, ya que este solo tiene sentido cuando se calcula la integral de solapamiento (6.1) con los parámetros característicos de la posición en el cielo, cuyas distribuciones de probabilidad presentan cúmulos. En su lugar se ha utilizado la librería `scipy`.

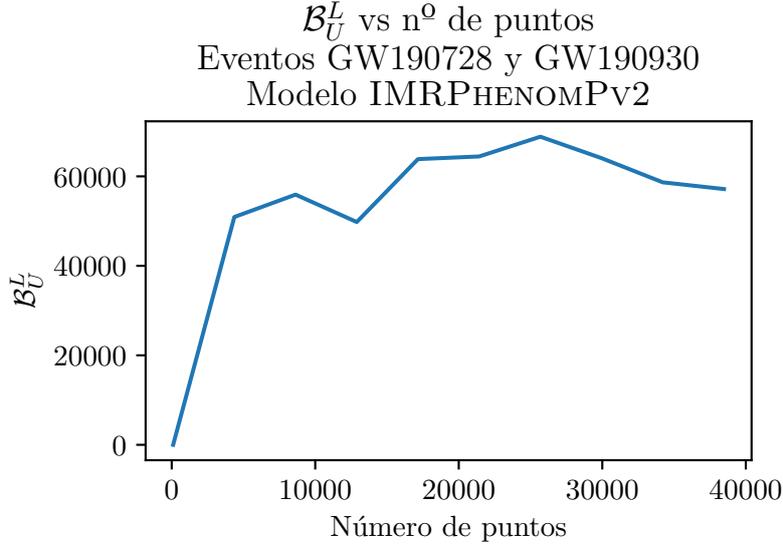


Figura 11: Valor del factor de Bayes \mathcal{B}_U^L a medida que se aumenta el número de puntos tomados de las distribuciones de probabilidad a posteriori de los eventos GW190728 y GW190930 con la forma de onda IMRPHENOMPv2.

6.2. Reproducción de los factores de Bayes para GWTC-2

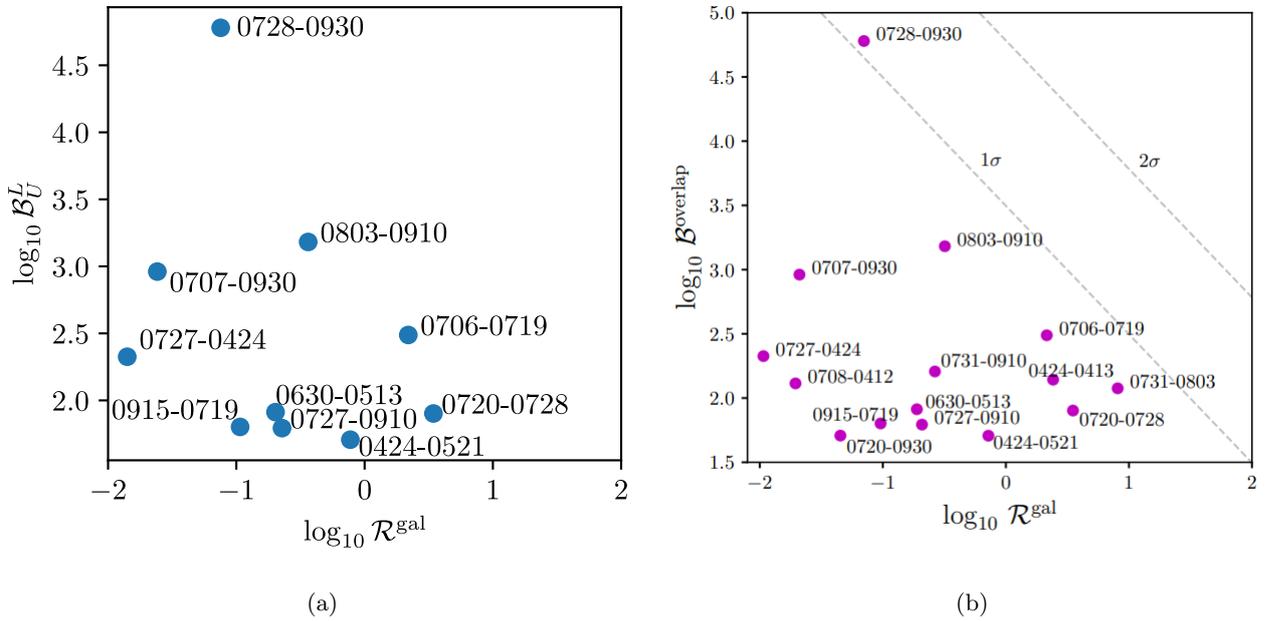


Figura 12: Gráficos de dispersión de $\log_{10} \mathcal{B}_U^L$ y $\log_{10} \mathcal{R}^{\text{gal}}$ calculados para algunos pares de eventos candidatos a haber sido duplicados por una lente gravitacional. El gráfico 12a ha sido realizado a partir de los factores \mathcal{B}_U^L calculados en este trabajo con la forma de onda IMRPHENOMPv2 y los factores \mathcal{R}^{gal} han sido tomados de [32]. En 12b se tiene el gráfico original que aparece en [32], donde se ha utilizado la notación $\mathcal{B}^{\text{overlap}}$ para referirse a \mathcal{B}_U^L . Para identificar los eventos se ha utilizado el formato mmdd de la fecha en que fueron detectados.

Para comprobar que el código implementado en este proyecto y modificado a partir de repositorios existentes [36] funciona, se ha calculado \mathcal{B}_U^L para varios pares de eventos de GWTC-

2 [41] y se ha realizado un gráfico de dispersión de $\log_{10} \mathcal{B}_U^L$ y otro factor, $\log_{10} \mathcal{R}^{\text{gal}}$, que se describe más adelante. Ver Figura 12, donde se comparan los resultados de este proyecto con los del paper original [32]. Las distribuciones de probabilidad a posteriori de estos eventos se han tomado de [42] y se ha utilizado la forma de onda IMRPHENOMPv2 una vez más para los análisis. Para todos los pares de eventos de este catálogo ya no se considera que se haya producido lensing tras un análisis con el método JointPE [32].

Para el cálculo de \mathcal{B}_U^L , tal y como se ha comentado en la Sección 6.1, se ha multiplicado la integral de solapamiento (6.1) calculada con los dos parámetros que caracterizan la posición en el cielo, α y δ , con esta misma integral calculada con los parámetros intrínsecos. Para la primera integral se ha utilizado el método de los histogramas, debido a su mayor eficiencia frente al método de clustered KDE. La segunda integral ha sido calculada con el método KDE estándar. Por último, se han multiplicado ambas integrales entre ellas y con el volumen dado por el rango de las distribuciones de probabilidad a priori (Tabla 2). Los resultados obtenidos quedan resumidos en la Tabla 3, donde se muestran por separado el factor \mathcal{B}_U^L y el skyoverlap calculados con diferentes formas de onda disponibles en [42]. La disparidad entre resultados se discutirá en la Sección 6.3.

