



**Universitat**  
de les Illes Balears

# Análisis Multifractal de Correlaciones en Series Temporales de Sistemas Económicos

**Andy Rafael Domínguez Monterroza**

**Memoria del Trabajo de Fin de Máster**

Máster Universitario en Física Avanzada y Matemática Aplicada

de la

UNIVERSITAT DE LES ILLES BALEARS

Palma de Mallorca, España.

Curso Académico: 2015-2016

*Miembros del Tribunal:*

**Director del Trabajo:** Dr. Pere Colet, *Instituto de Física Interdisciplinar y Sistemas Complejos IFISC.*  
Dra Alicia Sintes, *Departamento de Física*, Universitat de les Illes Balears.  
Dr. Antoni Borrás, *Departamento de Física*, Universitat de les Illes Balears.

# Agradecimientos

Un agradecimiento muy especial al Banco Santander, a través de Santander Universidades, por haberme favorecido la **Beca Iberoamericana Santander 2014-2015** para cursar mis estudios del Máster en Física Avanzada y Matemática Aplicada de la Universitat de les Illes Balears.

# Resumen

El presente trabajo ofrece un estudio empírico de la multifractalidad de las series de tiempo financieras, y sus correlaciones, del Mercado de Valores de Colombia. Se discute la pertinencia de estos resultados en la construcción de nuevos modelos predictivos, a la luz de los enfoques principales de la teoría financiera de los mercados. Se han aplicado dos métodos, el *Multifractal Detrended Fluctuation Analysis* y el *Multifractal Detrended Cross-Correlation Analysis* a las series de precios de las principales empresas del Mercado Bursátil de Colombia en el periodo comprendido entre 2011 a 2014. Los resultados reportan la presencia de multifractalidad en las series, como en sus correlaciones, sugiriendo el cumplimiento de la Hipótesis del Mercado Fractal y la ineficiencia del mercado.

**Palabras clave:** mercados financieros, multifractalidad, exponente de hurst generalizado, Econofísica, series de tiempo).

**JEL Classification:** C1, G1.

## Multifractal Cross-Correlation Analysis of Complex Systems in Economic Time Series

# Abstract

In this thesis we present a empirical study of multifractality in financial time series on Colombian Stock Market. We have applied two methods, the *Multifractal Detrended Fluctuation Analysis* and *Multifractal Detrended Cross-Correlation Analysis* for stock series of the largest companies of Colombia from 2011 to 2014. Our results suggest the presence of multifractality properties for all time series analyzed and to provide an evidence that confirm Fractal Market Hypothesis and market inefficiency.

**Keywords:** stock markets, multifractality, generalized hurst exponent, Econophysics, time series).

# Contenido

|   |            |
|---|------------|
| <b>Agradecimientos</b>  | <b>iii</b> |
| <b>Resumen</b>  | <b>v</b>   |
| <b>1. Introducción</b>  | <b>2</b>   |
| 1.1. Geometría Fractal y Series de Tiempo . . . . .                         | 2          |
| 1.2. Teoría de los Mercados Financieros . . . . .                           | 3          |
| 1.2.1. Hipótesis del Mercado Eficiente (HME) . . . . .                      | 4          |
| 1.2.2. Hipótesis del Mercado Fractal (HMF) . . . . .                        | 4          |
| <b>2. Antecedentes</b>  | <b>5</b>   |
| <b>3. Metodología</b>   | <b>7</b>   |
| 3.1. Análisis Multifractal sin-tendencia (MF-DFA) . . . . .                 | 7          |
| 3.2. Análisis Multifractal de Correlación sin-tendencia (MF-DCCA) . . . . . | 10         |
| 3.3. Datos . . . . .  | 12         |
| <b>4. Resultados</b>  | <b>13</b>  |
| 4.1. Estadística descriptiva y Prueba de no-estacionariedad. . . . .        | 14         |
| 4.2. Exponente Generalizado de Hurst . . . . .                              | 16         |
| 4.3. Espectro Multifractal . . . . .  | 19         |
| <b>5. Discusión</b>   | <b>22</b>  |
| <b>6. Conclusiones y Trabajo a Futuro</b>                                   | <b>25</b>  |
| 6.1. Conclusiones . . . . .   | 25         |
| 6.2. Trabajo a futuro . . . . .   | 25         |
| <b>A. Bibliografía</b>  | <b>27</b>  |

# 1. Introducción

## 1.1. Geometría Fractal y Series de Tiempo

La geometría fractal es una aproximación teórica que permite estudiar objetivamente estructuras y procesos dinámicos complejos. El rasgo distintivo de la teoría subyace en el concepto de autosimilaridad y de dimensión fractal. Se dice que un objeto o la dinámica de un proceso exhibe fractalidad si el comportamiento del mismo es completamente invariante (fractales matemáticos) o estadísticamente invariante (fractales naturales) a las escalas a las cuales se observa y analiza (autosimilaridad) y la medida matemática que cuantifica tal comportamiento es la dimensión fractal.

Diversos sistemas complejos exhiben atributos de multi-escalamiento, por lo que una única dimensión fractal (comportamiento monofractal) limita explicar las propiedades de escala de los mismos, en cuyo caso una mejor descripción estaría dada por un espectro de exponentes de escalas o de dimensiones fractales (espectro multifractal). Desde esta perspectiva se han extendido herramientas novedosas para la caracterización de series temporales complejas. Para estudiar las propiedades de escalas y de correlaciones de corto y largo alcance de series de tiempo, uno de estos métodos propuestos ha sido el Análisis de Fluctuación sin tendencia (*Detrended Fluctuation Analysis* DFA) por C. K. Peng y colaboradores (Peng C-K, et al., 1994), que permite el estudio de series monofractales caracterizadas por un único exponente de escala y de dimensión fractal. Posteriormente J.W Kantelhardt (Kantelhardt J.W , et al.,2002) generaliza el anterior método a series multifractales, técnica conocida como Análisis de Fluctuación sin tendencia Multifractal (*Multifractal Detrended Fluctuation Analysis* MF-DFA), desde entonces ha sido aplicado con éxito en varios campos de estudios, recientemente a mercados financieros (Lim G. et al. 2007; Yuan Ying et al.,2009; Zunino L. et al.2009; Samadder S, et al.2013) y a procesos geofísicos (Kavassen R.G., et al., (2005) ; Burgueño A.,et al., 2014; Mali P. 2014; Kantelhardt J.W, et al.2006; Gao M. et al. 2012).

Un campo de amplio interés es el de estudiar correlaciones temporales (cross-correlation) en series de tiempo que provienen de sistemas complejos. En tal sentido, recientemente, Boris Podobnik y H. Eugene Stanley propusieron un método que permite cuantificar correlaciones entre dos series no-estacionarias (Podobnik, B., Stanley, H.E.,2008), denominado DCCA (*Detrended Cross-Correlation Analysis*), el cual es una generalización del DFA. El método DCCA está limitado a series que exhiben monofractalidad. Posteriormente Wei-Xing

Zhou generalizó el método a series multifractales (Wei-Xing Zhou, 2008), denominándolo MF-DCCA (*Multifractal detrended cross-correlation Analysis*), el cual permite explorar correlaciones en series complejas que exhiben multifractalidad.

La presente investigación tiene como objetivo estudiar la multifractalidad y las correlaciones entre series temporales siguiendo la metodología MF DFA en (J.W Kantelhardt, et al. 2002) y MF DCCA propuesta en (Wei-Xing Zhou, 2008), entre series financieras aún no explorados de un mercado financiero latinoamericano particular, Colombia. Desde esta perspectiva el principal interés radica en estudiar posibles correlaciones multifractales de las series financieras de precios de activos de las principales compañías que cotizan en el Mercado de Valores de Colombia.

El presente documento se organiza así: en el Capítulo 1 hacemos una introducción a dos de las principales corrientes en el estudio de los mercados financieros, la **Hipótesis del Mercado Eficiente** y la **Hipótesis del Mercado Fractal**, al tiempo que se muestra las diferencias en términos estadísticos en lo que supone la una y la otra. En el Capítulo 3 se hace una corta revisión de los trabajos más recientes que han usado el análisis multifractal para caracterizar la complejidad de series financieras. El Capítulo 4 se detallan los dos métodos multifractales usados en esta tesis, MF DFA y MF DCCA, el primero para analizar la multifractalidad de las series individuales y el segundo para estudiar las correlaciones (multifractales) entre las series del mercado financiero de Colombia. El capítulo 4 provee una descripción de los hallazgos empíricos encontrados del análisis multifractal aplicado a las series objeto de estudio. El Capítulo 5 discute los principales resultados derivados del análisis multifractal: el comportamiento en forma de ley de escala de los retornos logarítmicos y los hechos estilizados (*stylized fact*) de las series. Adicionalmente, en la misma sección, se hace énfasis en las implicaciones de estos nuevos resultados al modelamiento del riesgo y en la dinámica de los mercados. El capítulo 6 resume las conclusiones de la investigación y sugiere algunas recomendaciones para un trabajo futuro.

## 1.2. Teoría de los Mercados Financieros

La Teoría de los Mercados Financieros estudia el comportamiento de los precios de los activos financieros (acciones, bonos, futuros, etc) a través de los mercados financieros, lugar donde se fijan, se negocian e intercambian éstos entre los distintos agentes económicos que lo integran, bajo un marco regulatorio común.

Las dos principales aproximaciones teóricas en el estudio de los mercados financieros se fundamentan en la necesidad de construir modelos predictivos del comportamiento de los activos financieros, estas son **La Hipótesis del Mercado Eficiente** y **La Hipótesis del Mercado Fractal**. Ambas hipótesis parten por considerar la estadística subyacente en la

información registrada (pasada) de los activos.

### **1.2.1. Hipótesis del Mercado Eficiente (HME)**

La Hipótesis del Mercado Eficiente declara que los precios de los activos ya reflejan toda la información actual capaz de anticipar futuros acontecimientos. En consecuencia, solamente eventos imprevisibles, inesperados, aleatorios o debidos al azar explican las fluctuaciones en los precios: En un mercado eficiente los precios de los activos financieros se comportan siguiendo una caminata aleatoria (Fama E., 1965).

La Hipótesis del Mercado Eficiente presenta las siguientes consideraciones estadísticas:

- Los rendimientos de los activos financieros se comportan siguiendo un movimiento browniano simple (su evolución sigue una distribución normal) cualquiera que sea el horizonte temporal de inversión.
- Los cambios en los precios son independiente e idénticamente distribuido (no hay memoria en la serie). Es decir, la variación de los precios de hoy no ha sido influida por la variación de los precios registrados el día (y los días) anterior(es).
- La medida del riesgo por excelencia es la desviación estándar. La desviación estándar se comporta proporcional al tiempo.

### **1.2.2. Hipótesis del Mercado Fractal (HMF)**

Los precios de los activos reflejarían una estructura fractal. En consecuencia, habrían eventos previsible en función de los horizontes temporales de inversión. (Peters E. 1991, 1994; Mandelbrot B. 1982)

La Hipótesis del Mercado Fractal presenta las siguientes consideraciones estadísticas:

- Los rendimientos de los activos incumplen el supuesto de Normalidad en algunos horizontes de inversión.
- Las series financieras poseen propiedades fractales (autosimilitud) y en ese sentido exhibirían correlación (existe memoria en la serie).
- La medida del riesgo o la serie de volatilidad siguen distribuciones estocásticas (Ej. tipo Lévy).

## 2. Antecedentes

Desde que Mandelbrot (Mandelbrot B., 1982) propuso la teoría de los fractales, un amplio número de estudios empíricos se han realizado con la intención de evaluar la dependencia de largo y corto alcance de series de tiempo financieras. Los trabajos de Peters son referentes bajo esta perspectiva (Peters E. 1991,1994). En ellos se estudian las propiedades no-lineales y las autocorrelaciones de largo-alcance de un conjunto de series financieras a la luz de la de la geometría fractal y elementos de teoría del Caos. Posteriormente se extiende aquellas ideas en otros contextos financieros; nuevas y más recientes aproximaciones teórico-fractal a distintos mercados stocks (Cajueiro D.O., Tabak B.M., 2007), mercados de renta variables (Cajueiro D.O., Tabak B.M., 2008), los cuales proveen de suficiente evidencia empírica de la ineficiencia de los mercados, esto es, del comportamiento fractal de los mercados(HMF).

En la literatura existente, varias aproximaciones han sido desarrolladas para estudiar rasgos multifractales en mercados financieros. Los resultados muestran que algunos mercados financieros son (multi)fractales, sus series stocks exhiben autocorrelaciones de largo-alcance (Hu K., et al. 2001; Chen Z., et al. 2002;), además que presentan entre ellas correlaciones(*cross-correlation*) igualmente de largo-alcance (Podobnik B.,2009a, Podobnik B., 2009b; Horvatic D.,et al.,2011),lo que a su vez representa una recusación a la hipótesis del mercado eficiente tradicional (HME).

En relación al desarrollo de las técnicas robustas para analizar series fractales, fue Peng (Peng C-K, et al.1994), quien propuso el método *Detrended Fluctuation Analysis* DFA para explorar las autocorrelaciones de largo-alcance de una serie de tiempo no-estacionaria. A partir del anterior trabajo y como una generalización del DFA, Kantelhardt (Kantelhardt J.W , et al.,2002), desarrolla el método *Multifractal Detrended Fluctuation Analysis* MF-DFA. Un método similar al DFA, llamado *Detrended Moving Average* DMA fue propuesto por Vandewalle y Austbos (Vandewalle N, Ausloos M.1998) y luego mejorado por Alessio et al (Alessio E,et al., 2002). Gu y Zhou(Gu G.F., Zhou W.X., 2010) extiende el método DMA a series multifractales, llamado *Multifractal Detrending Moving Average* MF-DMA, el cual permite analizar series de tiempo multifractales y superficies multifractales.El MF-DFA y MF-DMA han sido usados para describir propiedades fractales de series en mercados de energía (Gu R.B., et al. 2010), mercados stocks(Lim G. et al. 2007; Yuan Ying et al.,2009; Zunino L. et al.2009; Samadder S, et al.2013), y mercados de divisas( Norouzzadeh P., Rahmani B., 2006;



Qin J., et al., 2015).

Los métodos DCCA y MF DFA también fueron usados con éxito en detectar la naturaleza multifractal de correlaciones entre dos series financieras (Lim G. et al. 2007; Yuan Ying et al., 2009; Zunino L. et al. 2009; Samadder S, et al. 2013; Dutta S., et al 2014). Liu y Wan (Liu L., Wan J.Q., 2011) estudió las correlaciones entre series de mercados de energía, en especial entre series de precios del petróleo y series de precios del carbón. En otro trabajo reciente (Zhuang X.Y., et al., 2014) se logró capturar rasgos multifractales en el comportamiento dinámico de las series anteriores de petróleo y carbón. Adicionalmente, Pal y colaboradores (Pal M., et al., 2014) investigaron con igual resultado la naturaleza fractal y el comportamiento de las correlaciones entre series de precios del petróleo y series de divisas (tasas de cambio).

Sin embargo, para nuestro interés, no se han conducido estudios que indaguen las propiedades multifractales de las correlaciones entre series stocks del Mercado de Capitales de Colombia y así evaluar, bajo esta perspectiva, el cumplimiento o no de la Hipótesis del Mercado Fractal. Esta es la principal motivación de la presente tesis.

## 3. Metodología

Los pasos metodológicos seguidos en esta investigación se resumen a continuación:

1. **Selección de las series y de sus rendimientos (series log-retorno) del mercado de valores de Colombia:** Se han seleccionado las principales series financieras con base al mayor nivel de bursatilidad y capitalización de las empresas que conforman el mercado.
2. **Análisis Estadístico-descriptivo de las series.** Se explora las propiedades estadísticas de las series. Se identifican *hechos estilizados* de las series.
3. **Evaluar estadísticamente si las las series son no-estacionarias.** Se aplica la prueba estadística de Dickey-Fuller para evaluar la estacionariedad de las series.
4. **Aplicación del MF DFA.** Se evalúa la multifractalidad para cada una de las series. En este paso se obtienen el Exponente de Hurst Generalizado y el Espectro Multifractal de las series.
5. **Aplicación del MF DCCA.** Se evalúa las correlaciones multifractales entre las series analizadas del paso 4. En este paso se obtiene el Exponente de Hurst Generalizado y el Espectro multifractal de las **series correlacionadas**.

### 3.1. Análisis Multifractal sin-tendencia (MF-DFA)

Un método que permite caracterizar la complejidad de una serie no-estacionaria es el de Análisis de Fluctuación sin tendencia Multifractal (*Multifractal Detrended Fluctuation Analysis* MF-DFA) propuesto por J.W Kantelhardt y H.E. Stanley (Kantelhardt J.W, Stanley H.E.,2002).

El algoritmo general del MF-DFA propuesto en (Kantelhardt J.W, Stanley H.E.,2002) consta de los siguientes pasos:

Considérese una serie temporal  $x(i)$  ( $i : 1, 2, \dots, L$ ) y su media  $\langle x \rangle$ .

- **Paso 1:** Se calcula la serie integrada:

$$Y(i) = \sum_{k=1}^i [x(k) - \langle x \rangle] \quad (3-1)$$

- **Paso 2:** Se divide la serie  $Y(i)$  en  $N_s$  segmentos no solapados de igual tamaño  $s$ , donde  $N_s$  es el entero del cociente:

$$N_s \equiv \text{int}\left(\frac{L}{s}\right) \quad (3-2)$$

- **Paso 3:** Para cada uno de los  $N_s$  segmentos se calcula la función de fluctuación:

$$F_\nu^2(s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{Y[(\nu-1)s+i] - y_\nu(i)\}^2 \quad \nu = 1, 2, \dots, N_s \quad (3-3)$$

donde  $y_\nu$  es el ajuste polinomial del segmento  $\nu$  (que representa la tendencia local).

