Ensenyant geometria amb bicicletes

Treball final de màster

Autor: Miquel Fiol Ramis

Tutor: Francesc Perelló Llompart

Màster en Formació del Professorat: especialització matemàtiques

Curs acadèmic 2015-2016

Convocatòria: setembre 2016

Resum

Dins del currículum de secundària referent a l'ensenyament de les matemàtiques el bloc de geometria és un dels que presenta majors dificultats als alumnes.

Així aquest treball, a partir de la utilització d'un recurs didàctic popular, quotidià i relacionat amb l'oci com és la bicicleta pretén desenvolupar un conjunt d'activitats relacionades amb el bloc de la geometria per tal de facilitar-ne el procés d'ensenyament-aprenentatge.

Enfocades en la trigonometria, les diferents propostes didàctiques desenvolupades volen mostrar diferents maneres de dur a terme les activitats com puguin ser mitjançant l'elaboració de documents, utilitzant programari informàtic o a partir del treball manual.

A més a més, en aquest treball també es porta a terme una anàlisi de l'estat de la qüestió a on en primer lloc es comenten les possibles causes de perquè la geometria presenta tantes dificultats i després s'estudien les aportacions que han fet altres autors en la utilització de la bicicleta en l'ensenyament de les matemàtiques.

Finalment, i a partir dels recursos i activitats desenvolupades en aquest estudi, es mostren una sèrie de conclusions i recomanacions per tal de millorar l'ensenyament de la geometria a secundària.

Paraules clau: geometria, bicicleta, trigonometria.

Índex

Índex d'imatges

Índex de taules

1. Objectius del treball

1.1. Objectius generals

- Establir i mostrar la importància del coneixement geomètric a l'hora d'assolir el conjunt de la competència matemàtica per part dels alumnes de secundària.

- Examinar les causes que provoquen el baixos resultats dels estudiants de secundària referents a la geometria.

- Justificar la necessitat de dissenyar nous materials i activitats destinats a la millora de l'ensenyament de la geometria.

1.2. Objectius específics

- Mostrar les possibilitats que ofereix un recurs didàctic com la bicicleta en el procés d'ensenyament-aprenentatge i analitzar el material que s'ha creat en aquest sentit.

- A partir d'aquest recurs didàctic, desenvolupar un seguit d'activitats que serveixin per a introduir conceptes relacionats amb la geometria i la trigonometria.

.

2. Estat de la qüestió

Dins dels diferents blocs que conformen el coneixement matemàtic a secundària, la geometria és un dels que any rere any presenta més dificultats als alumnes com es pot comprovar en els resultats de les diferents proves diagnòstic realitzades.

Així, en aquest apartat del treball es pretén realitzar una anàlisi de la situació actual respecte a la docència de la geometria a secundària. La seva importància dins del conjunt del currículum, la visió i raons per les quals existeixen aquestes mancances segons diversos especialistes i quines solucions hi aporten.

Algunes d'aquestes línies de millora que es proposen passen per una major presència d'activitats a on hi intervingui la manipulació i l'experimentació per part dels alumnes i per donar major presència a les eines TIC a l'aula.

Pel que fa a les eines TIC, es comenten els avantatges de fer servir programes de geometria dinàmica a classe i s'analitzen les possibilitats que proporciona en aquest sentit el programa informàtic *GeoGebra.* La seva facilitat de maneig, les connexions que permet amb altres blocs de les matemàtiques o d'altres assignatures i el fet que sigui gratuït fan que hagi esdevingut una eina a tenir molt present a l'hora de dissenyar activitats matemàtiques per als alumnes de secundària.

Per altra banda, en aquest apartat s'analitza la presència d'un possible recurs didàctic com és la bicicleta en l'ensenyament actual. Plantejat com un element motivador i que permeti als alumnes conectar conceptes geomètrics amb la realitat, s'estudien i comenten diferents materials presents a la xarxa o a la bibliografia consultada.

Cal remarcar la gran quantitat de possibilitats que ofereix la bicicleta a l'hora d'introduir conceptes científics a on la física segurament ha sigut l'assignatura que més l'ha feta servir, especialment en el camp de la mecànica.

Pel que fa a la seva utilització en el camp de la docència de les matemàtiques, s'ha de comentar que la presència de material d'aquest tipus no ha sigut tant abundant com en el cas anteriorment citat de la física. De totes maneres es mostren alguns dels diferents documents i articles que s'han trobat i que en molts casos han sigut cabdals a l'hora de dissenyar les activitats docents que es proposen en l'apartat següent.

2.1. Estat de l'ensenyament de la geometria a secundària

2.1.1. Perquè la geometria?

La paraula geometria deriva del grec *geos*, 'terra' i *metria* 'mesura', per tant, 'mesura de la terra'. I segons la definició de la viquipèdia: 'és la branca del coneixement que s'ocupa dels objectes o figures i de les seves relacions en l'espai, és a dir: distància, posició, superfície, volum, forma, desplaçament, projecció, representació, etc.' (Viquipèdia, 2016).

En una definició més breu, però potser més reveladora, Bishop (1983) citat per Brousseau (2007) afirmava que: 'la geometria és la matemàtica de l'espai'.

Per tant, aquesta disciplina de les matemàtiques és un dels pilars fonamentals del coneixement i la cultura. Present de manera directa o indirecta en la vida quotidiana de les persones, no és fàcil trobar situacions o contextos on la geometria no hi sigui present.

Aquesta gairebé omnipresència li confereix una magnífica oportunitat per a relacionar-la amb altres blocs de les matemàtiques com són el càlcul, l'estadística o l'aritmètica. També amb altres disciplines com puguin ser la física, la geologia, la biologia o fins i tot les ciències socials.

L'autor Anton Aubanell i Pou a les seves *Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria* (2015) ho descriu de la següent manera:

> La seva presència en tot el que ens envolta, la seva possibilitat d'aplicació en contextos quotidians i la seva aportació a la formació d'una base matemàtica sòlida fan que la geometria sigui un àmbit privilegiat per resoldre problemes que impliquin visualització i comprensió espacial, per treballar habilitats específiques de raonament i de prova, per desenvolupar la capacitat de comunicació i, especialment, de representació gràfica i per

> establir connexions entre parts de la matemàtica, amb altres matèries i amb l'entorn quotidià.

En aquest sentit, també el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), en els seus *Principles and standards for school mathematics* (2000), afirma:

> La geometria ofereix mitjans per a descobrir, analitzar i comprendre el món i veure la bellesa en les seves estructures.

Tot i que durant èpoques del segle passat va anar perdent presència en els plans d'estudis, aquesta tendència s'ha anat revertint de manera notable els darrers anys passant a ser una matèria cabdal ja des de primària.

Així, referint-se a l'ensenyament de la geometria durant l'educació primària l'autora Maria Antònia Canals (2010) estableix que:

> [...]. Una matemàtica que potenciï el coneixement de l'espai, és a dir, la geometria. Aquest aspecte tradicionalment ha estat oblidat, però ara cada dia veiem més la relació que té amb el coneixement del propi context i la seva importància en la formació global de la persona.

2.1.2. Causes de l'error associades en l'aprenentatge de la geometria

Tot i que el paper i el pes que ha de tenir la geometria a l'ensenyament secundari resulta clar per a tothom, els baixos resultats en l'avaluació d'aquest bloc en diferents proves diagnòstic (com puguin ser les proves PISA) evidencien les dificultats que comporta aquesta branca de les matemàtiques tant als alumnes com als propis docents.

En aquesta línia Toshio Sawada (1999) citat per Claudi Alsina (2008) afirma què:

> D'acord amb les dades internacionals, hi ha bones oportunitats en l'ensenyament de l'aritmètica, l'àlgebra i mesures però no en geometria, probabilitat i estadística... A més, en àlgebra, quantes més oportunitats dona un país als seus estudiants millors són els resultats dels estudiants, però en geometria pareix que no hi ha relació entre oportunitat d'aprendre i els resultats. Pareix que tots els països/sistemes estan confosos sobre els continguts i el mètode de l'ensenyament de la geometria.

D'aquesta manera, convé posar de manifest la necessitat de detectar les causes d'aquesta mancança com a pas previ per a millorar-ne els resultats.

Referint-se encara a les mancances que presenta la part docent en aquesta problemàtica García *et al.* (2008) escriuen al llibre *La enseñanza de la geometría* que:

> Molts dels professors identifiquen la geometria, principalment, amb temes com perímetres, superfícies i volums, donant-los a aquests alumnes només la definició i mostrant-los la seva forma, reduint les classes a una espècie de glossari geomètric il·lustrat.

Analitzant de manera més global, i no tant com a una problemàtica que afecta a docents i alumnes per separat, en el treball final de màster titulat *Dificultades de aprendizaje de la geometría por parte de alumnos de primer ciclo de la ESO* (Roca, 2014) s'estableixen les possibles causes d'aquestes dificultats o errors associats al procés d'ensenyament-aprenentatge de la geometria a partir del comentat i debatut amb altres docents de secundària i la pròpia experiència de l'autora.

A continuació es mostren algunes de les causes que comenta l'autora i que posteriorment es tendran en compte per a plantejar les línies de millora:

- Tractament de la geometria com una matèria independent a la resta d'àrees.