La cantidad \mathcal{R}^{gal} es otro factor de Bayes utilizado para evaluar la probabilidad de lensing [3], que tiene en cuenta la diferencia temporal entre la llegada a los detectores de los dos eventos candidatos a haber experimentado lensing. Este factor se calcula como:

$$\mathcal{R}^{\text{gal}} = \frac{p(\Delta t_0 | \mathcal{H}_L)}{p(\Delta t_0 | \mathcal{H}_U)}, \quad (6.3)$$

donde $p(\Delta t_0 | \mathcal{H}_{L,U})$ son las distribuciones de probabilidad a priori de la diferencia temporal cuando se asume la hipótesis de lensing y de no lensing, respectivamente, y siempre que se considere que la lente es una galaxia¹⁰. Como en este proyecto no se ha tratado este factor, para la representación gráfica se han tomado los valores hallados en los repositorios [36]. Se puede observar, sin embargo, que los eventos con mayor separación temporal presentan los factores \mathcal{R}^{gal} más bajos, ya que esta estadística penaliza los pares de eventos con separaciones temporales mayores a horas o días, que es lo que se esperaría cuando la lente está formada por una galaxia.

Volviendo a \mathcal{B}_U^L , se puede ver que los resultados obtenidos en este trabajo son consistentes con los de [32].

6.3. Diferencias entre distintas formas de onda para los eventos de GWTC-2

En esta sección, se vuelve a fijar la atención en la Tabla 3, donde también se incluyen los resultados obtenidos con otras 3 formas de onda, IMRPHENOMD [43, 44], SEOBNRv4P [45] y SEOBNRv4PHM [46].

Algo que tienen en común los distintos pares de eventos analizados es que el factor de Bayes \mathcal{B}_U^L se ve mucho más afectado por el uso de una forma de onda distinta que el skyoverlap. Además, los \mathcal{B}_U^L obtenidos con la forma de onda IMRPHENOMD para algunos pares es mucho más pequeño que el obtenido con otras formas de onda, lo que puede deberse a que en el análisis con este modelo realizado en [41] se ha asumido que el espín de los dos agujeros negros es cero¹¹.

A continuación, se estudia el par de eventos GW190706 y GW190719 [41], ya que este par era uno de los candidatos más fuertes para haber sufrido lensing cuando se hizo el análisis de la integral de solapamiento. Sin embargo, el método JointPE ha dado uno de los \mathcal{B}_U^L más bajos entre los pares analizados en [32] para este par de eventos. En las Figuras 13a y 13b se muestran

¹⁰Este factor se calcula teniendo en cuenta lentes formadas por galaxias. Con estas lentes se suelen obtener diferencias temporales de horas o días. Con lentes más masivas, como cúmulos de galaxias, la separación temporal puede ser mucho mayor.

¹¹Para los análisis llevados a cabo en este proyecto con la forma de onda IMRPHENOMD se ha utilizado el conjunto de parámetros intrínsecos m_1, m_2 y $\cos\theta_{JN}$.

los corner plots para las formas de onda IMRPHENOMPv2 y SEOBNRv4PHM, respectivamente. Los corner plots solo muestran m_1 y m_2 , ya que incluir el resto de parámetros utilizados para el cálculo de la integral de solapamiento ($a_1, a_2, \cos \theta_1, \cos \theta_2, \cos \theta_{JN}, \alpha$ y δ) los haría muy grandes. El panel central muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori conjuntas de los parámetros m_1 y m_2 , mientras que los paneles laterales, muestran las distribuciones de un parámetro marginalizadas sobre el resto de parámetros.

Forma de onda	SEOBNRv4P	IMRPHENOMD	SEOBNRv4PHM	IMRPHENOMPv2
GW190424-GW190521				
\mathcal{B}_U^L	43.42	76.61	54.62	50.92
Skyoverlap	0.0216	0.0382	0.0228	0.0370
GW190706-GW190719				
\mathcal{B}_U^L	65.11	25.26	0.09	307.66
Skyoverlap	2.1200	1.9395	2.2300	2.0046
GW190803-GW190910				
\mathcal{B}_U^L	1238.43	1415.59	-	1520.63
Skyoverlap	0.3701	0.3954	-	0.4150
GW190728-GW190930				
\mathcal{B}_U^L	16445	$2.11 \cdot 10^{-19}$	3388	60206
Skyoverlap	1.3607	0.6349	1.3737	1.3209
GW190707-GW190930				
\mathcal{B}_U^L	473.06	$1.78 \cdot 10^{-45}$	14.78	914.90
Skyoverlap	0.8605	0.4206	0.8540	0.3590
GW190720-GW190728				
\mathcal{B}_U^L	222.27	$4.23 \cdot 10^{-15}$	296.58	79.89
Skyoverlap	0.0066	0.0016	0.0101	0.0010
GW190630-GW190513				
\mathcal{B}_U^L	82.00	29.75	127.48	81.77
Skyoverlap	0.0050	0.0026	0.0090	0.0040

Tabla 3: Valores del factor \mathcal{B}_U^L y el skyoverlap cuando se utilizan distintas formas de onda calculados para varios pares de eventos. El evento GW190803 no posee análisis para la forma de onda SEOBNRv4PHM.

La principal diferencia entre ambas figuras está en que las distribuciones de probabilidad a posteriori para las masas m_1 y m_2 poseen una “cola” con algunas muestras de masa mayor cuando se utiliza la forma de onda IMRPHENOMPv2, algo que no sucede cuando se utiliza SEOBNRv4PHM. Esta cola provoca que haya bastante solapamiento entre los dos eventos, que se puede observar en el panel donde se muestra la distribución conjunta de m_1 y m_2 . Este mayor solapamiento queda reflejado en unos valores de \mathcal{B}_U^L más altos cuando se utiliza IMRPHENOMPv2 en comparación a los obtenidos con SEOBNRv4PHM (ver Tabla 3).

En el panel que muestra la distribución conjunta de m_1 y m_2 cuando se utiliza la forma de onda SEOBNRv4PHM se observa que no hay demasiado solapamiento, aunque las proyecciones sobre cada uno de estos parámetros sí que muestren solapamiento entre los dos eventos. El caso de la forma de onda SEOBNRv4P (que no se muestra aquí) es similar al de IMRPHENOMPv2, ya que ninguno de los dos posee armónicos de orden superior al dominante, que podrían romper la degeneración entre parámetros y definir mejor los límites de las distribuciones de probabilidad a posteriori. Para trabajos futuros, sería interesante obtener estas distribuciones utilizando la forma de onda IMRPHENOMXPHM, ya que, como se ha visto, la elección de una forma de onda es de gran importancia a la hora de llevar a cabo estos análisis.

