



**Universitat de les
Illes Balears**

Facultat de ciències

Memòria del Treball de Fi de Grau

Sistemes quàntics forçats periòdicament

Francesc Bonnín Ripoll

Grau de Física

Any acadèmic 2013-14

DNI de l'alumne: 43189877V

Treball tutelat per David Sánchez Martín
Departament de Física

S'autoritza la Universitat a incloure el meu treball en el Repositori Institucional per a la seva consulta en accés obert i difusió en línia, amb finalitats exclusivament acadèmiques i d'investigació

Paraules clau del treball:

Transport quàntic, potencial temporalment periòdic, transport assistit de fotons, bombeig d'electrons.

Resum

En aquest treball hem duit a terme l'estudi del comportament de sistemes quàntics forçats periòdicament mitjançant un camp elèctric. Concretament hem estudiat el transport electrònic sota l'aplicació d'un potencial barrera tipus delta oscil·lant i hem investigat que comporta la dependència temporal que suposen aquests forçaments, com ara l'absorció i emissió de quants d'energia, fenomen anomenat **transport assistit de fotons**. Per altra banda hem fet el mateix estudi per dobles barreres tipus delta oscil·lants i hem corroborat l'existència del fenomen de **bombeig d'electrons**, del qual, mitjançant l'aplicació del forçament a partir d'un potencial asimètric, hem vist que pot dur a terme a un corrent elèctric net si les amplituds d'aquest forçament són distintes o si s'hi aplica un desfase, és a dir, es romp la simetria espacial.

Resumen

En este trabajo hemos llevado a cabo el estudio del comportamiento de sistemas cuánticos forzados periódicamente mediante un campo eléctrico. Concretamente hemos estudiado el transporte electrónico bajo la aplicación de un potencial barrera tipo delta oscilante y hemos investigado que comporta la dependencia temporal que suponen estos forzamientos, como ahora la absorción o la emisión, fenómeno llamado **transporte asistido de fotones**. Por otro lado hemos hecho el mismo estudio para dobles barreras tipo delta oscilantes y hemos corroborado la existencia del fenómeno de **bombeo de electrones**, del cual, mediante la aplicación del forzamiento a partir de un potencial asimétrico, hemos visto que puede llevar a cabo una corriente eléctrica neta si las amplitudes de este forzamiento son distintas o si se aplica un desfase, es decir, se rompe la simetría espacial.

Abstract

In this work we have studied the behavior of a periodically forced quantum system due to an electric field. On the one hand, we have investigated the behavior of an electron through an oscillating delta barrier potential and have discussed the main effects of this time-dependent field, such as the absorption and emission of energy quanta, a regime generally named **Photon-Assisted Transport**. On the other hand, we have also considered an oscillating double delta barrier potential and we have confirmed the existence of the **Electron Pumping** phenomenon, which, by applying the forcing to an asymmetric potential, implies a net electric current if the potential amplitudes are different or if there exists a phase difference that breaks the spatial symmetry.

Índex

1	Introducció	1
1.1	Transport quàntic i nanoestructures	1
1.2	Equació de Schrödinger	2
1.3	Potencials dependents del temps	3
1.4	Teoremes de Bloch i Floquet	3
1.5	Electron pumping	5
2	Barrera delta de Dirac oscil·lant	7
2.1	Model teòric	7
2.2	Condicions de continuïtat	8
2.3	Resolució	9
2.4	Resultats	9
3	Doble barrera delta de Dirac oscil·lant	13
3.1	Model teòric	13
3.2	Condicions de continuïtat	14
3.3	Resolució	15
3.4	Resultats	16
3.5	Tipus de transmissions	21
4	Conclusions	23
5	Referències	24

1 Introducció

1.1 Transport quàntic i nanoestructures

El transport quàntic està essent avui en dia una de les vies de desenvolupament, tant en l'àmbit tecnològic com en el científic, experimental i teòricament, que més s'estan explotant i és que, a mesura que es profunditza en el seu estudi, nous fenòmens sorgeixen i més profitosos són els resultats extrets, com ara el transport assistit de fotons o el confinament quàntic [1]. A més la seva aplicació en la nanotecnologia, la qual és transversal a totes les branques de la ciència des de la biologia fins l'enginyeria, és de gran importància. L'interès d'aquest estudi té dues vessants: fonamental, estudiar la dinàmica electrònica fora de l'equilibri, i aplicada, descobrir noves funcionalitats sense analogia amb dispositius clàssics. Un exemple d'aquests dispositius amb noves funcionalitats quàntiques és el díode d'efecte túnel ressonant [2].

Sabem que en les unions de les heteroestructures, que es defineixen com aquelles unions en les quals hi ha diferents semiconductors de diferents materials i, per tant, amb diferent *gap*, normalment *AlGaAs* i *GaAs*. Aquest *gap* d'energia fa doblegar les bandes fins que s'arriba a l'equilibri, acumulant així càrrega en la interfase de l'heteroestructura [3][4]. Aquesta acumulació crea un gas d'electrons d'alta mobilitat. Aquest sistema és de gran interès quan estam a baixes temperatures, ja que les propietats ondulatories dels electrons es mantenen distàncies més llargues i així la física quàntica dels electrons domina el seu comportament. Aquests sistemes són estudiats per veure les propietats que tenen l'origen en la coherència quàntica. Entre altres, les propietats més destacades són l'efecte Hall quàntic, la quantització de la conductància, el caos quàntic, etc [1][5].

L'exemple típic d'heteroestructura amb transport vertical és el díode d'efecte túnel ressonant. En la figura 1 podem veure un esquema de com és el diagrama de la banda de conducció d'aquest dispositiu, en el qual els electrons de conducció no veuen més que dues barreres quàntiques separades per un pou quadrat i l'estudi de la transmissió dels electrons a través d'aquests potencials és de gran interès per saber com poden ser els corrents en aquests dispositius i quins fenòmens s'hi duen a terme [5].

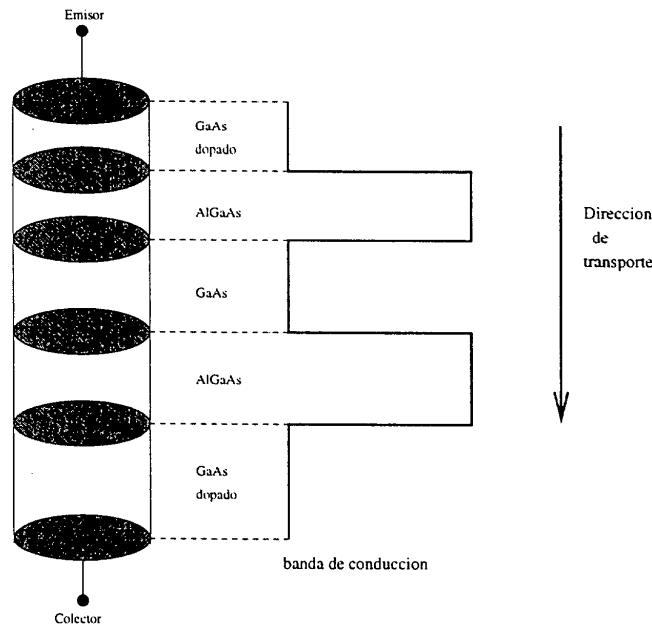


Figura 1: Diagrama de la banda de conducció per a una heteroestructura on podem veure les barreres de potencial i s'indica la direcció del moviment dels electrons de conducció. Extret de [3].

Aquest no és un problema senzill i la idealització d'aquest és la simplificació de les dues barreres quadrades a dues deltes de Dirac. A més dues deltes no estacionàries amb oscil·lació harmònica són una bona modelació per estudiar el corrent en un bombeig quàntic unidimensional.

A nivell experimental, no va ser fins els anys 90 que no sorgiren els primers experiments de transport assistit de fotons en semiconductors, sobretot per mor de les dificultats tècniques. En el transport vertical destaquen els experiments realitzats en dobles pous quàntics i superxarxes amb làsers molt intensos en el rang dels THz, que han aconseguit propietats molt interessants com ara la resistència negativa induïda per un camp extern [3][6][7], entre molts altres.

1.2 Equació de Schrödinger

L'evolució temporal d'un sistema quàntic ve donat per l'equació de Schrödinger en 1D [8].

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \mathcal{H} \Psi(x, t) \quad (1)$$

on \mathcal{H} és el hamiltonià, aquell observable que representa l'energia total d'un sistema, que serà igual a l'energia cinètica del sistema, $T = -\hbar^2/2m\partial^2/\partial x^2$, sumada a l'energia potencial d'aquest, V , que dependrà del problema que tractem. $\Psi(x, t)$ és la funció d'ona, és a dir, la funció que caracteritza totes les propietats d'un sistema físic.

El cas més senzill de resolució de l'equació de Schrödinger és el cas estacionari, on el potencial és independent del temps. Així, la funció d'ona pot ésser calculada mitjançant el mètode de separació de variables i la part temporal de la funció d'ona es redueix a un factor exponencial:

$$\Psi(x, t) = \psi(x) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \quad (2)$$

on E és l'energia total del sistema. Aleshores, l'equació de Schrödinger estacionària es redueix a un problema d'autovalors:

$$\mathcal{H}\psi = E\psi \quad (3)$$

on la resolució d'aquesta dependrà del tipus de potencial que hi hagi.

Cal afegir que la solució general serà una combinació lineal de les solucions que hem trobat, ja que l'equació estacionària ens dona un conjunt de solucionsm els autoestats $\psi_n(x)$, amb el corresponent conjunt d'autovalors E_n .

Així:

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \quad (4)$$

on els coeficients c_n ens descriuen la amplitud de probabilitat de que la partícula estigui a l'estat enèsim. A partir d'aquí, la resolució dependrà de cada tipus de potencial: pou quadrat infinit, partícula lliure, oscil·lador harmònic, etc [8].

Amb caràcter general, en la física quàntica es distingeixen dos tipus d'estat depenent del seu caràcter lligat o no. Donat que en la majoria de casos el potencial $V \rightarrow 0$ quan $x \rightarrow \pm\infty$, es considera que els estats lligats corresponen a $E < 0$ mentre que els estats de *scattering*, que són els que duen corrent, corresponen a $E > 0$. En el que segueix, i degut a que en aquest treball estam interessats en un problema de transport, tndrem en compte només els estats amb $E > 0$.

$$\begin{cases} E < 0 & \rightarrow \text{Estat lligat} \\ E > 0 & \rightarrow \text{Estat de scattering} \end{cases}$$

1.3 Potencials dependents del temps

La interacció amb camps externs dependents del temps en sistemes de poques dimensions condueix en molts de casos a noves formes de transport electrònic. La correlació entre els camps AC i el confinament quàntic ens mostren una enorme quantitat de nous fenòmens que es donen a estructures com el díode de túnel ressonant, les superxarxes o els punts quàntics [1][2][5].

Per a l'estudi d'aquests sistemes on el potencial depèn de la variable temporal, Tien-Gordon presentaren un model simple en el qual s'explicaven qualitativament el transport en nanoestructures guiades per un camp AC [9]. La raó d'això és que aquest model simple conté el principal ingredient del *photon-assisted tunneling*: la idea que un potencial dependent del temps $V_{AC} \cos \omega t$ pot induir a efectes túnel inelàstics quan els electrons intercanvien quants d'energia, és a dir fotons, amb el camp oscil·lant.

La primera configuració discutida consistia en un camp aplicat normal a la superfície d'una pel·lícula superconductora. El camp crea una diferència de potencial $V_{AC} \cos \omega t$ entre les diferents pel·lícules. S'ha de tenir en compte, i això és important, que afegim la dependència temporal però és espacialment uniforme. La dependència temporal no modifica la distribució espacial de la funció d'ona.

Això comporta un hamiltonià del tipus:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + eV_{AC} \cos \omega t \quad (5)$$

Mitjançant el mètode de separació de variables per a equacions diferencials ordinàries, la funció d'ona queda:

$$\Psi(x, t) = \Psi_0(x, t) e^{-\frac{ieV_{AC}}{\hbar\omega} \sin \omega t} \quad (6)$$

$$\Psi(x, t) = \Psi_0(x, t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \left(\frac{eV_{AC}}{\hbar\omega} \right) e^{-in\omega t} \quad (7)$$

on J_n és la funció de Bessel d'ordre enèsim i $\Psi_0(x, t)$ és la que ve definida en l'equació (2). Observam que la equació (7) difereix de l'equació (4) en que l'energia ja no és una constant, sinó que depèn d'un índex n i una freqüència ω . Ja que aquest plantejament és per un tipus de potencial molt concret, és necessari plantejar una formulació general que doni peu a la interpretació d'aquestes noves variables.

1.4 Teoremes de Bloch i Floquet

Si el potencial que aplicam al nostre sistema presenta una periodicitat, s'han formulat una sèrie de teoremes que faciliten la resolució del problema. En l'àmbit de la física de l'estat sòlid, és essencial conèixer el teorema de Bloch. Aquest estableix de quina manera han de ser les funcions d'ona dels electrons dins una xarxa periòdica i a partir d'aquest s'extreuen les equacions del moviment pels electrons de la xarxa [10].

Sigui un problema estacionari amb un potencial periòdic en l'espai $u_{\vec{k}}(\vec{r} + \vec{R}) = u_{\vec{k}}(\vec{r})$, el teorema de Bloch estableix que els autoestats ψ monoelèctronics venen donats per:

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} u_{\vec{k}}(\vec{r}) \quad (8)$$

Per tant, podem escriure que la funció d'ona complirà:

$$\psi(\vec{r} + \vec{R}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} \psi(\vec{r}) \quad (9)$$

I com la funció d'ona més general és superposició de tots els possibles estats, aleshores:

$$\psi(\vec{r}) = \sum_n c_n e^{i\vec{k}_n\cdot\vec{r}} \quad (10)$$

on la suma s'estén a totes les bandes d'índex n .

El teorema de Bloch introdueix aleshores el concepte de quasi-moment, també anomenat el moment cristal·lí, al vector d'ones \vec{k} . El quasi-moment, $\hbar\vec{k}$, és l'extensió natural del moment \vec{p} en el cas dels potencials periòdics, però no és ben bé un moment com s'entén en la mecànica, sinó que la interpretació correcte és que és un nombre quàntic característic de la simetria de translació d'un potencial simètric, així com \vec{p} ho és per l'espai lliure.

En el cas en que la periodicitat no és en l'espai sinó en el temps, ens és molt útil aquest teorema i pot ser extrapolat al que anomenam el teorema de Floquet [1][3].

A nivell matemàtic, que una funció sigui periòdica en una variable o en una altra no ens resulta un problema de gran magnitud. Aleshores anem a fer el tractament d'un potencial tal que:

$$V(t + T) = V(t) \quad (11)$$

on $T = 2\pi/\omega$ i ω és la freqüència pròpia del potencial. Aleshores el teorema de Floquet ens assegura, fent una comparació directa amb el de Bloch, que la funció d'ona d'un electró sotmès a aquest potencial compleix:

$$\Psi(x, t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \phi(x, t) \quad (12)$$

on ϕ , l'anomenat **estat de Floquet**, és solució de l'equació de Schrödinger i és periòdica amb el mateix període del potencial: $\phi(x, t + T) = \phi(x, t)$. Aleshores podem escriure:

$$\Psi(x, t + T) = e^{-i\frac{E}{\hbar}T} e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \phi(x, t + T) = e^{-i\frac{E}{\hbar}T} e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \phi(x, t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}T} \Psi(x, t) \quad (13)$$

De la mateixa manera que introduïm el concepte de quasi-moment en el cas espacial, en el temporal es defineix la **quasi-energia** \mathcal{E}_n . Passam de tenir una banda energètica a un conjunt de n bandes dinàmiques, anomenades *sidebands*. Això significa que E deixa de ser un bon número quàntic degut a que es romp la simetria de translació temporal, i és necessària la introducció de les quasi-energies per a poder satisfer l'equació d'autovalors.

Si feim un desenvolupament de Fourier dels estats de Floquet ens queda:

$$\phi_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-in\omega t} \quad (14)$$

I per tant la funció d'ona monoelectrònica:

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \psi(x) e^{-im\omega t} e^{-i\frac{E}{\hbar}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \psi(x) e^{-i\frac{\mathcal{E}_n}{\hbar}t} \quad (15)$$

I aquí és on deduïm que la quasi-energia és:

$$\mathcal{E}_n = E \pm n\hbar\omega \text{ on } n \in \mathbb{N} \quad (16)$$

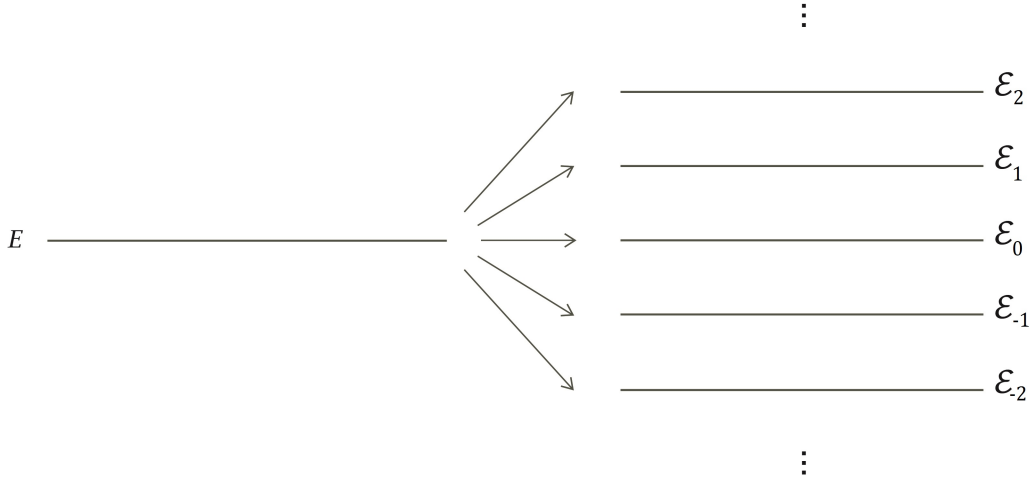


Figura 2: Diagrama quasi-energies després de l'aplicació d'un camp AC. Noteu la formació de les sidebands $n\hbar\omega$, equiespaiades entre elles.

En la figura 2 podem veure un esquema de com l'energia de l'electró es desdobra en diferents nivells degut a l'aplicació del potencial periòdic en el temps. Aquest teorema ens aporta generalitat i una millor interpretació que no pas l'equació (7), particular per a potencials harmònics en el temps i homogenis en l'espai. Tenim aleshores l'eina per a resoldre qualsevol potencial periòdic en el temps. Podem dir aleshores que les quasi-energies i els estats de Floquet són dos conceptes bàsics i, en definitiva, dues eines imprescindibles per descriure i entendre el transport assistit de fotons.

1.5 Electron pumping

L'aplicació d'un senyal AC a un semiconductor d'estructura heterogènia condueix a nous fenòmens com ara la destrucció coherent del túnel o la conductància absoluta negativa en el semiconductor amb voltatge positiu [1][11]. Un altre fenomen molt interessant associat amb els camps AC és el denominat *electron pumping*, o bombeig d'electrons, on s'aconsegueix la rectificació del corrent combinant conducció AC amb ja sigui absència de simetria d'inversió espacial del dispositiu, com la manca de simetria d'inversió temporal en la senyal AC. La idea bàsica és que l'*electron pumps* genera un corrent elèctric macroscòpic només partint de la controlada manipulació d'electrons mitjançant forçaments periòdics en el temps, com és el cas de l'aplicació d'un potencial AC i, a més, sense la necessitat d'aplicar ningun camp DC [1].

Aquest fenomen no és únicament quàntic, sinó que també es dona a nivell clàssic, per exemple en una bomba d'aigua, un sistema de pales per extreure aigua d'un riu o el tornavís d'Arquimedes, com el de la figura 3. El que estam fent és aplicar un forçament temporalment periòdic i aconseguir un flux net a partir d'aquest, tot i que la força neta, en mitjana, és zero.

$$F = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt = 0 \quad (17)$$

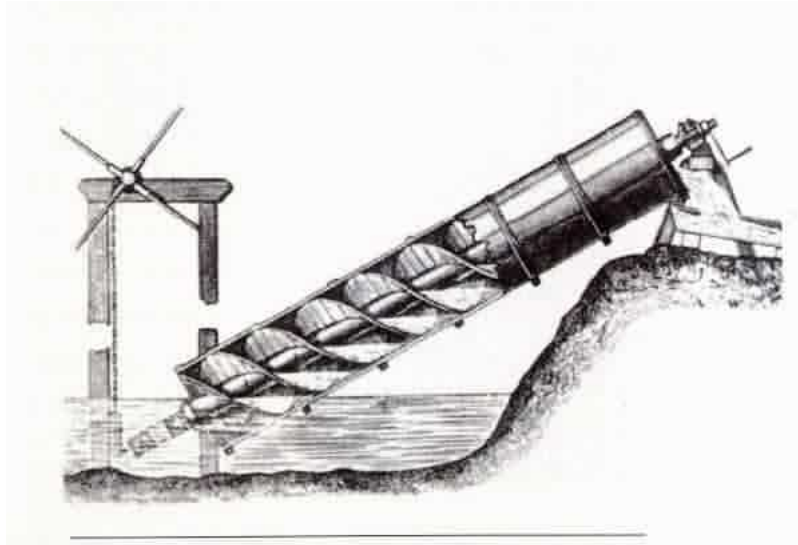


Figura 3: Tornavís d'Arquimedes, exemple clàssic de bombeig degut a un forçament periòdic amb ruptura de la simetria espacial degut a l'hèlix.

És fonamental que el sistema de bombeig rompi la simetria espacial per a que a terme el fenomen, per exemple l'hèlice del tornavís, per a que el flux de pujada i baixada siguin diferents durant una oscil·lació i es produeixi, aleshores, un flux net en la direcció desitjada.

2 Barrera delta de Dirac oscil·lant

El sistema més senzill que il·lustra els conceptes de quasi-energia i transport assistit de fotons, introduïts en el capítol anterior, consta d'un dispersor tipus delta de Dirac que oscil·la periòdicament en el temps. A partir d'aquí podrem analitzar la física que hi ha al darrera, aplicar conceptes del teorema de Floquet i extrapolat possibles interpretacions al sistema amb dues barreres oscil·lants que presentarem a continuació d'aquest.

2.1 Model teòric

El fet d'aplicar un camp AC localitzat ens condueix a un potencial localitzat en l'espai i periòdic en el temps.

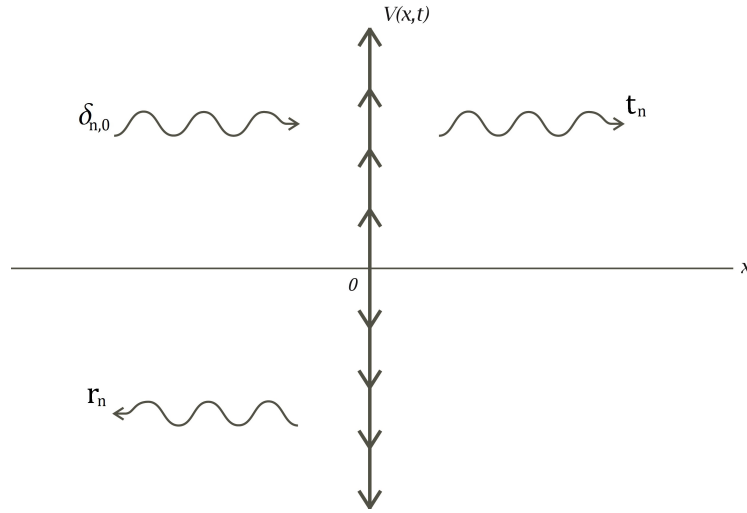


Figura 4: Esquema d'una delta oscil·lant. S'indiquen els fluxos incident, reflectit i transmès.

El nostre objectiu és analitzar quina és l'amplitud de transmissió d'un electró que passa a través d'aquest potencial, esquematitzat a la figura 4, i fer-ne les corresponents interpretacions. El potencial és:

$$V(x, t) = U_{AC} \delta(x) \sin \omega t \quad (18)$$

Així, el hamiltonià del sistema queda:

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U_{AC} \delta(x) \sin \omega t \quad (19)$$

L'equació de Schrödinger per a l'electró és:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U_{AC} \delta(x) \sin \omega t \right) \Psi(x, t) \quad (20)$$

El teorema de Floquet ens assegura que per a potencials periòdics aplicats, les funcions d'ona resultants seran proporcionals als anomenats estats de Floquet, que tendran la mateixa periodicitat del potencial

(vegeu l'eq. 12). Sabent, i comprovant, que aquestes funcions d'ona han de ser solucions de l'equació de Schrödinger, les proposam com a funció d'ona de l'electró:

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n(x) e^{-i\mathcal{E}_n t} \quad (21)$$

on $\mathcal{E}_n \equiv E + n\hbar\omega$, i $n \in (-\infty, \infty)$, és el que el teorema anomena quasi-energia del sistema[1][3]. La interpretació física de les quasi-energies és que aquestes indiquen, segons n , quants paquets d'energia $\hbar\omega$ són absorbits o emesos per l'electró, és a dir, la quantitat de fotons intercanviats amb el camp elèctric. Per $n < 0 \rightarrow \mathcal{E}_n = E - |n|\hbar\omega$ tenim emissió de n fotons, mentre que $n > 0 \rightarrow \mathcal{E}_n = E + |n|\hbar\omega$ implica l'absorció de n fotons. La transmissió d'electrons sense intercanvi de fotons s'anomena **canal elàstic**, ja que l'energia inicial i final de l'electró són les mateixes, mentre que les transmissions que impliquen absorció o emissió s'anomenen **canals inelàstics**, degut a que les energies inicial i final de l'electró són diferents.

Com podem aplicar separació de variables, ja tndrem calculada la part temporal. Els estats $\psi_n(x)$ compleixen l'equació de Schrödinger estacionària.

$$\frac{\hbar^2}{2m} \psi_n''(x) = \mathcal{E}_n \psi_n \quad (22)$$

Consideram estats de *scattering* en dues regions: $x < 0$ and $x > 0$.

$$\psi_{n,1}(x) = \delta_{n,0} e^{ik_n x} + r_n e^{-ik_n x} \quad (23a)$$

$$\psi_{n,2}(x) = t_n e^{ik_n x} \quad (23b)$$

on $k_n^2 = 2m\mathcal{E}_n/\hbar^2$. Per a que (23) representi estats propagants, és necessari que $k_n \in \mathbb{R}$, amb el que obtendríem la condició $\mathcal{E}_n \geq 0$. Això vol dir que tenim una restricció pels valors de n : $-E \geq n\hbar\omega$. Per a $n < 0$, és a dir per a que es doni emissió de fotons, necessitam una energia mínima per a que es produeixi el fenomen.

2.2 Condicions de continuïtat

Aplicam les condicions de continuïtat que imposa la $\delta(x)$:

$$\Psi_1(x, t)|_{x=0^-} = \Psi_2(x, t)|_{x=0^+} \quad (24)$$

$$\frac{\partial \Psi_2(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0^+} - \frac{\partial \Psi_1(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0^-} = \frac{2mU_{AC}}{\hbar^2} \sin \omega t \Psi(0, t) \quad (25)$$

que condueixen a:

$$\delta_{n0} + r_n = t_n \quad (26)$$

$$\delta_{n0} k_n = k_n t_n + q(t_{n+1} - t_{n-1}) \quad (27)$$

on $q \equiv mU_{AC}/\hbar^2$. Aquest paràmetre té les unitats del nombre d'ones, però no l'hem de confondre amb k . Es tracta d'una variable fixa que usarem per conveniència.

2.3 Resolució

Tenim n equacions que connecten el moment d'un electró amb l'amplitud de transmissió. La interpretació que li donam és que els canals de propagació estan acoblats. La transmissió de n fotons depèn de les transmissions de $n - 1$ i $n + 1$ fotons, les *sidebands* més properes. És convenient expressar (25) i (26) en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{-n} & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ 0 & -q & k_{-1} & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q & k_0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q & k_1 & q & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q & k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{-n} \\ \vdots \\ t_{-1} \\ t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$$

Llavors veim que un problema dependent del temps es converteix en n problemes estacionaris acoblats entre si i és aquí on resideix l'efectivitat del teorema de Floquet.

Abans de mostrar els resultats però, cal verificar la conservació del flux de probabilitat, el qual es defineix com:

$$j = \frac{\hbar}{m} \mathcal{I}[\psi^* \frac{\partial}{\partial x} \psi] \quad (28)$$

Això condueix a tres fluxos: incident, transmès i reflectit.

$$j_I = \frac{\hbar}{m} k_0 \quad (29)$$

$$j_R = -\frac{\hbar}{m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |r_n|^2 k_n \quad (30)$$

$$j_T = \frac{\hbar}{m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |t_n|^2 k_n \quad (31)$$

La conservació del flux implica:

$$j_I + j_R = j_T \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} (|t_n|^2 + |r_n|^2) k_n = k_0 \quad (32)$$

En tots els casos que, a continuació, es presenten hem comprovat que l'equació (31) es compleix independentment dels paràmetres elegits.

2.4 Resultats

Hem resolt aquest sistema usant mètodes numèrics, establint un n_{max} (*cutoff*), i per tant limitant el nombre de canals d'emissió o absorció. Hem anat variant el nombre de canals fins a comprovar que la solució no era més precisa per molt que els augmentéssim, contemplant aleshores les contribucions de 21 canals ($n = 10$). Així podem veure com es comporten els coeficients de transmissió, o probabilitat de transmissió, definits com:

$$T_n = |t_n|^2 \quad (33)$$

Pels següents càlculs hem emprat a més els següents paràmetres: $\hbar = m = \omega = 1; U_{AC} = 0.1$. Corresponen a les unitats naturals del sistema i a un potencial d'amplitud petita, respectivament.