- **Paso 4:** Una función de fluctuación de orden  $q$  sobre los tamaños de los segmentos queda expresada:

$$F_q(s) = \frac{1}{N_s} \sum_{\nu=1}^{N_s} \left\{ [F_\nu^2(s)]^{\frac{q}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad q \neq 0 \quad (3-4)$$

y en el caso para  $q = 0$ , debido a la divergencia de  $F_q(s)$ , se muestra en (Kantelhardt J.W, Stanley H.E.,2002) que en el límite dicha función se puede aproximar a:

$$F_q(s) = \exp \left[ \frac{1}{N_s} \sum_{\nu=1}^{N_s} \ln F_\nu(s) \right], \quad q = 0 \quad (3-5)$$

- **Paso 5:** La función de fluctuación sigue una ley de potencias en términos de la escala  $s$ :

$$F_q(s) \sim s^{h(q)} \quad (3-6)$$

donde  $h(q)$  es el exponente generalizado de Hurst, el cual es obtenido con la estimación de la pendiente de una regresión lineal entre  $\log(F_q(s))$  vs  $\log(s)$ .

Para procesos o series monofractales el valor de  $h(q)$  es único y constante para cualquier valor de  $q$ , mientras que para procesos o series multifractales,  $h(q)$  varía y disminuye conforme aumenta el orden de fluctuación  $q$ . La interpretación del exponente generalizado de Hurst  $h(q)$  se resume a continuación:

- Si  $0 < h(q) < 0,5$  se tiene una serie antipersistente con reversión a la media. Esto sugiere que si la serie ha estado por encima de un determinado valor que hace las veces de media de largo plazo en el período anterior, es más probable que esté por debajo en el período siguiente, y viceversa. Se dice que la serie posee una autocorrelación negativa.
- Cuando  $h(q) = 0,5$  se corresponde a una serie con movimiento browniano simple (incrementos independientes), los movimientos de la serie no exhiben memoria: un aumento puede ser seguido por uno similar o uno de bajada, en cuyo caso se afirma que la correlación es nula, es igual a cero.
- Si  $0,5 < h(q) < 1,0$  corresponde a series temporales que muestran persistencia (un periodo de crecimiento es seguido por otro análogo, persiste la tendencia). Esto significa que hay más probabilidad que a un aumento le siga otro similar, en cuyo caso se afirma que la serie posee una autocorrelación positiva.

Una relación que permite caracterizar el espectro de los exponentes de escalas de la serie multifractal  $h(q)$ , es la medida de una función de densidad multifractal de los exponentes,  $\tau(q)$ , la cual es derivada a partir del formalismo multifractal via función de partición (Kantelhardt J.W, Stanley H.E.,2002). La relación entre estos dos exponentes de escalas viene dada por:

$$\tau(q) = qh(q) - 1 \quad (3-7)$$

$$D(q) \equiv \frac{\tau(q)}{q-1} = \frac{qh(q) - 1}{q-1} \quad (3-8)$$

A  $D(q)$  se le conoce como las dimensiones multifractales generalizada (espectro multifractal de dimensiones) y difiere del exponente generalizado de hurst  $h(q)$  así; el exponente generalizado  $h(q)$  es un valor constante e independiente de  $q$  para una serie monofractal, es decir  $h(q) = k$  para todo  $q$ , mientras que para una serie con propiedades multifractales  $h(q)$  depende sobre  $q$ . Para procesos multifractales el espectro de dimensiones  $D(q)$  posee un máximo en  $dD(q)/d(q) = 0$ ; y en caso de procesos monofractales la función  $D(q)$  es representada por un único valor, es decir, una única dimensión fractal independientemente del orden de fluctuación  $q$ ;  $D(q) = k$  para cualquier valor  $q$  (Chen S-P et al. 2011b).

## 3.2. Análisis Multifractal de Correlación sin-tendencia (MF-DCCA)

Para estudiar correlaciones entre dos series no-lineales que exhiben propiedades multifractales, en la presente investigación seguimos el procedimiento general propuesto por Zhou W-X (Wei-Xing Zhou, 2008), denominado *Multifractal detrended Cross-Correlation Analysis* MF-DCCA.

El método MF-DCCA consiste en los siguientes pasos:

- **Paso 1:** Primero supongáse dos series temporales  $x(i)$ ,  $y(i)$  ( $i : 1, 2, \dots, L$ ) donde  $L$  es la longitud de ambas series para un mismo periodo de tiempo.

Para cada una de las series  $x(i)$ ,  $y(i)$  se obtienen sus retornos logarítmicos:

$$R_x(i) = \log \left[ \frac{x(i + \Delta t)}{x(i)} \right] \quad R_y(i) = \log \left[ \frac{y(i + \Delta t)}{y(i)} \right] \quad (3-9)$$

donde  $\delta t = 1$  día (series con resolución diaria). Ahora obtenemos el perfil integrado de las series, sustrayendo sus respectivas medias sobre cada valor:

$$X(i) = \sum_{k=1}^i [x(k) - \langle x \rangle] \quad Y(i) = \sum_{k=1}^i [y(k) - \langle y \rangle] \quad (3-10)$$

con  $i = 1, 2, \dots, L - \delta t$ .

- **Paso 2:** Luego se dividen los anteriores perfiles de las series en segmentos o ventanas:

$$N_s \equiv \lfloor \frac{L}{s} \rfloor \quad (3-11)$$

donde  $s$  es la longitud de cada  $\nu = 1, 2, \dots, N_s$  segmento.

- **Paso 3:** Para cada uno de los  $N_s$  segmentos se estima una tendencia local por medio de un ajuste polinómico<sup>1</sup> (lineal o cuadrático), calculando las covarianza sin-tendencia

---

<sup>1</sup>Se ha reportado en la literatura el efecto de emplear un polinomio de orden 1 2 y 3 (Wei-Xing Zhou, 2008). Aquí empleamos y mostramos los resultados para un polinomio de orden 1. Los resultados no varían sustancialmente para orden 2.

para cada  $\nu = 1, 2, \dots, N_s$  segmentos:

$$F_\nu^2(s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \left[ X[(\nu - 1)s + i] - \tilde{X}_\nu(i) \right] \cdot \left[ Y[(\nu - 1)s + i] - \tilde{Y}_\nu(i) \right] \quad \nu = 1, 2, \dots, N_s \quad (3-12)$$

donde  $\tilde{X}_\nu$  y  $\tilde{Y}_\nu$  son los ajustes polinómicos en los segmentos respectivos.

- **Paso 4:** Se promedian las covarianzas anteriores sobre todos los segmentos  $\nu$ , obteniendo una función de fluctuación de orden  $q$ :

Para  $q \neq 0$ :

$$F_{xy}(q, s) = \left[ \frac{1}{N_s} \sum_{\nu=1}^{N_s} F_\nu(s)^{\frac{q}{2}} \right]^{\frac{1}{q}} \quad (3-13)$$

Para  $q = 0$  en el limite la función está dada por (Wei-Xing Zhou, 2008):

$$F_{xy}(q = 0, s) = \exp \left[ \frac{1}{N_s} \sum_{\nu=1}^{N_s} \ln F_\nu(s) \right] \quad (3-14)$$

- **Paso 5:** Un comportamiento de ley de potencias existe en las correlaciones de las series si se satisface una relación de escala dada por:

$$F_{xy}(q, s) \sim s^{h_{xy}(q)} \quad (3-15)$$

El exponente de correlación  $h_{xy}(q)$  describe las correlaciones en términos de una ley de potencias de dos series correlacionadas temporalmente. De lo anterior se observa el caso particular que cuando la serie  $x$  es idéntica a la serie  $y$  ( $X = Y$ ) el método MF DCCA se reduce o es equivalente a MF DFA; y si  $q = 0$  el exponente de correlación  $h_{xy}(q = 2)$  es equivalente al conocido exponente de Hurst  $h(q = 2)$ .

### 3.3. Datos

Analizamos series financieras del mercado de valores de Colombia. Estas series no han sido objeto de análisis desde la perspectiva Econofísica, y en particular de análisis (multi)fractal, de allí nuestro interés. Los registros históricos de las series analizadas fueron tomados de la Bolsa de Valores de Colombia BVC, entidad que opera el Mercado Bursátil de Colombia (disponibles en [www.bvc.com.co](http://www.bvc.com.co)). En esta investigación se han seleccionado las principales series de las acciones del mercado en términos del ranking de mayor bursatilidad y capitalización que emite trimestralmente la BVC.

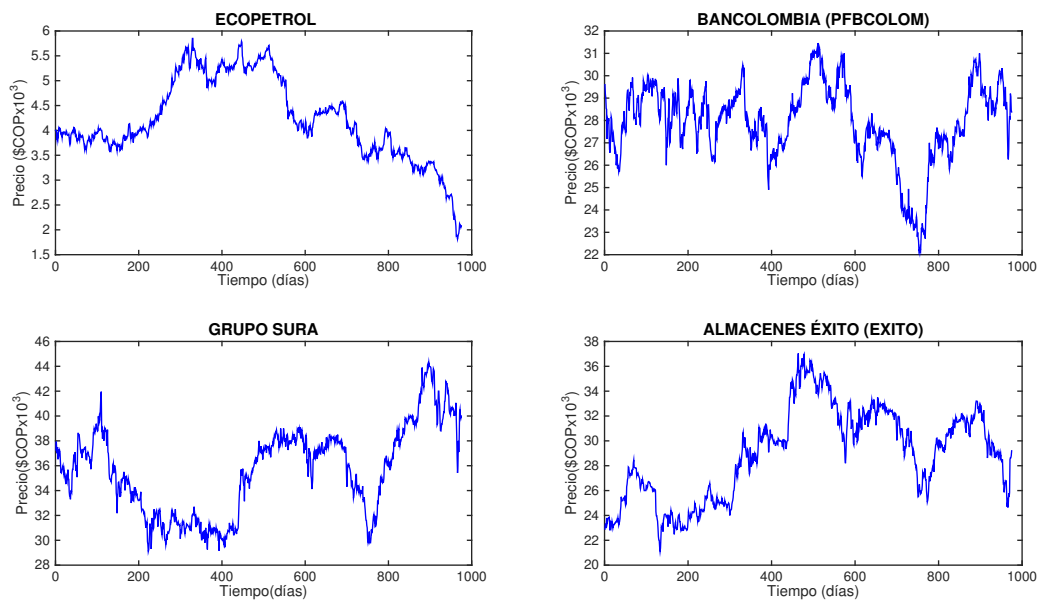
En la tabla **3-1** se muestra las principales compañías que han liderado tal ranking durante los últimos cuatro años. El periodo analizado comprende desde enero del 2011 a diciembre 2014, para un total de 976 registros en resolución diaria para cada una de las series:

| <b>Compañía</b> | <b>Símbolo en la BVC</b> | <b>Sector</b>       |
|-----------------|--------------------------|---------------------|
| Ecopetrol       | ECOPETROL                | Energía (petrolera) |
| Bancolombia     | PFBCOLOM                 | Financiera          |
| Grupo Aval      | PFAVAL                   | Financiera          |
| Almacenes Éxito | EXITO                    | Comercio            |
| Grupo Sura      | GRUPOSURA                | Financiera          |

**Tabla 3-1.:** Principales Compañías de acuerdo al nivel más alto de bursatilidad y captitalización de la BVC.

## 4. Resultados

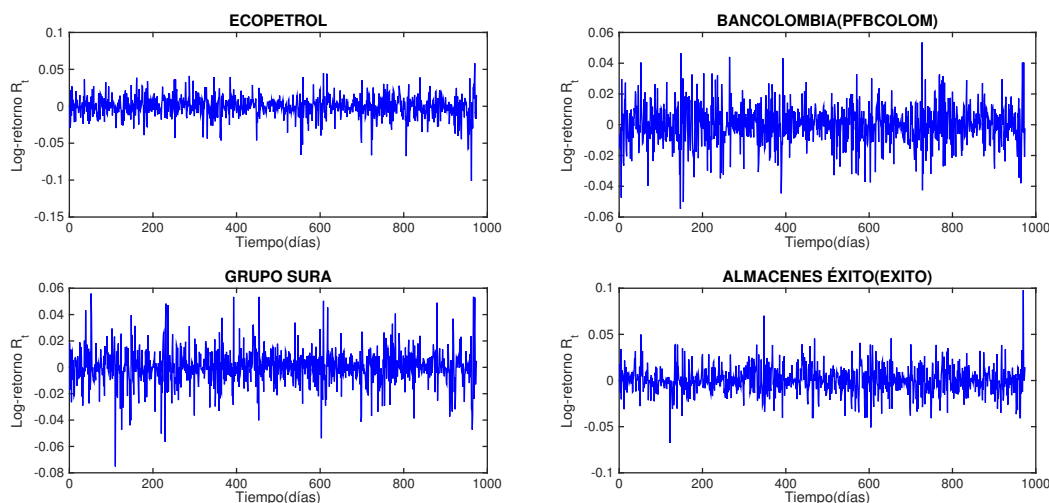
La evolución del precio de las acciones de las principales compañía referidas en la la tabla 3-1 entre los años de 2011 a 2014 se muestra en el gráfico 4-1.



**Figura 4-1.:** Evolución del precio de los activos de las empresas referidas en la tabla 3-1 de 2011 a 2014. Las unidades se muestran en moneda oficial de Colombia (Peso Colombiano \$COP)



La evolución de los rendimientos logarítmicos a partir de la ecuación (3-9) se muestra en la figura 4-2.



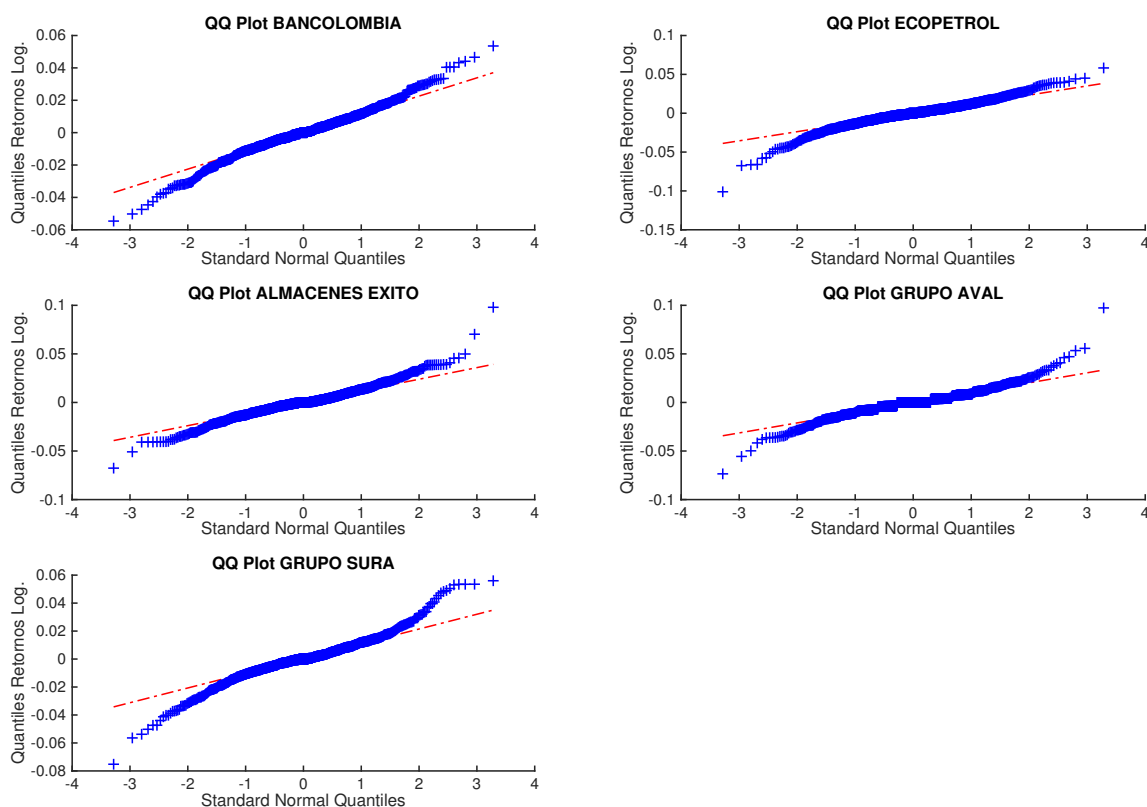
**Figura 4-2.:** Evolución de los rendimientos logarítmicos del precio de los activos de las empresas referidas en la tabla 3-1 de 2011 a 2014.

## 4.1. Estadística descriptiva y Prueba de no-estacionariedad.

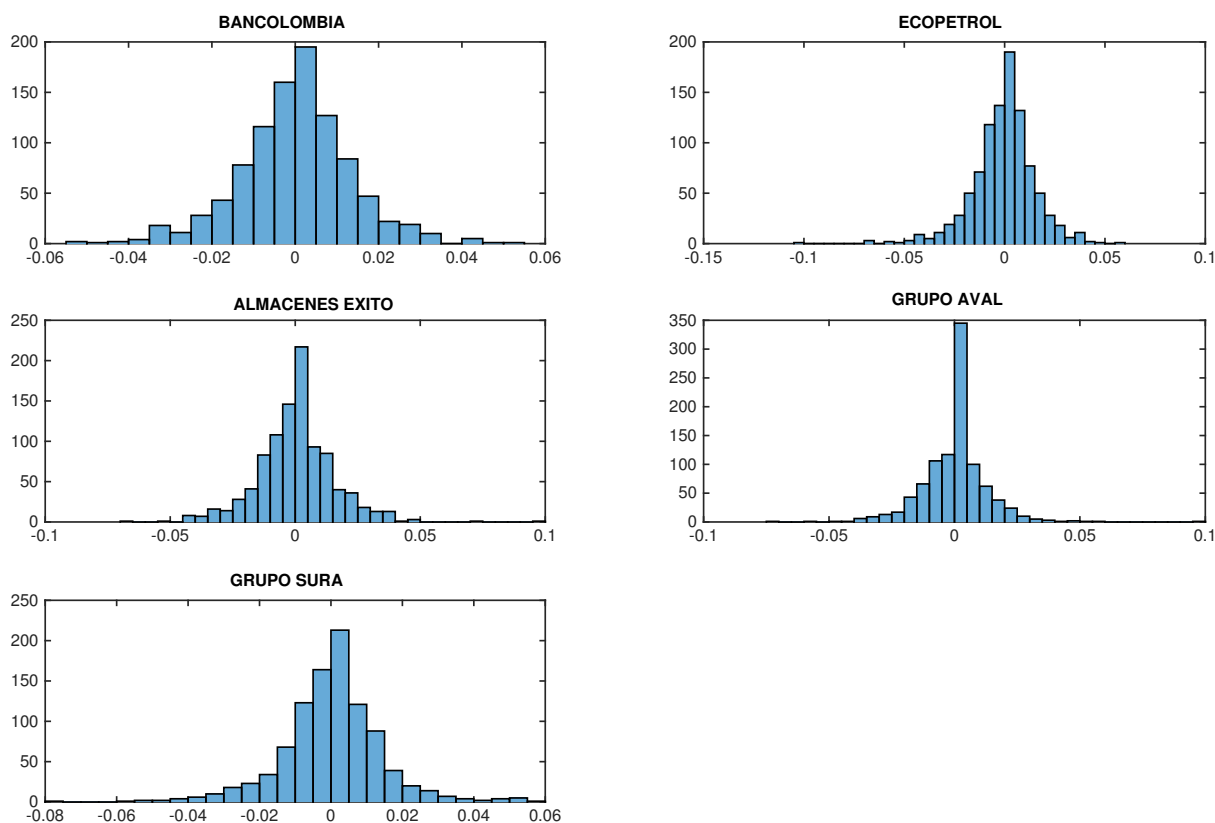
Se realizó una prueba para evaluar la no-estacionariedad de las series de log-retorno, previa a la aplicación de los métodos MF DFA y MF DCCA. La prueba de Dickey -Fuller es de uso común en series econométricas y financieras y permite evaluar si la serie exhibe raíz unitaria o estacionariedad. A través de la función *adftest* en Matlab se establece si se acepta o rechaza la Hipótesis nula de estacionariedad. Los resultados arrojaron la aceptación de la hipótesis alternativa de que cada serie analizada es no-estacionaria. Se observa además la elevada curtosis, por encima de 3, revelando un *hecho estilizado* común a procesos y series financieras caracterizadas por rasgos multifractales. Adicionalmente a través del gráfico Cuantil-Cuantil mostrado en figura 4-3, se observa las diferencias entre la distribución de los datos de las series log-retorno(en color azul) respecto a la distribución ideal Normal(línea roja). En la figura 4-4 se observa el histograma de las series de log-retorno, revelando que las series de log-retorno siguen distribuciones leptocurticas, de colas pesadas(*fat tails*), rasgo muy característico de series multifractales.

| Compañía        | Media       | Desv. Est. | Curtosis | Test Dickey-Fuller* |
|-----------------|-------------|------------|----------|---------------------|
| Ecopetrol       | -6.7138e-04 | 0.0153     | 6.5853   | 1                   |
| Bancolombia     | -4.3213e-05 | 0.0134     | 4.3837   | 1                   |
| Grupo Aval      | -2.5933e-04 | 0.0127     | 9.1664   | 1                   |
| Almacenes Éxito | 2.4952e-04  | 0.0151     | 5.9682   | 1                   |
| Grupo Sura      | 7.2853e-05  | 0.0142     | 5.9803   | 1                   |

**Tabla 4-1.:** Estadística descriptiva y prueba de no-estacionariedad de las series de log-retorno. \*  $H_0 = 0$  (se rechaza la Hipótesis de estacionariedad);  $H_1 = 1$  (se acepta la Hipótesis alterna)



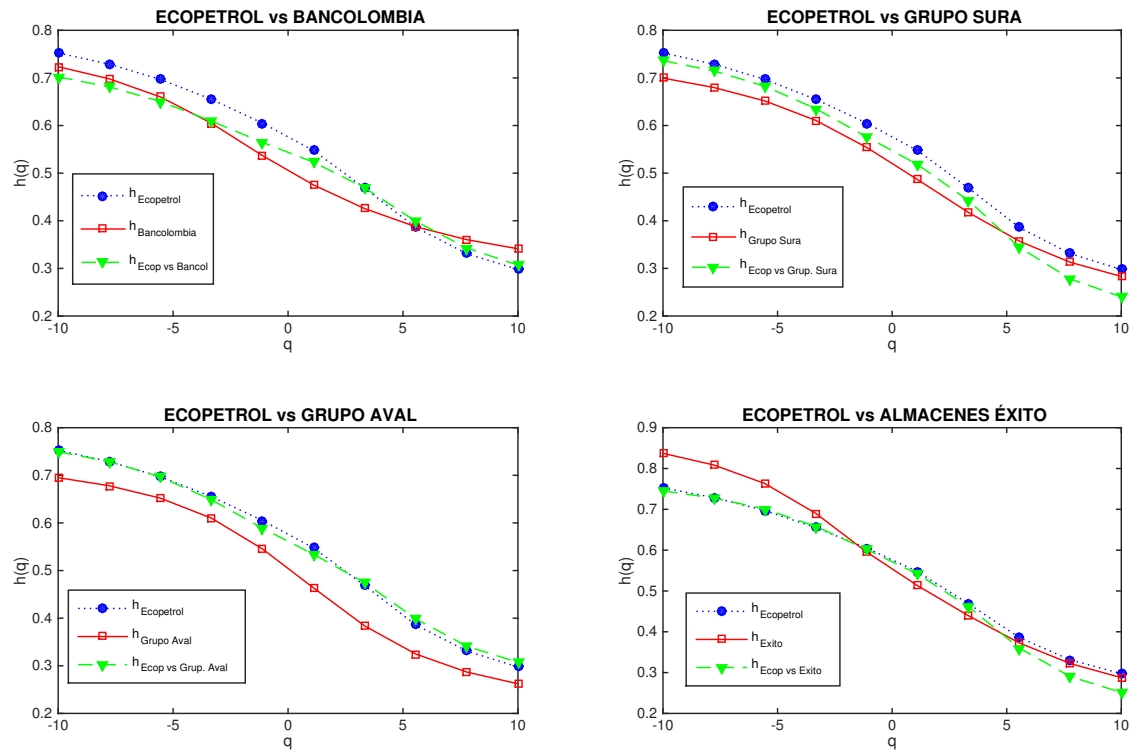
**Figura 4-3.:** Q-Q Plot de las series de log-retorno. En todos los casos las series confirman el no cumplimiento de normalidad.



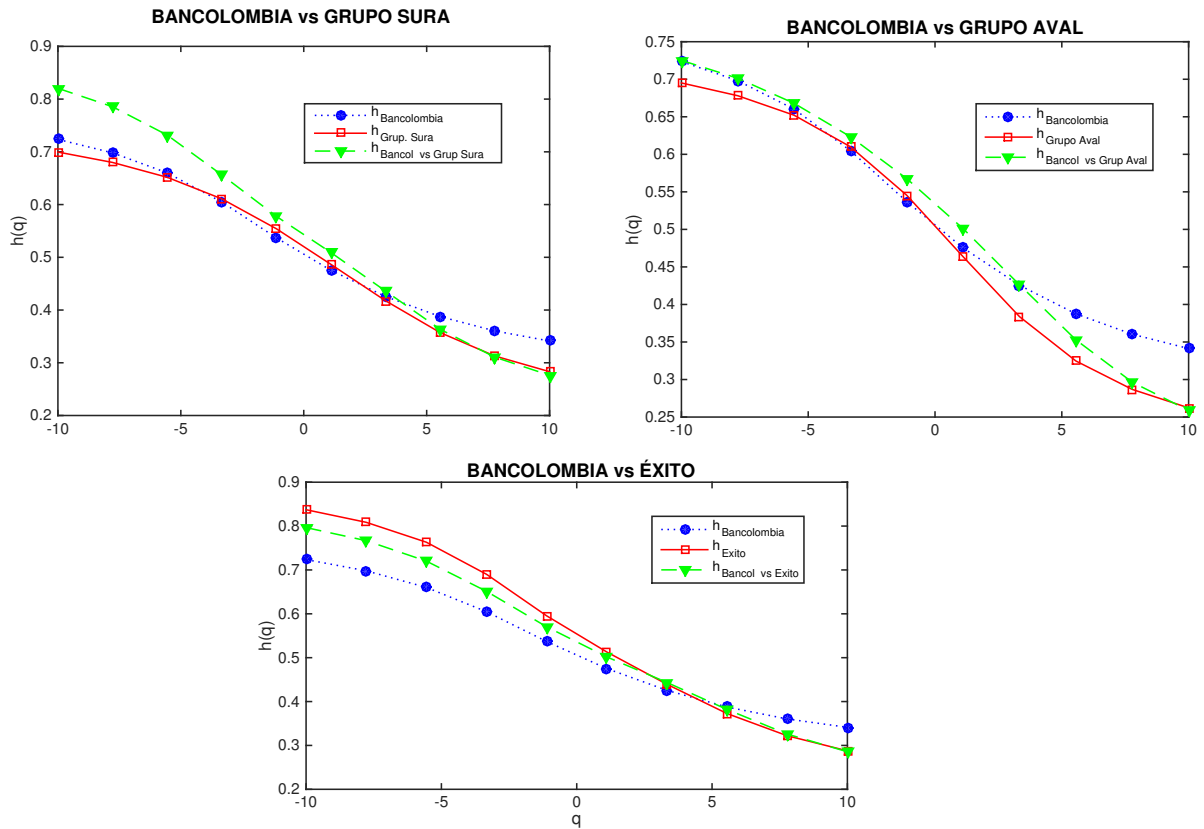
**Figura 4-4.:** Histograma de las series de log-retorno. Se observa el *hecho estilizado* de Leptocurtosis

## 4.2. Exponente Generalizado de Hurst

Los exponentes de Hurst generalizados  $h(q)$  obtenidos para las series de las dos primeras empresas de mayor capitalización analizadas, Ecopetrol y Bancolombia, empleando el método MF DFA, y los exponentes de hurst correlacionados  $h_{xy}(q)$  para estas empresas con las restantes, empleando MF DCCA con un orden fluctuación  $q$  variando en el intervalo de  $q : [-10 : 10]$  se muestran en las figuras 4-5 y 4-6, respectivamente. Las demás series analizadas correspondiente a otras empresas exhiben igual comportamiento(no se muestran).



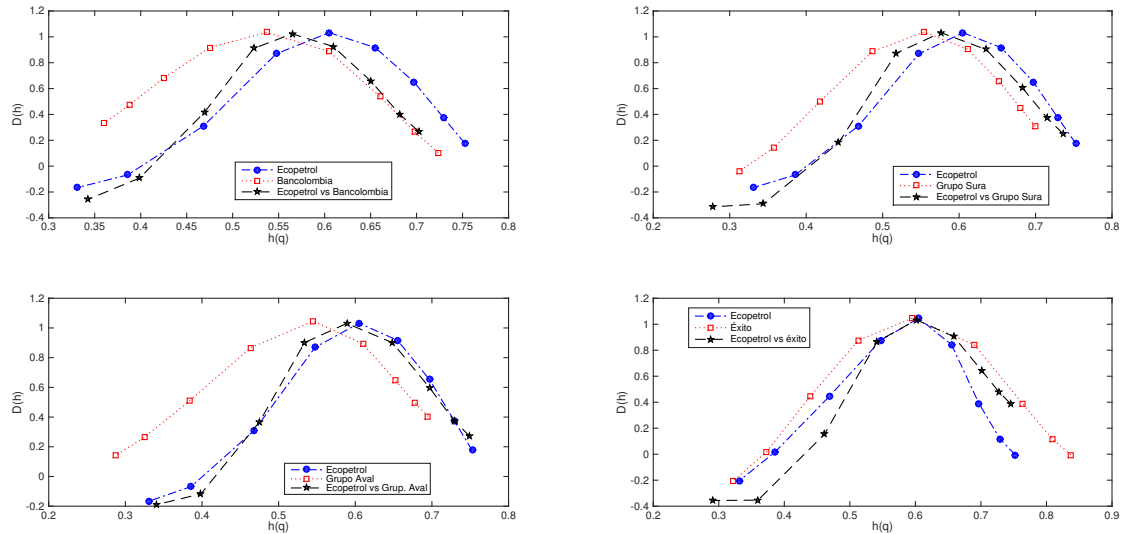
**Figura 4-5.:** Exponente de Hurst Generalizado  $h(q)$  para series individuales (en azul y rojo) y Exponente de Hurst Generalizado correlacionado  $h_{xy}(q)$  (en verde) entre Ecopetrol y demás empresas analizadas



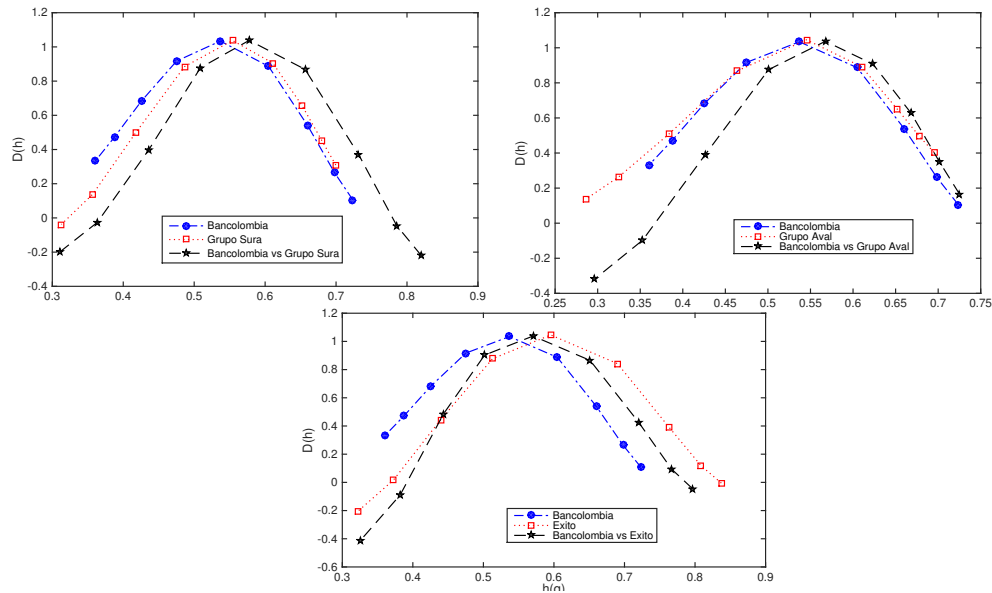
**Figura 4-6.:** Exponente de Hurst Generalizado  $h(q)$  para series individuales (en azul y rojo) y Exponente de Hurst Generalizado correlacionado  $h_{xy}(q)$  (en verde) entre Bancolombia y demás empresas analizadas)

### 4.3. Espectro Multifractal

El espectro multifractal, tanto para las series individuales como para series correlacionadas, revela un conjunto o espectro de dimensiones fractales generalizadas y no una única dimensión como habría suponer en caso de que cada serie exhibiese monofractalidad.



**Figura 4-7.:** Espectro de dimensiones fractales generalizadas  $D(h)$  vs Exponente de hurst generalizado  $h(q)$  entre Ecopetrol y demás series log-retorno analizadas



**Figura 4-8.:** Espectro de dimensiones fractales generalizadas  $D(h)$  vs Exponente de hurst generalizado  $h(q)$  entre Bancolombia y demás series log-retorno analizadas

Actualmente se ha sugerido una medida para evaluar el **grado multifractal** de una serie o su interacción con otra (Chen S-P et al.2011b) y es un estimador de la fuerza, esto es la intensidad de la serie o de un proceso a exhibir dicho rasgo multifractal. El **grado multifractal** es la diferencia entre el valor máximo y mínimo de los exponentes de escalas de Hurst generalizados obtenidos en el rango de fluctuación  $q : [-10 : 10]$ .

La tabla 4-2 resume el **grado multifractal** y se resalta la mayor y menor intensidad multifractal obtenido para las series analizadas en el caso del mercado de valores de Colombia. Igualmente a tabla 4-3 presenta los resultados del **grado multifractal** para el caso de las series correlacionadas:

| <b>Compañía</b>    | <b>Hurst Máximo</b><br>$h_{max}(q)$ | <b>Hurst Mínimo</b><br>$h_{min}(q)$ | <b>Grado Multifractal</b><br>$\Delta h(q) = h_{max}(q) - h_{min}(q)$ |
|--------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--|
| Ecopetrol          | 0.7525                              | 0.2977                              | 0.4548   |
| <b>Bancolombia</b> | 0.7236                              | 0.3412                              | <b>0.3824</b>  |
| Grupo Aval         | 0.6996                              | 0.2831                              | 0.4165   |
| Almacenes Éxito    | 0.6951                              | 0.2623                              | 0.4328   |
| <b>Grupo Sura</b>  | 0.8373                              | 0.2876                              | <b>0.5497</b>  |

**Tabla 4-2.:** Grado Multifractal para cada Acción individual. Resaltado en negrita la menor y mayor intensidad multifractal.

| <b>Compañías</b>                 | <b>Hurst Máximo</b><br>$h_{xy}(q)_{max}$ | <b>Hurst Mínimo</b><br>$h_{xy}(q)_{min}$ | <b>Grado Multifractal</b><br>$\Delta h_{xy}(q) = h_{xy}(q)_{max} - h_{xy}(q)_{min}$ |
|----------------------------------|--|--|---|
| <b>Ecopetrol vs Bancolombia</b>  | 0.7022                                   | 0.3069                                   | <b>0.3953</b>   |
| Ecopetrol vs Grupo Sura          | 0.7362                                   | 0.2403                                   | 0.4959  |
| Ecopetrol vs Grupo Aval          | 0.7496                                   | 0.3072                                   | 0.4424  |
| Ecopetrol vs Éxito               | 0.7451                                   | 0.2514                                   | 0.4937  |
| <b>Bancolombia vs Grupo Sura</b> | 0.8205                                   | 0.2763                                   | <b>0.5442</b>   |
| Bancolombia vs Grupo Aval        | 0.7251                                   | 0.2588                                   | 0.4663  |
| Bancolombia vs Éxito             | 0.7966                                   | 0.2856                                   | 0.5110  |

**Tabla 4-3.:** Grado Multifractal de las series correlacionadas. Resaltado en negrita la menor y mayor intensidad multifractal.



## 5. Discusión

Los resultados obtenidos definen un claro comportamiento multifractal en las principales series del mercado de valores de Colombia (ver figuras 4-5 y 4-6). Los exponentes de Hurst de cada serie individual  $h(q)$  y de las series correlacionadas  $h_{xy}(q)$  no son constantes (monofractal) en el intervalo  $q : [-10 : 10]$ , por lo que las interacciones y la dinámica subyacente entre los movimientos correlacionados de tales compañías siguen una ley de escala multifractal. Este hallazgo está en correspondencia con los recientes resultados previos reportados por la literatura para distintos mercados financieros en Europa, USA y Asia, en lo que se revela tal hecho estilizado de las series stocks (Alaoui Et., et al. 2013; Chen S-P et al. 2011a).

En el MF DFA valores negativos en el orden de fluctuación  $q$  ( $q < 0$ ) describe el comportamiento de la serie a fluctuaciones pequeñas o cortas, mientras que  $q > 0$  describe la serie a fluctuaciones grandes o largas. Lo anterior se explica a que segmentos  $\nu$  con fluctuaciones grandes, es decir segmentos con mayor varianza  $F_\nu^2(s)$  tendrán una ponderación importante en el promedio obtenido de la función de fluctuación de  $F_q(s)$ .

En nuestra investigación el MF DFA para las series individuales arrojó valores en los exponentes de Hurst  $h(q)$  mayores a 0.5 para órdenes de fluctuación menores a cero  $q < 0$ , y  $h(q) < 0,5$  para  $q > 0$  para Lo anterior sugiere que la series es antipersistente a fluctuaciones pequeñas o de corto alcance, mientras que la serie exhibe persistencia a fluctuaciones grandes o de largo alcance, tal como se ha reportado en la literatura citada en esta investigación.

Los mismos resultados se evidencian en el MF DCCA para cada una de las dos series correlacionadas; valores de Hurst  $h_{xy}(q)$  correlacionados mayores a 0.5 para  $q < 0$  y valores de Hurst  $h_{xy}(q)$  menores a 0.5 para  $q > 0$ . De lo anterior se deriva que la interacción entre dos compañías (series correlacionadas analizadas en cada caso) presentan antipersistencia a fluctuaciones pequeñas o de corto alcance, mientras que la interacción muestra persistencia a fluctuaciones grandes o de largo alcance.

Respecto al espectro multifractal para las series individuales, el menor **grado multifractal** lo exhibe **Bancolombia** con  $\Delta h(q) = 0,3824$  y el mayor grado el **Grupo Sura** con  $\Delta h(q) = 0,5497$  (ver tabla 4-2). Y para las series correlacionadas el menor **grado multifractal** lo arroja **Ecopetrol vs Bancolombia** con un  $\Delta h_{xy}(q) = 0,3953$  y el mayor grado **Bancolombia vs Grupo Sura** con un  $\Delta h_{xy}(q) = 0,5442$  (ver tabla 4-3). Las implicaciones

del anterior resultado deriva de considerar en que a un menor grado multifractal, mayor es el nivel de regularidad o de predicibilidad que pudiese tener el comportamiento de la serie, y por el contrario, a un mayor grado multifractal de la serie, mayor sería el nivel de complejidad, de irregularidad y por tanto menor su nivel de predicibilidad (Chen S-P et al. 2011b).

Por consiguiente la serie de log-retorno de **Bancolombia** al mostrar un grado menor multifractal podría revelar patrones de predicibilidad respecto a las demás empresas, al igual que la interacción subyacente en la dinámica de los precios de log-retornos entre **Ecopetrol** y **Bancolombia**. Es de mencionar que Ecopetrol y Bancolombia, bajo el periodo analizado de 2011 a 2014, fueron (son) las empresas de mayor capitalización de mayor bursatilidad del Mercado de Valores de Colombia. Bancolombia es el banco privado más grande de Colombia y uno de los más grandes de Latinoamérica, hace parte del Grupo Sura, el cual conforma a un conglomerado de empresas de servicios financieros diversos e importantes inversiones industriales. En los resultados se observa que la mayor complejidad de la serie la exhibe **Grupo Sura**, al igual que su interacción con **Bancolombia**. La dinámica del Grupo Sura, al ser un conglomerado de empresas diversas, sugiere una fuerte y compleja interacción con una de sus filiales, Bancolombia. Este resultado es de relevancia mayor a la hora de plantear nuevos modelos predictivos en procura de la optimización de portafolios.

La multifractalidad ha sido estudiada en series de datos de alta y baja frecuencia. De acuerdo con Su et al (2009), los datos de alta frecuencia (intradia: horas, minutos, segundos) muestran mayor multifractalidad que los datos en resolución diaria. Su y colaboradores (Su et al 2009) emplearon el MF DFA a series del Mercado Stock de Taiwan, revelando que las series individuales de 150 compañías poseen propiedades multifractales. En otro estudio relacionado, Di Matteo y colaboradores (Matteo D. et al., 2005) realizaron un análisis comparativo de las propiedades de multiescalamiento para un amplio rango de mercados alrededor del mundo, incluyendo mercados desarrollados y mercados en vía de desarrollo económico. Como conclusión llegaron a que el nivel de desarrollo de un mercado puede estar caracterizado por su comportamiento de escala (por medio del exponente de escala de Hurst); de los 28 mercados analizados encontraron que la función de autocorrelación  $F(q = 2, s)$  esta caracterizada por un exponente de Hurst  $h(q = 2)$  menor o igual a 0.5 para mercados desarrollados y mayor que 0.5 para mercados en vía de desarrollo. Zunino et al (2009) también estudio las diferencias multifractales de mercados desarrollados y mercados emergentes. Su estudio empírico muestra que los mercados emergentes tienen típicamente grado multifractal  $\Delta h(q = 2)$  mayor en el espectro del mismo. En (Morales R., et al., 2012) se examina el comportamiento multifractal de empresas individuales y analiza cómo las propiedades de escala cambian durante las crisis financieras. Sugiere que las propiedades multifractales reveladas podrían convertirse en un indicador de estabilidad financiera de la compañía, mostrando que al inicio de las crisis la multifractalidad de los retornos se incrementa. Resultados similares fueron reportados por Kristoufek (Kristoufek L., 2012), quien analizó la evolución del exponente de

hurst  $h(q = 2)$  antes y después de las crisis financieras de 1987 y 2008 a través de las series de los índices DJI, NASDAQ y SP&500. Se revela en el anterior estudio que antes del inicio de las crisis se muestra una fuerte tendencia de decrecimiento en el valor del exponente de hurst  $h(q = 2)$  para cada uno de los tres índices.

Los modelos multifractales son más objetivos que los modelos tradicionales derivados del supuesto de la HME, en el sentido en que pueden capturar rasgos estilizados como el escalamiento en el tiempo de los momentos estadísticos de los retornos, y de esa manera los resultados podrían directamente ser usados para caracterizar ciertos estados de las series financieras, por ejemplo: identificar estados del desarrollo de los mercados (Dacorogna et al., 2001) o ayudar en la predicción de las crisis (market crash) (Wei Y., Huang D., 2005; Kristoufek 2012). Estas razones hacen del análisis multifractal una herramienta valiosa en el estudio del comportamiento dinámico de los mercados financieros.

# 6. Conclusiones y Trabajo a Futuro

## 6.1. Conclusiones

Hemos hallado propiedades multifractales en las series individuales de retornos logarítmicos de las principales compañías del mercado bursátil de Colombia. De igual manera, hemos encontrado que las correlaciones entre las series exhiben un comportamiento multifractal.

Los resultados derivados en la presente investigación confirman empíricamente el cumplimiento de la Hipótesis del Mercado Fractal.

El menor grado multifractal lo arrojó la serie de log-retorno de Bancolombia y la de mayor grado la serie del Grupo Sura. En las interacciones el menor grado multifractal para Ecopetrol vs Bancolombia y la de mayor grado para Bancolombia vs Grupo Sura.

La existencia de un comportamiento multifractal en la dinámica del mercado de valores de Colombia, haciendo uso de métodos empleados en el análisis fractal y multifractal de series temporales procedentes de sistemas complejos, permiten vislumbrar nuevas estrategias para la toma de decisiones y dirreciona hacia una mejor comprensión de la dinámica de los mercados financieros.

La Econofísica es un área activa, de nuevas perspectivas en el ámbito económico y financiero, ofreciendo una interesante proyección dentro del estudio de sistemas complejos, así como un campo nuevo en términos de investigación y del ejercicio laboral para físicos, economistas y demás interesados en las problemáticas que aborda.

## 6.2. Trabajo a futuro

Partiendo del anterior trabajo, se propone extender la metodología a otros mercados y sistemas complejos:

Evaluar correlaciones entre las series de los índices stocks de los países que integran el Mercado Integrado Latinoamericano MILA, siguiendo la metodología MF DCCA.

Explorar correlaciones entre series derivadas de otros sistemas complejos, tales como series geofísicas y de material particulado; temperatura vs precipitación/ presión atm./humedad/material particulado.

Cuantificar las correlaciones multifractales a través de un coeficiente de correlación no-lineal, propuesto muy recientemente por ( Yuan N. et al 2016)

# A. Bibliografía

Alaoui Ei, et al. (2013) Multifractal detrended cross-correlation analysis in the MENA area, *Physica A* 392, 5985-5993.

Alessio E, et al., (2002), Second-order moving average and scaling of stochastic time series, *Eur. Phys. J. B* 27 (2002) 197-200.

Burgueño A., et al., (2014) Daily extreme temperature multifractals in Catalonia (NE Spain), *Physics Letters A* 378 874-885.

Cajueiro D.O., Tabak B.M. (2007), Time-varying long-range dependence in US interest rates, *Chaos Solitons Fractals* 34 (2007) 360-367.

Cajueiro D.O., Tabak B.M (2008), Testing for time-varying long-range dependence in real state equity returns, *Chaos Solitons Fractals* 38 (2008) 293-307.

Chen S-P et al. (2011a), Multifractal detrended cross-correlation analysis of agricultural futures markets, *Chaos, Solitons and Fractals*, 44:355-361.

Chen S-P et al. (2011b), Multifractal spectrum analysis of nonlinear dynamical mechanisms in China agricultural future markets, *Physica A*, 389:1434-44.

Chen Z., et al. (2002), Effect of nonstationarities on detrended fluctuation analysis, *Phys. Rev. E* 65 (2002) 041107.

Dacorogna, M., et al., (2001): Defining efficiency in heterogeneous markets. *Quantitative Finance*, Volume 1, Issue 2, 2001.

Di Matteo T., et al, (2005), Long-term memories of developed and emerging markets: Using the scaling analysis to characterize their stage of development, *Journal of Banking and Finance*, Volume 29, Issue 4, April 2005, Pages 827-851.

Dutta S., et al (2014), Multifractal detrended cross-correlation analysis of gold price and SENSEX, *Physica A* 413 (2014) 195-204.

- 
- Fama E. (1965) Random Walks In Stock Market Prices, Financial Analysts Journal Vol. 51, No. 1, 50 Years in Review (Jan. - Feb., 1995)
- Gao M. et al. (2012) Trends and Multifractal Analyses of Precipitation Data from Shandong Peninsula, China, American Journal of Environmental Sciences 8 (3): 271-279.
- Gu G.F., Zhou W.X. (2010), Detrending moving average algorithm for multifractals, Phys. Rev. E 82 (2010) 011136.
- Gu R.B., et al. (2010), Multifractal analysis on international crude oil markets based on the multifractal detrended fluctuation analysis, Physica A 389 (2010) 2805-2815.
- Horvatic D., et al., (2011), Detrended cross-correlation analysis for non-stationary time series with periodic trends, Europhys. Lett. 94 (2011) 18007.
- Hu K., et al. (2001), Effect of trends on detrended fluctuation analysis, Phys. Rev. E 64 (2001) 011114.
- Kantelhardt J.W, et al. (2002), Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. Physica A 316:87-114.
- Kantelhardt J.W, et al.(2006), Long-term persistence and multifractality of precipitation and river runoff records, Journal of Geophysical Research, 111, D01106.
- Kavassen R.G., et al., (2005), A multifractal description of wind speed records, , Chaos, Solitons and Fractals, 24-1,165-73.
- Kristoufek L., (2012), Fractal markets hypothesis and the global financial crisis: Scaling, investment horizons and liquidity. Advances in Complex Systems 15(06).
- Lim G. et al. (2007) Multifractal detrended fluctuation analysis of derivative and spot markets, Physica A, 386 259-266.
- Liu L., Wan J.Q. (2011), A study of correlations between crude oil spot and futures markets: A rolling sample test, Physica A 390 (2011) 3754-3766.
- Mali P. (2014), Multifractal characterization of global temperature anomalies , Theoretical and Applied Climatology, August 2014.

- 
- Mandelbrot B. (1982), *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman, New York, 1982.
- Morales R., et al. (2012), Dynamical generalized Hurst exponent as a tool to monitor unstable periods in financial time series, *Physica A*, Volume 391, Issue 11, 1 June 2012, Pages 3180-3189.
- Norouzzadeh P., Rahmani B., (2006), A multifractal detrended fluctuation description of Iranian rial-US dollar exchange rate, *Physica A* 367 (2006) 328-336.
- Pal M., et al., (2014), Multifractal detrended cross-correlation analysis on gold, crude oil and foreign exchange rate time series, *Physica A*, 416 (2014) 452-460.
- Peng C-K, et al. (1994), Mosaic organization of DNA nucleotides. *Phys. Rev. E* 49:1685-1689.
- Peters E. (1991), *Chaos and Order in the Capital Market*, John Wiley and Sons, New York, 1991.
- Peters E. (1994), *Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics*, John Wiley and Sons, New York, 1994.
- Podobnik, B., Stanley, H.E. (2008), Detrended cross-correlation analysis: a new method for analyzing two nonstationary time series. *Phys. Rev. Lett.* 100, 084102.
- Podobnik B., I. et al. (2009a) Quantifying cross-correlations using local and global detrending approaches, *Eur.Phys. J. B* 71 (2009) 243-250.
- Podobnik B. (2009b), et al., Cross-correlations between volume change and price change, *PNSA*, 22079
- Qin J., et al. (2015), The effectiveness of China RMB exchange rate reforms: An insight from multifractal detrended fluctuation analysis *Physica A* 421 (2015) 443-454.
- Samadder S, Ghosh K, Basu T (2013), Fractal analysis of prime Indian stock market indices. *Fractals* 21:1350003.
- Su Z.Y, et al (2009), A multifractal detrended fluctuation analysis of taiwan stock Exchange, *Journal of the Korean Physical Society*, Vol.54, No.4, pp.1395-1402
- Vandewalle N, Ausloos M. (1998), Crossing of two mobile averages: A method for measuring the roughness exponent, *Phys. Rev. E* 58 (1998) 6832.
- Wei-Xing Zhou (2008), Multifractal detrended cross-correlation analysis for two nonstationary signals, *Phys. Rev. E* 77, 066211.



Wei, Y., Huang D. (2005), Multifractal analysis of ssec in chinese stock market: A different empirical result from heng seng index, *Physica A*, 355(2): pp. 497-508.

Yuan N. et al (2016), A novel way to detect correlations on multi-time scales, with temporal evolution and for multi-variables, *Scientific Reports* 6, Jun 2016.

Yuan Ying et al. (2009), Measuring multifractality of stock price fluctuation using multifractal detrended fluctuation analysis, *Physica A* 316:87-114.

Zhuang X.Y., et al.(2014), Multifractal detrended cross-correlation analysis of carbon and crude oil markets, *Physica A* 399 (2014) 113-125.

Zunino L. et al. (2009), Multifractal structure in Latin-American market indices, *Chaos, Solitons and Fractals*, 41-5, 2331-2340.