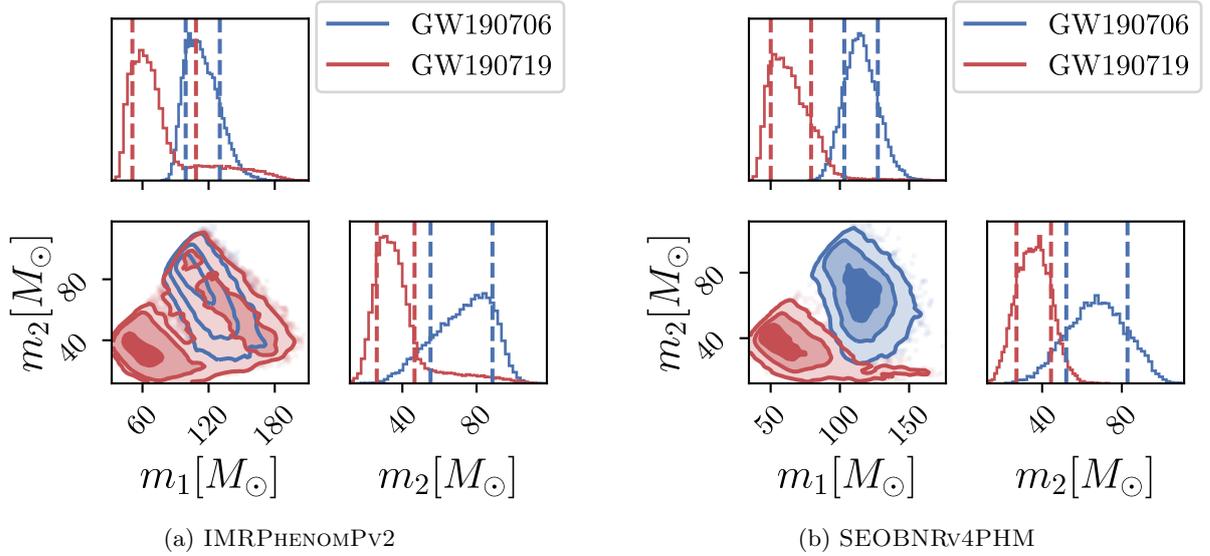


Figura 13: Corner plots para el par de eventos GW190706 y GW190719 cuando se utilizan las formas de onda IMRPHENOMPv2 y SEOBNRv4PHM. El panel central muestra las distribuciones de probabilidad a posteriori conjuntas de los parámetros m_1 y m_2 , mientras que los paneles laterales, muestran las distribuciones de un parámetro marginalizadas sobre el resto de parámetros.

6.4. Análisis de los eventos GW191103 y GW191105

A continuación, se analiza el par de eventos GW191103 y GW191105 de [20], que daba el \mathcal{B}_V^L más alto en [33]. Para estos eventos se dispone de distribuciones de probabilidad a posteriori recientes listadas en [47]¹². Las distribuciones de probabilidad a posteriori de ambos eventos se han calculado con la forma de onda SEOBNRv4PHM y la más moderna, IMRPHENOMXPHM, en lugar de las formas de onda utilizadas en las distribuciones estudiadas en la Sección 6.3.

Además, se han analizado unas distribuciones de probabilidad a posteriori más tempranas que las que se encuentran en la publicación oficial para este par de eventos, con el objetivo de determinar si los resultados tempranos podrían ser utilizados en un futuro para detectar candidatos a lensing.

El evento GW191103 no se encontró en el análisis de latencia baja, sino durante un análisis de los datos de O3b llevado a cabo un año más tarde. Para el análisis de este trabajo, se han utilizado los primeros resultados de inferencia bayesiana obtenidos en diciembre del 2020. Por otra parte, el evento GW191105 se detectó online y, para este trabajo, se dispone de dos conjuntos de datos producidos unos días después de que el evento ocurriese, en noviembre del 2019. Esto se debe a que había un glitch en los datos de este evento. La versión v1 tenía la estimación de la densidad espectral de la amplitud de deformación automática, que estaba afectada por el glitch. Esto se solucionó corrigiéndola manualmente en la versión v2.

Para obtener las distribuciones de probabilidad a posteriori tempranas del evento GW191103, se utilizó la forma de onda IMRPHENOMPv2 y el programa `lalinferencemcmc`.

Por otro lado, para obtener estas distribuciones tempranas del evento GW191105, se utilizó la misma forma de onda, pero el algoritmo de Nested Sampling, configurado para utilizar 512 live points, que es un valor bastante bajo. Para ambos eventos se ha utilizado una versión preliminar de la calibración del detector. Las distribuciones de probabilidad a priori utilizadas

¹²Se han utilizado las distribuciones etiquetadas como `nocosmo`, que son los resultados originales sin la modificación extra de la distribución de probabilidad a priori de D_L , como sucede con las distribuciones etiquetadas como `cosmo`.

para obtener las distribuciones a posteriori tempranas de estos dos eventos fueron distintas a las utilizadas en las publicaciones oficiales, que son no nulas en un rango más pequeño. Sin embargo, para el cálculo de \mathcal{B}_U^L llevado a cabo en este trabajo, se han usado los mismos rangos para estas distribuciones que en las secciones anteriores (ver Tabla 2). Se ha tenido acceso a estas distribuciones tempranas para ambos eventos a través del LIGO Data Grid.

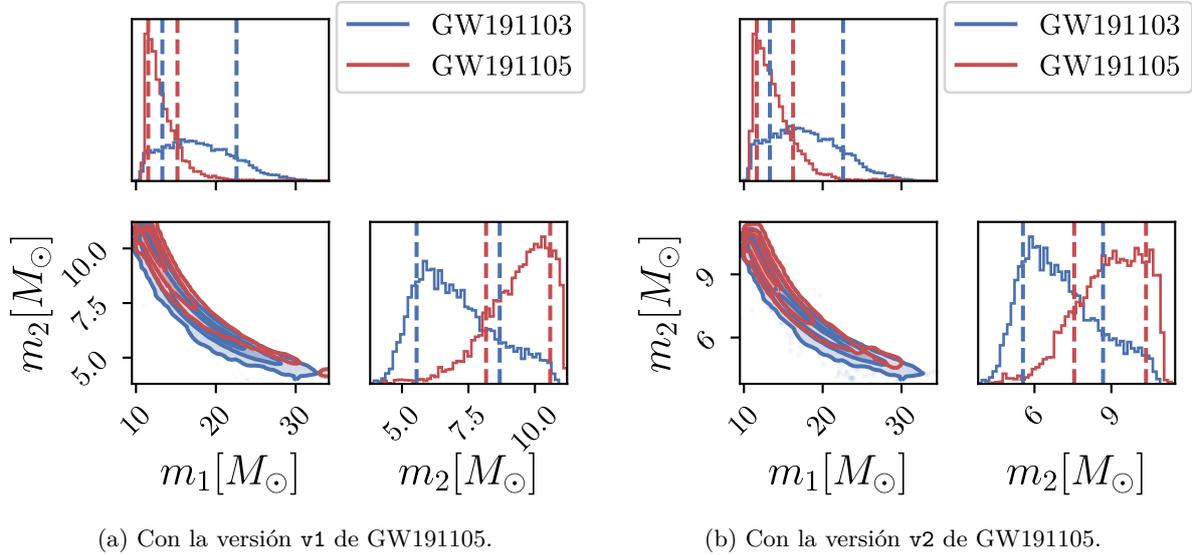


Figura 14: Corner plots para el par de eventos GW191103 y GW191105, utilizando la versión v1 para GW191105 (Figura 14a) y la versión v2 (Figura 14b). La forma de onda utilizada en todas las distribuciones de probabilidad a posteriori que se representan ha sido IMRPHENOMPv2.