- Dificultat intrínseca en la redacció d'enunciats i en la representació clara de dibuixos/figures que en ocasions pot portar a confusió als propis alumnes.

- Aquesta dificultat sovint va acompanyada a la falta de comprensió lectora de molts alumnes.

- Falta de visió espaial, lligada a una mancança prèvia de falta de visualització. Habilitat que s'hauria de treballar prèviament en cursos més bàsics.

- Alumnes poc donats a pensar ja que aquesta disciplina exigeix una major capacitat d'abstracció i és més complicat establir-hi procediments mecànics.

- Falta general de motivació. Tot i que aquesta afirmació podria anar associada al conjunt de les matemàtiques.

Com es pot observar, 4 d'aquestes 6 causes esmentades afecten directament a les capacitats i motivació dels alumnes tot i que la feina a fer pels docents sigui molta.

2.1.3. Propostes de línies de millora en l'aprenentatge de la geometria

Un cop analitzats els errors o mancances que planteja el procés d'ensenyament-aprenentatge de la geometria es tracta d'elaborar possibles estratègies de millora i noves aportacions al currículum per tal d'aportar solucions i poder superar les dificultats plantejades a l'apartat anterior.

D'aquesta manera i reprenent el document *Quaderns d'avaluació 31* (Generalitat de Catalunya, 2015) al capítol *d'orientacions pràctiques per a la millora de la geometria* a on l'autor Antoni Aubanell apunta un seguit de propostes de millora agrupades en 3 línies de treball.

A continuació s'enumeren de manera resumida:

> 1. Equilibrar la implementació del currículum augmentant la presència de la geometria i moderant el càlcul.[...].
>
> 2. Integrar en el treball geomètric activitats més competencialment riques basades en l'experimentació, que promoguin el raonament, la comunicació, l'argumentació, que impliquin exploració, repte personal, descoberta, que mostrin la utilitat real del coneixement geomètric. [...]..
>
> 2.1. Impulsar la presència a les classes d'activitats que permetin viure, en primera persona, l'experiència de construir coneixement geomètric. Un tipus d'activitats que poden ser útils són les que segueixen, de manera més o menys estricta, quatre etapes:
>
> - Experimentació
>
> - Descoberta
>
> - Conceptuació
>
> - Demostració
>
> 2.2. Emprar més material manipulable i més programari tipus *GeoGebra* en l'ensenyament de la geometria. El material manipulable i el *GeoGebra* (o

> altres programes de geometria dinàmica) poden contribuir molt a que la geometria escolar recuperi l'experiència, la vivència directa, la intuïció... [...].
>
> 2.3. Donar més presència als contextos reals a la classe de geometria.[...]. En aquest sentit, hauríem d'atendre també a la manera com es plantegen els problemes, com es presenten a l'alumnat: sovint el text (l'enunciat) mata la frescor del context. S'haurien de plantejar més problemes a partir d'objectes, de fotografies, de plànols, de maquetes, de vídeos, de gràfics, de l'entorn, etc. [...].
>
> 3. Incorporar més geometria i raonament visual als blocs de continguts no estrictament geomètrics [...]

Seguint en la línia del que Anton Aubanell cita al punt 2.2. d'aprofitar les possibilitats del material manipulable, d'altres autors també en fan referència tant en l'aprenentatge específic de la geometria com del coneixement matemàtic en general.

Miguel de Guzmán, al seu text *Tendencias actuales en Educación Matemàtica* (2005) afirma que:

> Si la matemàtica és una ciència que participa molt més del que fins ara es pensava del caràcter empíric, sobretot en la seva invenció, que és molt més interessant que la seva construcció formal, és necessari que la immersió en ella es realitzi tenint en compte molt més intensament l'experiència i la manipulació dels objectes dels quals sorgeix.

Alsina *et al.*(2006) al seu llibre *Math Made Visual. Creating images for understanding Mathematics* també fa referència a la importància i la contribució que la manipulació pot fer a la classe de matemàtiques:

> Els materials manipulables poden obrir finestres a solucions creatives que són impossible usant eines tradicionals. [...] Els materials manipulables poden facilitar el pensament visual i representar un pas més important que la realització de representacions planes o de càlculs formals. [...] Les imatges i els materials manipulables poden ser l'únic camí factible per mostrar exemples o solucions de problemes plans o espacials.

De totes aquestes recomanacions i directrius se n'extreu la necessitat de revisar tant el contingut curricular com la metodologia docent que s'empra a l'aula. S'ha de plantejar la millora també a nivell del professorat de secundària a l'hora de dissenyar diferents activitats per tal d'oferir als alumnes un material més motivador que els estimuli a afrontar i resoldre problemes relatius a l'espai i la forma.

2.1.4. Implementació de programes de geometria dinàmica (GeoGebra)

En referència a la manipulació i experimentació com a formes d'aprenentatge en front de la memorització mecànica de definicions i conceptes, la gran quantitat de recursos presents a la xarxa conformen una eina bàsica per a superar les dificultats abans esmentades.

Per tant, en aquest sentit resulta fonamental la implementació de diferents recursos informàtics a l'aula. No tant com un esdeveniment puntual si no com a una eina bàsica en el desenvolupament diari de l'assignatura en el context de la secundària.

Referint-se a les TIC de manera més genèrica, l'autora Adoración Peña (2012) fa la següent reflexió:

> La motivació és un component bàsic per a la planificació i desenvolupament de les situacions de l'ensenyament.
>
> L'ordinador, a més a més d'ajudar a motivar i potenciar la visió espaial de l'alumnat, també atén les diferències individuals. El professor ha de ser conscient de que existeixen diferències entre els que aprenen i que ho fan a ritmes diferents. Per guiar i afavorir l'alumne en l'aprenentatge de les matemàtiques (i en particular, de la geometria), els professors han de cercar estratègies d'actuació que convinguin a tota la classe.
>
> La utilització de les TIC en l'ensenyament de la geometria a l'ESO poden pal·liar de manera considerable les dificultats abans enumerades.
>
> Però a més d'ordinadors amb accés a internet per a poder accedir a pàgines web dedicades a l'ensenyament de la geometria, explicacions utilitzant un projector i la pissarra digital interactiva, hem de tenir a la nostra disposició programes de geometria dinàmica com el *GeoGebra* (gratuït),

programes de poliedres com el *Poly Pro* i programes per a realitzar qüestionaris i exàmens, com *Clic* i *Hot Potatoes*. A més, altres recursos com el tangram interactiu, el geoplà interactiu, les WebQuests, el projecte Descartes, els blogs i les xarxes socials ens ajudaran en la tasca de l'ensenyament de la geometria.

Fent referència als programes informàtics de geometria dinàmica i del *GeoGebra* en particular, Arranz *et al.* (2011) al seu article *Realidades de Geogebra* publicat a la revista *Suma* afirmen que:

> Els programes que permeten construccions dinàmiques i interactives són els responsables, sens dubte, d'un considerable i generalitzat augment del interès per l'aprenentatge de la geometria en tots els nivells acadèmics. L'animació i interactivitat amb la qual doten a les clàssiques i estàtiques figures geomètriques, tant en el procés d'observació i anàlisi dels conceptes com en el de la resolució de problemes geomètrics, estan revolucionant la manera d'apropar als estudiants els continguts matemàtics. [...]
>
> D'entre els diversos programes que ajuden d'aquesta manera a l'estudi i aprenentatge de la geometria, *GeoGebra* destaca per tenir alguns avantatges que podem resumir en dos paraules: facilitat i connexió.
>
> Facilitat per gairebé tot: per aprendre a manejar-lo i sortir-se'n amb rapidesa en el seu intuïtiu entorn, sent suficients un parell de sessions per adquirir autonomia en el seu maneig, per a utilitzar els comandaments i cercar ajuda en el nostre idioma (pràcticament, sigui quin sigui), per a crear les nostres pròpies eines, per a seleccionar en cada cas les eines permeses als alumnes, per a convertir les nostres construccions en pàgines web interactives, i sobre tot, per a redefinir els objectes en qualsevol moment sense necessitat de recomençar tota la construcció.
>
> A més de fàcil, GeoGebra aconsegueix connectar diferents elements que el converteixen en una aplicació diferent: associa les expressions gràfiques a les simbòliques, la mesura a la quantitat, la propietat geomètrica a l'equació algebraica; combina la precisió amb l'estètica, l'àlgebra i el càlcul amb la geometria. Tot a *GeoGebra* pareix dissenyat i desenvolupat al voltant d'aquesta idea: la coordinació dels diferents codis d'informació que s'utilitzen en matemàtiques i informàtica.

Per tant, a conseqüència d'aquests motius *GeoGebra* ha esdevingut un referent del programari lliure en el camp de l'educació secundària, tant per a la geometria com per a l'àlgebra i el càlcul. Diferents webs o blogs n'impulsen la seva difusió, penjant-hi diferents materials i tutorials que en fomenten la seva implantació.

Com a exemple:

- https://www.geogebra.org/materials/

Pàgina web creada per l'*international GeoGebra institut* (IGI) amb més de 460.000 materials penjats accessibles de manera gratuïta i interactiva.

- http://community.geogebra.org/en/

Blog creat pel mateix IGI que a més a més conté un fòrum a on poder interactuar amb d'altres usuaris.

- https://www.youtube.com/user/GeoGebraChannel/

Canal de *GeoGebra* a *youtube* amb gran nombre de vídeos tutorials i llistes de reproducció agrupades per continguts i diferents nivells.

- http://acgeogebra.cat

Web de l'Associació Catalana de GeoGebra (englobada dins l'IGI) on s'anuncien diferents jornades i activitats que porta a terme l'associació. Hi ha penjat tant material de GeoGebra com el pdf dels seus butlletins. També es poden trobar links a diferents associacions de GeoGebra d'arreu de l'estat.

2.1.5. Altres recursos a la xarxa i lectures recomanades

Els llibres, articles o recursos web relacionats amb l'anàlisi i docència de la geometria són molt extensos. A continuació es mostren alguns d'aquests documents que m'han semblat interessants d'afegir en aquest treball:

- *Orientacions per a la millora de l'aprenentatge de la geometria a l'ESO* (http://www.xtec.cat/web/curriculum/eso/orientacions)

Document a on s'analitza la presència de continguts matemàtics al currículum de secundària. Publicat per la Direcció General d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat del Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya l'any 2012. Aquest text té com a objectiu cercar una manera de treballar els continguts geomètrics més competencial a partir del treball de la resolució de problemes, raonament i prova, connexions i comunicació i representació.

- *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic. Identificació i desplegament a l'educació secundària obligatòria* (http://www20.gencat.cat/docs/Educacio/Home/Departament/Publicacions/Col_leccions/Competencies_basiques/competencies_mates_ESO.pdf)

Publicat pel Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya a l'any 2013. Text en el qual es comenten i identifiquen les dotze competències clau que conformen el camp competencial matemàtic, vinculades a un conjunt de continguts clau, a on cinc de les quals són de geometria.

- *Impulsem la geometria* (http://phobos.xtec.cat/creamat/joomla/index.php/impulsem-la-geometria)

Blog creat pel creamat a on es poden trobar propostes i directrius de treball per tal de millorar i superar les dificultats presents en la geometria. Aquestes dificultats han estat identificades a partir de l'observació de proves diagnòstic tant a primària com a secundària.

- *Aplicació de Recursos al Currículum* (ARC) (http://apliense.xtec.cat/arc)

Pàgina web a on es poden realitzar cerques detallades de diferents recursos i propostes didàctiques relacionades directament amb el currículum de matemàtiques. Des de primària fins a batxillerat.

- *Illuminations* (http://illuminations.nctm.org)

Web creada per la *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) a on es proporcionen un gran nombre d'applets i recursos didàctics organitzats per blocs de continguts i per etapes.

- *¿Por qué la Geometría? Propuestas didácticas para la ESO*

Llibre escrit per Alsina *et al.* (1997) dirigit a docents de secundària. El text és un recull d'idees sobre el paper i les diferents maneres d'implementar la geometria a l'aula.

- *La Geometria: de las ideas del espacio al espacio de las ideas en el aula (vol.17).*

Escrit per Xelo Calvo *et al.* (2002) i publicat per l'editorial Graó. Aquest text, dirigit a professors de diferents nivells (de preescolar fins a secundària), és una col·lecció d'assajos relacionats amb la didàctica de la geometria.

2.2. Utilització de la bicicleta com a recurs didàctic

2.2.1. Utilització de la bicicleta com a recurs didàctic fora de les matemàtiques

Les possibilitats que ofereix la bicicleta com a recurs didàctic a una aula de secundària són molt elevades. Més enllà de les seves òbvies connexions amb l'educació física, l'educació vial o fins i tot l'educació mediambiental, aquest mitjà de transport es pot utilitzar per explicar conceptes de tipus mèdic, d'història (relacionant-ho amb canvis que ha proporcionat a nivell tecnològic) o d'informàtica, com per exemple a l'hora de dissenyar animacions que utilitzen aquest recurs.

Però l'assignatura que proporciona més possibilitats en aquest sentit, especialment a secundària, és la física. Conceptes com la llei de la palanca, l'aerodinàmica, el centre de gravetat, les diferents lleis del moviment o l'energia mecànica, cinètica i potencial són algunes de les possibilitats en les que es pot fer servir la bicicleta com a recurs didàctic a l'aula.

Els recursos presents tan a nivell bibliogràfic com a la xarxa són molt nombrosos, ja sigui a partir d'articles d'investigació docent, material i activitats creades o vídeos tutorials penjats al *youtube*.

A mode d'exemple:

- *The Bicycle: A vehicle for teaching physics* (https://web.phys.ksu.edu/papers/2005/the_bicycle_india.pdf)

Article publicat pel professor del *Physics Departament* de la *Kansas State University* Dean A. Zollman a l'any 2005, a on es mostren els resultats de la investigació de la utilització de la bicicleta com a recurs didàctic en l'explicació de conceptes relacionats amb la física. També s'hi explora la possible relació amb el camp de la informàtica i com a exemple d'interacció entre societat i els avanços tecnològics. Finalment es mostren en el document alguns exemples d'activitats.

- *Exploring the aerodynamic drag of a moving cyclist* (http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0031-9120/51/1/015001)

Article escrit per F. Theilman i C. Reinhard (2015) a la revista *Physics Education* (Volum 51, número 1) a on s'explica i es desenvolupa una activitat per a alumnes de secundària de 14-15 anys sobre la resistència aerodinàmica de l'aire quan es circula a sobre d'una bicicleta. Dividida en 6 sessions, a més de la bicicleta, a l'activitat s'hi utilitzen recursos de tipus informàtic, fotogràfic i de mesura (com el dinamòmetre) per tal de que els alumnes siguin capaços de calcular el coeficient de resistència.

2.2.2. Utilització de la bicicleta com a recurs didàctic en la geometria

A diferència del que anteriorment s'ha dit respecte a la gran quantitat de recursos a on la bicicleta està present en l'ensenyament de conceptes físics, en el camp de les matemàtiques aquesta relació no és tant abundant.

En aquest sentit, el material que s'ha trobat sovint està relacionat amb conceptes matemàtics d'un nivell de coneixement superior a l'exigible a la secundària i més adient per a àmbits universitaris.

L'adaptació d'aquest material al currículum de secundària tampoc resulta una tasca trivial, tot i així, a continuació es mostren alguns dels documents que s'han fet servir per a desenvolupar algunes de les activitats didàctiques d'aquest treball:

- *Roads and Wheels*
(http://web.mst.edu/~lmhall/Personal/RoadsWheels/RoadsWheels.pdf)

Article escrit per Leon Hall i Stan Wagon a la *Mathematics Magazine* (Vol.65, No.5) i publicat a l'any 1992. En aquest document els autors desenvolupen la idea de com rodes de diferents formes geomètriques diferents a la circular (poligonals, el·líptiques, etc.) poden lliscar per una superfície adient de manera suau, sense sotracs.

Les demostracions matemàtiques que es mostren són d'un nivell més elevat que el plantejable a secundària. Però el que es demostra en l'article serveix de punt de partida per a desenvolupar una de les activitats desenvolupades en aquest document.

- *Riding on Square Wheels*

(*https://www.sciencenews.org/article/riding-square-wheels*)

Article publicat a la web de la revista *Science News* per Ivan Peterson (2004) a on es mostra el treball desenvolupat pel propi Stan Wagon al *Macalester College* (St. Paul, Minnesota) creant una bicicleta (de fet un tricicle) que llisca de manera suau sobre una catenària invertida repetida de manera periòdica.

- *La rueda cuadrada*
(http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/solido/mov_general/cuadrada/cuadrada.htm)

Apartat dins una pàgina web de divulgació titulada *Física con ordenadores* creada pel professor Ángel Franco titular de la Universitat del País Basc a on es mostra d'una manera entenedora la demostració matemàtica del perquè una roda quadrada llisca sobre una catenària invertida.

L'autor també utilitza aquesta demostració per explicar conceptes de física relacionats amb les lleis del moviment o amb l'energia cinètica de rotació i translació, mitjançant en molts casos eines trigonomètriques.

Un cop més, els continguts d'aquesta web estarien més enfocats als estudiants de l'àmbit universitari que als de secundària.

- *Square-Wheeled*

(http://www.mathstube.org.uk/category.php?cat=Square-Wheeled)

Apartat dins de la pàgina web *MathsTube* a on hi ha penjats un conjunt de vídeos curts (al voltant d'un minut) a on es mostren diferents experiències de vehicles (tricicles, monopatins, motocicletes...) creats amb les rodes quadrades que llisquen sobre una superfície de manera suau.

En aquest cas, sí que els continguts dels vídeos anirien enfocats a alumnes de secundària.

- *Which way did the Bicycle Go?*

(https://thatsmaths.com/2015/10/08/which-way-did-the-bicycle-go/)

Article publicat a la web *ThatsMaths* basat en un dels capítols del llibre *Which Way Did the Bycicle Go?: And Other Intriguing Mathematical Mysteries* (Konhausen *et al.*, 1996). En el que s'ensenya a interpretar i demostrar mitjançant eines matemàtiques els diferents rastres que deixen tant la roda davantera com la posterior d'una bicicleta.

- *The mathematics of bicycle tracks*

(http://www.mathteacherscircle.org/wp-content/themes/mtc/assets/MATH-CIRCLE-SESSION_Bicycle-Tracks.pdf)

Document creat pel professor de secundària James Tanton a on es mostren un seguit de possibles activitats per fer a l'aula a partir del rastre deixat per unes rodes de bicicleta.

Les activitats estan enfocades per a diferents nivells de secundària. Al document es mostren possibles variants i la solució a totes elles. Finalment es mostren els estàndards d'aprenentatge que es porten a terme en el conjunt de les activitats.

- Bicycle Tracks (http://simonsfoundation.s3.amazonaws.com/jwplayer/BicycleTracks/bicycletracks_med02.mp4)

Vídeo divulgatiu d'uns 7 minuts de durada creat per la *Simons Foundation* a on es mostren molts dels continguts presents a les dues referències anteriors. En aquest cas però, explicades empíricament a través d'una maqueta de bicicleta.

A més, en aquest document visual es relaciona la demostració matemàtica amb la que va portar a terme Sherlock Holmes al conte *The Adventure of the Priory School* escrit per Arthur Conan Doyle.

2.2.3. Utilització de la bicicleta a partir del *GeoGebra*

Com s'ha comentat a l'apartat de propostes de millora, el programa de geometria dinàmica *GeoGebra* resulta una eina fonamental a l'hora d'implementar nous conceptes (en aquest cas de tipus geomètric), millorar la visió espacial i l'experiència pràctica actuant a l'hora com un element motivador.

A continuació es mostren dos casos a on s'ha fet servir la bicicleta mitjançant el programa *GeoGebra*:

- *Bicycle with Polygonal Wheels*
(https://www.geogebra.org/material/show/id/5990)

Construcció dinàmica de *GeoGebra* penjada per Humberto J. Bortolosi a l'any 2012 creada a partir de l'article abans esmentat *Roads and Wheels* (Hall *et al.*, 1992).

En aquest material, un punt lliscant (n) ens permet anar modificant el nombre de costats del polígon que forma les rodes. A mida que s'augmenta aquest nombre de costats 'n' la corba catenària es va aproximant a una línia recta.

Un altre punt lliscant (w) ens permet modificar la mida del 'quadre' de la bicicleta per tal que estigui en concordança amb les rodes poligonals.

- *The Gears of a Bycicle*

(https://www.geogebra.org/material/show/id/50031)

Construcció dinàmica penjada per Steven Blumsak a l'any 2013. Consisteix en una representació dels engranatges d'una bicicleta a on a partir d'una sèrie de punts lliscants es pot modificar la mida del plat, el pinyó i simular l'acció de pedalar.

Aquesta representació ha servit de base per a desenvolupar una de les activitats que es mostren més endavant

.

3. Motius

Com ja s'ha comentat anteriorment i per unes causes també analitzades, el bloc de geometria és el que presenta major dificultat als alumnes de secundària a partir del que s'extreu dels resultats de diferents avaluacions diagnòstic de la competència matemàtica. Tendència que es va repetint any rere any.

Així, prenent com a referència els resultats de les proves PISA, tant a l'any 2012 com a l'any 2003 (anys a on la competència matemàtica es va avaluar de manera prioritària) de les quatre categories que s'avaluaven: quantitat, espai i forma, canvi i relacions i incertesa, la d'espai i forma va ser la que va presentar pitjor puntuacions (dades del ministerio de educación, cultura y deporte, 2012).

Aquesta tendència s'observa de manera global a tots els països que formen l'OCDE i la Unió Europea (a excepció de Corea del Sud, Suïssa o Japó). A les Illes Balears la distribució dels resultats és gairebé idèntica tot i que les puntuacions mitjanes en aquest cas són considerablement inferiors a la mitjana global de la resta de l'estat i de la UE (dades de la conselleria d'educació, cultura i universitats, 2013).

Tenint en compte també un document publicat per la Generalitat de Catalunya a l'any 2015 titulat *Anàlisi dels resultats en geometria de cinc proves d'avaluació de competència matemàtica* s'observa que per a les proves d'avaluació de l'educació secundària obligatòria dels anys 2013, 2014 i 2015 dels 4 blocs avaluats (numeració i càlcul, espai forma i mesura, canvi i relacions i estadística) el corresponent a la geometria (espai, forma i mesura) és el que presenta en tots els casos la puntuació més baixa de totes.

A l'any 2013 la nota mitjana del bloc d'espai, forma i mesura estava a més de 7 punts de la nota mitjana global, a quasi 10 punts en el 2014 i a més de 16 punts al 2015.

Per tant, d'aquest conjunt de dades se n'extreu una necessitat inequívoca de millorar i intensificar el procés d'ensenyament-aprenentatge en el camp de la geometria. Millores que en definitiva hauran de repercutir positivament en l'assoliment del conjunt de la competència matemàtica per part dels alumnes de secundària.

Les propostes didàctiques que es desenvolupen a continuació van orientades en aquest sentit de crear nou material destinat a intensificar aquest procés d'aprenentatge en la geometria. El fet d'identificar possibles mancances en el material docent (falta d'experimentació, recursos excessivament abstractes o falta d'implementació de noves tecnologies a l'aula) ha de servir per a no tornar a caure en els mateixos errors. En aquest sentit el marge de millora és elevat.

4. Desenvolupament de la proposta

En aquest apartat del treball es mostren una sèrie de recursos didàctics utilitzant la bicicleta com a nexe conductor desenvolupats per tal d'aconseguir el principal objectiu inicialment fixat que és el de millorar i facilitar el procés d'ensenyament-aprenentatge en el bloc de la geometria a secundària.

En total es plantegen 3 propostes amb diferents activitats cadascuna. Totes elles emmarcades al curs de primer de batxillerat seguint la distribució curricular actual.

Així, es pretén aprofitar el caràcter lúdic i motivador que pugui tenir un element com la bicicleta per tal d'introduir i aprofundir en conceptes geomètrics que d'una altra manera resultarien més difícils d'adquirir.

Les activitats estan concebudes de manera que els alumnes vagin treballant i desenvolupant competències de diferents formes. Ja sigui mitjançant la manipulació i el treball manual, mitjançant el programa informàtic *GeoGebra* o a partir de l'entrega de diferents documents a on els alumnes a partir de la recerca siguin capaços de redactar i expressar-se en el llenguatge matemàtic de manera correcta.

Totes les activitats estan plantejades per a ser realitzades per parelles, ja que en gran part s'hauran de realitzar a l'ordinador. El fet de no treballar exclusivament de manera individual també emfatitza la necessitat de potenciar el treball cooperatiu i el consens en la presa de decisions potenciant així les habilitats socials dels alumnes.

La durada de les diferents propostes és d'entre una i dues sessions ja que el curs a on es desenvolupen no permet grans despeses temporals a causa de l'elevada càrrega curricular que ja té.

El parer del professor serà el d'actuar com a guia en el desenvolupament de les activitats ajudant als alumnes de manera puntual si s'escau, deixant clars en tot moments els terminis d'entrega i els criteris d'avaluació.

4.1. Rodes quadrades

Aquest conjunt d'activitats es desenvolupen a partir del problema que donada una roda quadrada, desenvolupar una superfície adient per a que la roda llisqui de manera suau, sense sotracs. La condició principal perquè aquest fet es doni és que l'eix de la roda, el centre, descrigui una línia recta horitzontal.

Perquè això sigui possible la roda s'haurà de desplaçar sobre un terra el perfil del qual és el d'un arc de catenària invertida, que es va repetint de manera periòdica (imatge 4.1.1.).

Imatge 4.1.1. Roda quadrada sobre catenària invertida**. Font:** http://web.mst.edu

A mida que es van augmentant els costats d'aquesta roda poligonal els arcs de la catenària s'aniran fent més petits, de manera que si el nombre de costats tendís a infinit es formaria un cercle amb un terra completament llis.

Els criteris de disseny de la superfície són els següents:

- El centre de la roda ha d'estar a una alçada constant d.

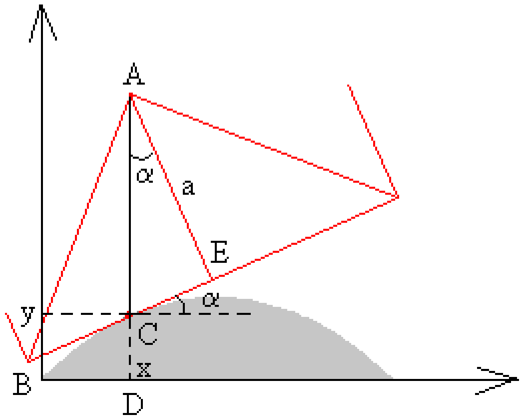
- La roda ha de ser sempre tangent a la superfície del terra en el punt de contacte.

- El centre de la roda haurà d'estar just damunt del punt de contacte de la roda amb el terra.

- La longitud de la corba que descriu el 'bony' haurà de ser igual que un dels costats del quadrat.

La demostració matemàtica que la forma del 'bony' o 'bonys' ha de ser una catenària invertida supera els coneixements exigibles per a alumnes de batxillerat, de totes maneres a continuació se'n detallen alguns dels passos per arribar-hi:

Suposem una roda quadrada de costat 2a (imatge 4.1.2.):



Imatge 4.1.2. Roda quadrada de costat 2a sobre una corba catenària. Font: http://www.sc.ehu.es/

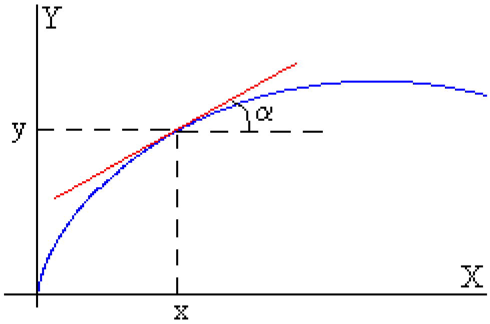
El triangle isòsceles ABE representa una octava part del quadrat. Com es veu a la imatge anterior AE és igual a *a* i AB és igual a l'arrel quadrada de 2*a*.

Inicialment, el punt B del quadrat està situat a l'origen, en moure's rodant, sense lliscar, la longitud BC serà igual a la longitud de l'arc 0C. Per altra banda, el punt C serà tal que la longitud AC + CD = AB es mantindrà constant durant tot el moviment, és a dir, com s'ha comentat anteriorment als criteris de disseny, el centre del quadrat descriu una trajectòria que és una recta horitzontal.

Si l'ordenada del punt C és y i l'angle que forma el costat BE amb l'eix horitzontal és α, la relació AC + CD = AB es descriu com:

$$\frac{a}{cos\alpha} + y = \sqrt{2a}$$

Així, recordant la interpretació geomètrica de la derivada (imatge 4.1.3.), la tangent de l'angle α és $tg\alpha = \frac{dy}{dx}$.



Imatge 4.1.3. Interpretació geomètrica de la derivada. Font: http://www.sc.ehu.es/

S'aplica que la relació 1 + $\tan^2\alpha = \sec^2\alpha$ i s'obté què:

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2a} - y}{a}\right)^2$$

A partir d'aquí ja s'han de fer servir eines matemàtiques que com s'ha assenyalat abans no estan incloses al currículum de batxillerat.

Comentar que finalment s'arriba a l'equació d'una corba catenària:

$$y = a\left(\sqrt{2} - cosh\left(k - \frac{x}{a}\right)\right)$$

Aquest tipus de corba és la descrita en un camp gravitatori uniforme per un fil de densitat uniforme quan aquest se suspèn per dos punts. I la seva forma invertida forma un arc que és el que minimitza de manera més eficient les forces a comprensió, suficientment fort com per aguantar el seu propi pes.

L'equació d'aquesta corba utilitzant coordenades cartesianes i escollides de manera que l'eix Y coincideixi amb el mínim de la corba, resulta ser:

$$y = a \cdot cosh\left(\frac{x}{a}\right) = a\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$

Al seu punt més baix aquesta corba és molt semblant a la que forma una parábola. Un científic il·lustre com Galileo Galilei les va confondre ja que així ho va publicar en els seus *Discursos sobre dues noves ciències* (1638) per tant, en aquest sentit, el professor haurà de remarcar la diferenciació entre les dues.

Tornant a la roda, a mesura que el quadrat roda sense lliscar gira 90° i retorna a la configuració inicial, excepte una translació d. Aquesta translació es determina fent $y = 0$ a l'equació de la catenària i s'obté $d = 2ka$.

En base a aquests coneixements es desenvolupen diferents activitats que tenen com a objectiu conèixer i desenvolupar aquests continguts.

Curs

1er de batxillerat

Continguts

- Funcions trigonomètriques i les seves inverses.

- Raons trigonomètriques d'un angle qualsevol. Fórmules de transformacions trigonomètriques.

- Realització d'investigacions matemàtiques a partir de contextos de la realitat o contextos del món de les matemàtiques.

- Pràctica dels processos de matematització i modelització, en contextos de la realitat i contextos matemàtics.

- Derivada d'una funció en un punt. Interpretació geomètrica.

- Utilització de mitjans tecnològics en el procés d'aprenentatge per facilitar la comprensió de propietats geomètriques.

Objectius didàctics

- Utilitzar les fórmules trigonomètriques usuals per a resoldre equacions trigonomètriques, així com aplicar-les en la resolució de triangles directament o com a conseqüència de la resolució de problemes geomètrics del mon natural, geomètric o tecnològic.

- Desenvolupar processos de matematització en contextos de la realitat quotidiana a partir de la identificació de problemes en situacions problemàtiques de la realitat.

- Elaborar un informe científic escrit que serveixi per comunicar les idees matemàtiques sorgides en la resolució d'un problema.

- Potenciar l'ús de les noves tecnologies com a eina de comprensió i resolució de problemes matemàtics.

- Aplicar el concepte de derivada d'una funció en un punt, la seva interpretació geomètrica i aplicar-ho a la resolució de problemes geomètrics.

Competències

- Comunicació lingüística: a partir de l'entrega de documents a on s'hauran d'expresar de manera clara i concisa les investigacions realitzades i els coneixements assolits.

- Competència matemàtica i competències bàsiques en ciència i tecnologia: a causa de la matèria que es tracta en les següents activitats.

- Competència digital: ja que algunes de les activitats que es plantegen s'hauran de portar a terme a partir del programa informàtic *GeoGebra*.

- Aprendre a aprendre: s'hauran d'establir estratègies i maneres diferents de treballar per tal d'anar resolent les diferents activitats que es proposen.

- Competències socials i cíviques: el fet de treballar per parelles provocarà que els alumnes es vegin obligats a participar i millorar en aquest sentit.

Coneixements previs

- Coneixements previs de *GeoGebra*.

- Figures planes elementals.

- Angles i les seves relacions.

- Teorema de Pitàgores.

Metodologia

Materials i recursos

- Ordinadors amb connexió a la xarxa i programari GeoGebra instal·lat (un ordinador per parella)

- Porexpan, regla, compàs, cola, rotulador, cúter i pal petit de fusta. Un de cada per parella

- Projector

Agrupament

Per parelles ja que és la manera més adient quan es treballa amb odinador. Les parelles les formarà el professor tenint en compte que els grups quedin compensats. Els 6 alumnes amb millors notes formaran parelles entre si, per a evitar que no puguin avançar tot el que voldrien i generar-los un cert sentiment de frustació. La resta de parelles es formaran de manera que quedin compensades.

Espai

- Aula habitual: activitats 0 i 1

- Aula d'informàtica: activitat 2

Temporització

El conjunt de les activitats es portaran a terme en dues sessions:

- 1a sessió: activitats 0 i 1

- 2a sessió: activitat 2

Paper del professor

- A les activitats 0 i 1 el professor es va passejant per l'aula i observa el treball i el comportament dels alumnes. Proporciona ajuda si algun dels grups l'hi requereix.

- A l'activitat 2 el professor entrega una guia amb els passos a seguir per a portar a terme l'activitat mitjançant l'ordinador. Com abans, es passeja per l'aula per tal d'anar seguint la feina dels alumnes i resoldre possibles dubtes.

Paper de l'alumne

- Distribuïts per parelles segueixen les pautes que els indica el professor en cada moment. Les diferents activitats o documents s'han d'entregar en els terminis acordats.

Atenció a la diversitat

El principal objectiu del treball per parelles és l'atenció a la diversitat per tal de potenciar al màxim el procés d'ensenyament-aprenentatge de cada alumne i que cap d'ells es quedi despenjat del grup. Per aquest motiu les parelles hauran d'estar el més compensades possibles juntant alumnes amb més dificultats amb d'altres més facilitats per la matèria.

Com s'ha dit anteriorment, els 6 alumnes que demostrin més capacitats s'ajuntaran entre ells per a que puguin desenvolupar al màxim els seus coneixements.

També, a nivell d'avaluació, el fet d'utilitzar rúbriques de manera individualitzada fa que aquest procés sigui més flexible, adaptant-se en certa manera a cada alumne.

Procediment

Activitat 0. Presentació de l'activitat i reproducció de dos vídeos

Explicació de l'activitat al conjunt de l'aula. Contingut, temporalització i objectius didàctics.

Reproducció dels següents vídeos:

- *Square-Wheeled Tricycle*

https://www.youtube.com/watch?v=LgbWu8zJubo

Vídeo d'un tricicle amb les rodes quadrades que llisca sobre un terra format per peces de catenàries invertides realitzat pels estudiants del *Texas A&M Society of Physics* pujat a Internet l'any 2007. Durada 27 segons.

- *Square wheeled motorbike jump*

https://www.youtube.com/watch?v=u-hDEEl67_Y

Part del tercer episodi de la tercera temporada del programa sobre divulgació científica de la BBC *Bang Goes the Theory* produït a l'any 2010. Durada 1 minut i 12 segons.

Activitat 1. Construcció de rodes quadrades i un suport per lliscar suament

Per parelles i sense cap explicació matemàtica prèvia demanar als alumnes que construeixin un model de rodes quadrades i terra sobre el que lliscar suaument. Realitzar-ho a partir del material anteriorment citat: porexpan (o escuma dura), regla, compàs, cola, rotulador, cúter i un pal de fusta o plàstic per unir les dues rodes.

Aquesta activitat pretén potenciar la visió espaial dels alumnes, el treball manual com una altra manera possible d'aprendre matemàtiques i a que descobreixin per ells mateixos els problemes geomètrics que l'activitat planteja.

Bàsicament les dues idees principals, en primer lloc que l'eix de la roda ha de traçar una línia recta horitzontal i que la roda ha de ser sempre tangent al terra en el punt de contacte.

Així, a més a més del material que se'ls hi demana hauran d'entregar un document (un per parella) responent a les següents preguntes:

1. Quins problemes planteja l'activitat?

2. A efectes matemàtics que vol dir que la roda llisqui suament sobre el terra?

3. Cerca a Internet i comenta quina forma determinada ha de tenir el terra per a que la roda llisqui suaument. Amb quina altra forma presenta moltes semblaces?

4. Es podrien portar a terme rodes amb la forma de qualsevol polígon regular? Quina implicació tendria en el terra de suport?

5. Què passaria si el nombre de costats (n) del polígon regular que forma la roda tendís a infinit?

Aquesta part de redacció del document s'haurà de fer a casa i també implicarà treball de recerca bibliogràfica per tal de contestar algunes de les preguntes que s'hi plantejen (bàsicament les preguntes 3 i 4).

Es podrà entregar tant com un document físic com penjar-ho en format digital a la plataforma moodle.

Un cop corregits els documents de cada grup, el professor corregirà i explicarà a la pissarra una per una totes les respostes i dubtes que sorgeixin.

Solució

1. Crear un terra adient per a que la roda llisqui suaument i no vagi donant salts o sotracs.

2. Que l'eix de la de la roda es manté a una alçada constant.

3. Sí, aquella que faci que el punt de contacte entre la roda i el terra sempre sigui tangent. La catenària invertida repetida periòdicament.

Tot i que són diferents, la corba catenària és molt semblant a una parabola.

4. A partir d'un terra format per una catenària invertida repetida periòdicament es podrien formar rodes amb la forma de qualsevol polígon regular a excepció del triangle ja que el punt de contacte no sempre seria tangent i per tant provocaria sotracs.

A mida que augmentem el nombre de costats del polígon la component *a* de la catenària s'aniria fent més gran i per tant la corba s'aniria aproximant a una línia recta.

5. Que ens aproximaríem a una roda circular i per tant a un terra completament llis.

Activitat 2. Construcció d'un quadrat que llisca sobre una catenària invertida a partir del *GeoGebra*.

Es tracta de construir, mitjançant el programa informàtic *GeoGebra*, una quadrat que va rotant sobre el seu centre i a la vegada es trasllada cap a un costat. Si activam el traç del centre del quadrat i del punt de la intersecció entre un dels costats i la recta perpendicular a l'eix X i que queda just per davall del centre del quadrat s'observa com el primer ens descriu una línia recta i el segon una corba catenària invertida repetida periòdicament.

Aquest material està penjat a la web de *GeoGebra*:

https://www.geogebra.org/material/show/id/147444

Al compte de Larry Wadsworth, pujat el 24 d'agost de 2014.

Procediment:

1. Crea un punt A a on la component *x* d'aquest punt serà un nombre genèric *a* i la component *y* serà igual a 1.

2. Crea un punt lliscant per a la component *a* que variï entre 0 i 10.

3. Amb centre en A crea una circumferència de radi 1.

4. Crea el punt B corresponent a la intersecció entre la circumferència i l'eix X.

5. Crea un angle de nom r definit per: (*a* 180/π)°

6. Crea el punt B' a part de la següent entrada: Rotació[B,- (*a* 180/π)°,A]

7. Crea una recta que uneixi el punt B' amb el centre de la circumferència.

8. A partir de la recta *b* defineix el punt C com la intersecció entre aquesta recta i la circumferència.

9. Crea la recta *d*, que passa per A i és perpendicular a *b*.

10. Crea els punts D i E com les interseccions entre la circumferència i la recta *d.*

11. Defineix un quadrilàter a partir de la unió dels punts D, B', E i C.

12. Crea la recta f, perpendicular a l'eix X i que passi pel centre de la circumferència (punt A).

13. Crea el punt F, com la intersecció entre la recta f i el segment e.

14. Crea els punts G i H com la intersecció entre la recta f i el quadrilàter.

15. Activa el traç dels punts A i G i activa l'animació en la barra del punt lliscant.

Aquests 15 passos són els mateixos que tendran els alumens per a resoldre l'activitat i que hauran de penjar a la plataforma moodle.

L'activitat els hi servirà per a corroborar el que s'ha demostrat a l'activitat 1. La pràctica permet observar com el punt de contacte entre la roda i el terra descriu una corba catenària repetida periòdicament.

Avaluació

Al principi de l'activitat el professor entregarà una rúbrica (annex 1) que s'haurà de retornar completada un cop fetes totes les activitats de manera individual. Per tant, els alumnes s'hauran d'autoavaluar i valorar la feina de l'altre company de grup. Això ens servirà per veure com interaccionen els alumnes entre si i detectar possibles casos de parelles que no s'hagin avingut.

De la mateixa manera, en aquesta rúbrica s'avaluarà el material entregat, l'assoliment dels continguts teòrics i la capacitat d'aplicar-los per part dels alumnes. L'observació d'aquests resultats serviran al professor per a corregir mancances o punts a millorar.

El professor també avaluarà a la classe mitjançant la mateixa rúbrica que comentarà amb cada alumne de manera individual.

No totes les activitats realitzades tendran el mateix pes a la nota final. El percentatge de cada una es mostra a la rúbrica.

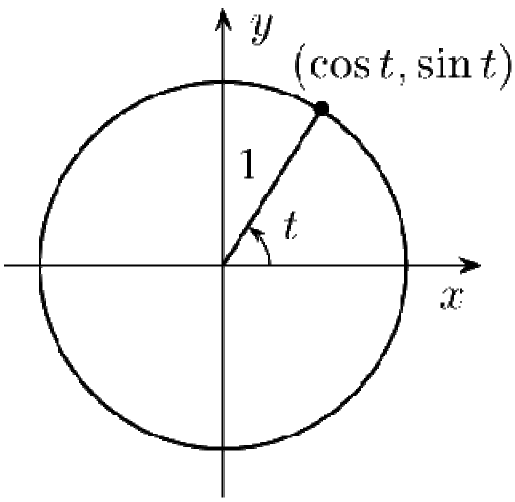
4.2. Funcions trigonomètriques

Les funcions trigonomètriques són funcions d'un angle, bàsiques per a l'estudi de la trigonometria i els triangles, i ens serveixen per modelitzar i representar fenòmens periòdics com puguin ser l'alçada del nivell del mar que varia a causa de les marees, els batecs del cor o la corrent alterna.

Així, a continuació es plantegen una sèrie d'activitats per tal de conèixer i aprendre a interpretar 3 d'aquestes funcions (les més bàsiques) a partir de la representació del moviment d'una roda de bicicleta. Aquestes funcions seran el sinus, el cosinus i la tangent.

Aquesta representació gràfica es durà a terme dibuixant la traçada que fa un punt qualsevol d'aquesta roda sobre els eixos X i Y d'un sistema de coordenades cartesià.

Es parteix d'una roda representada per una circumferència de radi la unitat. El sinus i el cosinus d'un angle *t* es defineixen respectivament com el valor de la coordenada *y* i la coordenada *x* del punt on la circumferència del radi intersecta el radi girat un angle *t* respecte de l'eix X positiu (imatge 4.2.1.).



Imatge 4.2.1. Definició gràfica del sinus i cosinus a una circumferència de radi unitari. Font: ca.wikipedia.org

D'aquesta figura i aplicant el teorema de Pitàgores s'extreu que $x^2 + y^2 = 1$ per tant,

$$sin^2x + cos^2x = 1$$

Com es veurà a continuació les funcions sinus i cosinus tenen un domini que són tots els nombres reals, i un recorregut que oscil·la entre -1 i 1.

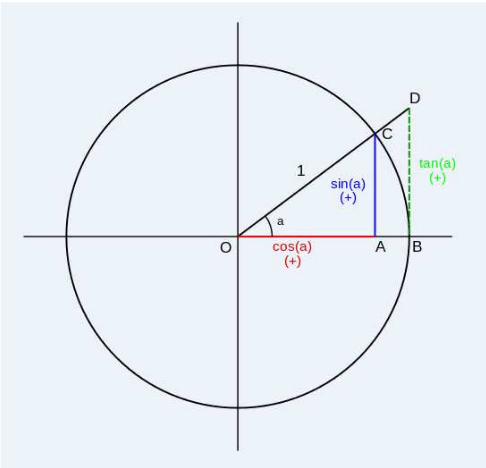
A més, es pot afirmar que la funció sinus i la funció cosinus tenen la mateixa forma encara que hi ha un desfasament de π/2 entre l'una i l'altre. D'aquí s'extreu la relació següent:

$$\cos x = \sin(x + \pi/2)$$

Pel que fa a la tangent, s'ha de tenir en compte que:

$$tg\ x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

I la seva interpretació és la que es mostra a la imatge 4.2.2.:



Imatge 4.2.2. Representació a un cercle unitari del sinus, cosinus i tangent d'un angle. Font: ca.wikipedia.org

A diferència de la funció sinus i la funció cosinus, la funció tangent no és continua, el seu domini no inclou tots el nombres reals (allà a on el cosinus és 0 la funció tangent no existeix), no presenta ni màxims ni mínims i és sempre creixent.

Curs

1er de batxillerat

Continguts

- Funcions trigonomètriques. Identificació, anàlisi de les principals característiques i representació.

- Raons trigonomètriques d'un angle qualsevol. Fórmules de transformacions trigonomètriques

- Pràctica dels processos de matematització i modelització, en contextos de la realitat i contextos matemàtics.

- Utilització de mitjans tecnològics en el procés d'aprenentatge per facilitar la comprensió de propietats geomètriques.

Objectius didàctics

- Identificar, analitzar i representar les funcions trigonomètriques sinus, cosinus i tangent mitjançant taules, expressions algebraiques o la seva representació gràfica

- Identificar la possibilitat de matematització de situacions problemàtiques de la realitat, plantejar i resoldre el problema mitjançant l'ús de les eines i models matemàtics adients, i interpretar les solucions en el context original

- Potenciar l'ús de les noves tecnologies com a eina de comprensió i resolució de problemes matemàtics.

Competències

- Competència matemàtica i competències bàsiques en ciència i tecnologia: a causa de la matèria que es tracta en les següents activitats.

- Competència digital: ja que algunes de les activitats que es plantegen s'hauran de portar a terme a partir del programa informàtic GeoGebra.

- Aprendre a aprendre: s'hauran d'establir estratègies i maneres diferents de treballar per tal d'anar resolent les diferents activitats que es proposen.

- Competències socials i cíviques: el fet de treballar per parelles provocarà que els alumnes es vegin obligats a participar i millorar en aquest sentit.

Coneixements previs

- Coneixements previs de *GeoGebra*

- Angles i les seves relacions

- Teorema de Pitàgores

- Concepte de funció. Creixement i decreixement. Continuïtat i discontinuïtat. Màxims i mínims relatius. Talls amb els eixos. Anàlisi i comparació de gràfics.

Metodologia

Materials i recursos

- Ordinadors amb connexió a la xarxa i programari GeoGebra instal·lat (un ordinador per parella).

- Projector

Agrupament

Per parelles, ja que és la manera més adient quan es treballa amb ordinador. Com en la proposta anterior, els 6 alumnes amb millors notes formaran parelles entre si. La resta de parelles les formarà el professor de manera que quedin compensades.

Espai

Aula d'informàtica

Temporització

1 sessió

L'activitat 1 es realitzaria durant la sessió, la resta d'activitats i ampliació que no doni temps a acabar es farà com a deures a casa.

Paper del professor

A les activitats a on es faci servir el *GeoGebra* el professor entregarà una guia amb els passos a seguir. La resta d'activitats s'entregaran en un full als alumnes, que aquests hauran de retornar ja contestat a on el professor unicament respondrà dubtes de manera puntual.

Paper de l'alumne

- Agrupats per parelles segueixen les pautes que els indica el professor en cada moment. Els alumnes entregaran les diferents activitats en els terminis acordats.

Atenció a la diversitat

El professor conformarà els grups de tal manera que estiguin compensats i que els alumnes que necessiten més temps per adquirir els conceptes tenguin ajuda i suport per part dels seus companys i el professor.

Pel que fa a les altes capacitats, les activitats d'ampliació permetran a aquests alumnes aprofundir i augmentar els seus coneixements en aquesta matèria. El fet d'ajuntar els 6 alumnes amb millors qualificacions va enfocat en aquest sentit.

Procediment

Activitat 1. Representació de la funció sinus i cosinus mitjançant el *GeoGebra* a partir de la representació d'una roda de bicicleta.

Utilitzant el programa informàtic *GeoGebra*, aquesta activitat pretén representar i modelitzar la traçada que fa un punt qualsevol d'una roda de bicicleta durant el moviment de rotació.

Com s'ha comentat anteriorment, es representa aquest punt sobre els eixos X i Y demostrant que forma els gràfics de la funció sinus i cosinus, segons l'arc que es representa.

A continuació es mostren els diferents passos a seguir. També es correspon amb la guia que se'ls entrega als alumnes:

1. Crea una circumferència de radi 1 i centre en x = -1 (punt A). Aquesta circumferència representarà la roda, per tant li donarem un gruix adient.

2. Crea una circumferència de radi 0,15 i centre en A (cercle d). Aquest cercle representarà el pinyó.

3. Amb centre al punt (-3,5, 0) i radi 0,3 crear un altre cercle que representarà el plat de la bicicleta. Tingues en compte que l'estil hauria de ser el mateix que el del pinyó.

4. Crea una recta perpendicular a l'eix X i que passa per B. Les interseccions amb la circumferència c defineix els punts C i D.

5. Realitza la mateixa operació a la circumferència d i defineix els punts E i F.

6. Crea un segment entre C i E i un altre entre D i F. Aquests dos segments simbolitzen la cadena de la bicicleta.

7. Crea els següents punts lliscants: Pedalar, Plat i Plat2. Els dos darrers s'oculten i el punt lliscant de pedalar oscil·la entre 0 i 300 a una velocitat de 0,5.

8. Crea un punt a la circumferència e que simbolitza el pedal (punt G). Es defineix aquest punt G com: Rotació[C,360°pedalar/plat,B].

9. Crea un punt al pinyó (cercle d) que es defineix de la següent manera: Rotació[E,360°pedalar/plat2,A].

10. Crea un segment entre G i B.

11. Crea una semirecta entre A i H.

12. Crea el punt I com la intersecció entre la semirecta creada i el cercle c. Aquest és el punt que farem servir per representar el moviment de la roda.

13. Crea un segment entre els punts H i I.

14. Deixa el punt I situat en el primer quadrant de la circumferència. A partir d'aquest punt I crea 2 rectes, una perpendicular a l'eix Y que en tallarà la recta g al punt J i una altra perpendicular a l'eix X que també passi pel punt I i que tallarà l'eix X al punt K.

15. Oculta aquestes 2 rectes creades anteriorment i defineix els segments que uneixen els punts J i I, i K i I. Traça aquests segments amb línia discontínua.

16. Si a l'origen de coordenades definim el punt L. Crea un angle a partir de 3 punts: L, A i I.

17. Defineix l'arc entre L i J a partir d'aquesta entrada: arc[c,L,I]. S'anomena com a r.

18. Si la intersecció entre la circumferència c i la recta g s'anomena punt M. Crea un arc a partir d'aquesta entrada: arc[c,I,M].

19. Crea el punt N amb les següents coordenades (r,y(I)) i activa el traç.

20. Crea el punt O amb les següents coordenades (s, y(I)) i activa el traç.

21. Canvia els paràmetres de l'eix X per a que estigui en radians. Opcions: avançat. Finestra gràfica: Eix X, distància 2π.

22. Activa el punt lliscant de pedalar.

Cada parella entregarà l'activitat a la plataforma moodle.

El fet d'assenyalar que implica cada pas (el pedal, la cadena, el pinyò...) comporta que els alumnes hauran de crear una sèrie d'estils i gruixos per a que la representacoó sigui el més realista possible.

Activitat 2. Taula de valors de sinus i cosinus

S'entregarà a cada parella un full amb la taula 4.2.1. que es mostra a continuació i amb l'ajuda del material creat a l'activitat anterior completar-la. Pel que fa als valors de sinus i cosinus s'han de fer servir els seguents nombres: 0,1, $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ (positius o negatius) i comprovar el resultat a partir de la següent relació: $sin^2 + cos^2 = 1$

Taula 4.2.1. Taula de valors del sinus i cosinus pels principals angles (en graus i radians) per resoldre.

x	0	π/6	π/4	π/3	π/2	2π/3	3π/4	5π/6	π	7π/6	5π/4	4π/3	3π/2	5π/3	7π/4	11π/6
	0° 360°															
sin x																

cos x																
quadrant																

Solució

Taula 4.2.2. Taula de valors del sinus i cosinus pels principals angles (en graus i radians) resolta.

	0	**π/6**	**π/4**	**π/3**	**π/2**	**2π/3**	**3π/4**	**5π/6**	**π**	**7π/6**	**5π/4**	**4π/3**	**3π/2**	**5π/3**	**7π/4**	**11π/6**
x	0° 360°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
quadrant		I +				II +				III -				IV -		

Activitat 3. Propietats de les funcions sinus i cosinus

De la mateixa manera que per a l’activitat anterior, s’entregarà un full a cada parella on s’haurà d’emplenar la següent taula (4.2.3.) amb les característiques corresponents d’aquestes dues funcions.

Taula 4.2.3. Taula de les principals propietats de la funció sinus i la funció cosinus per resoldre.

	Sinus	**Cosinus**
Periodicitat		
Domini		
Recorregut		
Parell o imparell		
Continuïtat		
Creixement		
Decreixement		

Màxims		
Mínims		
Talls a l'eix X		

Solució

Taula 4.2.4. Taula de les principals propietats de la funció sinus i la funció cosinus resolta.

	Sinus	**Cosinus**
Periodicitat	El període és 2π ja que sin (x+2π) = sin x	El període és 2π ja que cos (x+2π) = cos x
Domini	Tots els reals	Tots els reals
Recorregut	[-1, 1]	[-1, 1]
Parell o imparell	Imparell ja que: sin (-x) = - sin x	Parell ja que: cos (-x) = cos x
Continuïtat	Contínua en x ϵ R	Contínua en x ϵ R
Creixement	$\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$	$[\pi, 2\pi]$
Decreixement	$\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$	$[0,\pi]$
Màxims	$x = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$	$x = \{0 + 2k\pi\}$
Mínims	$x = \left\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right\}$	$x = \{\pi + 2k\pi\}$
Talls a l'eix X	$x = \{0 + k\pi\}$	$x = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$

Activitat 4. Representació de la funció tangent (com a ampliació)

A partir del material creat a l'activitat 1, es pretén representar la funció tangent i estudiar-ne les propietats de la mateixa manera que s'ha fet pel sinus i pel cosinus.

1. Crea un segment de longitud donada amb centre en L i la longitud de l'arc r.

2. Amb el punt I al primer quadrant de la circumferència traça una recta que va del punt A al I. Aquesta recta talla a l'eix de les ordenades al punt Q.

3. Traça una perpendicular a l'eix Y per el punt Q i una perpendicular a l'eix X pel punt P.

4. La intersecció d'aquestes dues rectes és el punt P. Activa el seu traç.

5. Per tal d'entendre millor la funció, crea 4 rectes perpendiculars a l'eix X per $\pi/2$, π, $3\pi/2$ i 2π.

Activitats 5 i 6. Taula de valors i propietats de la funció tangent (com a ampliació)

De la mateixa manera que per a les funcions sinus i cosinus, omple les caselles d'aquestes dues taules (4.2.5. i 4.2.6.). En aquest cas els valors que podra tenir la tangent són: 0,1, $\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (positius o negatius).

Taula 4.2.5. Taula de valors de la tangent pels principals angles (en graus i radians) per resoldre.

x	0	π/6	π/4	π/3	π/2	2π/3	3π/4	5π/6	π	7π/6	5π/4	4π/3	3π/2	5π/3	7π/4	11π/6
	0° 360°															
tg x																
quadrant																

Taula 4.2.6. Taula de les principals propietats de la funció tangent per resoldre.

	Tangent
Periodicitat	
Domini	
Recorregut	
Parell o imparell	
Continuïtat	

Creixement	
Decreixement	
Màxims	
Mínims	
Talls a l'eix X	

Solucions

Taula 4.2.7. Taula de valors de la tangent pels principals angles (en graus i radians) resolta.

x	**0**	**π/6**	**π/4**	**π/3**	**π/2**	**2π/3**	**3π/4**	**5π/6**	**π**	**7π/6**	**5π/4**	**4π/3**	**3π/2**	**5π/3**	**7π/4**	**11π/6**
	0° 360°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
quadrant		I +				II -				III +				IV -		

Taula 4.2.8. Taula de les principals propietats de la funció tangent resolta.

	Tangent
Periodicitat	El període és π ja que: tg (x+π) = tg x
Domini	$R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$
Recorregut	Tots els nombres reals
Parell o imparell	Imparell ja que: tg (-x) = -tg x
Continuïtat	Contínua $x \in R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$
Creixement	En tot el domini
Decreixement	-

Màxims	No en té
Mínims	No en té
Talls a l'eix X	$x = \{0 + k\pi\}$

Avaluació

L'activitat 1 comptarà la meitat de la nota del conjunt d'activitats i les activitats 2 i 3 un 25% respectivament. L'entrega de les activitats d'ampliació podran suposar fins a 2 punts més (sobre 10) a la nota final. Un punt extra per l'activitat 4 i un altre per les activitats 5 i 6.

Les activitats de *GeoGebra* s'avaluaran restant un punt a cada pas de l'activitat que estigui malament o incomplet. Es començarà a restar sobre 10.

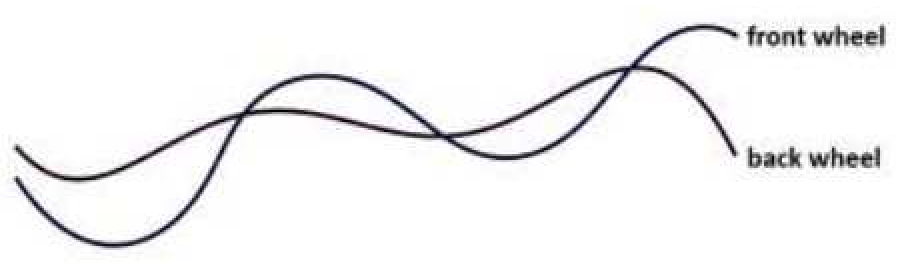
Les diferents taules s'avaluaran de manera semblant, partint del 10 es restarà un punt a cada cel·la ques estigui malament o incompleta.

4.3. Rastres de les dues rodes de la bicicleta

Les activitats que es desenvolupen a continuació es fonamenten a partir de la trajectòria i rastre que van deixant les dues rodes de la bicicleta quan es mouen.

A partir d'aquests rastres i mitjançant la utilització d'eines trigonomètriques podem conèixer tant el sentit que portava la bicicleta com saber a quin rastre correspon la roda del davant i a quin la roda del darrere.

A la següent imatge (4.3.1.) es mostra un exemple de rastres deixats per les dues rodes d'una bicicleta amb una forma semblant a una funció sinusoidal.



Imatge 4.3.1. Trajectòria descrita per les dues rodes d'una bicicleta en moviment. Font: http://www.mathteacherscircle.org/

S'observa com el rastre deixat per la roda del darrere (back wheel) resulta més 'estable' que el rastre corresponent a la roda davantera (front wheel) que també descriu una trajectòria sinusoidal però de major amplada.

Així, les principals característiques d'aquests dos rastres que deixen les rodes d'una bicicleta són:

- La distància entre els punts de contacte de les dues rodes amb el terra és una constant.

-La roda del darrere, que està fixada al quadre de la bicicleta, sempre apunta cap a la roda del davant.

Per tant, d'aquí s'extreu la propietat clau del rastre que descriuen les rodes d'una bicicleta:

- La línia tangent al rastre de la roda del darrere sempre intersecta amb el rastre de la roda davantera a una distància fixada.

A nivell de descripció matemàtica partim de que la trajectòria de la roda posterior és coneguda fet que ens permet derivar fàcilment l'equació per a la trajectòria de la roda davantera.

Denotam la posició del punt de contacte de la roda del davant amb el terra per (x_F, y_F) i del punt de la roda del darrere per (x_B, y_B).

Així definim:

$$\Delta x = x_F - x_B \text{ i } \Delta y = y_F - y_B$$

Com s'ha dit anteriorment, s'asumeix que la distància entre els dos punts de contacte de les rodes (distància *a*) és constant per tant:

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 = a^2$$

El punt (x_F, y_F) està sempre situat en el pla vertical de la roda posterior, per la qual cosa es troba a la tangent de la trajectòria de la roda del darrere, i sempre es troba a una distància constant *a* del punt (x_B, y_B).

Anomenam *m* al pendent de la trajectòria del punt (x_B, y_B) i és igual a $\frac{dy_B}{dx_B}$.

A partir d'aquí es poden escriure les equacions per (x_F, y_F):

$$x_F = x_B + \frac{a}{\sqrt{1+m^2}}\ ,\ \ y_F = y_B + \frac{a}{\sqrt{1+m^2}}$$

Coneixent la trajectòria de la roda del darrera en la forma $y_B = y_B(x_B)$ ja es pot calcular el punt (x_F, y_F).

Per a valors de *m* petits podem aproximar les equacions anteriors per a x_F i y_F de la manera següent:

$$x_F \approx x_B + a, \qquad y_F \approx y_B + ma$$

Ara suposam que la roda del darrere segueix una trajectòria sinusoidal (com a la imatge anterior): $y_B(x_B) = A \sin kx_B$

Llavors el punt de contacte de la roda davantera és

$$x_F \approx x_B + a, \qquad y_F \approx C\sin(kx_B + \gamma)$$

A on $C = A\sqrt{1 + (ka)^2 A}$ i $\gamma = arctgka$

D'aquesta manera la roda del davant descriu també una trajectòria sinusoidal però de major amplada.

Curs

1er de batxillerat

Continguts

- Funcions trigonomètriques i les seves inverses.

- Pràctica dels processos de matematització i modelització, en contextos de la realitat i contextos matemàtics.

- Derivada d'una funció en un punt. Interpretació geomètrica

Objectius didàctics

- Utilitzar les fórmules trigonomètriques usuals per a resoldre equacions trigonomètriques, així com aplicar-les en la resolució de triangles directament o com a conseqüència de la resolució de problemes geomètrics del mon natural, geomètric o tecnològic.

- Identificar la possibilitat de matematització de situacions problemàtiques de la realitat, plantejar i resoldre el problema mitjançant l'ús de les eines i models matemàtics adients, i interpretar les solucions en el context original

- Desenvolupar processos de matematització en contextos de la realitat quotidiana a partir de la identificació de problemes en situacions problemàtiques de la realitat.

- Elaborar un informe científic escrit que serveixi per comunicar les idees matemàtiques sorgides en la resolució d'un problema.

- