



**Universitat de les
Illes Balears**

Facultat d'Educació

Memòria del Treball de Fi de Grau

Càlcul mental a Educació Primària. Per què treballar-ho? Possibles propostes

Pedro Pomares Oliver

Grau d'Educació Primària

Any acadèmic 2014-15

DNI de l'alumne: 44329715K

Treball tutelat per Dr. Daniel Ruiz Aguilera

Departament de Ciències Matemàtiques i Informàtica

L'autor autoritza l'accés públic a aquest Treball de Fi de Grau.

Paraules clau del treball:

Càlcul mental, algoritme, estratègies, metodologia, primària.

Resum

Aquest treball de final de grau tracta de la importància de treballar el càlcul mental des de les primeres etapes de l'ensenyament i els beneficis que això comporta.

Es fa un anàlisi comparatiu de diferents metodologies, així com la seva possible aplicació dins una aula de primària.

Per acabar es fa un recull de jocs i applets per ajudar a treballar aspectes relacionats amb el càlcul mental

Paraules clau:

Càlcul mental, algoritme, estratègies, metodologia, primària.

Abstract

This final degree work discusses the importance of working the mental calculation from the earliest stages of education and its benefits.

A comparative analysis of different methodologies is done, as well as its possible application in a primary classroom.

To conclude, a games and applets selection is done to help to work aspects related to mental calculation.

Key words:

Mental calculation, algorism, strategy, methodology, primary.

Agraïments

Voldria agrair en aquestes línies a tots els professors que han format part d'aquesta etapa en la Universitat de les Illes Balears i especialment als de l'àrea de matemàtiques, que van fer que em decidís a fer aquest treball de final de grau d'aquesta temàtica. Així, gràcies a Carmentxu Erice, que em va ensenyar el que és la passió per la feina de docent, a Juan Vicente Riera que em va oferir una primera visió diferent de la matemàtica i al Dr. Daniel Ruiz Aguilera, pel seu entusiasme i la seva preocupació per formar noves generacions de mestres amb una nova manera d'entendre les matemàtiques en l'educació primària.

Menció especial al Dr. Daniel Ruiz Aguilera per les seves hores de dedicació en la direcció d'aquest treball de final de grau.

Agrair l'ajut de David Barba i Lluís Segarra, que m'han ofert la seva experiència i els seus coneixements per a aquest treball.

I finalment, a n'Esther, la meva companya en aquest viatge. Sense tu, no hauria estat possible.

Índex

Descripció:.....	2
Justificació:.....	2
Objectius:.....	3
Metodologia:.....	3
1.Marc teòric:.....	4
1.1 Què entenem per càlcul mental?.....	4
1.2 Què entenem per algoritme?.....	6
1.3 Estat actual.....	8
1.4 Crítiques al model actual.....	11
1.5 Beneficis de treballar el càlcul mental.....	12
1.6 Matemàtiques a Holanda.....	13
2 Metodologies analitzades.....	19
2.1 Els algoritmes ABN.....	19
2.2 El Quinzet.....	23
2.3 Antonio Martin.....	24
2.4 Comparativa metodologies analitzades:.....	38
3 Propostes de materials.....	39
4 Conclusions.....	46
Bibliografia:.....	47
Annexes.....	49

Descripció:

A partir de la consulta i anàlisi de la informació existent dels mètodes de càlcul mental, es farà una tria dels aspectes que es podrien treballar dins una aula de primària. També s'analitzarà l'estat actual del càlcul mental dins el nostre sistema educatiu així com els beneficis de treballar el càlcul mental en les aules.

És important tenir en compte que a la vida real rarament s'utilitzen els algoritmes escrits, si no que s'utilitza el càlcul mental o les màquines de calcular per a les operacions quotidianes. És molt important treballar-ho com cal a les primeres etapes de l'educació, proporcionant estratègies que veurem durant el decurs del següent treball de fi de grau.

Justificació:

Vivim en un món on els dispositius per a fer comptes estan presents per tot arreu i en el que les autoritats educatives no reaccionen per a actualitzar els aprenentatges a la nova realitat en que viu la societat actual. Hem de ser conscients que ja no vivim en el món on ser ràpid i exacte a l'hora de resoldre algoritmes escrits és sinònim de tenir una feina. Avui en dia és necessari tenir un domini d'altres habilitats que no puguin fer les màquines. Fomentar aquestes noves habilitats no s'aconseguirà repetint els mateixos patrons que han regit l'educació matemàtica fins ara. Per això presentem aquest estudi comparatiu de beneficis de potenciar el càlcul mental dins l'aula.

Les noves tendències pedagògiques no es cansen de repetir de la necessitat de crear aprenentatges significatius i que cada alumne construeixi els seus propis aprenentatges i vagi seguint el seu propi ritme.

Per què no s'apliquen aquestes noves teories en el camp de les matemàtiques?

Els algoritmes tradicionals són d'origen àrab i foren introduïts a Europa per Fibonacci en el seu llibre *Liber Abaci* al 1202. Per què doncs es segueix ensenyant el mateix que fa tants segles?

La introducció dels algoritmes escrits és massa primerenca ja que no s'ha interioritzat el que es vol treballar. Pensem que quan els nens arriben a l'aula ja porten una sèrie d'hores escoltant la llengua i molts ja la parlen de forma prou fluïda. En el cas de les matemàtiques ocorre el contrari; es passa del no res a l'abstracció en poques etapes. Les metodologies que ocuparan part d'aquest treball basen la interiorització de conceptes treballant a partir de la manipulació d'objectes que facin més comprensiu el pas del món físic al món simbòlic.

Existeixen països que ja han fet el canvi amb resultats molt satisfactoris, i altres mestres i professors que venen treballant al nostre país en la innovació en la metodologia de les matemàtiques, treballant el càlcul mental com a la construcció del propi aprenentatge i la interiorització dels conceptes.

El càlcul mental és també una excel·lent oportunitat per a fer comprensius els passos a donar per cada alumne. Així, els algoritmes tradicionals són una seqüència tancada de passos on molts cops l'alumne repeteix aquesta sèrie de passos a donar, sense conèixer el significat del que està fent en cada moment. El càlcul mental, al contrari, és transparent, comprensiu, i cada nen sabrà el que fa i per què ha decidit fer-ho d'aquesta i no d'una altra manera.

L'objectiu d'aquest treball de final de grau és oferir una mirada a diferents propostes que treballen el càlcul mental. Així es farà un recull d'estratègies, materials, seqüenciacions que utilitzen per a implementar-ho.

Només un cop assolits aquests conceptes podríem introduir els algoritmes, que han de conèixer, però només com a complement o com a automatització d'allò que ja dominen de forma mental.

Objectius:

- Relacionar el càlcul mental amb els algoritmes tradicionals, observant els beneficis i/o inconvenients de cada una de les propostes.
- Analitzar algunes metodologies per treballar el càlcul mental.
- Presentar materials útils per a treballar el càlcul mental dins l'aula.

Metodologia:

- A partir de la consulta de bibliografia actualitzada sobre aquest aspecte, es desglossen les opinions sobre el càlcul mental comparant-lo amb el càlcul algorítmic tradicional. Comptarem amb les opinions de dos grans especialistes en el camp del càlcul mental com són David Barba i Lluís Segarra, qui han participat des del principi en la confecció d'aquesta investigació.
- Estudi i comparació de diferents metodologies presents al nostre país que treballen el càlcul mental a l'etapa de primària. Els materials i/o autors analitzats són el

Quinzet de Lluís Segarra i David Barba, els algorismes ABN i les experiències de Antonio Martín.

Per a fer aquest estudi s'han analitzat les diferents propostes en alguns casos comptant amb l'ajut dels seus creadors i d'altres, com el cas d'Antonio Martín, a partir del visionat dels vídeos presents en el seu canal de Youtube creat expressament amb aquesta finalitat, la d'informar a persones interessades en el seu mètode. En el cas de Martín es farà incís en la importància que té la manipulació, en aquest cas a partir de les regletes Cuisinaire, per a facilitar la interiorització de conceptes matemàtics.

- Proposta de presentació de materials ja sigui creats expressament o recuperats de la xarxa per a poder tenir un suport dins l'aula a l'hora de tenir materials diferents i motivadors pels alumnes i que no es limitin a les clàssiques fitxes d'operacions.

1.Marc teòric:

1.1 Què entenem per càlcul mental?

Com a càlcul mental s'entén el que es realitza de cap, de memòria o sense l'ajut d'algorismes escrits, utilitzant estratègies com les propietats dels nombres i les relacions que s'estableixen entre els mateixos.

Tradicionalment el càlcul mental dins l'aula ha estat únicament una ajuda per ajudar a l'eficàcia del càlcul escrit. Actualment les noves corrents parlen del concepte d'aritmètica mental (Barba Uriach & Calvo Pesce, 2011), que implica treballar les capacitats dels alumnes per a que siguin capaços de resoldre qualsevol problema aritmètic sense utilitzar els algorismes tradicionals.

El mateix David Barba i Cecilia Calvo utilitzen una cita de l'institut Freudenthal que diu:

Aritmètica mental és el càlcul intern amb representacions numèriques mentals en lloc d'escrites. Això inclou l'ús de dades memoritzades i les propietats dels nombres i les operacions i les maneres en que aquestes es relacionen. No obstant, no és el mateix que fer càlculs i escriure algunes passes quan sigui necessari. No hauria de ser vist com l'oposat a l'aritmètica escrita.

Així, mentre el càlcul mental tradicional no permet anotar xifres durant el càlcul, l'aritmètica mental sí que ho permet. Això és degut a que amb el càlcul mental es solia treballar amb quantitats petites, mentre que en l'aritmètica mental no existeix cap limitació, per la qual cosa algun cop serà necessari fer alguna anotació parcial.

Les generacions actuals estan educades en l'algoritme escrit per la qual cosa es limiten a realitzar una imatge mental de l'algoritme a utilitzar, però si es treballa amb quantitats grans, alguns dels nombres se'ns escapen durant el procés, dificultant obtenir un resultat de manera directa i ràpida.

En les aules espanyoles el treball amb el càlcul mental s'ha limitat a treballar amb quantitats petites per arribar al resultat final a partir de la compensació, arrodoniment o complementació de les xifres. Actualment noves metodologies com els algoritmes ABN treballen les quantitats a operar donant importància al treball a partir de quantitats i no de nombres aïllats i de la descomposició dels nombres.

Això que pot semblar una obvietat, que els alumnes coneguin el valor posicional de les xifres, no ho és tant, ja que en els algoritmes tradicionals, s'atorga el mateix valor a totes les xifres. És veritat que si els nombres es descomposen es parlarà de unitats, desenes, etc., però a l'hora del càlcul i en operacions com aquesta:

$23 + 18$. Sumem el 8 i el 3. I després sumem el 2 més l'1, sense recordar que realment es sumen 20 i 10.

Antonio Martín treballa dins la seva aula amb nombres petits, establint després relacions amb quantitats majors. Martín defensa que el càlcul mental ha de limitar-se al treball amb aquestes quantitats i que per a quantitats majors s'ha de saber utilitzar la calculadora. Això és també un punt que ha d'ensenyar-se i és el d'establir un criteri en el alumnes per a fer-los crítics de quines operacions necessiten i quines no de la utilització de la calculadora.

Barba i Calvo (2015), seguint la mateixa línia que Martín, defensen que s'hauria de retardar la presentació dels algoritmes escrits i que el moment ideal seria abans d'acabar l'etapa de primària, però només un cop els alumnes dominin els algoritmes basats en nombres que han anat discutint i entenent per a resoldre les diferents operacions aritmètiques problemàtiques sorgides durant tota aquesta etapa. Aquests autors en cap

moment parlen de restringir l'ús dels algorismes tradicionals, sinó que sigui una més de les diverses possibilitats que tenen a l'hora de resoldre un problema.

Lluís Segarra, durant una entrevista realitzada (veure annex), afirma que Espanya, Grècia i Portugal són els únics països on els alumnes encara compten amb els dits a l'hora de fer les operacions. Això és degut a una mala feina de base. Des de les primeres etapes de l'ensenyament a educació infantil, s'hauria de treballar amb les quantitats i amb les adicions o sostraccions dels nombres però sense utilitzar els dits ni altres parts del cos per a realitzar els recomptes, únicament a partir d'estimacions mentals. Això es pot treballar amb materials manipulatius com escuradents, regletes o similars. Aquesta és la metodologia que veurem més endavant quan parlem d'Antonio Martín, que ja comença el treball amb materials manipulatius des de l'etapa d'infantil.

1.2 Què entenem per algorisme?

Segons Fernández Bravo (2005), un algorisme és un conjunt de passes a realitzar, necessàriament ordenades i finites, per assolir un objectiu. El mateix autor fa la distinció entre algorisme submís i algorisme innovador. *L'algorisme submís és el que s'imposa per a realitzar una acció operativa, en el que el pensament es sotmet a una acceptació del que fa sense entendre molt bé per què ho fa. Mentre que l'algorisme innovador seria el que s'aplica per pròpia decisió de l'alumne, comprenent i entenent, tan el que es fa com per què ho fa.* El mateix autor recorda que per a poder treballar amb els algorismes tradicionals, els alumnes han de tenir assolit el sistema decimal i el càlcul mental.

Malauradament en les aules segueixen predominant els algorismes submisos, excepte alguna excepció de la que parlarem més endavant, com és el cas de Antonio Martín del centre Aguamansa. Si a un nen que sap el que li demanem el deixéssim operar segurament arribaria al resultat obtingut, potser no de la manera més directa, però sí la més comprensiva per ell, ja que hauria entès el que ha fet i per què ho ha fet.

Molt sovint es confonen i solapen els termes algorisme i operació. Així, per exemple molt sovint l'alumnat sap fer l'algorisme de la multiplicació, però tenen problemes quan a una prova hi apareixen alguns problemes on s'ha de multiplicar, ja que no saben què fer. S'ha confós el saber resoldre l'algorisme amb tenir interioritzat el que significa el concepte multiplicació.

En resum, els algoritmes serveixen per optimitzar temps i esforç, però sense una comprensió implícita del que s'està fent.

Els algoritmes tradicionals no són transparents, i d'aquí provenen molts dels errors que fan els alumnes en que es canvia alguna variable. Per exemple, en el cas de la suma portant, que és on més problemes de comprensió presenten els alumnes. Molts d'ells aprenen que la que duen, la posen a la columna de l'esquerra com aquí:

$$\begin{array}{r} \overset{1}{35} \\ + \underline{67} \\ 102 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overset{1}{368} \\ + \underline{417} \\ 875 \end{array}$$

Observem com l'alumne col·loca els que duu a la columna de l'esquerra, però no a la columna correcta.

Els algoritmes són una recepta que s'ha de memoritzar per a resoldre operacions i que si no s'exercita amb regularitat s'oblida, com en el cas de la multiplicació.

Si fem

$$\begin{array}{r} 258 \\ \times 14 \\ \hline 1032 \\ 258x \end{array}$$

Quina explicació donaria un mestre a algun nen curiós que demanés per què es desplaça una posició?

No hauríem d'oblidar que un algoritme no és més que una regla o pauta que facilita els càlculs. Així, no existirien algoritmes sense que abans no existís un càlcul mental. L'algoritme és una generalització del procés, no és mai el punt de partida. A l'escola s'ensenyen aquestes fórmules o receptes (algoritmes) sense ensenyar les passes prèvies que han fet que aquest fet es generalitzi.

Com diu Lluís Segarra la societat encara pensa que la gent que domina els algoritmes són els intel·ligents, quan únicament es limiten a seguir una recepta de cuina (l'algoritme).

Aquí podem veure una comparació de les característiques dels algoritmes i el càlcul mental, observant els beneficis de cada un d'ells. Per exemple, en el càlcul mental no sempre és necessari obtenir un resultat exacte, si no que a vegades amb una estimació o aproximació per segons quines operacions, ja és suficient per a la vida real.

	Algoritmes	Càlcul mental
Resultats	Exactes	Exactes o aproximats
Dades numèriques	Independent de les mateixes	Es depèn de les dades, ja que s'analitzen per trobar el camí a seguir
Dades numèriques	No es dóna importància al valor posicional de les xifres	Importància de conèixer el valor posicional de cada xifra
Esriptura de procediments	Imprescindible	Necessària en alguns cassos
Propietats de les operacions	Un cop automatitzat el procediment, no es tenen en compte	Fonamental a l'hora d'escollir l'estratègia
Procediment	Dreta a esquerra, el contrari de com treballa el cervell, així com la lectura i/o escriptura. Al ser un procés tancat és difícil detectar les errades.	Ordre lliure. Normalment s'operen primer les quantitats majors. Aquesta forma d'operar dóna una estimació del resultat final, evitant possibles errades.
Beneficis	Una única opció possible	Multitud de opcions de resolució possibles depenent de l'estratègia escollida
Beneficis	Són exactes. El procediment après sempre funciona, encara que no s'entengui el per què.	Transparents. Es veu en tot moment el que s'està operant i s'entén el per què.

1.3 Estat actual

Encara que el currículum assenyala que el càlcul mental, així com les estimacions o càlculs aproximats s'haurien de treballar dins les aules, això es fa poc i malament, normalment com una cosa aïllada i no connectada amb la resta de continguts. Lluís Segarra (veure entrevista) afirma que l'administració, a través del currículum, diu el que fer, però no obliga a fer-ho.

Al nostre país es segueix treballant a partir de materials com els quaderns d'operacions, que no treballen el càlcul mental sinó que són una simple bateria d'operacions, sense cap vinculació al món del càlcul mental, ja que només pel fet de trobar-les escrites i que els nens les puguin treballar a partir d'un llapis i un paper ja perden la possible feina de treball mental per convertir-se en simples tasques de resolució d'operacions.

Molts grups de docents estan d'acord en que s'ha de canviar alguna cosa en el referent a la forma de treballar el càlcul mental a les aules, però ningú pareix atrevir-se a donar el pas. La pressió de la societat, de les famílies, fa que hi hagi molta reticència als canvis. Les famílies pareixen més tranquil·les quan veuen que es treballarà amb materials o procediments que ells coneixen. Avui en dia moltes d'aquestes famílies accepten el fet que en altres assignatures treballin per projectes o sense llibres de text, però no pareixen acceptar que no apareguin els quadernets tradicionals de càlcul.

No obstant, al nostre país cada cop van sorgint més docents que innoven dins les seves aules implementant metodologies on la manipulació i el càlcul mental són la base dels aprenentatges, com per exemple Antonio Martín a Aguamansa, Lluís Segarra o David Barba.

El currículum d'educació primària (LOE) de l'àrea de matemàtiques parla de:

*A l'educació primària se cerca assolir una alfabetització numèrica eficaç, entesa com la capacitat per enfrontar-se amb èxit a situacions en les quals intervinguin els nombres i les seves relacions, permetent obtenir informació efectiva, directament o per mitjà de la comparació, l'estimació i el càlcul mental o escrit. És important ressaltar que **per aconseguir una vertadera alfabetització numèrica no és suficient dominar els algorismes de càlcul escrit**, es necessita també, i principalment, actuar amb confiança davant els nombres i les quantitats, utilitzar-los sempre que sigui pertinent i identificar les relacions bàsiques que es donen entre ells.*

Així, el currículum assenyala com un dels seus objectius per a l'etapa de primària:

- Elaborar i emprar instruments i estratègies personals (aproximació, estimació de càlculs mentals, mesures, orientació espacial...), per fer prediccions i en la resolució de problemes.
- Identificar i resoldre problemes de la vida quotidiana, relacionar la realitat i les matemàtiques i valorar els coneixements matemàtics per resoldre aquests problemes.

El mateix currículum afirma que els docents han d'animar els alumnes pensar, a demanar, a resoldre problemes i a comparar i debatre les idees, estratègies i solucions.

Per què doncs es segueix ensenyant el mateix que fa molts segles?

Segons Gómez Alfonso (2005), aquí podem trobar alguna de les raons per les quals es continua amb el mateix sistema:

- *Creences inapropiades: obstaculitza l'aprenentatge de mètodes generals, és una pèrdua de temps perquè la calculadora pot suplir-ho, es necessita una bona memòria, etc.*
- *Els sentiments negatius del professor: la seva pròpia dificultat i la por al fracàs front els seus alumnes.*
- *Velles teories obsoletes. Per exemple, la que lliga el càlcul mental amb la intel·ligència, o amb la vella teoria de la "disciplina mental", utilitzada per identificar als estudiants brillants amb els ràpids i els lents amb els maldestres.*
- *L'ambient social que vincula el càlcul mental a professions poc considerades.*
- *La falta d'èxit amb i dels estudiants: desànim, pèrdua d'interès, falta de concentració.*
- *La planificació oficial: massificació en l'aula, pressió dels programes, l'escàs temps per les classes de matemàtiques, el tractament del càlcul mental "apart" dels llibres de text.*
- *Algunes pràctiques habituals "a veure què has fet", "a veure qui contesta abans!", l'èmfasi en càlcul estàndard que no dona peu a la intervenció lliure.*
- *Sobrevaloracions equivocades: l'èxit, la rapidesa.*
- *La falta de suggeriments i materials didàctics ben fonamentats i actualitzats.*

Recordar també la falta de formació del professorat en noves metodologies amb l'objectiu de vèncer la por de molts docents que es troben molt còmodes explicant una assignatura que inclús per ells mateixos és abstracte i que prefereixen seguir amb els mètodes amb els quals ells varen aprendre.

Barba i Calvo (2011) justifiquen el poc futur que tenen els algorismes tradicionals de càlcul basant-se en tres preguntes formulades històricament:

- *Quant de temps fa que no ve a algú resolent una divisió de dues xifres amb llapis i paper? (Pluunkett, 1979).*
- *Quina és la raó per a continuar ensenyant algorismes a l'escola? (Maier, 1987).*
- *Com és possible que dedicant tant de temps a l'aprenentatge dels algorismes s'obtinguin resultats tan pobres? (Finals segle XX a l'actualitat).*

Per acabar voldria recollir una frase de Lluís Segarra que deia així:

Només existeixen tres col·lectius que actualment divideixen per dues xifres utilitzant l'algoritme estàndard de llapis i paper: els nens que cursen quart de Primària, els mestres de quart de Primària quan ensenyen o corregeixen les tasques dels seus alumnes i els pares dels alumnes de quart de Primària quan els ajuden amb la tasca. (Barba Uriach & Calvo Pesce, 2011).

1.4 Crítiques al model actual

L'educació avança de forma lenta però inexorable i és per aquest motiu que cada cert temps, normalment associat al canvi en la direcció política del país, es fa una revisió de les lleis educatives i al mateix temps una actualització del currículum.

Podríem entendre que l'administració, en aquest cas les conselleries d'educació corresponent a cada autonomia, haurien d'estar aprovant o rebutjant els models de llibres de text que de forma periòdica les editorials presenten. Doncs no és així; ja fa uns anys que els llibres de text són els que determinen els continguts a ensenyar i aprendre (García Jiménez & Álvarez García, 2011). Els llibres segueixen proposant continguts que no apareixen des de fa molts anys als currículums com per exemple les arrels quadrades, la suma de fraccions amb denominadors diferents a primària, etc. Aquests són continguts que no venen reflectits al currículum per a aquesta etapa, però que es segueixen impartint a la gran majoria de les escoles espanyoles perquè "sempre s'ha fet així".

Tot això que podria semblar tan obvi en el moment en que les corrents pedagògiques ens recorden constantment la importància de construir els propis aprenentatges no s'està complint. Els materials manipulatius són una excel·lent forma per a que els educands vagin construint el seu propi aprenentatge i puguin explorar maneres diferents maneres de passar del concret (els propis materials) a l'abstracte (la representació numèrica).

La mateixa LOE parla de competències bàsiques, i el tractament transversal de les diferents àrees treballant diferents àrees alhora. Doncs aquest treball transversal, que ha de basar-se en situacions quotidianes o properes a l'alumnat, difícilment es pot aconseguir si la major part del temps dins l'aula es dedica a la resolució i repetició d'algoritmes escrits sense cap relació amb els altres camps de coneixement.

Amb els ensenyaments actuals els alumnes un cop acabada la seva escolarització obligatòria tindran una sèrie de coneixements que difícilment podran posar en pràctica una vegada fora del sistema educatiu, ja que no tindran la capacitat de relacionar l'aprens amb la realitat.

Molts dels alumnes que dominen els algorismes escrits a l'hora de resoldre un problema no hi troben solució, ja que han après en un entorn descontextualitzat. També és molt greu que no es dediqui temps a discutir i a parlar de la forma com resoldre un problema i que es cregui que única i exclusivament existeix una manera de fer-ho. Però el més preocupant és el fet que molt de l'alumnat que acabi l'ensenyament obligatori ho faci sortint dels sistema educatiu amb una nota més que satisfactòria i siguin en la pràctica uns analfabets funcionals.

Actualment, amb el pes que tenen els algorismes escrits, l'únic propòsit de l'escola és crear en cada alumne màquines de calcular. Com afirma Lluís Segarra, les màquines de calcular ja estan inventades i amb aquests coneixements no ens contractaran enlloc. Ens contractaran si som capaços d'oferir al mercat alguna cosa que les màquines encara no poden aconseguir.

El meys comprensiu en els algorismes tradicionals és el tractament que es fa de les xifres que conformen un nombre. A totes les xifres els hi donem el mateix tractament, independentment de si es tracta de unitats, desenes o centenes.

L'objectiu al que hauria d'aspirar l'ensenyament actual és aconseguir alumne crítics amb el criteri suficient per a decidir quin càlculs són propis per a fer amb la calculadora, seguint una mica la línia que treballa Antonio Martín a Aguamansa.

1.5 Beneficis de treballar el càlcul mental.

Rafael Antonio Vargas (2013) afirma que: *aprendre matemàtiques requereix un esforç mental que probablement s'ha traduït en canvis cerebrals en l'espècie humana, i que aquests canvis estructurals del cervell els ha heretat l'individu actual.*

Aprendre matemàtiques implica un esforç continu que inclou processos cerebrals simples como atenció, memòria, o processos mentals més complexos como l'organització d'idees, la comparació, l'anàlisi, el raonament, seguir passos, complir regles i realitzar presa de decisions.

Treballant el càlcul mental es millora la capacitat dels alumnes d'enfrontar-se a nous reptes o problemes.

El càlcul mental treballa la part dreta del cervell, que és la part creativa (Vargas, R., 2013). *El cervell dret té la capacitat de reconèixer els símbols numèrics i realitzar aproximacions o estimacions matemàtiques. El cervell esquerra té la capacitat de reconèixer l'escriptura alfabètica matemàtica, això probablement està relacionat amb la*

seva funció lingüística; des del punt de vista de procediments té la capacitat de realitzar càlculs exactes com la multiplicació (Vargas, R., 2013).

Per altra part, la possibilitat d'operar les xifres com un cregui convenient. Així si hem de sumar 300×12 , l'alumne pot anar multiplicant a partir de la descomposició mental dels nombres com per exemple,

$$300 \times 10 = 3000$$

$$300 \times 2 = 600$$

Resultat és $3000 + 600 = 3600$.

Aquest sistema, el d'operar d'esquerra a dreta i de nombres majors a menors, permet fer una estimació del resultat final, ja que sabem que serà més de 3000, cosa que no es pot comprovar amb els algorismes tradicionals. Això evita moltes errades finals, ja que el nen ja té un referent per conèixer si el resultat final és correcte.

1.6 Matemàtiques a Holanda

L'embrió del que es coneix com Educació Matemàtica Realista apareix a Holanda impulsat per Hans Freudenthal i alguns col·laboradors. Dins aquesta forma d'entendre les matemàtiques, Freudenthal sentia que *“les matemàtiques han de tenir relació amb la realitat, mantenir-se properes a les experiències dels nens i ser pertinents a la societat per a que tinguin valor humà.”*(van den Heuvel-Panhuizen, 2008).

En holandès, realista no significa real o que es pugui tocar, si no que la traducció s'assemblaria a la definició d'imaginar, és a dir, no només coses del món real, inclús del món dels contes, etc. Aquesta proximitat serà el que farà que l'alumne senti interès pel que està treballant.

Durant l'entrevista amb el senyor Segarra, va posar un exemple molt aclaridor. Si a un nen d'ESO li posem un problema on ha de treballar a partir d'una factura del rebut de la llum, el més possible és que no li sigui ni proper ni atractiu, mentre que si li presentem un problema a treballar a partir d'alguna cosa present en el seu entorn com ara les diferents tarifes de telefonia mòbil presents en el mercat, les diferents ofertes, les dades o condicions que cada companyia ofereix, s'agafarà aquell problema com una informació útil i el resoldrà amb més motivació.

Aquesta corrent matemàtica està basada en els següents punts:

- Principi d'activitat.

Els alumnes en lloc de ser simples receptors d'uns continguts o ensenyaments ja creats, són actius per a crear produccions pròpies,

- Principi de realitat

L'objectiu és que els estudiants utilitzin la comprensió i les eines matemàtiques per a resoldre problemes.

Freudenthal afirma que les matemàtiques sorgiren de la matematització de la realitat i que a les aules s'ha de treballar a la inversa, és a dir, amb contextos que puguin ser matematitzats. Treballant d'aquesta manera, sobre un context conegut, els estudiants treballen les eines matemàtiques i la comprensió i no treballen la matemàtica de forma aïllada de la realitat.

- Principi de nivells

Els estudiants passen per diferents nivells de comprensió:

- Situacional. Dins el context de la situació.
- Referencial. Esquematitzacions, a partir de models, descripcions, ...
- General. Exploració, reflexió i generalització.
- Formal. Procediments estàndards i notació convencional.

- De reinvenió guiada

Procés d'aprenentatge que permet reconstruir el coneixement matemàtic formal.

- D'interacció

L'ensenyament de les matemàtiques és considerada com una activitat social,

- D'interconnexió

Cada un dels blocs de contingut matemàtic no pot ser tractat com a entitat separada de la resta dels blocs.

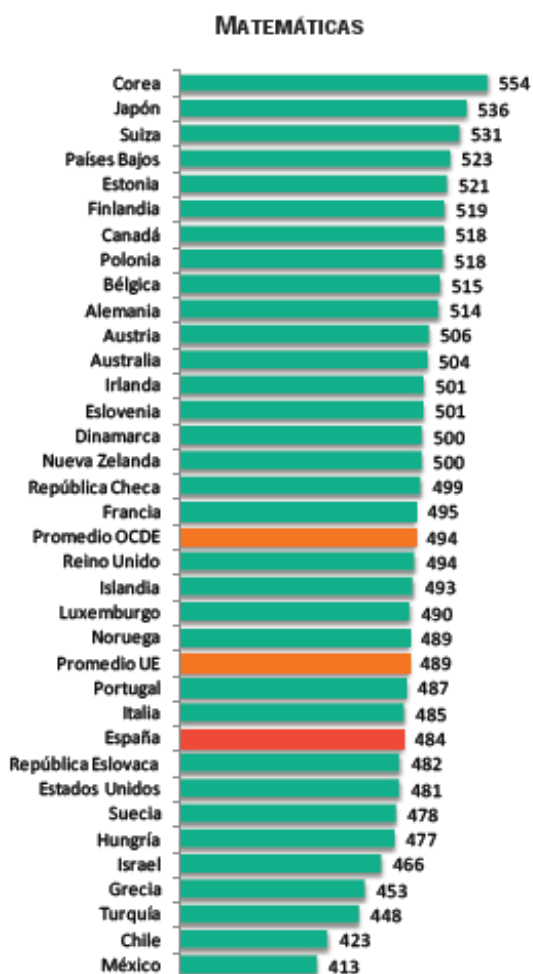
A Holanda les pròpies escoles poden decidir el currículum que s'impartirà. Curiosament, i a pesar d'aquesta llibertat, els continguts impartits en l'àrea de matemàtiques no disten molt d'uns centres a uns altres. Un dels factors que ho condiciona són els llibres de text.

Durant els darrers anys s'ha dut a terme una renovació dels llibres de text i actualment una mitjana del 80 % dels centres tenen llibres adaptats a la matemàtica realista.

L'administració no s'immisceix en els continguts a impartir, únicament existeix una llei general que contempla les assignatures a ensenyar; l'elecció dels temes és responsabilitat dels equips escolars.

El model holandès és un model lent, on les presses no són ben rebudes. Els nens necessiten temps suficient per assimilar tot el que s'està treballant.

Segons Segarra aquest model és el més proper a la realitat del nostre país, però seria necessària una acceptació de la societat, que està acostumada a uns resultats immediats amb el sistema actual. Actualment a les primeres etapes de primària els nens ja fan algorismes escrits habitualment, concepte que no s'introduiria fins a etapes bastant posteriors si s'implementés aquest model, que tants bons resultats ha donat en el seu país. Si actualment els referents en quan a resultats en les proves externes del tipus PISA són els països asiàtics (Corea del Sud, Singapur, etc.), fa uns anys els referents eren els holandesos. Així ho podem observar en el següent gràfic, referent a les proves PISA de l'any 2012 (INEE).



El recurs més important és la recta numèrica buida. A través de la mateixa els nens poden operar de forma mental i visual (sense el reforç dels dits utilitzat en les nostres aules) i anar construint una sòlida base a l'hora d'ampliar les seves estratègies mentals. Aquest és un recurs que Barba i Calvo (2012) proposen començar a treballar a partir de collarets on cada grup de 5 té un color diferent, és molt útil per a generar debats dins l'aula com per exemple:

- Si un alumne comença el compteig per l'esquerra, és incorrecte?



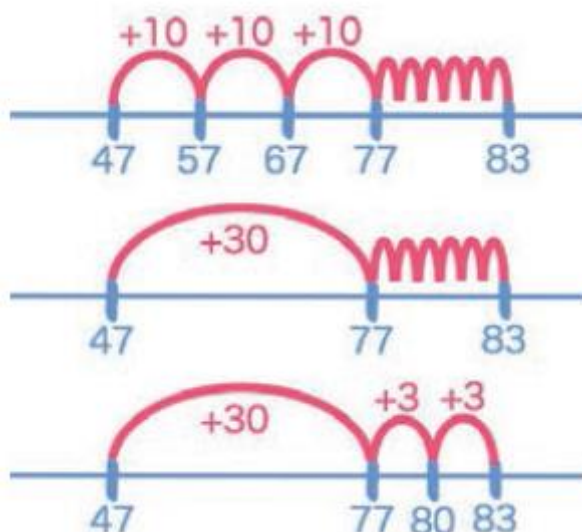
Representació del nombre 14.

- Quin és el millor sistema? D'1 en 1? De 10 en 10?

La recta numèrica és un recurs molt útil per a evitar la utilització dels dits en les operacions amb nombres petits. El treball grupal facilitarà l'adquisició i memorització per repetició de les descomposicions del 10, del 20, etc.

Aquest recurs s'adapta als diferents nivells presents dins l'aula ja que cada un tria l'estratègia que més comprensible sigui per ell. Així hi haurà alumnes que faran el compteig directament, d'altres que ho faran de 5 en 5, o d'unitat en unitat, fins que confiïn en les seves possibilitats i accedeixen, per iniciativa pròpia, a un nivell superior.

Aquí es vol sumar $47 + 36$. Observem les diferents estratègies utilitzades pels alumnes.



El primer es troba còmode sumant les desenes d'una en una i després les unitats restants també d'una en una.

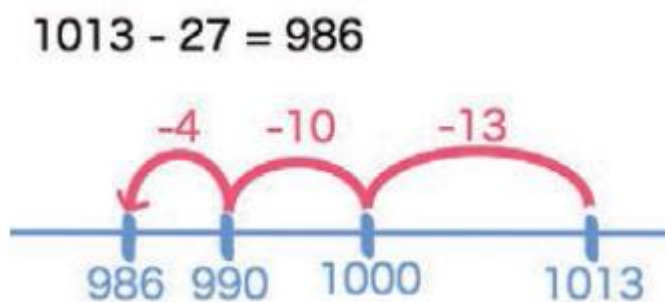
El segon ja fa un compteig de les tres desenes juntes, per tant 30, i la part final compta d'un en un.

El tercer cas ja té clar que les 3 desenes equivalen a 30 i que 6 es pot representar com dues vegades el 3.

El que és més comprensiu per ells a l'hora de treballar amb la recta numèrica buida és el fet que els nombres van d'esquerra a dreta que és com el cervell treballa normalment i com ells operen amb la lectura i l'escriptura, però no amb els algorismes, que sempre han d'operar-se de dreta a esquerra.

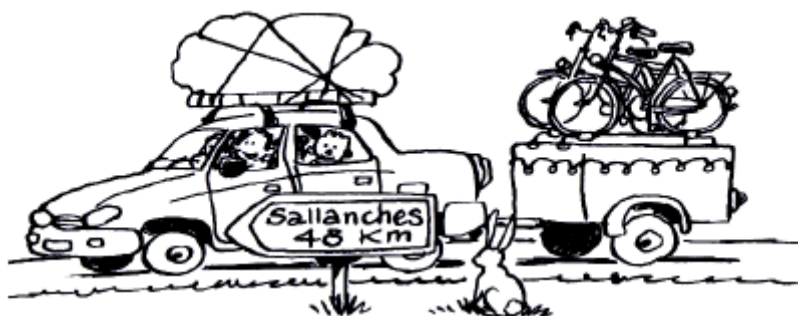
Els alumnes treballen a fer compteig fins a 10, després fins a 20. Amb la recta numèrica buida poden treballar totes les combinacions d'adició i sostracció. Després treballar la suma de desenes, el pas més enllà del 100. Els alumnes es van adonant i perdent la por a treballar amb quantitats grans ja que veuen que les regles que els hi servien per les quantitats més petites els hi funcionen per aquestes noves quantitats.

Posteriorment poden arribar a problemes com aquest:



Aquí ja tenen un domini del que fer, ja que estem parlant de quantitats grosses (1013). El nen domina el comptar endavant i endarrere.

Amb el temps ja es pot prescindir de la pròpia recta numèrica, però els alumnes reconeixeran immeditadament com resoldre aquest problema.



> Robin iba de vacaciones con su familia a Francia. En la tarde el odómetro del carro marcaba 356. En un letrero se da cuenta que faltan 48 km para llegar al pueblo donde acamparán. ¿Cuántos km habrán recorrido en total durante el día?

Els requisits imprescindibles per a treballar amb la recta numèrica són:

- Respectar l'ordre quan ubiquin els nombres en la recta numèrica buida.
- Saber comptar endavant i endarrere, d'1 en 1 i de 10 en 10, començant des de qualsevol nombre.
- Dominar les descomposicions dels nombres i la descomposició del 10.

Encara que hem observat que no hi ha un currículum pròpiament acceptat en les escoles holandeses i que cada una té llibertat per ensenyar el que el claustre decideixi, aquest són els continguts mínims que s'han d'assolir un cop s'acaba l'ensenyament en l'etapa de primària a Holanda.

Continguts assolits a primària a Holanda		
Habilitats generals	1	Comptar endavant i enrere amb unitats que canvien
	2	Fer taules de sumes i taules de multiplicació fins a 10
	3	Resoldre problemes fàcils d'aritmètica mental de forma ràpida i amb coneixement de les operacions
	4	Fer estimacions calculant la resposta de forma global, també amb fraccions i decimals
	5	Discernir l'estructura dels nombres sencers i el sistema de valor posicional dels decimals
	6	Utilitzar la calculadora amb coneixement
	7	Convertir problemes matemàtics simples, no presentats de forma matemàtica, en un problema matemàtic

Algoritmes escrits	8	Poden aplicar els algoritmes estàndard, o variacions dels mateixos, a les operacions bàsiques de suma, resta, multiplicació i divisió en situacions simples de context
Raó i percentatges	9	Poden comparar raons i percentatges
	10	Poden resoldre problemes simples de raó
	11	Entenen el concepte de tant per cent i saben fer càlculs pràctics amb percentatges presentats en situacions simples de context
	12	Entenen la relació entre raons, fraccions i decimals
Fraccions	13	Saben que les fraccions i els decimals poden tenir varis significats
	14	Poden localitzar fraccions i decimals en una línia numèrica i convertir fraccions en decimals, també amb l'ajut d'una calculadora
	15	Poden comparar, sumar, restar, dividir i multiplicar fraccions simples en situacions simples de context a partir de models
Mesurament	16	Poden llegir el temps i calcular intervals de temps, també amb l'ajut d'una calculadora
	17	Poden fer càlculs amb diners en situacions de context de la vida diària
	18	Entenen la relació entre les quantitats més importants i les corresponents unitats de mesurament
	19	Coneixen les unitats convencionals de mesurament de longitud, àrea, volum, velocitat, pes i temperatura, i poden aplicar-les en situacions simples de context
	20	Poden llegir taules i diagrames simples, i elaborar-les amb base a les seves pròpies investigacions
Geometria	21	Dominen certs conceptes bàsics amb els quals organitzen i descriuen l'espai d'una forma geomètrica
	22	Poden raonar geomètricament utilitzant blocs de construcció, plànols de planta, mapes, imatges i dades sobre ubicació, direcció, distància i escala
	23	Poden explicar imatges d'ombra, combinar formes i idear i identificar retallables d'objectes regulars

2 Metodologies analitzades

2.1 Els algoritmes ABN

Els algoritmes ABN són un model per a treballar les operacions de forma més transparent i significativa per l'alumnat. Aquest sistema atorga molta importància al sistema de numeració decimal i a la comprensió de les operacions efectuades, al domini comprensiu de les operacions que s'efectuen i a les propietats que s'estableixen entre els nombres.

El nom que rep l'algoritme ja descriu en sí mateix les característiques principals dels mateixos:

A (Abiertos). Són oberts, perquè cada alumne pot escollir la manera més còmoda per ell per a solucionar-los, podent fer-los més llargs o curts en funció de les pròpies destreses en el càlcul.

BN de basats en nombres, al contrari que els algoritmes tradicionals que únicament tenen en compte les xifres. D'aquesta manera, treballant sempre amb nombres complets (amb tot el significat que això implica), es treballa al mateix temps el sentit numèric.

Algoritme ABN per a la suma

806 + 127		
806	127	Moure
906	27	100
926	7	20
933	0	7

Per a realitzar l'operació de suma es va acumulant el que anem movent o traient de l'altre sumand. Així, tenim una columna amb les quantitats que es van movent, i les altres dues columnes que ens indiquen com queden els sumands després d'aquestes modificacions. Però aquest càlcul es podria haver fet d'altres maneres, no hi ha una forma única de resoldre l'operació. En tot cas, això queda a decisió de la persona que es trobi realitzant el càlcul i de la seva capacitat matemàtica. Aquest és un mètode excel·lent per adaptar-se al ritme intern de cada aprenent, així com tenir menys possibilitats de cometre errades, amb la qual cosa la seva motivació a l'hora de fer front als càlculs anirà en augment.