Los factores \mathcal{B}_U^L encontrados en este trabajo para las distribuciones de probabilidad a posteriori oficiales se muestran en la Tabla 4, así como el skyoverlap. En la Figura 17a (parte de una comparación con más formas de onda que se discutirán en la Sección 6.5) se muestra el corner plot para el par de eventos GW191103 y GW191105, utilizando las distribuciones de probabilidad a posteriori oficiales para la forma de onda IMRPhenomXPHM. Por otra parte, en la Tabla 5 se muestran \mathcal{B}_U^L y el skyoverlap encontrados en este trabajo cuando se utilizan las distribuciones de probabilidad a posteriori tempranas para este par de eventos, para las dos versiones de las distribuciones de GW191105 (v1 y v2). En la Figura 14a se muestra el corner plot para el par de eventos GW191103 y GW191105, utilizando la versión v1 para GW191105 y, en la Figura 14b, se muestra el corner plot utilizando la versión v2 para este mismo evento. La forma de onda utilizada en todas las distribuciones de probabilidad a posteriori que se representan ha sido IMRPHENOMPv2.

Forma de onda	IMRPHENOMXPHM	SEOBNRv4PHM
\mathcal{B}_U^L	1081.40	447.10
Skyoverlap	0.1651	0.0662

Tabla 4: Valores del factor \mathcal{B}_U^L y el skyoverlap cuando se utilizan las formas de onda IMRPHENOMXPHM y SEOBNRv4PHM disponibles para la publicación oficial de las distribuciones de probabilidad a posteriori de los eventos GW191103 y GW191105.

Versión de GW191105	v1	v2
\mathcal{B}_U^L	2069.30	3690.36
Skyoverlap	0.1041	0.0723

Tabla 5: Valores del factor \mathcal{B}_U^L y el skyoverlap obtenidos con las distribuciones de probabilidad a posteriori tempranas del par de eventos GW191103 y GW191105 cuando se utilizan las dos versiones de distribuciones disponibles para el evento GW191105 (v1 y v2).

Tras los análisis con este par de eventos, se concluye que los resultados tempranos dan un valor de \mathcal{B}_U^L que los hace buenos candidatos para haber sufrido el fenómeno de lensing, aunque este factor es dos o tres veces mayor cuando se utilizan los resultados tempranos que cuando se utilizan los oficiales con la forma de onda IMRPhenomXPHM. En comparación con los valores obtenidos al utilizar SEOBNRv4PHM, los resultados tempranos dan unos \mathcal{B}_U^L unas cinco u ocho veces mayores.

6.5. Estimación de parámetros para los eventos GW191103 y GW191105

Como se desea tener una comparación entre las distribuciones de probabilidad a posteriori obtenidas para distintas formas de onda y comparar el efecto que tienen sobre el factor \mathcal{B}_U^L , se ha hecho en este trabajo una estimación de estas distribuciones para las formas de onda IMRPHENOMXAS, IMRPHENOMXHM y IMRPHENOMXP. Para este propósito, se han utilizando las distribuciones de probabilidad a priori dadas por [20], así como los mismos datos, versión de calibración y densidades espectrales de la amplitud debida a la deformación. Los paquetes de python utilizados han sido `dynesty` [27] y `parallel bilby` [48], que implementan el algoritmo de Nested Sampling. Como distribuciones de probabilidad a priori para la forma de onda IMRPHENOMXP se ha hecho uso de las mismas que en los resultados oficiales. Sin embargo, para las formas de onda IMRPHENOMXAS y IMRPHENOMXHM, se han sustituido las distribuciones de probabilidad a priori de los espines por las de los espines alineados (ver Tablas 6 y 7 para un resumen de los rangos de las distribuciones de probabilidad a priori utilizadas). Se ha utilizado un valor de 1024 live points y un parámetro `nact`¹³ igual a 10 para los cálculos de las distribuciones de GW191103 con las formas de onda IMRPHENOMXAS y IMRPHENOMXHM y para GW191105 con la forma de onda IMRPHENOMXAS. El resto de cálculos se han realizado utilizando un valor de 2048 live points y un `nact` igual a 20.

chirp mass [M_\odot]	mass ratio	a_1	a_2	α	$\cos \delta$	$\sin \theta_{JN}$	ψ	ϕ_0	ϕ_{12}	ϕ_{JL}
5.63	0.05	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0
11.42	1	0.99	0.99	2π	1	1	π	2π	2π	2π

Tabla 6: Rangos entre los cuales las distribuciones de probabilidad a priori de los distintos parámetros utilizados para hacer la estimación de las distribuciones de probabilidad a posteriori para el evento GW191103 son distintas de cero y uniformes. El parámetro D_L posee una distribución de probabilidad a priori no uniforme $\propto D_L^2$ entre 10 y 10000 Mpc, pero no se utiliza en los análisis de la integral de solapamiento. Los parámetros ϕ_{12} y ϕ_{JL} tampoco han sido utilizados en el análisis de la integral de solapamiento porque típicamente aportan poca información.

¹³El número de tiempos de autocorrelación que tarda una cadena de Markov-Chain Monte Carlo en encontrar un nuevo live point.

chirp mass [M_\odot]	mass ratio	a_1	a_2	α	$\cos \delta$	$\sin \theta_{JN}$	ψ	ϕ_0	ϕ_{12}	ϕ_{JL}
6.68	0.05	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0
12.78	1	0.99	0.99	2π	1	1	π	2π	2π	2π

Tabla 7: Rangos entre los cuales las distribuciones de probabilidad a priori de los distintos parámetros utilizados para hacer la estimación de las distribuciones de probabilidad a posteriori para el evento GW191105 son distintas de cero y uniformes. Esta vez D_L va de 100 a 10000 Mpc.

Para tener una idea de cuánto tiempo tardó el superordenador Picasso utilizado en hacer estos cálculos se toma el ejemplo de la distribución de probabilidad a posteriori del evento GW191103 cuando se utiliza la forma de onda IMRPHENOMXAS¹⁴, que demoró 1 hora y 42 minutos con sus 128 nodos procesando en paralelo, lo que hace un tiempo total de 9 días. Otro ejemplo es la distribución de probabilidad a posteriori de GW191105 cuando se utiliza la forma de onda IMRPHENOMXHM¹⁵, que tomó 15 horas y 54 minutos con 128 nodos en paralelo, con lo que el tiempo total es 84 días, mucho mayor que con la configuración comentada en el primer ejemplo.

Para comparar, se muestran los corner plots para los eventos GW191103 (Figura 15) y GW191105 (Figura 16), utilizando las distribuciones de probabilidad a posteriori oficiales para la forma de onda IMRPhenomXPHM y las estimadas en este trabajo para las formas de onda IMRPHENOMXAS, IMRPHENOMXHM y IMRPHENOMXP (esta vez se muestra un conjunto extendido de parámetros). En ellos se puede observar que, para ambos eventos, las masas coinciden bastante cuando se utilizan las cuatro formas de ondas. En el caso de las magnitudes de los espines, a_1 y a_2 , se observa que las formas de onda IMRPhenomXPHM y IMRPHENOMXP dan distribuciones de probabilidad a posteriori similares para ambos eventos. Lo mismo ocurre entre las distribuciones para IMRPHENOMXAS y IMRPHENOMXHM. Las distribuciones de a_2 para ambos eventos no aportan demasiada información. Sin embargo, la distribución de a_1 para el evento GW191103 tiene un pico interesante lejos de cero, mientras que en el caso de GW191105, su valor es consistente con una magnitud de espín nula.

Por otra parte, también se muestran los corner plots de las masas para el par de eventos GW191103 y GW191105, utilizando las distribuciones de probabilidad a posteriori oficiales para la forma de onda IMRPhenomXPHM (Figura 17a) y las estimadas en este trabajo para las formas de onda IMRPHENOMXAS, IMRPHENOMXHM y IMRPHENOMXP (Figuras 17b, 17c y 17d, respectivamente).

En la Tabla 8 se recogen los valores del factor \mathcal{B}_U^L y el skyoverlap cuando se utilizan las distribuciones de probabilidad a posteriori estimadas en este trabajo con las formas de onda IMRPHENOMXAS, IMRPHENOMXHM y IMRPHENOMXP para los eventos GW191103 y GW191105.

Forma de onda	IMRPHENOMXAS	IMRPHENOMXHM	IMRPHENOMXP
\mathcal{B}_U^L	1299.41	3041.98	554.34
Skyoverlap	0.1009	0.1222	0.1177

Tabla 8: Valores del factor \mathcal{B}_U^L y el skyoverlap cuando se utilizan las distribuciones de probabilidad a posteriori estimadas en este trabajo con las formas de onda IMRPHENOMXAS, IMRPHENOMXHM y IMRPHENOMXP para los eventos GW191103 y GW191105.

¹⁴Recordemos que se utilizaron 1024 live points y 10 tiempos de autocorrelación.

¹⁵Para este cálculo se ha utilizado una configuración con 2048 live points y 20 tiempos de autocorrelación.

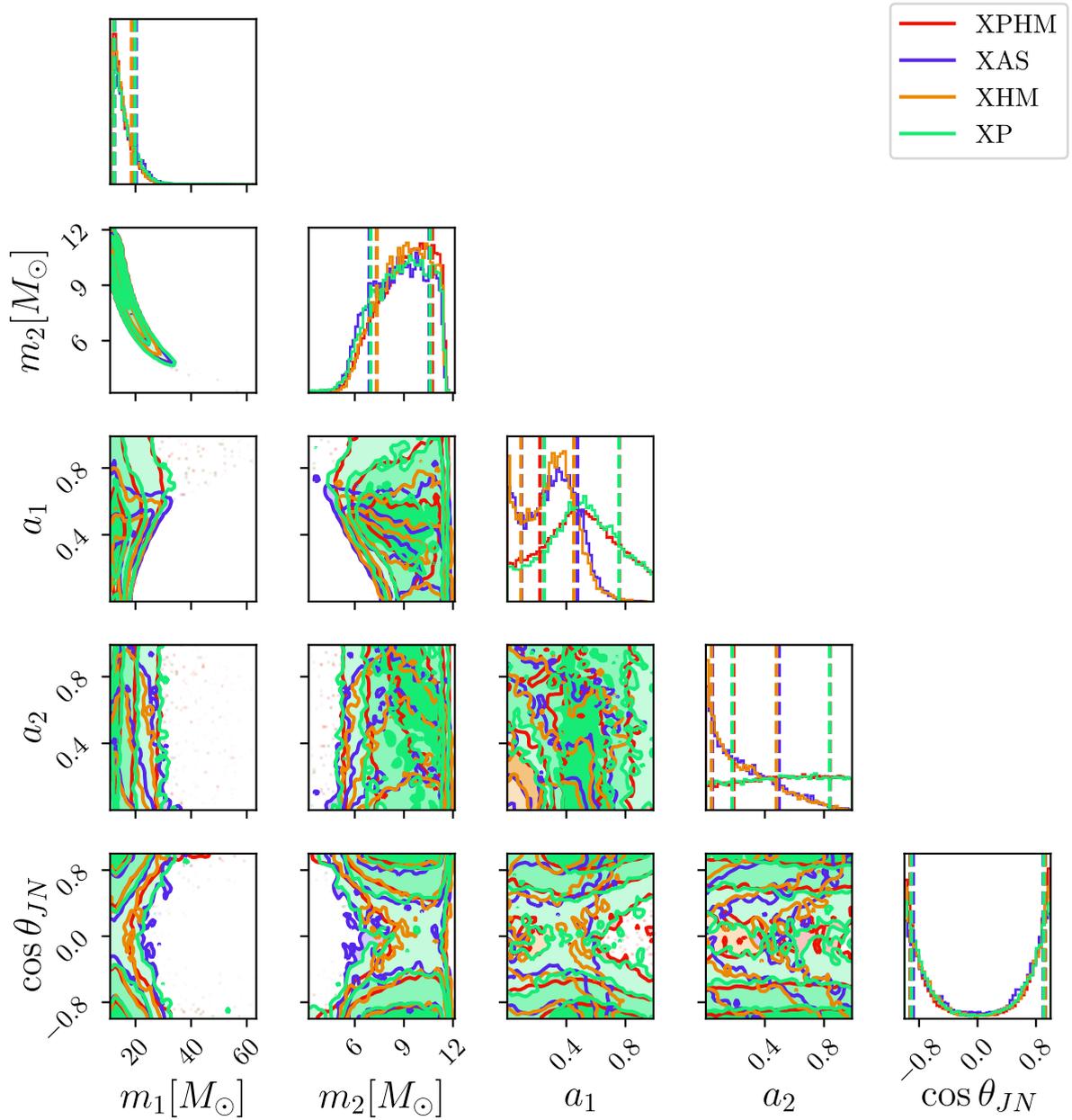


Figura 15: Corner plot para el evento GW191103 utilizando las distribuciones de probabilidad a posteriori oficiales para la forma de onda IMRPhenomXPHM y las estimadas en este trabajo para las formas de onda IMRPhenomXAS, IMRPhenomXHM y IMRPhenomXP.

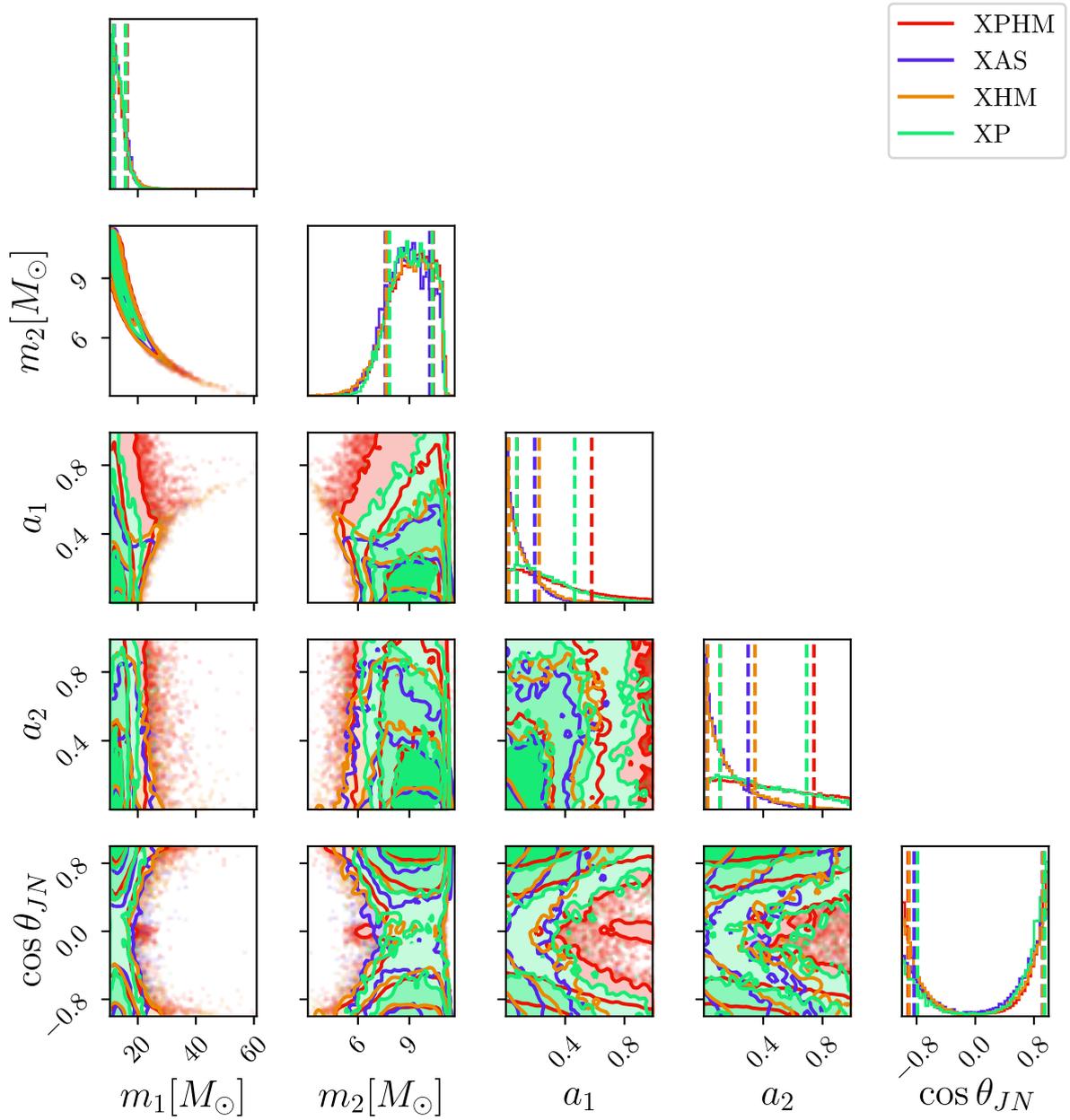


Figura 16: Corner plot para el evento GW191105 utilizando las distribuciones de probabilidad a posteriori oficiales para la forma de onda IMRPhenomXPHM y las estimadas en este trabajo para las formas de onda IMRPhenomXAS, IMRPhenomXHM y IMRPhenomXP.

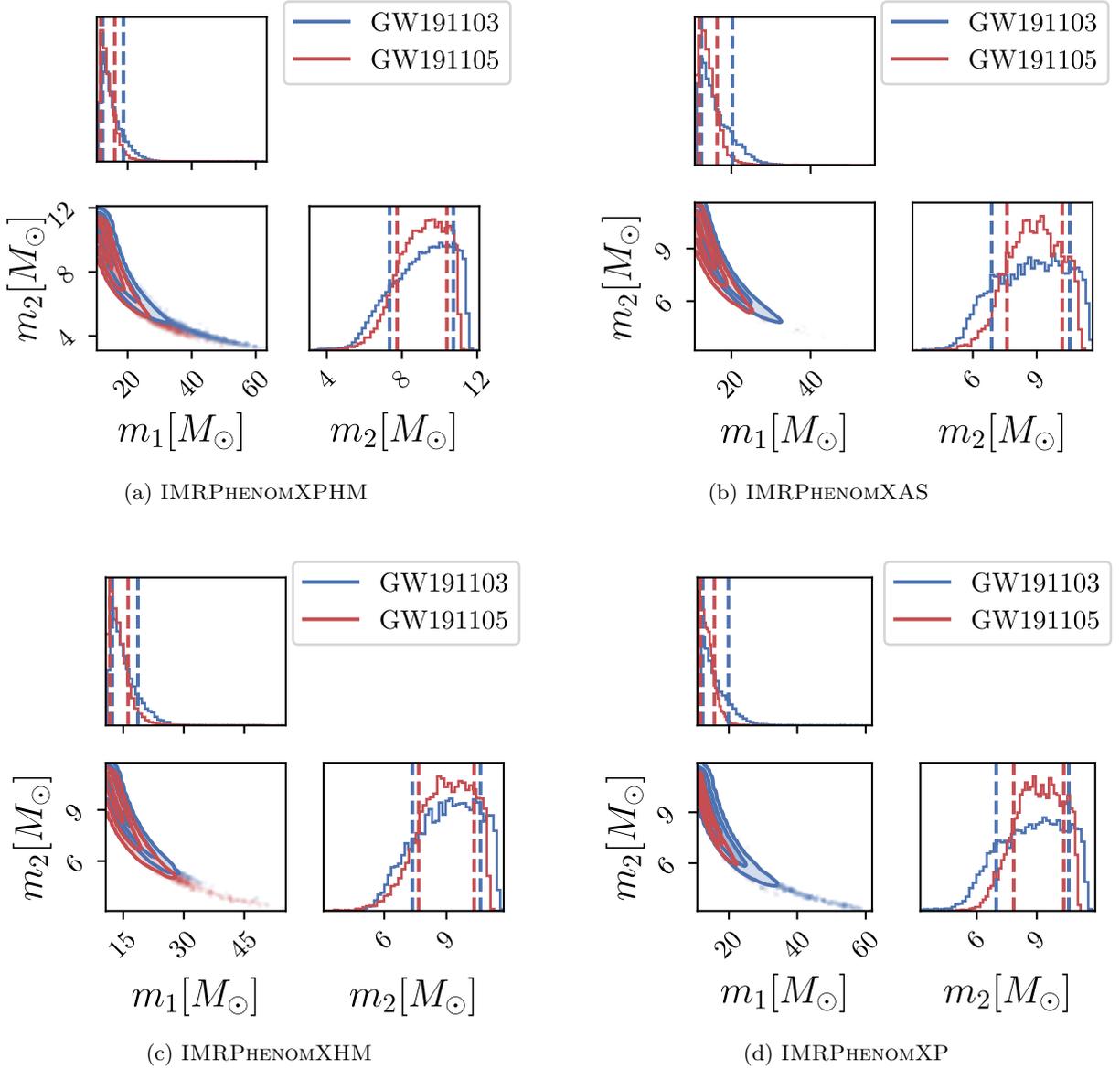


Figura 17: Corner plots para el par de eventos GW191103 y GW191105, utilizando las distribuciones de probabilidad a posteriori oficiales para la forma de onda IMRPhenomXPHM (Figura 17a) y las estimadas en este trabajo para las formas de onda IMRPhenomXAS, IMRPhenomXHM y IMRPhenomXP (Figuras 17b, 17c y 17d, respectivamente).

Se observa que el acuerdo entre las distribuciones de probabilidad a posteriori oficiales y las obtenidas en esta sección es muy grande. Sin embargo, los factores \mathcal{B}_V^L obtenidos con las distribuciones estimadas en este trabajo para tres formas de onda distintas pueden llegar a tener una diferencia de hasta un factor seis, como sucede cuando se comparan los factores obtenidos con IMRPhenomXHM y IMRPhenomXP.

7. Conclusiones

Este trabajo se ha centrado en estudiar el factor de Bayes \mathcal{B}_V^L con el fin de identificar pares de eventos de ondas gravitacionales candidatos a haber sufrido el fenómeno de lensing.

Se ha podido comprobar que, pese a que el método de clustered KDE parece más adecuado para calcular la integral de solapamiento para la parte de la posición en el cielo que el método de

los histogramas, este último ha resultado ser mucho más rápido, produciendo resultados similares al primero a partir de un número de puntos tomados de las distribuciones cercano a los 10000. También se ha demostrado que este cálculo converge a partir de unas 20000 muestras con ambos métodos. Lo mismo ocurre con el cálculo de $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}^L$ como el producto del skyoverlap y la integral de solapamiento obtenida con los parámetros intrínsecos (reescalando siempre con el volumen dado por el rango de las distribuciones de probabilidad a priori), aunque su convergencia no es tan clara como la del skyoverlap.

En este proyecto se han reproducido los resultados de $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}^L$ que aparecen en [32]. En cuanto a las diferencias en los factores $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}^L$ y el skyoverlap encontrados para las distintas formas de onda del GWTC-2, se ha podido determinar que la forma de onda IMRPHENOMD puede dar, para algunos pares de eventos, los valores más bajos de $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}^L$, algo que puede deberse a que en los cálculos de las distribuciones de probabilidad a posteriori realizados con este modelo se ha considerado un espín nulo para los dos agujeros negros.

Por otra parte, no se han podido obtener valores consistentes de $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}^L$ entre distintas formas de onda para el mismo par de eventos, aunque sí ha sido así para el skyoverlap, que no ha variado mucho entre distintas formas de onda. En el análisis del par de eventos GW190706 y GW190719 se ha comprobado que la elección de una forma de onda con o sin modos de orden mayor puede tener una gran influencia en $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}^L$.

En cuanto al par de eventos GW191103 y GW191105, se ha comprobado que los factores $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}^L$ son mayores cuando se utilizan las versiones tempranas de las distribuciones de probabilidad a posteriori con la forma de onda IMRPHENOMPv2 que cuando se utilizan las distribuciones oficiales más recientes, con las formas de onda IMRPHENOMXPHM y SEOBNRv4PHM. Sin embargo, los valores de este factor con las distribuciones tempranas son lo suficientemente consistentes como para haber considerado a este par de eventos un buen candidato a haber sufrido lensing. Esto sugiere que, en un futuro, sería posible encontrar candidatos a lensing con resultados tempranos.

Con la estimación de parámetros realizada en este proyecto, se ha podido comprobar que la elección del número de live points y el número de tiempos de autocorrelación a la hora de ejecutar el programa `parallel bilby` con el paquete de muestreo `dynesty` tiene un impacto enorme en el tiempo empleado para los cálculos, aunque las diferencias en la forma de las distribuciones de probabilidad a posteriori obtenidas con las distintas configuraciones no hayan sido muy notables en el caso de los eventos GW191103 y GW191105.

Es necesario un estudio sistemático con muchos pares de eventos y diferentes formas de onda, lo que requeriría muchos recursos computacionales. En este trabajo se ha demostrado el impacto que tiene la elección de una forma de onda u otra sobre el resultado de la estadística empleada para encontrar candidatos al lensing.

Referencias

- [1] B. P. Abbott *et al.*, “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 116, no. 6, p. 061102, 2016.
- [2] M. Bartelmann, “TOPICAL REVIEW Gravitational lensing,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 27, no. 23, p. 233001, Dec. 2010.
- [3] K. Haris, A. K. Mehta, S. Kumar, T. Venumadhav, and P. Ajith, “Identifying strongly lensed gravitational wave signals from binary black hole mergers,” 7 2018. [Online]. Disponible en: <https://arxiv.org/abs/1807.07062>
- [4] A. Einstein, “Naherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation,” *Sitzungsberichte der Koniglich Preuischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, pp. 688–696, Jan. 1916.

- [5] A. Buonanno, “Gravitational waves,” in *Les Houches Summer School - Session 86: Particle Physics and Cosmology: The Fabric of Spacetime*, 9 2007.
- [6] A. Le Tiec and J. Novak, “Theory of gravitational waves,” in *An overview of gravitational waves*. World Scientific, 2017, ch. 1, pp. 1–41. [Online]. Disponible en: <https://arxiv.org/abs/1607.04202>
- [7] G. Pratten, S. Husa, C. Garcia-Quiros, M. Colleoni, A. Ramos-Buades, H. Estelles, and R. Jaume, “Setting the cornerstone for a family of models for gravitational waves from compact binaries: The dominant harmonic for nonprecessing quasicircular black holes,” *Phys. Rev. D*, vol. 102, no. 6, p. 064001, 2020.
- [8] L. Blanchet, “Gravitational Radiation from Post-Newtonian Sources and Inspiralling Compact Binaries,” *Living Rev. Rel.*, vol. 17, p. 2, 2014.
- [9] T. Damour and A. Nagar, “The Effective-One-Body Approach to the General Relativistic Two Body Problem,” *Lect. Notes Phys.*, vol. 905, pp. 273–312, 2016.
- [10] C. Palenzuela, “Introduction to Numerical Relativity,” *Front. Astron. Space Sci.*, vol. 7, p. 58, 2020.
- [11] K. D. Kokkotas and B. G. Schmidt, “Quasinormal modes of stars and black holes,” *Living Rev. Rel.*, vol. 2, p. 2, 1999.
- [12] C. García-Quirós, M. Colleoni, S. Husa, H. Estellés, G. Pratten, A. Ramos-Buades, M. Mateu-Lucena, and R. Jaume, “Multimode frequency-domain model for the gravitational wave signal from nonprecessing black-hole binaries,” *Phys. Rev. D*, vol. 102, no. 6, p. 064002, 2020.
- [13] G. Pratten *et al.*, “Computationally efficient models for the dominant and subdominant harmonic modes of precessing binary black holes,” *Phys. Rev. D*, vol. 103, no. 10, p. 104056, 2021.
- [14] “What are gravitational waves?” [Online]. Disponible en: <https://www.ligo.caltech.edu/page/what-are-gw>
- [15] “LIGO-Virgo-KAGRA Cumulative Detection plot.” [Online]. Disponible en: <https://dcc.ligo.org/G2102395>
- [16] B. P. Abbott *et al.*, “Binary Black Hole Mergers in the first Advanced LIGO Observing Run,” *Phys. Rev. X*, vol. 6, no. 4, p. 041015, 2016, [Erratum: Phys.Rev.X 8, 039903 (2018)].
- [17] B. P. Abbott *et al.*, “GWTC-1: A Gravitational-Wave Transient Catalog of Compact Binary Mergers Observed by LIGO and Virgo during the First and Second Observing Runs,” *Phys. Rev. X*, vol. 9, no. 3, p. 031040, 2019.
- [18] B. P. Abbott *et al.*, “GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 119, no. 16, p. 161101, 2017.
- [19] B. P. Abbott *et al.*, “GW190425: Observation of a Compact Binary Coalescence with Total Mass $\sim 3.4M_{\odot}$,” *Astrophys. J. Lett.*, vol. 892, no. 1, p. L3, 2020.
- [20] R. Abbott *et al.*, “GWTC-3: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the Second Part of the Third Observing Run,” 11 2021. [Online]. Disponible en: <https://arxiv.org/abs/2111.03606>
- [21] “LIGO’s dual detectors.” [Online]. Disponible en: <https://www.ligo.caltech.edu/page/ligo-detectors>

- [22] M. Bailes *et al.*, “Gravitational-wave physics and astronomy in the 2020s and 2030s,” *Nature Rev. Phys.*, vol. 3, no. 5, pp. 344–366, 2021.
- [23] J. Aasi *et al.*, “Advanced LIGO,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 32, p. 074001, 2015.
- [24] “LIGO Livingston.” [Online]. Disponible en: <https://www.ligo.caltech.edu/image/ligo20150731c>
- [25] “LIGO Hanford.” [Online]. Disponible en: <https://www.ligo.caltech.edu/WA>
- [26] J. Skilling, “Nested sampling for general Bayesian computation,” *Bayesian Analysis*, vol. 1, no. 4, pp. 833 – 859, 2006. [Online]. Disponible en: <https://doi.org/10.1214/06-BA127>
- [27] J. S. Speagle, “dynesty: a dynamic nested sampling package for estimating bayesian posteriors and evidences,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 493, no. 3, pp. 3132–3158, feb 2020. [Online]. Disponible en: <https://doi.org/10.1093%2Fmnr%2Fstaa278>
- [28] P. Schneider, *Extragalactic Astronomy and Cosmology: An introduction*. Springer-Verlag, 2006.
- [29] M. Oguri, “Strong gravitational lensing of explosive transients,” *Rep. Prog. Phys.*, vol. 82, no. 12, p. 126901, Dec. 2019.
- [30] J. M. Ezquiaga, D. E. Holz, W. Hu, M. Lagos, and R. M. Wald, “Phase effects from strong gravitational lensing of gravitational waves,” *Phys. Rev. D*, vol. 103, no. 6, p. 064047, 2021.
- [31] O. A. Hannuksela, K. Haris, K. K. Y. Ng, S. Kumar, A. K. Mehta, D. Keitel, T. G. F. Li, and P. Ajith, “Search for gravitational lensing signatures in LIGO-Virgo binary black hole events,” *Astrophys. J. Lett.*, vol. 874, no. 1, p. L2, 2019.
- [32] R. Abbott *et al.*, “Search for Lensing Signatures in the Gravitational-Wave Observations from the First Half of LIGO–Virgo’s Third Observing Run,” *Astrophys. J.*, vol. 923, no. 1, p. 14, 2021.
- [33] R. Abbott *et al.*, “Search for lensing signatures in the gravitational-wave observations from LIGO-Virgo’s third observing run,” en preparación. [Online]. Disponible en: <https://dcc.ligo.org/P2200031>
- [34] S. Goyal, H. D., S. J. Kapadia, and P. Ajith, “Rapid identification of strongly lensed gravitational-wave events with machine learning,” *Phys. Rev. D*, vol. 104, no. 12, p. 124057, 2021.
- [35] R. K. L. Lo and I. Magaña Hernandez, “A Bayesian statistical framework for identifying strongly-lensed gravitational-wave signals,” 4 2021. [Online]. Disponible en: <https://arxiv.org/abs/2104.09339>
- [36] K. Haris *et al.*, “Strong lensing search in LIGO/Virgo events using posterior overlap.” [Online]. Disponible en: https://git.ligo.org/haris-k/strong_lensing_search
- [37] Y.-C. Chen, “A tutorial on kernel density estimation and recent advances,” 2017. [Online]. Disponible en: <https://arxiv.org/abs/1704.03924>
- [38] A. Bohé, M. Hannam, S. Husa, F. Ohme, M. Puerrer, and P. Schmidt, “PhenomPv2 - Technical Notes for LAL Implementation,” LIGO Project, Tech. Rep. LIGO-T1500602, 2016. [Online]. Disponible en: <https://dcc.ligo.org/LIGO-T1500602>

- [39] M. Hannam, P. Schmidt, A. Bohé, L. Haegel, S. Husa, F. Ohme, G. Pratten, and M. Pürrer, “Simple Model of Complete Precessing Black-Hole-Binary Gravitational Waveforms,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 113, no. 15, p. 151101, 2014.
- [40] L. P. Singer and L. R. Price, “Rapid bayesian position reconstruction for gravitational-wave transients,” *Phys. Rev. D*, vol. 93, p. 024013, Jan 2016. [Online]. Disponible en: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.024013>
- [41] R. Abbott *et al.*, “GWTC-2: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the First Half of the Third Observing Run,” *Phys. Rev. X*, vol. 11, p. 021053, 2021.
- [42] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, “GWTC-2 Data Release: Parameter Estimation Samples and Skymaps,” tech.report LIGO-P2000223. [Online]. Disponible en: <https://dcc.ligo.org/LIGO-P2000223/public>
- [43] S. Husa, S. Khan, M. Hannam, M. Pürrer, F. Ohme, X. Jiménez Forteza, and A. Bohé, “Frequency-domain gravitational waves from nonprecessing black-hole binaries. I. New numerical waveforms and anatomy of the signal,” *Phys. Rev. D*, vol. 93, no. 4, p. 044006, 2016.
- [44] S. Khan, S. Husa, M. Hannam, F. Ohme, M. Pürrer, X. Jiménez Forteza, and A. Bohé, “Frequency-domain gravitational waves from nonprecessing black-hole binaries. II. A phenomenological model for the advanced detector era,” *Phys. Rev. D*, vol. 93, no. 4, p. 044007, 2016.
- [45] Y. Pan, A. Buonanno, A. Taracchini, L. E. Kidder, A. H. Mroué, H. P. Pfeiffer, M. A. Scheel, and B. Szilágyi, “Inspiral-merger-ringdown waveforms of spinning, precessing black-hole binaries in the effective-one-body formalism,” *Phys. Rev. D*, vol. 89, no. 8, p. 084006, 2014.
- [46] S. Ossokine *et al.*, “Multipolar Effective-One-Body Waveforms for Precessing Binary Black Holes: Construction and Validation,” *Phys. Rev. D*, vol. 102, no. 4, p. 044055, 2020.
- [47] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration and KAGRA Collaboration, “GWTC-3: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the Second Part of the Third Observing Run - Parameter estimation data release,” Nov. 2021. [Online]. Disponible en: <https://doi.org/10.5281/zenodo.5546663>
- [48] R. J. E. Smith, G. Ashton, A. Vajpeyi, and C. Talbot, “Massively parallel Bayesian inference for transient gravitational-wave astronomy,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 498, no. 3, pp. 4492–4502, 2020.