En la figura 5 podem observar les probabilitats de transmissió per $n = 0, \pm 1, \pm 2$ i en la figura 6 hem ampliat els dos primers pics de $T_{n=0}$ per apreciar la seva forma.

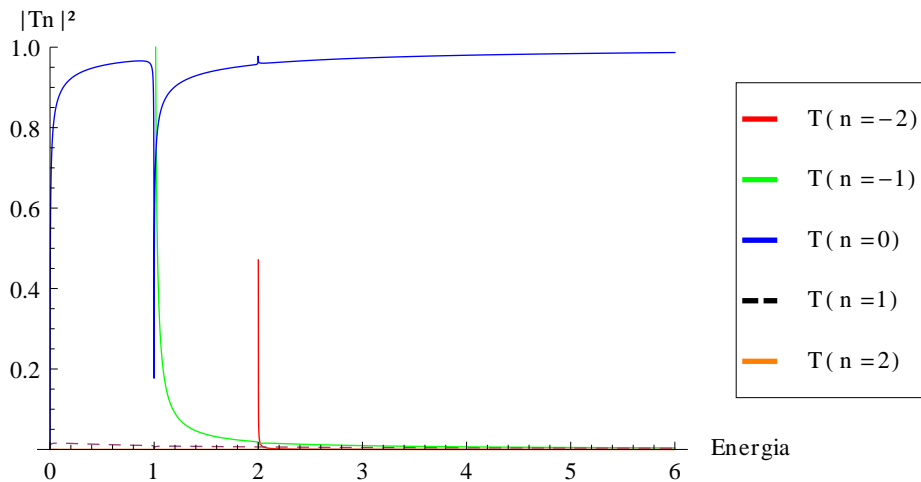


Figura 5: Coeficients de transmissió a través d'una barrera oscil·lant tipus δ de Dirac per $n = 0, \pm 1, \pm 2$. Paràmetres: $\hbar = m = \omega = 1; U_{AC} = 0.1$.

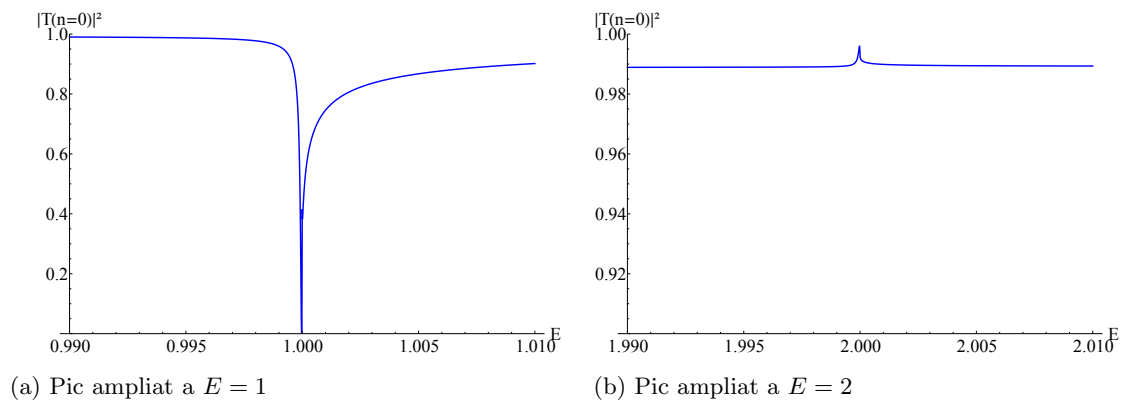


Figura 6: Pics ampliat de $T_{n=0}$ corresponent a la figura 5. Podem comprovar que el primer pic arriba a zero.

Podem apreciar que els coeficients tenen pics per energies enteres que, a mesura que aquesta augmenta, són de menor ordre. En aquest sentit, la transmissió sense intercanvi de fotons, $T_{n=0}$, presenta una baixada en la transmissió just quan el canal d'emissió $T_{n=-1}$ té la suficient energia com per activar-se, i així per cada canal amb $n < 0$. El motiu pel qual aquests canals necessiten una certa energia per activar-se és senzill si analitzam els valors de la quasi-energia:

$$\text{Per } n = -1 \rightarrow \mathcal{E}_n = E - \hbar\omega \quad (34)$$

Si $\hbar\omega > E$ la quasi-energia serà negativa, i això condueix a un vector d'ona complex $\kappa = ik$. Això no és una ona propagant, ja que l'exponent de la funció d'ona surt real, sinó que és un estat evanescent i aquest no l'hem de comptar ja que la seva aportació al flux és nul·la. En altres paraules, l'electró no té suficient energia com per a emetre fotons.

En quant als ordres de magnitud de les diferents transmissions podem veure que és molt menys probable la transmissió d'electrons amb absorció de fotons que amb emissió, encara que que l'absorció es dona per a qualsevol $E \geq 0$ mentre que, com hem dit abans, per a l'emissió de fotons l'electró necessita tenir una energia mínima i és en el moment que assoleix aquesta energia quan té la màxima probabilitat d'emetre el fotó. A més, la figura 5 ens mostra que és molt més probable la transmissió en el canal elàstic que en els inelàstics. Això és degut a que U_{AC} és petit. Si $U_{AC}/\hbar\omega \ll 1$ podem aplicar la teoria de perturbacions i així els processos que tenen rellevància són els d'un fotó, ja que en la resta de processos que impliquen més fotons són de major ordre en l'amplitud del potencial i són gairebé menyspreables.

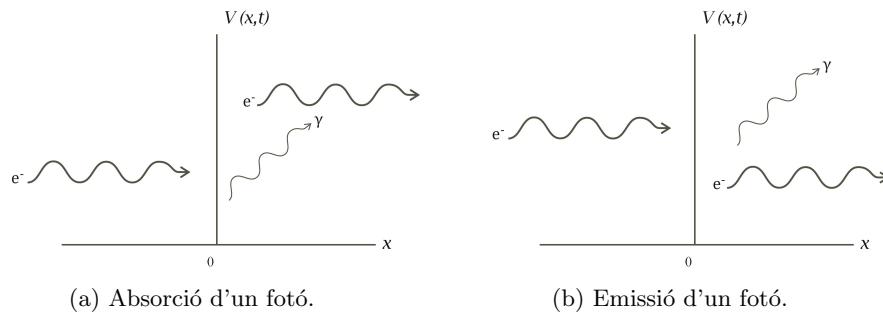


Figura 7: Processos amb intercanvi d'un fotó quan un electró es propaga a través d'una barrera delta oscil·lant. L'emissió i absorció d'un fotó són els més rellevants si el potencial és petit.

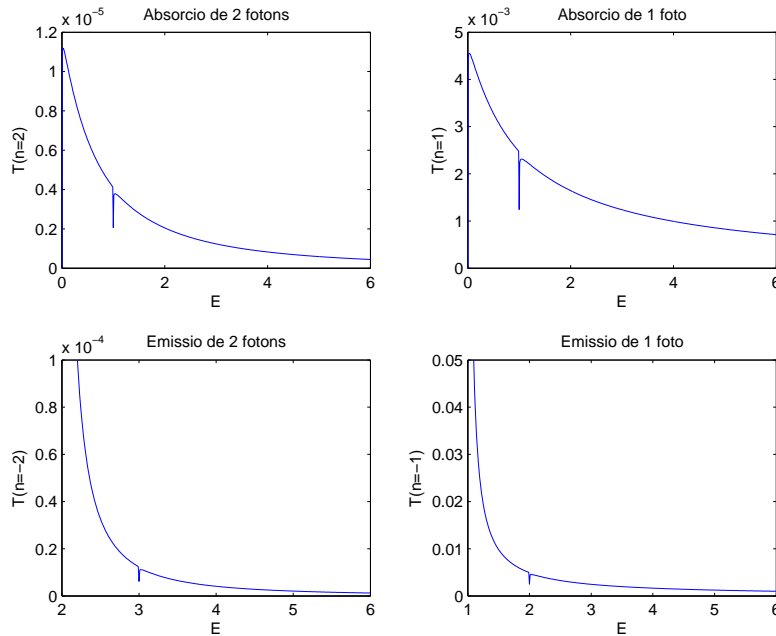


Figura 8: Canals inelàstics per una barrera oscil·lant tipus δ de Dirac per a diferents valors de n . Paràmetres: $\hbar = m = \omega = 1$; $U_{AC} = 0.1$. Tot i que no s'aprecii, els pics arriben a fer-se zero.

En la figura 8 mostrem un parell de canals inelàstic per veure la diferència d'ordre de magnitud quan major és n .

És interessant veure que cada canal es veu afectat per l'obertura d'un altre. Cada cop que l'electró assoleix una energia suficient com per absorbir o emetre n fotons, les transmissions amb $n \pm 1$ presenten una baixada degut a l'acoblament entre elles i a la conservació del flux total.

Feim notar que el fet d'aplicar un camp AC comporta a l'emissió estimulada, que no espontània, de fotons.

Cal remarcar a més que el teorema de Floquet pot abordar processos multifotònics mentre que la teoria de perturbacions només permet intercanvi d'un fotó per a potencials AC dèbils.

A nivell experimental, una forma per a detectar aquests processos seria mitjançant la detecció de corrents AC, ja que la corrent directe, fent la mitjana en una oscil·lació, serà nul·la.

3 Doble barrera delta de Dirac oscil·lant

Resolt el problema d'una barrera tipus delta oscil·lant, ens plantejam com serà la transmissió d'electrons per una doble barrera oscil·lant. Es en aquest sistema on podrem veure el fenomen de *electron pumping* degut a la possibilitat d'establir una ruptura en la simetria espacial que, com hem dit en capítols anteriors, serà el que faci que en un període hi hagi flux net, tot i que el forçament mitjà sigui nul. L'objectiu és idò calcular el coeficient de transmissió net, és a dir, el resultant de considerar incidència per l'esquerra i per la dreta.

3.1 Model teòric

Consideram dues barreres amb una separació $2a$ entre elles, amb la mateixa freqüència d'oscil·lació ω , amb una diferència de fase ϕ i dues amplituds diferents, C i D . Aleshores el potencial serà:

$$V(x, t) = C\delta(x + a) \sin(\omega t + \phi) + D\delta(x - a) \sin(\omega t) \quad (35)$$

A la figura 9 tenim un esquema de com és aquest potencial.

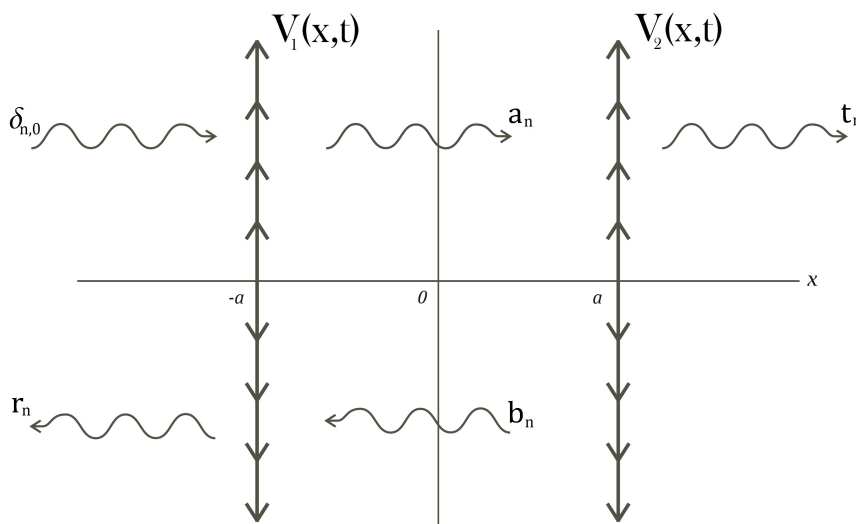


Figura 9: Esquema doble delta oscil·lant. S'indiquen els fluxos incident, reflectit i transmès, així com es mostren les reflexions internes entre les dues deltes.

El hamiltonià del sistema queda:

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C\delta(x + a) \sin(\omega t + \phi) + D\delta(x - a) \sin(\omega t) \quad (36)$$

L'equació de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C\delta(x + a) \sin(\omega t + \phi) + D\delta(x - a) \sin(\omega t) \right) \Psi(x, t) \quad (37)$$

Al ser un potencial temporalment periòdic, de període $T = 2\pi/\omega$, podem aplicar el teorema de Floquet anunciat anteriorment a l'equació (15) i així la funció d'ona que resol l'equació de Schrödinger per aquest potencial serà:

$$\Psi(x, t) = \sum_n e^{-i\frac{\mathcal{E}_n}{\hbar}t} \psi_n(x, t) \text{ on } \mathcal{E}_n = E + n\hbar\omega \quad (38)$$

Aquest pic separam el problema en tres regions diferents: la regió d'incidència ($-\infty < x < -a$), la regió intermèdia ($-a \geq x \geq a$) i la regió de transmissió ($a < x < \infty$). Com hem mostrat prèviament, la component espacial de la funció d'ona satisfà l'equació estacionària i per tant les solucions de interès seran ones viatgeres. A més suposant incidència des de l'esquerra:

$$\psi_{n,1} = \delta_{n,0} e^{ik_n x} + r_n e^{-ik_n x} \quad (39)$$

$$\psi_{n,2} = a_n e^{ik_n x} + b_n e^{-ik_n x} \quad (40)$$

$$\psi_{n,3} = t_n e^{ik_n x} \quad (41)$$

I, ben igual que abans, $k_n^2 = 2m\mathcal{E}_n/\hbar^2$ és el vector d'ones electrònic.

3.2 Condicions de continuïtat

Al tenir dues deltes de Dirac al potencial, es dupliquen les equacions que regeixen la continuïtat de la funció d'ona de l'electró. Com abans, tindrem continuïtat en les funcions d'ona adjacents i discontinuïtats en les seves derivades en els punts que separen les regions, $x = \pm a$:

$$\Psi_1(x, t)|_{x=-a^-} = \Psi_2(x, t)|_{x=-a^+} \quad (42)$$

$$\frac{\partial \Psi_2(x)}{\partial x} \Big|_{x=-a^+} - \frac{\partial \Psi_1(x)}{\partial x} \Big|_{x=-a^-} = \frac{2mC \sin(\omega t + \phi)}{\hbar^2} \Psi(0, t) \quad (43)$$

$$\Psi_2(x, t)|_{x=a^-} = \Psi_3(x, t)|_{x=a^+} \quad (44)$$

$$\frac{\partial \Psi_3(x)}{\partial x} \Big|_{x=a^+} - \frac{\partial \Psi_2(x)}{\partial x} \Big|_{x=a^-} = \frac{2mD \sin(\omega t)}{\hbar^2} \Psi(0, t) \quad (45)$$

Quan introduïm les nostres funcions d'ona, trobam:

$$\delta_{n,0} e^{-ik_n a} + r_n e^{ik_n a} = a_n e^{-ik_n a} + b_n e^{ik_n a} \quad (46)$$

$$a_n e^{-ik_n a} - b_n e^{ik_n a} - \delta_{n,0} e^{-ik_n a} + r_n e^{ik_n a} = \frac{mC}{k_n \hbar^2} [e^{-i\phi} (\delta_{n-1,0} e^{-ik_{n-1} a} + r_{n-1} e^{ik_{n-1} a}) - e^{i\phi} (\delta_{n+1,0} e^{-ik_{n+1} a} + r_{n+1} e^{ik_{n+1} a})] \quad (47)$$

$$a_n e^{ik_n a} + b_n e^{-ik_n a} = t_n e^{ik_n a} \quad (48)$$

$$t_n e^{ik_n a} - a_n e^{ik_n a} + b_n e^{-ik_n a} = \frac{mD}{k_n \hbar^2} [t_{n-1} e^{ik_{n-1} a} - t_{n+1} e^{ik_{n+1} a}] \quad (49)$$

3.3 Resolució

L'objectiu de l'anterior sistema d'equacions és trobar les diferents amplituds de transmissió, t_n , en funció dels canals acoblats que en aquest cas seran $t_{n\pm 1}$ i $t_{n\pm 2}$. Això s'explica partint del resultat de la transmissió en una delta. Hem vist que, per a petites amplituds, els canals de rellevància són en els que intervenen un sol fotó. El fet d'incorporar una segona delta fa que es dupliquin els casos d'intercanvi de fotons, ja que tot i que intercanviïn un sol fotó a cada barrera, la qual cosa està contemplada per la teoria de pertorbacions, el resultat total serà l'intercanvi de dos fotons amb el camp AC. En la següent secció parlarem dels tipus de canals de transmissió i les distintes possibilitats d'intercanvi amb el camp.

Feim una sèrie d'agrupacions per reduir la notació el resultat ens dona:

$$\delta_{n,0} G_0 + \delta_{n-1,0} G_1 + \delta_{n+1,0} G_{-1} + t_n F_0^n + t_{n+1} F_1^n + t_{n-1} F_{-1}^n + t_{n+2} F_2^n + t_{n-2} F_{-2}^n = 0 \quad (50)$$

Si ho escrivim en notació matricial per, un cop més, convertir un problema amb dependència temporal en n problemes estacionaris:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ G_{-1} \\ G_0 \\ G_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0^{-n} & F_1^{-n} & F_2^{-n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{-1}^{-n+1} & F_0^{-n+1} & F_1^{-n+1} & F_2^{-n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{-2}^{-n+2} & F_{-1}^{-n+2} & F_0^{-n+2} & F_1^{-n+2} & F_2^{-n+2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_{-2}^{-n+2} & F_{-1}^{-n+2} & F_0^{-n+2} & F_1^{-n+2} & F_2^{-n+2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{-2}^{-n+2} & F_{-1}^{-n+2} & F_0^{-n+2} & F_1^{-n+2} & F_2^{-n+2} & 0 & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & F_{-2}^{n-2} & F_{-1}^{n-2} & F_0^{n-2} & F_1^{n-2} & F_2^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F_{-2}^{n-2} & F_{-1}^{n-2} & F_0^{n-2} & F_1^{n-2} & F_2^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{-2}^{n-1} & F_{-1}^{n-1} & F_0^{n-1} & F_1^{n-1} & F_2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{-2}^n & F_{-1}^n & F_0^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{-n} \\ \vdots \\ t_{-2} \\ t_{-1} \\ t_0 \\ t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$$

on cada element de matriu el definim com:

$$G_{-1} = -C_n e^{i\phi} (e^{-ik_{n+1} a} + e^{ik_{n+1} a} g_{n+1} h_{n+1}) \quad (51)$$

$$G_0 = 2e^{-ik_n a} f_n - 2e^{ik_n a} (1 - f_n) h_n g_n \quad (52)$$

$$G_1 = C_n e^{-i\phi} (e^{-ik_{n-1} a} + e^{ik_{n-1} a} g_{n-1} h_{n-1}) \quad (53)$$

$$F_{-2}^n = C_n D_{n-1} e^{-i\phi} e^{ik_{n-1} a} e^{ik_{n-2} a} h_{n-1} \quad (54)$$

$$F_{-1}^n = -2D_n e^{ik_{n-1} a} e^{ik_n a} (1 - f_n) h_n - C_n e^{-i\phi} e^{ik_{n-1} a} g_{n-1} h_{n-1} \quad (55)$$

$$F_0^n = -2e^{-ik_n a} f_n + 2e^{ik_n a} (1 - f_n) h_n g_n - C_n e^{ik_n a} [D_{n+1} e^{i\phi} e^{ik_{n+1} a} h_{n+1} + D_{n-1} e^{-i\phi} e^{ik_{n-1} a} h_{n-1}] \quad (56)$$

$$F_1^n = 2D_n e^{ik_{n+1} a} e^{ik_n a} (1 - f_n) h_n + C_n e^{i\phi} e^{ik_{n+1} a} g_{n+1} h_{n+1} \quad (57)$$

$$F_2^n = C_n D_{n+1} e^{i\phi} e^{ik_{n+1} a} e^{ik_{n+2} a} h_{n+1} \quad (58)$$

i, a més, les funcions C_n , D_n , f_n , g_n i h_n :

$$C_n = \frac{mC}{k_n \hbar^2} \quad (59)$$

$$D_n = \frac{mD}{k_n \hbar^2} \quad (60)$$

$$f_n = \frac{2ie^{i2k_n a}}{\sin 2k_n a} \quad (61)$$

$$g_n = e^{ik_n a} (1 - f_n) - e^{-i3k_n a} f_n \quad (62)$$

$$h_n = \frac{e^{-i3k_n a}}{2f_n \cos 2k_n a e^{-i2k_n a} - 1} \quad (63)$$

3.4 Resultats

El que volem fer és veure com es comporta a ordres més baixos en teoria de pertorbacions, és a dir, quin és el comportament de la transmissió segons els ordres de C i D . Per això farem un anàlisi de com són les amplituds i les probabilitats de transmissió a partir de la teoria de pertorbacions.

A ordre zero:

$$t_0(\mathcal{O}(C^0, D^0)) = \frac{2e^{-ik_0 a} f_0 - 2e^{ik_0 a} (1 - f_0) g_0 h_0 + \mathcal{O}(C^1, D^1)}{2e^{-ik_0 a} f_0 - 2e^{ik_0 a} (1 - f_0) g_0 h_0 + \mathcal{O}(C^2, D^2)} = 1 \quad (64)$$

$$t_{n \neq 0}(\mathcal{O}(C^0, D^0)) = 0 \quad (65)$$

A primer ordre:

$$t_0(\mathcal{O}(C^1, D^1)) = 0 \quad (66)$$

$$t_{\pm 1}(\mathcal{O}(C^1, D^1)) = \frac{\mp e^{\mp i\phi} e^{ik_0 a} (e^{2ik_0 a} + 2g_0 h_0) C_{\pm 1} \mp 2e^{ik_{\pm 1} a} e^{ik_0 a} h_{\pm 1} (1 - f_{\pm 1}) D_{\pm 1}}{2e^{-ik_{\pm 1} a} f_{\pm 1} - 2e^{ik_{\pm 1} a} (1 - f_{\pm 1}) g_{\pm 1} h_{\pm 1}} t_0(\mathcal{O}(C^0, D^0)) \quad (67)$$

$$t_{\pm 1}(\mathcal{O}(C^1, D^1)) \equiv \alpha_{\pm 1}C + \beta_{\pm 1}D \text{ on } \alpha_{\pm 1}, \beta_{\pm 1} \in \mathbb{C}$$

I a segon ordre:

$$t_0(\mathcal{O}(C^2, D^2)) = \frac{t_1(\mathcal{O}(C^1, D^1))F_1^0 - t_{-1}(\mathcal{O}(C^1, D^1))F_{-1}^0}{F_0^0} \equiv \alpha C^2 + \beta D^2 + \gamma CD \text{ on } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C} \quad (68)$$

Aleshores, quan calculam T_0 i $T_{\pm 1}$ feim:

$$T_0 = |t_0|^2 = |1 + \alpha C^2 + \beta D^2 + \gamma CD + \dots|^2 \quad (69)$$

$$T_{\pm 1} = |t_{\pm 1}|^2 = |\alpha_{\pm 1}C + \beta_{\pm 1}D + \dots|^2 \quad (70)$$

Hem de tenir en compte que la teoria de pertorbacions és vàlida només per a potencials petits i per tant quan els coeficients de transmissió estan prop de 1. Aquesta ens mostra a quins ordres en l'amplitud del potencial contribueixen cada un dels canals. Podem veure que el canal elàstic, $T_{n=0}$ contribueix en ordre 0, essent 1 el valor d'aquest, i les següents contribucions ja són a ordres més alts en C i D . Aquestes segones contribucions són degudes a transmissions virtuals que es donen entre deltes, que seran explicades en la següent secció. A més podem veure en els càlculs anteriors que els canals inelàstics més baixos, els $T_{n=\pm 1}$, no contribueixen fins a contemplar el primer ordre en les amplituds C i D . Veim que, quan contemplam el segon ordre en amplituds existeix una competència entre els canals inelàstics, amissió i absorció, i les transmissions virtuals del canal elàstic. Aquesta és una diferència qualitativa respecte del cas amb una sola barrera tipus delta.

Si revisam les equacions (46-49) i les replantejam per incidència des de la dreta resultarà el mateix que si intercanviam les deltes i seguim contemplant incidència des de l'esquerra, ja que la posició de les deltes respecte de l'origen de coordenades si que és simètrica. Llavors, els factors que contenen el desfase, $e^{\pm i\phi}$, ja no són els mateixos i s'intercanviaran els factors que multipliquen l'amplitud C per la D . Quan, com farem més endavant, establim una diferència entre les amplituds o introduïm un desfase no nul és quan les transmissions no seran les mateixes des de la dreta que des de l'esquerra, degut a que les expressions per a cada una seran diferents. Això vol dir que tendrem corrent elèctric net, degut a aquesta ruptura de la simetria, i aleshores és quan es produeix el fenomen de **bombeig d'electrons**.

A partir d'aquí realitzarem numèricament el càlcul i representarem les gràfiques, resolent l'equació matricial plantejada per les amplituds de transmissió.

Definim T_n^{\rightarrow} com l'amplitud de transmissió incident des de la dreta i T_n^{\leftarrow} com la de procedent des de l'esquerra, ja que és interessant veure com són de diferents entre si quan el problema deixa de tenir simetria espacial.

Els paràmetres emprats per a les següents gràfiques són: $C = D = 0.1$, potencial d'amplituds petites, $\phi = 0$, sense desfase, $\hbar = \omega = m = 1$, les unitats naturals, i $a = 1$, que correspon a la distància entre les deltes i l'origen. De fet els dos darrers paràmetres seran usats durant tot el treball. En les figures 10 i 11 veim els coeficients amb incidència des de l'esquerra per $n = 0$ i $n = \pm 1, \pm 2$, respectivament.

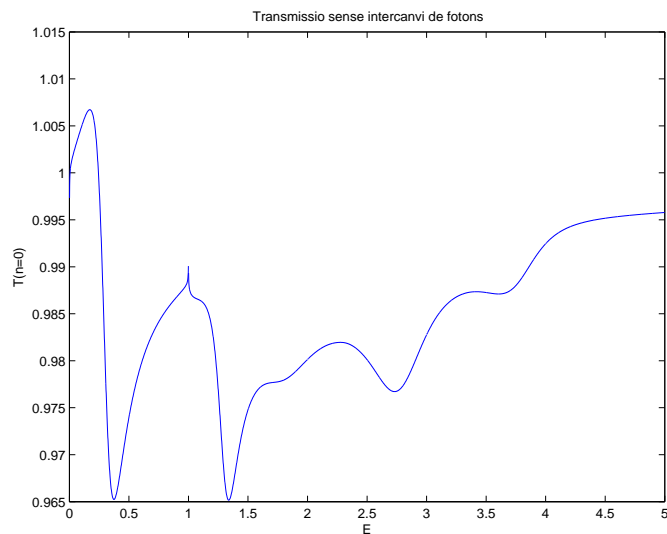


Figura 10: Coeficients de transmissió $T_{n=0}^{\rightarrow}$ pels paràmetres: $\phi = 0$, $C = D = 0.1$, $m = \hbar = \omega = 1$ i $a = 1$. Els valors per damunt de 1 a energies baixes no són físics, sinó un problema del codi numèric.

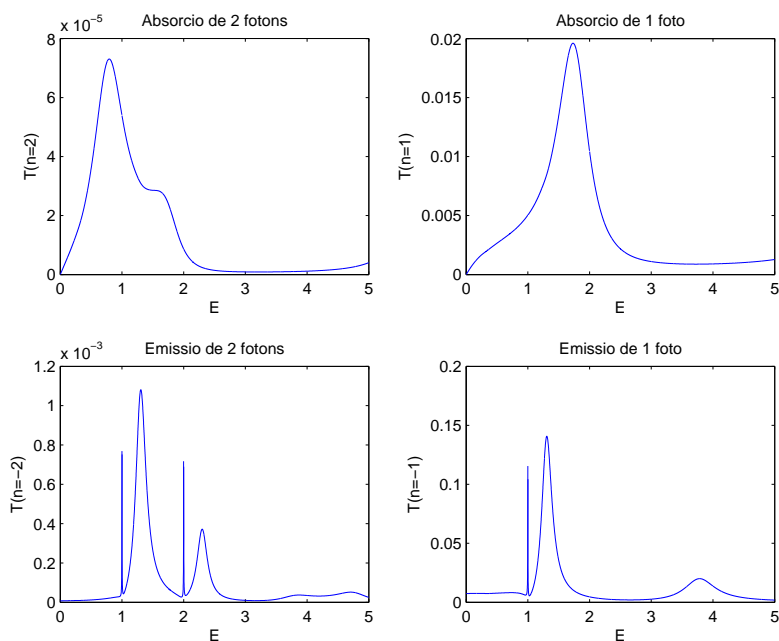


Figura 11: Coeficients de transmissió $T_{n=\pm 1, \pm 2}^{\rightarrow}$ - $n = \pm 1, \pm 2^{\leftarrow}$ pels paràmetres: $\phi = 0$, $C = D = 0.1$, $m = \hbar = \omega = 1$ i $a = 1$.

Vists els resultats per a amplituds de les dues deltes iguals i amb un desfase nul, és interessant veure el comportament de l'electró si rompem la simetria que tenim.

Si mantenim les amplituds igual i hi aplicam un desfase de $\phi = \pi/2$ obtenim un flux net si contemplam incidència per l'esquerra i la dreta com el que podem veure en les figures 12 i 13:

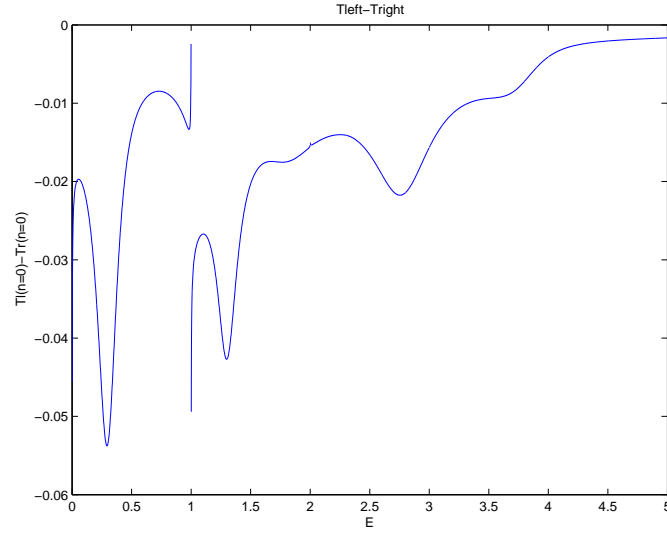


Figura 12: Diferència de coeficients de transmissió $T_{n=0}^{\rightarrow} - T_{n=0}^{\leftarrow}$ pels paràmetres: $\phi = \frac{\pi}{2}$, $C = D = 0.1$, $m = \hbar = \omega = 1$ i $a = 1$. Les discontinuïtats que presenten formen part de l'error en el codi numèric.

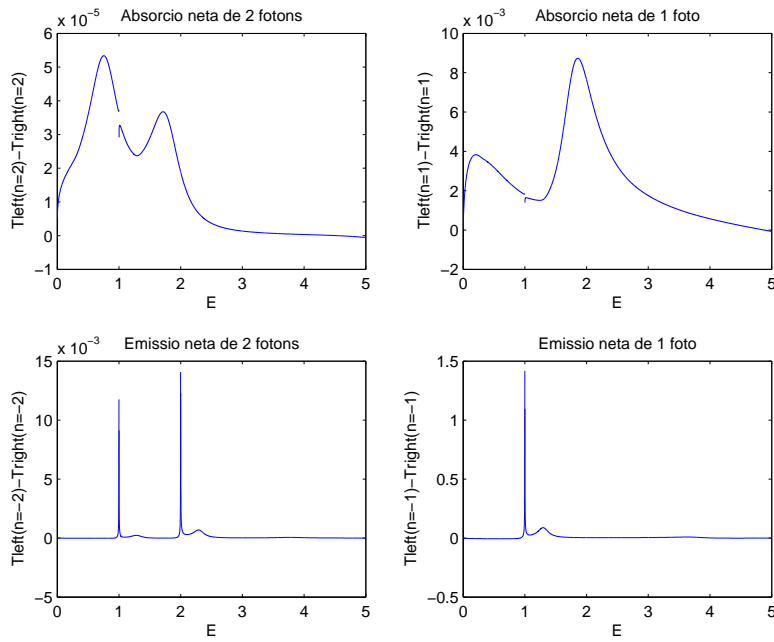


Figura 13: Diferència de coeficients de transmissió $T_{n=\pm 1, \pm 2}^{\rightarrow} - T_{n=\pm 1, \pm 2}^{\leftarrow}$ pels paràmetres: $\phi = \frac{\pi}{2}$, $C = D = 0.1$, $m = \hbar = \omega = 1$ i $a = 1$. Les discontinuïtats que presenten formen part de l'error en el codi numèric.

Si a més del desfase canviem les amplituds de les barreres, per exemple $C = 2D$, obtenim les figures 14 i 15:

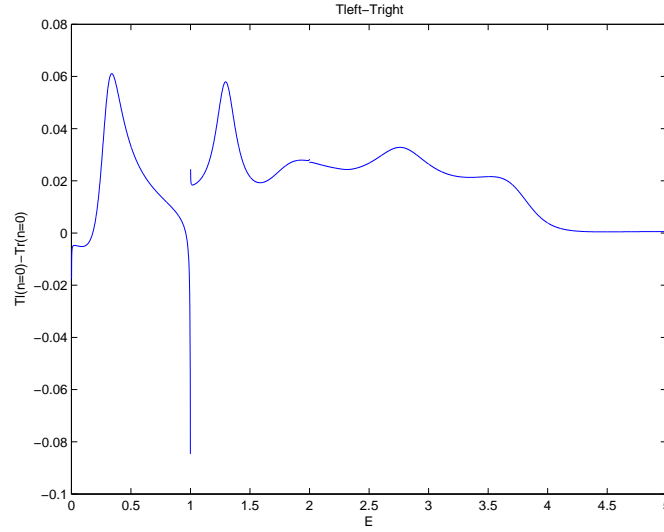


Figura 14: Diferència de coeficients de transmissió $T_{n=0}^{\rightarrow} - T_{n=0}^{\leftarrow}$ pels paràmetres: $\phi = 0$, $C = 0.2$, $D = 0.1$, $m = \hbar = \omega = 1$ i $a = 1$. Les discontinuïtats que presenten formen part de l'error en el codi numèric.

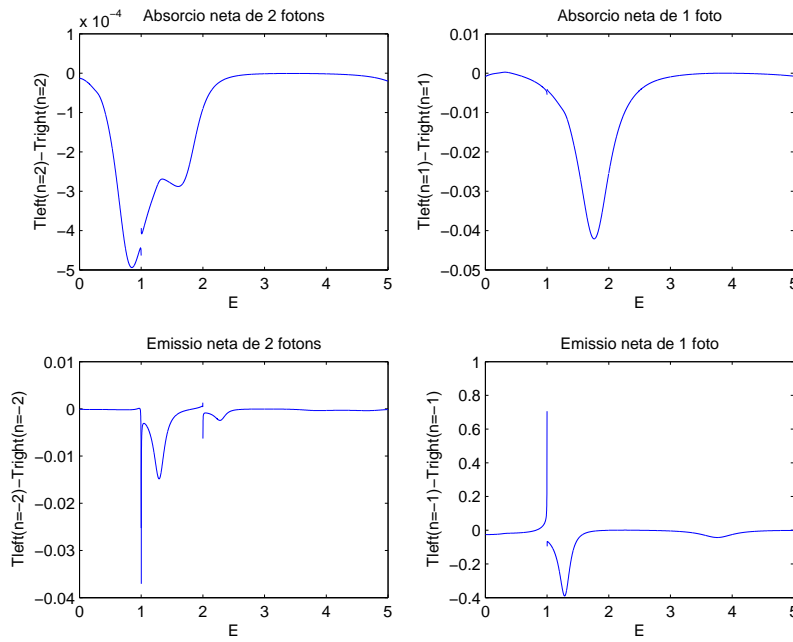


Figura 15: Diferència de coeficients de transmissió $T_{n=\pm 1, \pm 2}^{\rightarrow} - T_{n=\pm 1, \pm 2}^{\leftarrow}$ pels paràmetres: $\phi = 0$, $C = 0.2$, $D = 0.1$, $m = \hbar = \omega = 1$ i $a = 1$. Les discontinuïtats que presenten formen part de l'error en el codi numèric.

Com podem veure, hi ha coeficients de transmissió que passen de la unitat, concretament en la figura 10, això sabem que no pot ser així, exceptuant que hi hagi transmissions negatives que no n'és el cas. Afegit a això, les figures (12-15) presenten discontinuïtats. És més, com hem fet ja amb el problema d'una delta, hem intentat comprovar que es satisfà la conservació del flux. Aquesta és la comprovació més important a l'hora de creure'ns els resultats obtinguts. En el nostre cas, creim que tenim un problema

al codi numèric i per això no ens dóna el que hauria, ja que el flux no es conserva. A més, no concorda el fet que quan l'energia tendeix a zero, $E \rightarrow 0$, la transmissió sigui 1. Clarament això és un error, tot i que, per altra banda, els canals inelàstics mantenen que han de ser d'ordre més baix quan major és n , el nombre de fotons intercanviats.

3.5 Tipus de transmissions

Com hem explicat en apartats anteriors, podem distingir les transmissions en dos tipus: els canals inelàstics i els canals elàstics.

Els primers són aquells pels quals l'electró entre amb una energia E en el potencial, i surt amb una energia diferent $E \pm n\hbar\omega$, els dos possibles casos els veim esquematitzats en la figura 16.

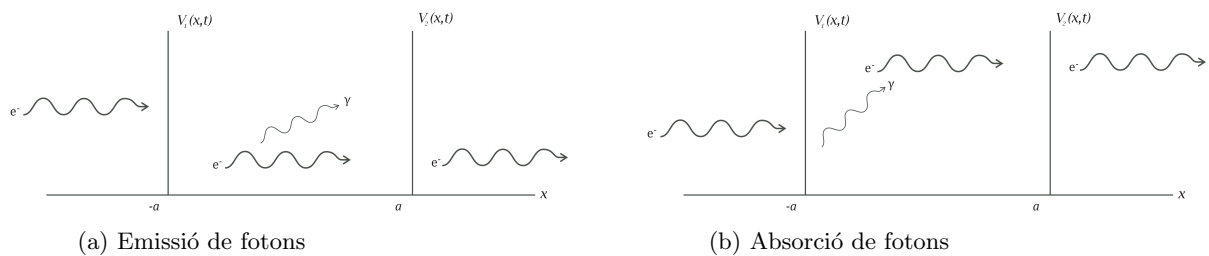


Figura 16: Canals inelàstics

A més, com hem anomenat abans existeix un acoblament amb les dues *sidebands* més properes, a diferència d'una sola delta. A les hores augmenten el nombre de casos que tenim degut a les distintes combinacions que es poden dur a terme:

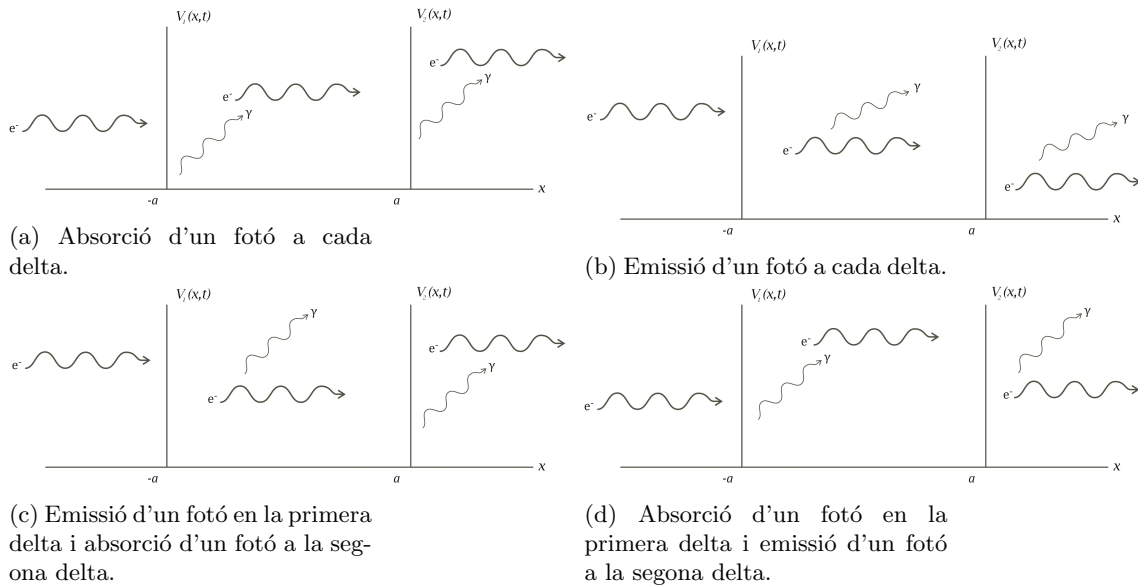


Figura 17: Es presenten diferents combinacions de possibilitats en quant a l'absorció i a l'emissió de fotons amb dues deltes oscil·lants. Tot i que s'intercanvien només un fotó a cada delta, el resultat global és intercanvi de fins a dos fotons, explicant així l'acoblament entre les sidebands n , $n \pm 1$ i $n \pm 2$.

En els canals elàstics però hi tenim dues possibilitats que fan que sigui possible que l'energia de sortida de l'electró sigui la mateixa que la de l'entrada. Una és que passi pel potencial sense intercanviar fotons en cap moment i l'altra és que durant un breu instant de temps, entre les dues barreres de potencial, l'electró emeti un fotó i l'absorbeixi, quedant així amb la mateixa energia inicial. Aquest darrer seria el que mostrem en la figura 18.

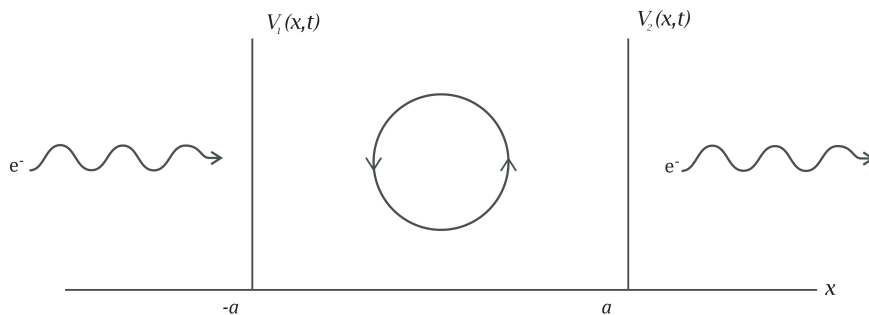


Figura 18: Transmissió virtual pel canal elàstic

Aquest fenomen s'anomena **transmissió virtual** i es pot explicar mitjançant el principi d'incertesa energia-temps:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (71)$$

Aquesta equació ens diu que durant un instant de temps, degut a l'error associat a aquests observables, pot esser violat el principi de conservació d'energia i així produir-se aquest fenomen.

4 Conclusions

A través de l'aplicació de forçaments periòdics en el temps hem pogut veure aleshores com apareixen, degut a aquesta dependència temporal en el hamiltonià, nous conceptes en el transport quàntic. Només del model més senzill, el de Tien-Gordon, ja hem pogut extreure conceptes clau com és el de *sidebands* pels fotons i el seu significat físic, tal que l'absorció ($n > 0$) i l'emissió ($n < 0$) poden ser vistos com la creació d'una densitat d'electrons efectiva d'estats a energies $E \pm n\hbar\omega$ amb una probabilitat donada, concepte que ens generalitza el teorema de Floquet.

A més hem pogut veure que la presència d'aquest forçament en un sistema amb les condicions de simetria adequades, com és la doble barrera oscil·lant amb desfase i amplituds diferents, pot sorgir el fenomen de bombeig electrònic, que la idea bàsica és que podem obtenir un corrent elèctric macroscòpic a partir de la manipulació controlada d'electrons. El trencament de la simetria espacial també es duria a terme si tenim un potencial de dues barreres amb diferent freqüència d'oscil·lació [12].

Hi ha moltes maneres de fer aquest problema més real. Una d'elles és per considerar les barreres de potencial amb una amplada i amb un pou de potencial al mig. Això faria més realistes els *gaps* entre els diferents materials que formen l'heterounió [4][5].

Si el que volem, a partir dels resultats de les amplituds de transmissió, és calcular el corrent elèctric, hem de tenir en compte que quan les calculam no estam calculant les transmissions d'un sol electró, que és el que hem fet fins ara. La situació que tendrem és que en lloc de tenir un electró incident, hi tenim un gas d'electrons dins un material conductor que té les bandes plenes fins el nivell de Fermi. Aleshores entra en joc l'estadística de Fermi-Dirac, degut a que els electrons són fermions.

D'altra banda, quan aplicam aquest potencial estam menyspreant les interaccions electró-electró que hi ha entre les barreres de potencial. Si tenim en compte una interacció coulombiana entre les barreres de potencial, com es mostra en la figura 19, veuríem com es confina el moviment dels electrons i els forats, similar al que passa en els àtoms, i sorgiria en aquesta regió el que s'anomena punt quàntic o *quantum dot*[1].

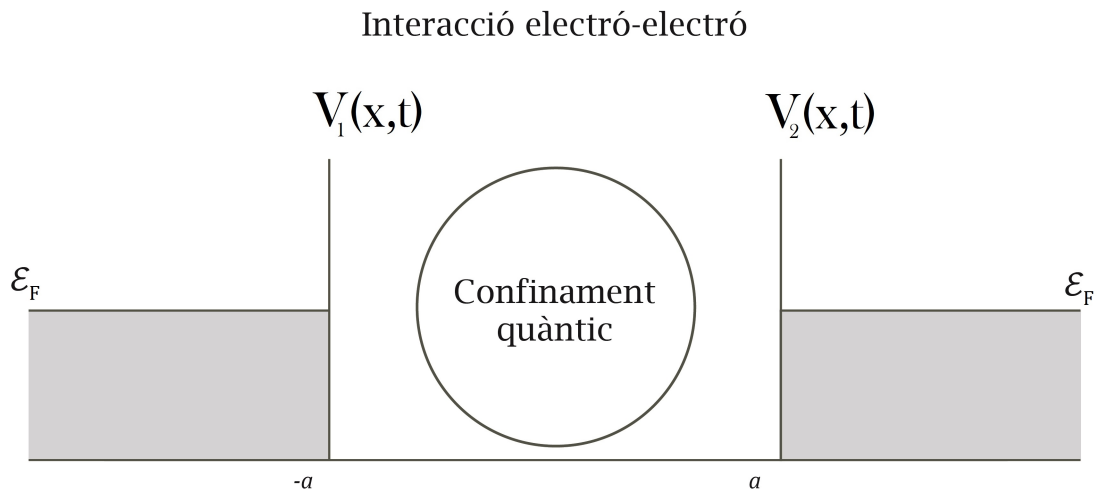


Figura 19: Confinament quàntic degut a la interacció entre electrons

L'estudi d'aquests és fonamental per a un bon desenvolupament de la nanociència en general, amb aplicacions tant en la biomedicina com l'optoelectrònica que poden ser pioneres en les noves generacions de dispositius.

5 Referències

- [1] G. Platero, R. Aguado (2004) *Physics Reports* **395**, 1-157
- [2] L. L. Chang, L. Esaki and R. Tsu (1974) *Appl. Phys. Lett* **24**, 593
- [3] R. Aguado (1998) *Doctoral thesis*, Universidad Autónoma de Madrid
- [4] B. Streetman, S. Banerjee (1976) *Solid State Electronic Devices*, Prentice Hall, University of Texas at Austin
- [5] S. Datta (1995) *Electronic Transport in Mesoscopic Systems*, Cambridge University press
- [6] H. Drexler, J.S. Scott, S.J. Allen, K.L. Campman, A.C. Gossard (1995) *Appl. Phys. Lett.* **67**, 2816
- [7] B.J. Keay, S. Zeuner, S.J. Allen, K.D. Maranowski, A.C. Gossard, U. Bhattacharya, M.J.W. Rodwell (1995) *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4102
- [8] David J. Griffiths (1992) *Introduction to Quantum Mechanics*, Pearson
- [9] P. K. Tien, J. P. Gordon (1963) *Phys. Rev.* **129**, 647
- [10] Neil W. Ashcroft, N. David Mermin (1976) *Solid State Physics*, Cengage
- [11] M. Switkes, C. M. Marcus, K. Campman, A. C. Gossard (1999) *Science* **283**, 1905
- [12] M.M. Mahmoodian, M.V Entin (2007) *Europhysics Letters* **77**, 67002