Algoritme ABN per a la resta

806 - 127		
806	127	Moure
706	27	100
686	7	20
679	0	7

En aquest funciona de la mateixa forma, anem llevant d'un, en aquest cas el sostraiet (127) i fem el mateix amb el minuend (806). En les primeres etapes, inclús primer curs d'educació primària, es treballa amb material manipulatiu com escuradents per fer més comprensiva l'operació.

Algoritme ABN per a la multiplicació

856 x 7		
Multiplicand	Productes parcials	Productes acumulats
800	5600	
50	350	5950
6	42	5992
		5992

La columna de multiplicand es va multiplicant pel nombre a multiplicar, en aquest cas el 7. Així es va fent per cada xifra i es va acumulant a la columna de productes parcials.

El cas de multiplicacions per nombres de dues xifres. Exemple: **285 x 74**

Multiplicand descompost en unitats	Multiplicador per desenes	Multiplicador per unitats	Productes parcials	Producte acumulat
	70	4		
200	14000	800	14800	
80	5600	320	5920	20720
5	350	20	370	21090

Algoritme ABN per a la divisió

933 : 3

		3
933	300	100
633	600	200
33	30	10

3	3	1
0		311

I ara per dues xifres. Exemple 4629 : 13

13

4629	2600	200
2029	1300	100
729	390	30
339	39	3
300	260	20
40	39	3
1		356

En aquest cas, el residu seria 1, i el resultat és 356.

El nen comença buscant els múltiples del nombre o fent multiplicacions.

En aquest cas s'efectua la descomposició en unitats, desenes o centenes i es va multiplicant pel nombre a multiplicar. Té l'avantatge que no “en portem” ni influeix la mala col·locació que moltes vegades dificulta aquesta operació mitjançant l'algoritme tradicional. De fet, el que fan els alumnes és normalment començar a operar per l'esquerra que és com el nostre cervell es troba més còmode treballant, com en el cas de l'escriptura o lectura. Això és justament el contrari que succeeix amb els algoritmes tradicionals, on hem de començar a operar per la dreta, és a dir, d'unitats a desenes, centenes, etc.

Existeixen estudis (Bracho-López, Gallego-Espejo, Adamuz-Povedano, & Jiménez-Fanjul, 2014), que parlen de l'impacte que té a les aules la utilització dels algoritmes ABN, i que arriben a la conclusió que la competència matemàtica i el sentit numèric han millorat en els alumnes que fan servir el nou mètode front als alumnes que segueixen utilitzant els algoritmes tradicionals.

Personalment penso que és un mètode molt transparent en que el nen coneix en tot moment el que està fent i com treballar amb les quantitats. El que no m'agrada és que per substituir els algoritmes tradicionals, el “substitut” també porti la paraula algoritme al seu

títol. Al final també és una forma algorimitzada de treballar les operacions, amb la taula i fent les operacions corresponents, encara que un cop automatitzat es podria eliminar el paper per treballar-ho només a partir del càlcul mental.

2.2 El Quinzet

El Quinzet és una eina creada per Lluís Segarra i David Barba per treballar el càlcul mental a dins l'aula. Consta d'una sèrie de fitxes, ordenades d'acord al nivell de l'alumnat, i que han de ser resoltes en un temps de dos minuts, i d'un recull de problemes contextualitzats i adaptats als diferents nivells d'alumnat. En elles els alumnes han de fer totes les operacions possibles en el temps establert. Això fa que els alumnes vagin al seu ritme i vagin seguint la seva evolució i fixant-se en les operacions on tenen més dificultat.

Un dels seus autors, David Barba (2011), a les pàgines del seu bloc PuntMat, posa en entredit el paper avui en dia d'aquest mètode, ja que no és constructiu, i és un aprenentatge únicament per repetició. A més no s'adequa als diferents nivells presents dins l'aula ja que al ser una prova contra el rellotge, els més endarrerits sempre es quedaran en les primeres operacions sense poder seguir el ritme dels altres.

Com a punts a favor per a seguir utilitzant-lo, el fet que sigui d'una durada molt curta pot servir d'activació en moments com la primera hora del matí o l'hora després del temps d'esplai.

Un dels inconvenients és que no és autocorrectiu, sinó que el que es sol fer és un intercanvi dels fulls entre els mateixos alumnes i el mestre va dient les respostes correctes i els alumnes ho van corregint. A alguns centres els mestres ho recullen per a fer el seguiment.

El sistema es limita a treballar amb quantitats petites, i en unes situacions més o menys contextualitzades per l'alumne, però és interessant per treballar el pas del 10 i la descomposició de nombres. El que l'autor pretén amb aquest material és tenir tota una sèrie de problemes que siguin d'un entorn proper a l'alumne i que treballin amb quantitats assequibles al seu nivell, començant des de l'educació infantil per evitar que per a realitzar el compteig utilitzin els dits. L'automatització d'aquestes quantitats petites en les primeres etapes és peça clau per aconseguir educar el cervell de forma correcta per treballar el càlcul mental en el futur.

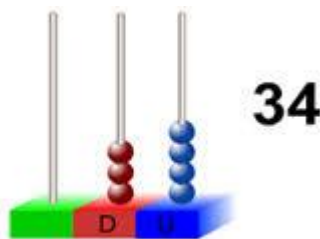
És una proposta molt vàlida per començar a treballar el càlcul mental, sobretot per evitar la temptació com a mestres d'utilitzar els dits com a reforç visual a l'hora de fer les operacions.

2.3 Antonio Martín

El senyor Martín comença la seva lluita en contra dels algorismes tradicionals arran de la seva designació com a consultor per a aplicar la LOGSE. Va començar a investigar i a partir dels conceptes i indicacions que apareixen al llibre de Constance Kazuko Kamii, de nom "El niño reinventa la aritmètica", juntament amb el llibre de José Antonio Fernández Bravo "Números en color", on es parla de les regletes Cuisinaire.

El Sr. Martín té una sèrie de principis bàsics sobre els que basa la seva metodologia que són:

- Autonomia del nen. Tant en el seu ritme d'aprenentatge, per a integrar a tots els alumnes independentment de les seves habilitats, com a l'hora d'escollir l'estratègia en el moment de la resolució d'un problema determinat.
- Importància de la manipulació. Ell ho fa amb regletes Cuisinaire, ja que creu que són les més adequades a l'hora que el nen estableixi les relacions entre els nombres que van apareixent. Per aquest motiu està en contra dels àbacs tan a nivell físic com les representacions que molts cops apareixen en els llibres de text, com:



Martín defensa que amb les regletes és més evident que una regleta taronja (10) equival a 10 blanques (1) per una qüestió de mida, mentre que amb les boles, totes tenen la mateixa mida i és més difícil d'entendre pels alumnes.

- Importància de contextualitzar els problemes en situacions reals. En la mateixa línia que el Quinzet.
- Sí al coneixement de les taules de multiplicar, però només com a ajut a l'hora de facilitar el càlcul mental. Ell defensa la memorització; és imprescindible recordar certs càlculs a base de repeticions. En el que està en contra és en el memorisme,

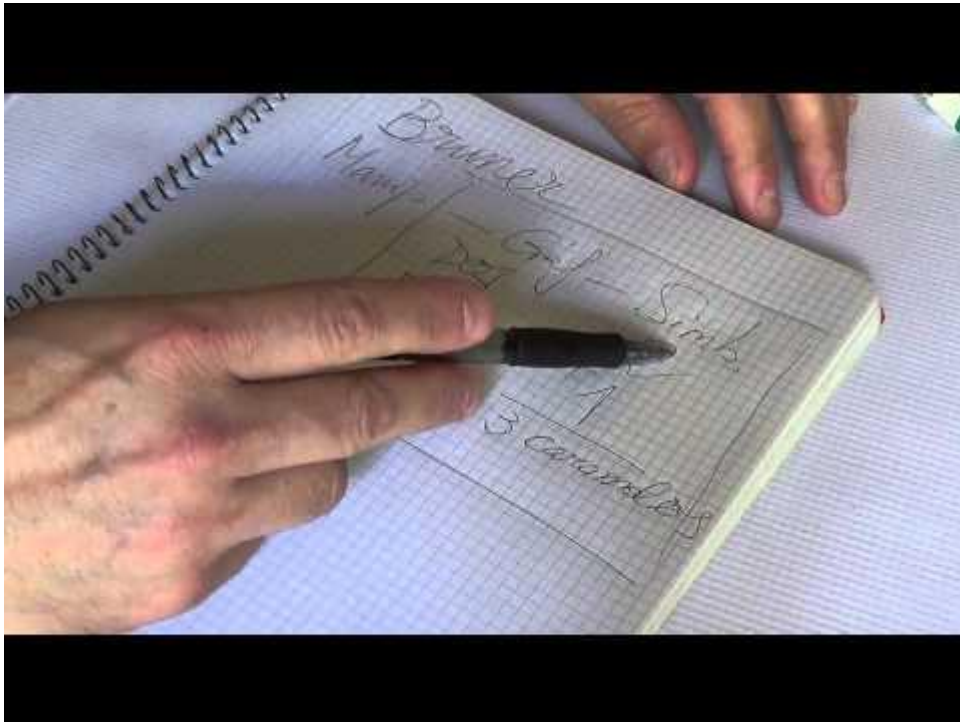
que és memoritzar conceptes sense saber per a què serveixen. De fet, quan el nen està construint les taules de multiplicar a través de les regletes o la calculadora sí que podem parlar de càlcul mental, mentre que quan utilitzi les taules per a resoldre operacions de més envergadura, està fent servir un aprenentatge emmagatzemat a la memòria.

- Formar l'esperit crític dels alumnes per a saber en quines situacions utilitzar la calculadora. Antonio Martín forma als nens en les regletes per a treballar només amb quantitats petites. L'objectiu final és treballar el càlcul mental i les diferents estratègies possibles, no saber resoldre operacions amb grans nombres, que per a fer-les ja tenim les calculadores.

Com ho fa?

Seguint al peu de la lletra el llibre de Kamii, Martín dóna molta importància a l'autonomia dels alumnes. Els nens han de tenir temps d'investigar, provar, descobrir, discutir a classe. Per tot això fa falta temps, que molts docents no estan disposats a dedicar.

També parla de la importància de retardar la presentació dels algorismes, igualment com Barba i Calvo (2015). Bruner afirma que dins l'aprenentatge de les matemàtiques existeixen 3 fases, la manipulativa, la gràfica i la simbòlica. Fer un dibuix d'un objecte no és la fase gràfica, ja que aquell objecte no existeix realment, si no que es tracta només d'un dibuix. Martín afirma en el següent vídeo que aquesta falta de manipulació és una de les causes del fracàs escolar en l'àrea de matemàtiques.



<https://www.youtube.com/watch?v=9RI02-mbyFw>

De totes formes, la proposta de Martín no es limita a tenir una alternativa als algorismes, si no que pot treballar el currículum d'educació primària utilitzant les regletes i la calculadora com a únics recursos.

Quan es presenten els nombres, s'han de repetir constantment fent l'associació de nombre amb la paraula amb el qual el designen. Per exemple 1 és un, 2 és dos, 3 és tres, i així successivament fins arribar al 100. Martín prepara una graella de nombres per a les famílies per treballar aquest aspecte en les cases i no tant en les aules.

Hi ha un parell de nombres amb els que hem de tenir una cura especial, tan si treballem en llengua catalana com castellana dins l'aula que són:

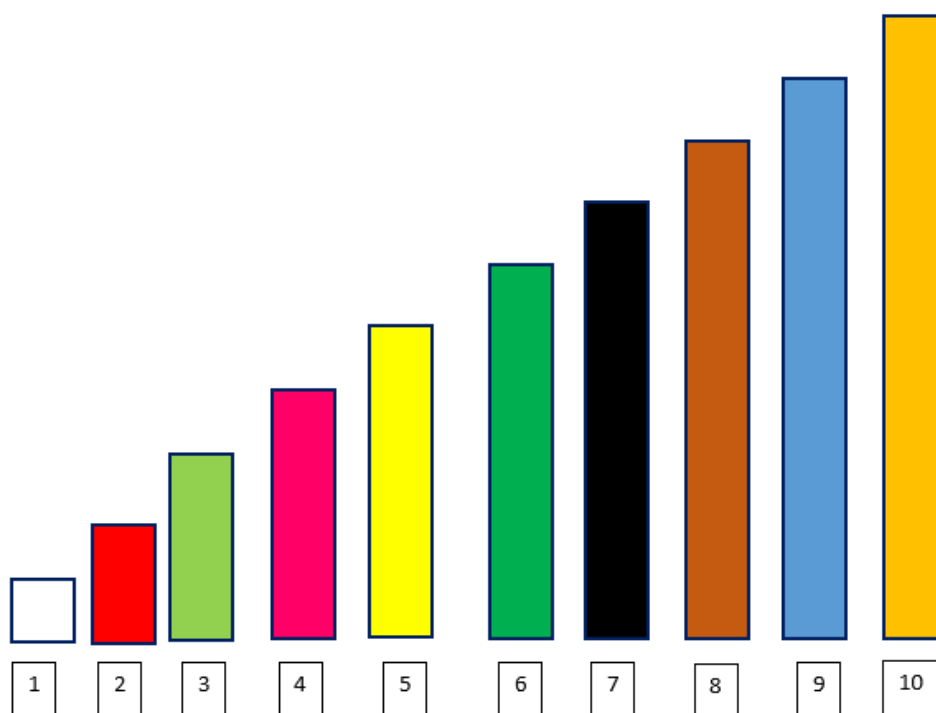
11. Ell li diu "deu i un", encara que també li diuen onze.
12. "Deu i dos" encara que també li diuen dotze.
13. "Deu i tres", tretze.
14. "Deu i quatre", catorze.
15. "Deu i cinc", quinze.

En castellà, en arribar al 16, ja són transparents els nombres, 16 és "diez y seis", o com s'escriu: dieciséis"

En català hem d'arribar fins al nombre 20 per a trobar nombres transparents, ja que els nombres es formen amb la desena i la unitat. Vint-i-un, vint-i-dos, etc...

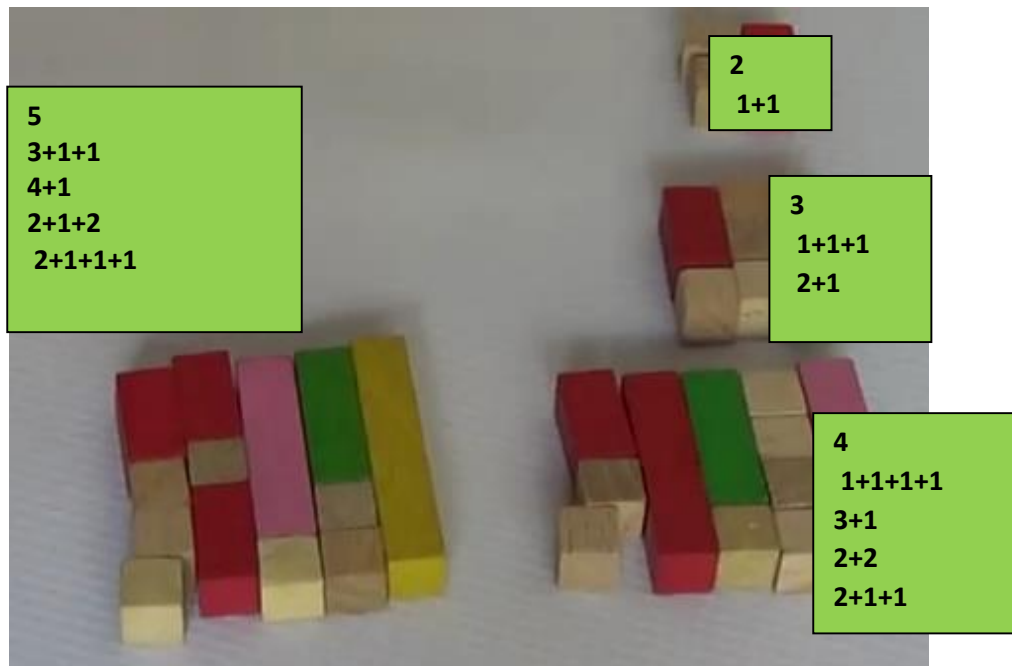
Curiosament, això també succeeix en altres llengües com l'anglès: eleven, twelve, thirteen, etc., i també desapareix a partir del nombre 20.

Així els nens comencen el seu treball amb les regletes manipulant-les i anant descobrint les relacions que es donen entre elles, sense tenir en compte els nombres per ara. Així els nens es familiaritzaran amb el color, començant a descobrir relacions entre elles, com que una és el doble de l'altra, o la meitat, i començant a resoldre problemes (sempre contextualitzats) utilitzant les regletes per a treballar la part manipulativa de la que parla Bruner.



Posteriorment, un cop els nens ja tenen memoritzats els colors de cada regleta i el seu valor, i la relació amb les altres, comencen a treballar la part gràfica i a dibuixar el que posen les regletes i la part simbòlica que són els símbols amb els que els adults identifiquem els diferents nombres.

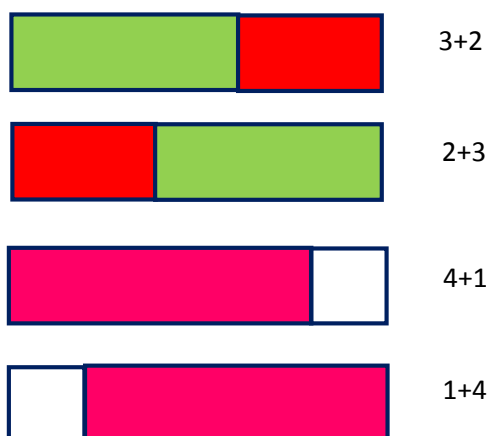
Posteriorment amb les regletes es pot començar a treballar en la descomposició dels nombres, per exemple:



Després es començaria a treballar la fase simbòlica d'aquests nombres, utilitzant únicament dues regletes, així surten:

- $2 = 1+1$
- $3 = 2+1$
- $4 = 2+2$ i $3+1$
- $5 = 4+1$ i $3+2$

Treballant d'aquesta manera, s'adquireixen uns aprenentatges significatius en qüestions com la propietat commutativa. Així els nens aprenen que $3+2$ és el mateix que $2+3$ i que només necessiten recordar una de les dues combinacions de cara al futur.

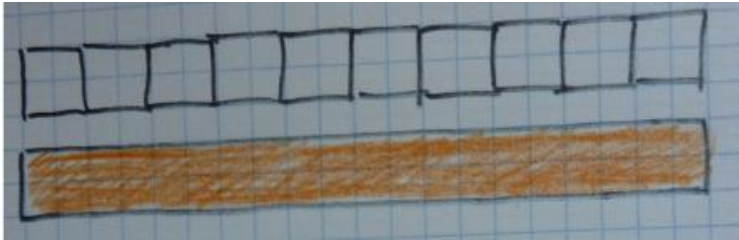


En el moment en que es fa el canvi d'unitat es fa d'una forma natural, entenent el nen el que fa, és a dir, que 10 regletes blanques equivalen a una regleta taronja.

Fase manipulativa:



Fase gràfica:



Fase simbòlica:

$$10 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$$

En aquest moment, els alumnes ja poden començar a representar nombres més grans que la desena, així sí, es molt important el treball a l'hora d'atorgar valor a cada un dels nombres, treballant un altre cop la descomposició.

$$16 = 10 + 6$$

L'1 de 16, equival a 1 desena, o 10 unitats, o una regleta taronja.

El 6, equival a 6 unitats, o 6 regletes blanques, o 3 regletes vermelles, o 2 regletes verd fluix, etc.

Un aspecte molt important a l'hora de treballar amb regletes, que facilita alhora l'autonomia i el treball del mestre, és que les regletes són autoavaluables, és a dir, el nen reconeix a l'instant si ha encertat o ha errat en la resolució del problema.

A l'hora de treballar els dobles, el nen pot pensar quin és el doble de 3 (regleta verd fluix). Pot pensar que és 5. I ho comprova.



Immediatament el nen ja detecta l'errada i observa que li faltaria una altra regleta blanca (1) per a cobrir el buit, així que el doble de 3 és 6, o regleta verd fort.

S'ha de deixar als nens experimentar i descobrir aquestes relacions que faran que cada un construeixi unes bases sòlides de càlcul.

El mètode d'Antonio Martín és el de repetir moltes vegades les mateixes fitxes o operacions. Fer-les a l'aula, repetir-les un parell de dies més tard, i després enviar-ho de tasca per casa. Així s'interioritzen els conceptes i no és necessari demanar ajut als pares per a fer les tasques encomanades.

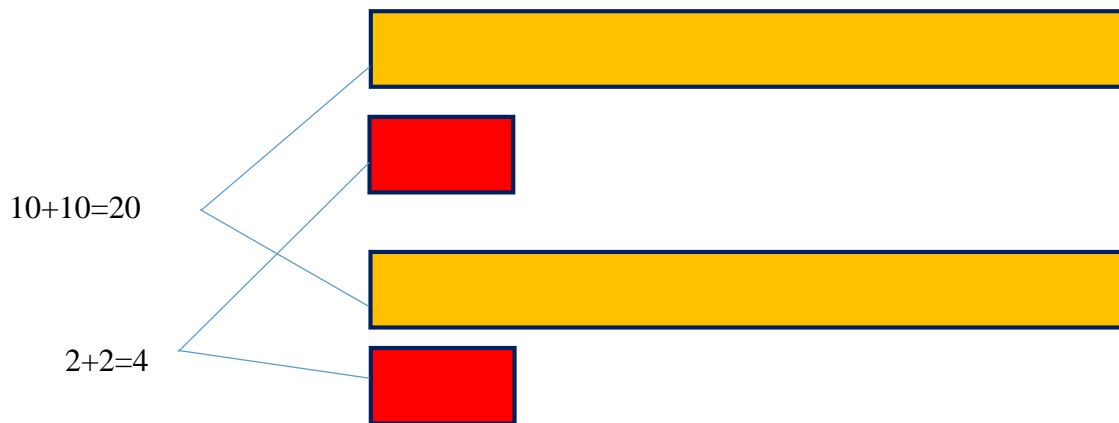
El següent pas és que els alumnes trobin les diferents combinacions a l'hora de descomposar el 10.

$$10=2+2+2+4$$

Quan apareguin expressions com aquesta, el mestre explica que es poden expressar d'una forma més senzilla

$10 = (3 \cdot 2) + 4$. Es llegeix 3 vegades el 2 i 4. En cap moment parlarem de multiplicar, solament parlem de nombre de vegades.

Arribarà un moment en que els alumnes ja no necessitaran la part gràfica i passaran directament de la part manipulativa a la simbòlica.



$$20+4=24$$

Sense aquesta manipulació prèvia que no es dóna a les aules a dia d'avui difícilment poden entendre que a un nombre com 222, el segon 2 significa dues regletes taronges, o 20. En els algorismes tradicionals tots els nombres valen el mateix a l'hora d'operar.

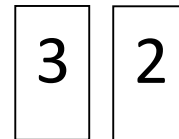
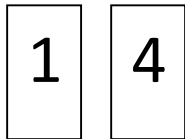
En aquest moment els alumnes ja treballen en problemes on han de trobar la solució a un problema. Aquests problemes han de ser contextualitzats i adaptats a les realitats del nen. Amb el pas del temps s'han d'anar afegint distractors que treballin la comprensió lectora. Per exemple, si al principi el problema és si tinc 1 caramel i en compro 2 més, quants en tindrè?, amb el pas del temps pot derivar amb si tinc un caramel de fraula que m'ha regalat la meva àvia i en compro dos més de llimona a la botiga del poble. Quants caramels de llimona tinc? I de fraula?

Paral·lelament a que els alumnes treballin en la descomposició del 10, poden treballar amb la de les desenes corresponents, com a l'exemple:

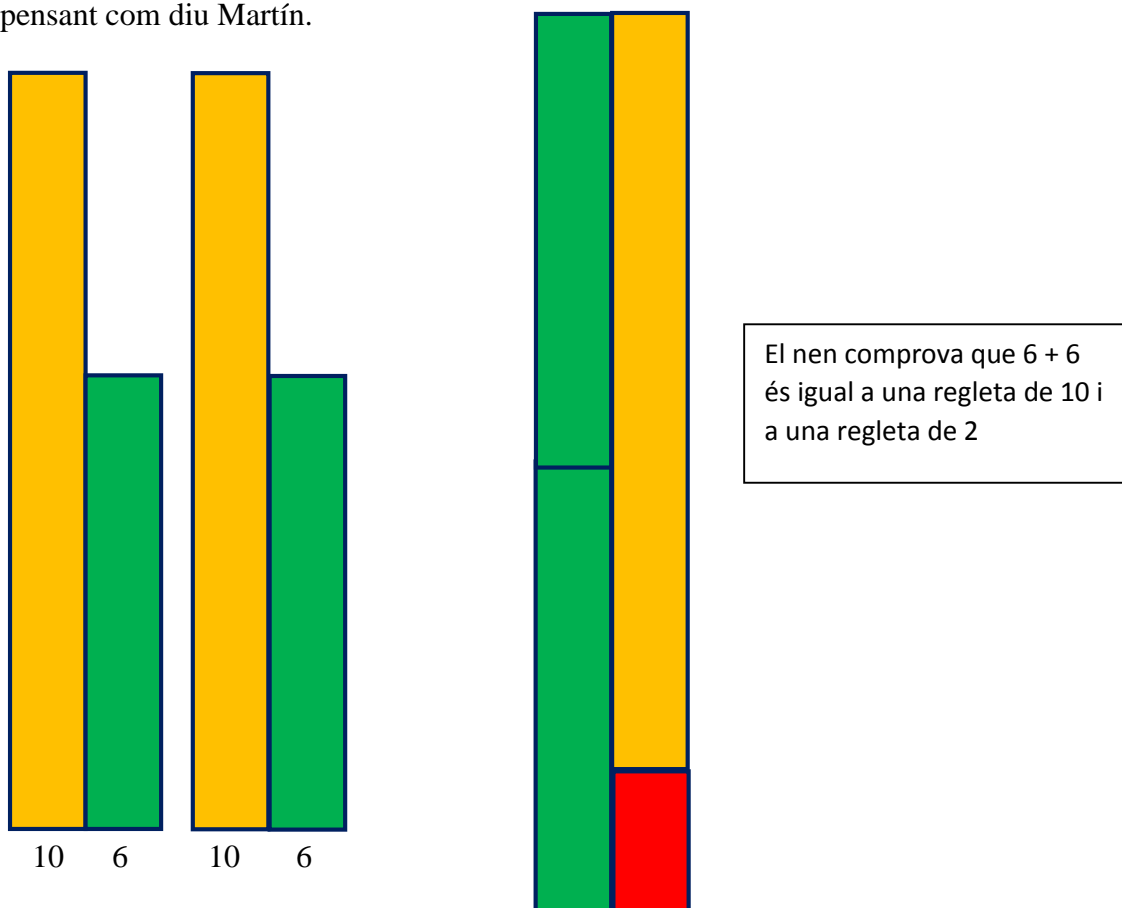
10	100	1000
9+1	90+10	900+100
8+2	80+20	800+200
7+3	70+30	700+300
6+4	60+40	600+400
5+5	50+50	500+500

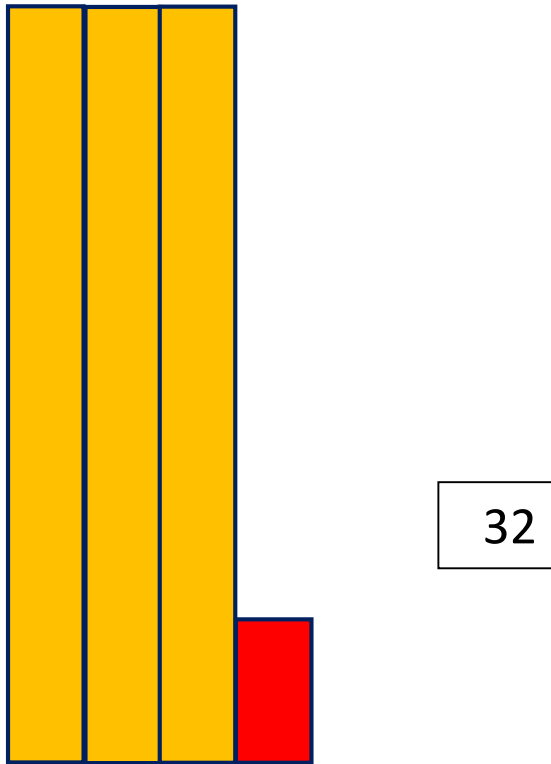
És important que els alumnes trobin les relacions per sí mateixos de les operacions, i s'adonin que sumar $80+20$ és el mateix que sumar $8+2$ i afegir un 0 al final. Per a la segona i tercera columna utilitzaran la calculadora per a comprovar els resultats.

Un joc que funciona molt bé com a reforç d'aquest aprenentatge és crear unes targetes amb nombres i han de buscar la combinació que fa 5, i anar complicant-ho amb nombres més grans.



Ara que ja saben descomposar el 10 perfectament, poden treballar en la suma portant, o pensant com diu Martín.





El fet que memoritzin les operacions bàsiques de descomposició farà que evitin comptar amb els dits. Això ja ho afirmava en Lluís Segarra, que el pitjor per avançar en el càlcul mental era el compteig amb els dits. Les regletes les han d'anar eliminant progressivament, però els dits és un recurs que sempre porten al damunt i al que s'ha d'evitar recórrer en moments de dubte.

Un recurs que utilitza Martín en les seves classes és utilitzar la calculadora des dels primers moments que els nens treballen amb nombres. Amb el factor comú de la calculadora els nens poden anar autoavaluant-se per a memoritzar els dobles, la suma d'1 més, de 2, etc. És important treballar amb calculadores adaptades als nens, és a dir, amb botons els suficientment grossos per evitar errades.

Possibles estratègies per a la suma:

$27+6= 27+1+1+1+1+1+1$. Es fa un compteig de la quantitat més petita. Etapes més primerenques.

$7+8 = 7+7+1$. L'alumne ja coneix els dobles. 8 es pot descomposar en $7+1$.

$2+7=7+2$. Propietat commutativa. El nen coneix aquesta propietat ja que ho ha experimentat amb les regletes i sap el resultat d'una de les combinacions.

$27+15=27+10+5$. Descomposició d'un dels sumands. $27+10$ és 37 i si li afegim 5, el resultat és 42.

$48+14$. Descomposició dels dos sumands. $40+8$ i $10+4$. $50+12=62$.

Possibles estratègies per a la resta:

$$\begin{array}{r} 12 \\ -8 \end{array} \quad \boxed{=8+2+2}$$

No té importància la posició en que es col·loquin les xifres. Per a resoldre, els nens fan redondejos del tipus, tenim 8, per arribar a 10, 2 més i per arribar a 12, 2 més. Resultat és 4.

$$\begin{array}{r} 23 \\ -18 \end{array} \quad \boxed{=18+2+3} \quad \boxed{\text{Resultat és 5.}}$$

$$\begin{array}{r} 51 \\ -9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \\ +9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 41 \\ +1 \end{array} \quad = 42$$

$$\begin{array}{r} 51 \\ -28 \end{array} \quad \begin{array}{r} 30 \\ +28 \end{array} \quad \begin{array}{r} 21 \\ +2 \end{array} \quad = 23$$

En arribar a un cert nivell de comprensió, Martín dona de tasca inventar-se un algoritme o forma de resoldre les operacions, i aquest són algunes de les solucions proposades:

$$\begin{array}{r} 458 \\ -269 \end{array} \quad \begin{array}{r} 458 \\ -200 \end{array} \quad \begin{array}{r} 258 \\ -60 \end{array} \quad \begin{array}{r} 198 \\ -9 \end{array} \quad \boxed{189}$$

$$\begin{array}{r} 458 \\ -269 \end{array} = 269 + \boxed{1 + 30 + 158} \quad \text{Resultat és 189}$$

$$\begin{array}{r} 687 \\ -562 \end{array} \quad \begin{array}{r} 600 \\ +80 \\ +7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 500 \\ +60 \\ +2 \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{r} 100 \\ +20 \\ +5 \end{array}} \quad \text{Resultat és 125}$$

En arribar a xifres més grosses, és important la descomposició dels nombres. Per treballar amb les centenes Martín va crear unes fustes que equivalen a la suma de 10 regletes taronges, que ell anomena cuadretes.

$$425 = 400 + 20 + 5$$

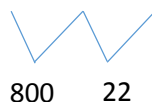
$$487 = 400 + 80 + 7$$

$$243 = 200 + 40 + 3$$

$$335 = 300 + 30 + 5$$

$$600 + 60 + 8$$

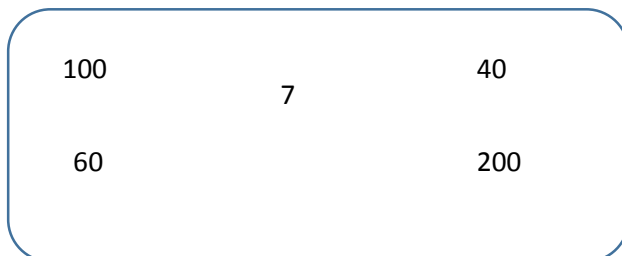
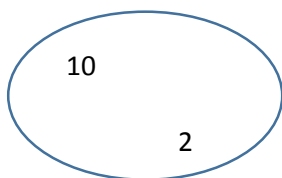
$$700 + 110 + 12$$



$$\begin{array}{r} 487 \\ + 335 \\ \hline 700 \\ 110 \\ \hline 12 \\ \hline 822 \end{array}$$

No és important la posició dels nombres.

Han de ser capaços de resoldre operacions com aquestes. Quants n'hi ha dins el sac?



O col·locant els operands d'aquesta forma poc habitual:

$$\begin{array}{r} 2 \\ +12 \\ \hline 14 \end{array}$$

El que observem és que a les classes de Martín es treballa a partir de nombres petits, per després fer l'extrapolació als nombres més grans, i que els alumnes comencen a comptar d'una forma més lògica i adaptada a les seves estructures mentals; això és d'esquerra a dreta, primer centenes, desenes i finalment unitats.

Martín fa que els nens operin amb quantitats petites i que repeteixin molts cops les mateixes fitxes per facilitar els aprenentatges, ja que el que ell vol aconseguir és que el nen tingui èxit a l'hora de resoldre els problemes. Amb això aconseguirà pujar l'autoestima de l'alumne i predisposar-lo a nous reptes.

Per a treballar la multiplicació:

$$\begin{array}{r}
 235 = 200 + 30 + 5 \\
 \times 4 \quad \underline{\quad 4 \quad} \\
 800 + 120 + 20 = 940
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 4 \\
 \times 235 \\
 \hline
 800 \\
 120 \\
 20 \\
 \hline
 940
 \end{array}$$

Per a la divisió:

Les divisions d'una xifra s'han de saber i per a dominar-les, els alumnes han de tenir memoritzades les taules de multiplicar.

És important fomentar un esperit crític per a que el nen pugui destriar quan un objecte és divisible o indivisible. Per exemple, en el cas dels euros, si ens queda un residu de 2 euros, el podríem continuar repartint, ja que 2 euros són 200 cèntims.

- ✓ Repartir 11 flors en 2 gerros.

$11 \div 2 = (10+1) \div 2$. Hi haurà 5 flors a cada gerro i en sobra 1(residu)



És important que tinguin material tangible, com llapis de colors, o llegums, etc., per a treballar la fase manipulativa.

- ✓ Repartir 7 € entre 3 persones

$7 = 2 + 2 + 2$. Per tant, 2 euros a cada persona.

Sobra 1 euro que són 100 cèntims, per tant:

$0,30 + 0,30 + 0,30$. Ja tenim 2,30 euros per persona, però ens sobren 10 cèntims.

$0,3 + 0,3 + 0,3$. Resultat 2,33 € per persona i 1 cèntim de residu.

✓ $54 \div 3$

$(30 + 24) \div 3$

10 + 8. Resultat és 18.

✓ $470 \div 3$. Important conèixer la descomposició dels nombres.

$(300 + 120 + 30 + 18 + 2) \div 3$

100 + 40 + 10 + 6 = Resultat és 156 i residu 2.

Amb aquest mètode ens adonem dels errors que fem quan apliquem l'algoritme tradicional de la divisió, ja que el mestre diu ara baixem el 4, quan realment no és un 4 si no 400. El mateix passa amb la resta de nombres.

Amb aquestes operacions el que es fa és preparar la ment per a fer estimacions, que serà el proper pas amb les divisions de 2 xifres.

Començar per operacions bàsiques del tipus

$400 \div 10$, $400 \div 20$, $400 \div 40$, $400 \div 80$

✓ Dividend major que divisor

$248 \div 12$

$(120 + 120 + 8) \div 12$

10 + 10 + 8. Així el resultat és 20 i el residu 8.

✓ Dividend similar a divisor

$248 \div 25$

Fem una estimació. Si fos 10, serien 250. Per tant sabem que el resultat és inferior a 10.

Ho fem amb la calculadora i el resultat és 9,92.

Aquestes estimacions són molt vàlides per que l'alumne prengui consciència de si s'ha pogut errar amb el càlcul amb la calculadora, ja sigui quan ha introduït les xifres o tocant alguna tecla per descuit.

✓ Dividend menor que divisor

$128 \div 25$

$(100 + 25 + 3) \div 25$

4 + 1 + 3. Resultat 5 i residu 3

✓ Per operacions del tipus $5237 \div 25$, seguim amb les estimacions.

Sabem que

$$25 \times 100 = 2500$$

$$25 \times 100 = 2500$$

$$25 \times 10 = 250$$

Així sabem que si el resultat fos 210, ens passem una mica. Per tant l'estimació és que el resultat és inferior a 110.

Per saber-ho exacte s'utilitza la calculadora. El resultat exacte amb calculadora és 209,48.

En la mateixa línia ideològica que Antonio Martín trobem a David Barba i Cecilia Calvo (2015) que afirmen; *“no podem mantenir les llistes interminables de pràctica repetitiva, ni mantenir en aquests llistats operacions amb nombres tan grans que mai faríem sense utilitzar calculadora, ni mantenir la proposta de les mateixes tasques d'exercitació per a tots els alumnes independentment del seu grau de domini de l'algoritme”*.

2.4 Comparativa metodologies analitzades:

De les tres metodologies analitzades, podem observar que el Quinzet és un simple recull d'operacions amb nombres petits amb la finalitat que els nens automatitzin aquestes operacions per a tenir una base sobre la qual construir el seu coneixement matemàtic. Interessant per començar el treball en les primeres etapes amb la seva col·lecció de problemes contextualitzats.

Els algoritmes ABN només es limiten a treballar els algoritmes tradicionals des de una perspectiva més comprensiva per a l'alumnat, que entindrà les estratègies que escull per a resoldre el problema.

Allà on trobem una proposta global és en el cas d'Antonio Martín, ja que dóna alternatives a cada un dels continguts que poden aparèixer en el currículum d'educació primària. Així, Martín no es limita al treball amb les regletes per a calcular millor, ell sempre diu que la seva finalitat no és resoldre algoritmes sinó ajudar a crear unes bases sòlides per el càlcul mental. Seguint el seu sistema i analitzant les lectures que recomana en el seu canal de Youtube, podem establir una seqüenciació de com presentar els continguts als alumnes.

A nivell d'aula el que més útil i fàcil és el de Martín, ja que el treball amb les regletes és autoavaluatiu i la feina amb la calculadora, utilitzant el factor comú per a construir taules,

seriacions, etc., també és autocorrectiu, ja que la calculadora ens ofereix la resposta de manera immediata.

Parlant en termes inclusius i d'adaptació als diferents nivells presents dins l'aula, també el material de Martín és el més adaptable, ja que el Quinzet al ser una prova contra el rellotge ja exclou a molts nens que necessitin de més marge de maniobra per a resoldre les qüestions.

La part de l'autonomia i esperit crític per a decidir quins són els càlculs a resoldre per un mateix o amb la calculadora, no es treballa en cap dels anteriors excepte en Martín que li atorga gran importància.

De Martín també destacar el treball amb la contextualització dels problemes, i la incorporació progressiva del que ell qualifica com a “distractors” per a millorar la comprensió lectora i saber destriar les dades realment útils i necessàries per a resoldre les qüestions demanades.

3 Propostes de materials

A continuació es fa una proposta de diferents jocs per jugar de forma col·lectiva dins l'aula així com algunes applets per a treballar alguns aspectes relacionats amb la millora d'estratègies de càlcul mental.

Avantatges dels jocs col·lectius respecte als quaderns d'exercicis, extrets del llibre “El niño reinventa la aritmètica” de Constance Kazuko Kamii:

- Donen al nen una raó pròpia per a fer aritmètica. Així es veuen més motivats per a pensar en descomposicions numèriques i alhora recordar-les.
- El feedback prové dels companys i d'un mateix. El nen torna més actiu mentalment quan existeix la possibilitat de superar els companys o que els mateixos companys el superin.

A més, aquest feedback és immediat, no en diferit que és el que succeeix quan el nen ensenya el quadern d'exercicis al mestre.

- Ajuden als nens a pensar, a comparar, a debatre.
- Autonomia per a decidir el joc al que volen jugar. Més motivats ja que el joc l'han triat ells, no és una imposició.
- Possibiliten la interacció social per a pactar les normes del joc. Així, amb aquesta autonomia, són conscients de les conseqüències de les seves pròpies decisions.

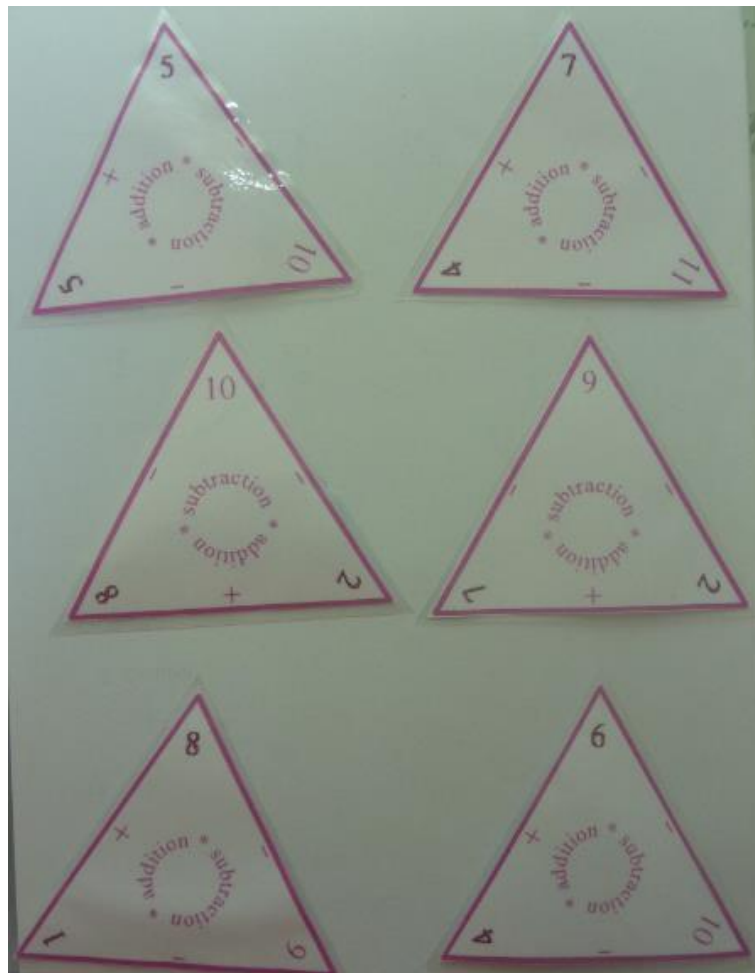
Targetes per a treballar la descomposició dels nombres



Amb les targetes amb nombres, els nens han de buscar la pinça amb l'operació correcta. Aquestes operacions poden ser sumes, restes, multiplicacions, divisions, operacions combinades, potències, per tant es pot anar adaptant als diferents cicles.

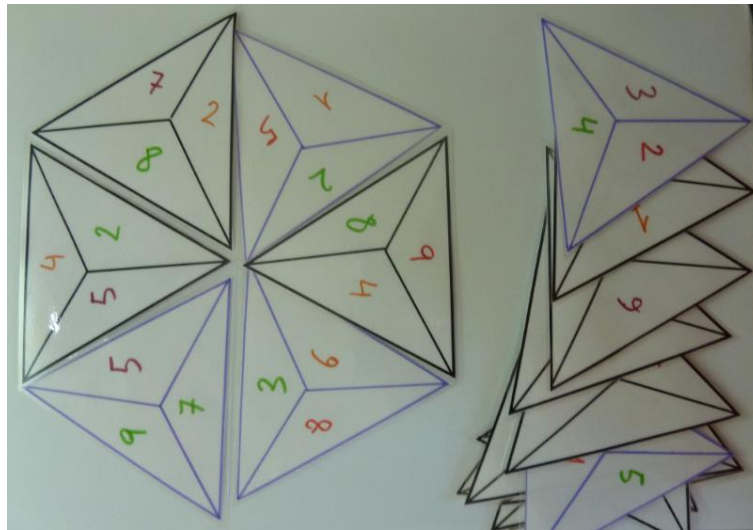
Per fer-ho autocorrectiu, es poden anotar els resultats possibles de les pinces a la part posterior de la targeta.

Triangles per treballar les operacions bàsiques



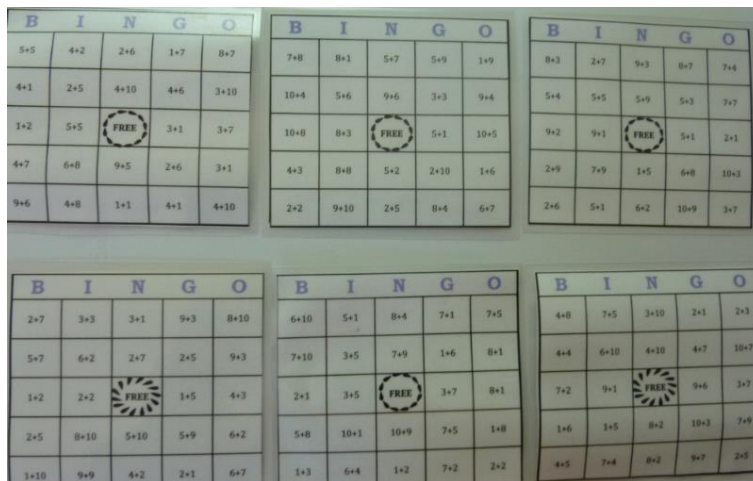
Col·locant-se en parelles, un d'ells tapa una de les xifres i l'altre ha de resoldre l'operació. Té un feedback immediat ja que és autoavaluatiu, basta aixecar el dit per a veure el resultat correcte.

Triangles per treballar la descomposició del 10



S'han de col·locar els triangles observant que la suma de les cares doni 10.

Bingo d'operacions



El mestre anirà traient nombres i anotant-los a la pissarra. Cada alumne ha de buscar la operació que correspongui al seu cartró. Es pot fer amb les diferents operacions. Inclús una variant de més nivell seria no posar els símbols de les operacions i cada alumne hauria de triar el signe que s'adaptés al resultat que vol obtenir. Per jugar d'aquesta manera es podria escriure el signe escollit al damunt de l'operació amb retolador que es pot esborrar posteriorment si utilitzem targetes plastificades.

Jocs de cartes



Joc col·lectiu on es reparteixen les cartes i cada nen ha d'anar fent preguntes als altres amb les cartes que té. Quan la fa pregunta, el qui té la carta se la queda i la aparta. Guanya qui aconseguix més cartes al final.

Una variant seria combinar aquestes cartes amb el bingo. El mestre llegeix la pregunta i cada un ha de resoldre el problema i buscar el nombre en el seu cartró.

Applet per treballar la descomposició del 10



http://www.softschools.com/math/games/fun/math_lines/

Sumes a partir de la descomposició de nombres (similar a la metodologia d'Antonio Martín)



http://www.softschools.com/math/addition/addition_number_bond_method/

Recta numèrica interactiva



http://www.softschools.com/counting/games/number_train/

Restes sobre la recta numèrica

Counting Down Subtraction

Q 1 of 5 Time 00:05

What is $12 - 2$?

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

$12 - 2 =$

Home Submit

http://www.softschools.com/math/subtraction/counting_down_method_subtraction/

Treball amb càlcul mental

Score 100 Target Maximum

$\times 3$ $\times 6$ $\times 9$

$\div 2$ $\div 3$ $\div 2$

$\times 1$ $\times 2$ $\div 3$

<http://illuminations.nctm.org/pickapath/>

4 Conclusions

Un dels objectius d'aquest treball de final de grau era fer una recerca de l'estat del càlcul mental en el nostre país. Hem pogut observar els beneficis que s'obtidrien si s'apliqués de forma gradual en les aules. El que ens cal és fer una pas al front i pactar aquest gran canvi amb tots els agents implicats: als mestres oferint formació en les noves metodologies, a les famílies apartant informació de què es farà i els èxits en altres països i als alumnes, a qui se'ls presentarà una nova forma d'entendre el càlcul com una forma de fer-los més lliures.

Els objectius plantejats al principi del treball s'han complert ja que hem tingut una primera aproximació a metodologies diferents a l'hora d'entendre els càlculs a primària i a conèixer com es podria implementar en les nostres aules.

Els docents, com tota la societat, precisen d'una formació contínua i no han de fer por els canvis que això implica. En molts dels cassos analitzats, el material que s'utilitza és autocorrectiu per la qual cosa, el nen no necessitarà un feedback constant per part del docent, sinó que aquest prové del propi material o dels companys.

Finalment es presenta un recull de materials que es poden utilitzar a l'aula, encara que aquesta llista és fàcilment actualitzable, ja que constantment apareixen noves propostes i nous materials.

Per acabar, només observar que el càlcul mental o el càlcul estimat és imprescindible per formar ciutadans competents i és útil per múltiples situacions que es presenten diàriament en la nostra vida.

Bibliografia:

- Adamuz-Povedano, N. y Bracho-López, R. (2014). Algoritmos flexibles para las operaciones básicas como modo de favorecer la inclusión social. *Revista Internacional de Educación para la Justicia Social*. Volum 3, numero. 1.
- Barba Uriach, D., & Calvo Pesce, C. (2011). Sentido numérico, aritmética mental y algoritmos. *Elementos y razonamientos en la competencia matemática [Recurso electrónico]*, pàg. 47–78.
- Barba Uriach, D. (2011). PuntMat. Rapidesa d'operacions i paper de les estratègies. Recuperat de <http://puntmat.blogspot.com.es/2011/10/rapidesa-doperacions-i-paper-de-les.html>
- Barba Uriach, D. & Calvo Pesce, C. (2012). Calcular saltando sobre la línea numérica vacía. *Revista Suma+*, n ° 70, pàg. 115-122.
- Barba Uriach, D. & Calvo Pesce, C. (2015). Calcular con números y no con dígitos. *Revista Suma+*, n° 78, pàg. 73-81.
- Currículum de matemàtiques Illes Balears LOE. recuperat de Weib. http://weib.caib.es/Normativa/Curriculum_IB/educacio_primaria_.htm
- Fernández Bravo, J. A. (2005). Avatares y estereotipos sobre la enseñanza de los algoritmos en matemáticas, 4, 31–46.
- García Jiménez, J. E., & Álvarez García, J. L. (2011). Elementos y razonamientos en la competencia matemática [Recurso electrónico]. Subdirección General de Documentación y Publicaciones.
- Gómez Alfonso, B. (2005). UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Recuperat de <http://www.fisem.org/www/union/revista4.php>
- Martín, Antonio. Canal de Youtube <https://www.youtube.com/channel/UCPeX95GhAz9212NnbAmdWag>
- Martín, Antonio. Algunas consideraciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las tablas de multiplicar. *Revista números*. Número 28, diciembre 1996, pàg. 13-25.
- Martínez, Jaime. Algoritmos ABN. Por unas matemáticas sencillas, naturales y divertidas. Recuperat de <http://algoritmosabn.blogspot.com.es/>.
- PISA 2012 Informe Internacional. Boletín de Educación Educaínee. Numero 22, diciembre 2013. recuperat de <http://www.mecd.gob.es/inee/estudios/pisa.html>

Rafael Bracho-López. (n.d.). Menos reglas y más sentido: Alternativas metodológicas a los algoritmos de cálculo tradicionales para el desarrollo del sentido numérico en la educación primaria. VII CIBEM (Congreso Iberoamericano de Educación Matemática). Montevideo, Uruguay. 16 al 20 de septiembre de 2013.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2008). Educación matemática en los Países Bajos :, (2001), 23–54. Revista Correo del Maestro Núm. 149, octubre 2008.

Vargas Vargas, Rafael Antonio (2013). Matemáticas y neurociencias: una aproximación al desarrollo del pensamiento matemático desde una perspectiva biológica. Revista Unión. Núm. 36, diciembre 2013, pàg. 37-46-

Annexes

Transcripció entrevista Lluís Segarra

Pere: Com veieu el càlcul mentre a les aules?

Lluís Segarra: No es veu massa. Si no és algun grup amb gent que sap com funciona, si no el que es fa són quadernets de càlcul de tota la vida, Rubio, amb operacions de moltes xifres. Això és una de les coses que tothom diu que s'ha de canviar però segueix igual. Potser l'administració diu però tampoc obliga, o tampoc dóna propostes. És fàcil fer una xerrada un dia per xerrar de que no s'ha de fer càlcul escrit i s'ha de fer més càlcul mental però en definitiva és per quedar bé, després no funciona.

Pere: També la por de molts mestres que han après malament les matemàtiques...

Lluís: I després la pressió social, és a dir, pares i societat en general quan parla de matemàtiques encara que digui: Jo quan era petit no m'agradaven gens. Si un pare té un mestre que diu: nosaltres treballem la investigació, fem projectes, etc, ... molt bé, però si no hi ha les sumes i les restes. A més exigeix, quan farem això?

Pere: A mi el centre de pràctiques em va passar una cosa similar. Volia explicar als alumnes que no entenien la resta amb un sistema diferent, però el tutor em va dir que tindríem problemes amb les famílies.

Lluís: D'algortmes n'hi ha molts al llarg de la història. Hi ha els algortmes que la gent feia servir amb els àbacs, que són algortmes manipulatiu, que durant una època foren importants, però necessites l'àbac per fer-ho. Després hi els algortmes de càlcul escrit que són els representatiu, que són els que es fan a l'escola que poden ser mes o menys moderns i queda l'últim tipus d'algortme que ara és una mica l'alternativa a la crisi de l'algortme escrit, l'algortme mental, perquè un quan va pel carrer el que no vas a fer es una multiplicació o divisió de dues xifres i el problema que hi ha és que nosaltres estem educats en l'algortme escrit i llavors quan hem de fer càlcul mental el que fem és dibuixar a la nostra ment. Tu estàs fent l'operació mental i quan la tens es comencen a escapar els nombres perquè clar, si jo tinc 32×11 , i ho poso dins el cap, i penso 32, quan fas això el 3 se t'escapa. Aquest tipus està pensat per fer-ho en paper i quan ho fas en paper no tens el problema que se t'escapi res.

Els algortmes mentals són els que a mi m'agraden i els que es fan servir ja fa uns quants anys als països holandesos i Alemanya. A mi m'agrada molt per una senzilla raó, que són molt pròxims a nosaltres. La matemàtica finlandesa està molt bé i és una meravella però és impossible que nosaltres en 40 o 50 anys arribem perquè és la societat, la manera de ser, el prestigi que té el

mestre i això necessitem passar molts passos encara per arribar. I clar, en canvi, dius matemàtica alemanya, tenim no se quants estudiants, gent treballant a Alemanya aquests darrers anys, quanta gent fa Erasmus a aquests països centro-europeus? És la matemàtica nostra, llavors per això m'agraden les tendències que ells tenen. Els alemanys és més quadriculat, i els holandesos és tan sistemàtic però més divertit. La diferència és que fan la mateixa matemàtica però l'alemanya és avorrida i la seva és divertida. I a vegades penses que per caràcter és veritat.

Pere: Està ben tractat el càlcul mental al currículum d'educació primària?

Lluís: El currículum en parla, però el problema és que possiblement altres coses estan molt més concretitzades i diuen això d'aquesta manera, al currículum es parla a nivell global de càlcul mental, però no dóna cap directriu. La diferència que hi ha entre el càlcul mental i el càlcul escrit que té la gent és la mateixa que tenien els nostres avis. No es parla d'un càlcul mental més simbòlic més amb tècniques noves. El problema més gran que té el càlcul escrit nostre, no només en matemàtiques, el problema que hi ha és que jo explico la multiplicació d'una xifra com a algorisme un dia determinat, però això no és un bolet, si no és la conclusió de tot un procés que es comença des d'infantil fent tota una sèrie de passos i es va construint un edifici i per això la matemàtica normalment té aquest avantatge de que és així, però també l'inconvenient que si falta un pas d'aquests el procés no continua. A vegades estàs a tercer i dius el que estic fent és una cosa simple però tinc uns alumnes que no arriben i no és un problema d'aquell contingut si no possiblement d'un contingut mal treballat un parell de cursos abans.

Pere: No es pot treballar com una cosa aïllada.

Lluís: Exacte. A un vulgui centre encara que un docent canviar no podrà fer gaire cosa. Això és el gran drama de les matemàtiques. Amb tots el aprenentatges passa, però en les matemàtiques es nota molt. Llavors, igual que passa això, resulta que si jo faig aquesta matemàtica més simbòlica, més de càlcul mental, hauria de canviar tots aquests estadis des d'abaix. Jo no puc fer a infantil compteig numèric que fa que el nen compti: un, dos, tres. Si no, hauria de canviar, perquè si el nen s'acostuma a comptar així o fes al cap, quan arriba a primària compta amb dits i comptar amb dits només hi ha tres països a la comunitat que compten amb dits que són nosaltres, els portuguesos i els grecs, no hi ha ningú més. Què passa? Que comptant amb dits és impossible fer càlcul mental. La resta de països ho fan tot mental, per estimació. Els nen d'ara no compten, aquestes quantitats petites les veuen per estimació. I això és l'alternativa a treballar el compteig. El compteig ve per la part esquerra del cervell. La part esquerra del cervell és la que seqüència, i la part dreta és d'imatge. Llavors, la part esquerra s'ha fet servir sempre, ha anat augmentant en capacitat, a l'Edat Mitjana només s'utilitzava un 10-15 % la part

esquerra i ara, a principi del segle passat s'utilitzava quasi el 90 %. I la part dreta la vàrem començar a utilitzar a principis dels anys 80. Llavors, la part esquerra la informació arriba en petits paquets d'informació una rere l'altre i al final t'enteres de la notícia. La part dreta la informació entra per imatge. La part esquerra seria la lectura, si tu agafes un text i vols saber el que diu el que fas és entrar al cervell paraula per paraula una rere l'altre i cada paraula és un paquet d'informació. Quan arribes al final de la frase t'enteres. Això és part esquerra. Té dues condicions, que són ordenades, si canvio les paraules de posició no entenc res, i ha de ser completa, si jo esborro paraules el missatge no arriba. A nivell de mates, si joestic en un lloc i hi ha disset persones, el sistema que faig servir per comptar-les, jo tinc els nombres ordenats de zero al que sigui i identifico aquesta escala numèrica amb persones i llavors començo un, dos, tres, cada vegada que canto un nombre és una unitat d'informació. Quan arribo al final m'he enterat de quantes persones hi ha. Aquí passa igual, si jo utilitzo els nombres però no els utilitzo ordenats i començo disset, catorze, tres, no m'entero si em deixo persones o em deixo nombres. Això és part esquerra, la majoria d'aprenentatges són part esquerra, són seqüencials i a més l'hemisferi esquerra és el que hem treballat durant molts anys. La part dreta la informació entra pel final i entra per imatges, per impactes visuals, per exemple el conduir. Tu quan vas en moto o en cotxe les informacions que t'entren són totes flashos d'informació, veus el cotxe de davant, veus el que passa el semàfor, tot entra al mateix temps i encara tens temps de veure anuncis. I aquesta és la raó de que puguis respondre a tota aquesta informació en dècimes de segon, i per això puc anar a 120 km/h, si no, no podria anar. Això és part dreta. Quan jo treballo l'estimació, els nens d'avui en dia estan molt estimulats, els nens veuen quantitats amb molta facilitat.

Pere: Això vol dir que els nens actuals estan més preparats per treballar el càlcul mental que els d'unes generacions passades?

Lluís: Si, però no el càlcul mental dels nostres avis. I sempre amb processos d'aquests globals, d'imatge, estimatius, etc. La part dreta del cervell té tres aspectes a treballar que és l'estimació, al geometria i el càlcul global, que és el càlcul del compte de la vella. I això s'hauria d'estimular a l'escola perquè el nen que detecta quantitats no comptant si no veient, no compta amb dits i si no compta amb dits té moltes més facilitats d'arribar a fer càlculs molt més abstractes. A un nen d'infantil si li dius una poma i dues pomes, quantes són? Et diu tres, sense saber sumar. Això és càlcul global, perquè el resol amb la part dreta, el resol per imatges. En canvi si li dius un més tres, si no sap sumar, no et diu quatre. Això seria càlcul analític que es processa amb la part esquerra. Les dues parts són molt importants les dues, però si des de fa uns quants anys tenim part dreta s'ha d'estimular perquè pel càlcul ràpid, de carrer, es necessiten més capacitats. Si la persona ha començat a activar neurones de part dreta és precisament perquè són necessàries

per la nostra vida social. Això el currículum no ho tracta, el currículum queda bé i diu s'ha de fer el càlcul mental, però sense coherència que una persona quan ho vegi digui sí, he de canviar, he de fer això.

Pere: Ahir vam fer les proves IAQSE, de tercer. A aquest tipus de prova, PISA, IAQSE, poca cosa de càlcul mental.

Lluís: Sí. No, en aquestes proves es treballa més la resolució de problemes. El càlcul mental, escrit, tot això són instruments. Si jo he de fer tota la matemàtica amb eines però sense poder-ho aplicar no serveix de res. La matemàtica necessita aquests entrenaments i ,en definitiva el que és el final del procés és el problema. Si preparem els nostres alumnes perquè facin només algorismes i no resolguin problemes estem fent màquines de calcular i no hi ha cap feina actual que t'agafin que ja la pugui fer una màquina. Les úniques possibilitats de tenir feina és fer coses que no fan les màquines. No agafaran mai una persona que fa només el que fa una màquina, és molt més barata la màquina. El que necessitem és gent que faci coses que encara les màquines no poden aconseguir i això de pensar encara només està dins nosaltres.

Pere: Opinió sobre la matemàtica realista. El model holandès.

Lluís: Utilitzen molt la recta numèrica. Tota la matemàtica holandesa es basa pràcticament amb Freudenthal. Els holandesos el que fan és un procés d'ensenyament lent, no excessivament ràpid. Els nens de primer, segon i fins a tot tercer a segons quines zones treballen amb algorisme mental, amb algorisme propi, però no fórmula establerta, general i això penso que és una cosa important. Això els alemanys no ho fan tant potser perquè no s'atreveixen; can tenir molts problemes quan van dir, ara a partir de l'any que ve tots aquests nen treballaran de cap amb algorismes seus i no treballaran amb algorismes. I el model funciona molt bé. Encara que la matemàtica actualment, en les proves Pisa i això , ara es valora molt el càlcul asiàtic, Corea, tots aquests. Fa uns anys, els que eren els millors eren els holandesos. Holanda donava molts bons resultats i diuen que actualment la prova PISA ja no es porta des d'Europa. Actualment esporta des de Corea i llavors han canviar paràmetres, resultats i altres coses. La matemàtica asiàtica no és moderna, és molt antiga, és molt "machacona" i clar ells deien que un problema on fallaven els europeus era que els nens no sabien com programar un aire acondicionat. Jo no m'ho crec, sincerament. Si els pares quan no saben alguna cosa demanen al fill com funciona el mòbil i ho sap. Això pot ser perquè no tenen aire acondicionat a casa seva però jo necessitaria veure les proves i això no me n'acabo de fiar. Crec que aquí darrera, totes les institucions i tal, molts models per guanyar diners i possiblement ens hauríem de refiar un poquet menys de coses d'aquestes. Això és una cosa molt personal meva. Els nostres alumnes de secundària, la classe

magistral no els agradarà, però en quan a funcionament de màquines donen mil voltes a molta gent. Això vol dir que aquella persona té tot un procés d'aprenentatge, i no és un procés d'assaig-error, si no que moltes vegades és un procés deductiu per arribar. Possiblement el problema que està escrit en un paper li reboti però si en comptes d'estar escrit en un paper és una situació de la vida real arribarà a la solució. Quan parles de competències i a secundària la competència més gran és entendre el rebut de la llum jo penso que això no és competència. El que sí que és competent és que li posis un parell de contractes de companyies de telèfon i les tarifes de dades i que ell investiguin quin és el que surt més econòmic. Però clar, aquest el mestre no el sap fer, en canvi el de la factura de la llum sí. Ni a un adult li interessa la factura de la llum. Ja te la posen ben complicada perquè no entenguis res i quan l'entens te la canvien.

Pere: Es pot implementar el model holandès al nostre país?

Lluís: Sí, no és molt difícil l'holandès, el que nosaltres necessitem uns quants anys més. Tot el que és a nivell docent hauríem de fer un parell de passos abans de començar a arribar aquí. Es poden començar a fer coses, però de dir, ara agafo i faig el model, s'enfonsaria, no funcionaria. Però de dir el meu objectiu és el model holandès jo ja signaria ara. Que en 7, 8 o 10 anys, nosaltres per adequació, l'administració en facilita material, recursos, formació, això seria extraordinari. La premsa explicar el resultats obtinguts per aquests països.

Pere: El càlcul mental s'hauria de treballar abans o després dels algorismes?

Lluís: Independent dels algorismes. Quan tu fas un problema en matemàtiques els primers passos d'investigar, d'assaig-error, de provar, en pensament matemàtic el primer que has de fer és buscar similituds en els nombres que apareixen. Això és una estratègia que és treballar analogies, que és una estratègia que des d'infantil ja es treballa, el que passa és que la gent a infantil no sap que està treballant aquesta estratègia. Quan fem un exercici de troba diferències o semblances en un dibuix, que un diria que és de passatemps, estem treballant això. I si ens fixem si hi ha algun ritme entre els nombres, això és treballar regularitats, aquest és el doble d'aquest, etc. És important treballar sèries que es fa a infantil i després es deixa de treballar quan s'hauria de treballar sempre. Quan es treballa molt temps les sèries, això perd interès. Això és un procés que passa amb un problema i és que aquest perd interès i llavors el matemàtic el que fa és buscar una fórmula per no pensar més. Aquest pas es diu generalització. I això és l'algoritme que no és mai el punt de partida si no la generalització del procés. A l'escola el que es fa és ensenyar la fórmula sense ensenyar tot el procés previ i és clar diuen, si és que és molt fàcil, però és que els nens no l'entenen. Lògicament perquè els nens tenen un pensament humà que és ara començar d'aquí per arribar a la generalització. Primer s'haurien de fer totes les

situacions treballant els problemes i l'algoritme hauria de ser el darrer. Aquest és el gran problema de l'algoritme perquè la gent pensa que la gent que fa bé els algoritmes és perquè són molt intel·ligents i l'algoritme és la recepta de cuina. Tu no saps cuinar però tens una bona recepta de cuina i et sortirà el plat, però això no et farà ser cuiner. El que és cuiner és el que agafa la recepta i diu ara canviaré.

Pere: Si treballéssim més el càlcul mental ...

Lluís: Tindríem més capacitat de resoldre problemes. Trobar-te davant una situació i veure que un és el doble de l'altre. Per això clar, és necessari saber les taules de multiplicar. L'algoritme de forma tancada és conseqüència dels anys de dictadura espanyola. En aquesta època era o blanc o negre. En matemàtiques també passava igual perquè la societat escolar, el mestre era sempre el que tenia la raó i quan tu feies i li deies: és que jo he fet aquest problema seguint aquest camí, no s'acceptava, perquè el problema havia igual que el del llibre i igual que el del mestre. Perquè era el que es respirava fora al carrer. Llavors no hi havia diversitat perquè tots érem iguals. Després arriba la democràcia i ja apareixen les oportunitats. Hi ha algoritmes actualment escrits que han fet servir altres civilitzacions com la resta anglosaxona. Aquí no hi ha color perquè hi ha gent que mai canviarà mai l'algoritme encara que sigui millor o pitjor.

Pere: Beneficis serien ...

Lluís: com a conseqüència del càlcul mental passar a deixar els algoritmes escrits per treballar algoritmes mentals, que en definitiva quan vas en moto o en cotxe vas i no pots servir el mòbil però tampoc paper per fer una operació. La solució és fer càlculs ràpids sense esforç i sense paper. Això és el futur. Per fer aquests càlculs primer has de saber fer estimacions, càlcul global i com a conclusió els algoritmes mentals.

Pere: A molt països crec que ja no fan la divisió de dues xifres.

Lluís: Això de la divisió de dues xifres diuen que ens queden uns 8 anys aquí a Espanya. Però això no vol dir que no necessitis fer la divisió, el que passa és que no la farà en paper i el que és important és saber fer-ho o per aproximació o perquè tinc rapidesa de càlcul i la puc fer sense posar-la en paper. També es pot fer de cap la divisió.

Pere: A moltes escoles encara es fa l'arrel quadrada.

Lluís. No està al currículum, però encara està a molts llibres. A les editorials durant molts anys se'ls ha demanat que facin el currículum. L'editorial vol guanyar diners. Si fa un llibre que no posa segons que, la gent no ho comprarà.

Pere: Creu que canviarà alguna cosa respecte al càlcul mental amb la nova llei LOMCE?

Lluís: Jo per lo que he vist, hi ha gent que veu que s'ha de canviar alguna cosa en matemàtiques i aquesta nova llei pot ser una primera excusa però que la LOMCE canviï, no canviarà.

Pere: Coneix altres autors o materials que treballin el càlcul mental?

Lluís: Antonio Martín. És un bon militant d'aquest camp. Fa anys va muntar un grup que es deia "muerte a los algoritmos". Un altre el David Barba. Els algoritmes ABN venen de Xile, està bé perquè és més comprensiu però cau en els mateixos problemes que tots els algoritmes. Si tu has de fer la mateixa seqüència, és a dir un primer pas, un segon pas, un tercer pas. Els algoritmes no es poden treure. El que hauríem de fer és no fer invents espanyols si no fixar-nos en el que ja funciona a Europa. No és molt intel·ligent el que inventa, si no el que agafa models ja fets i els millora.

Pere: Moltes gràcies.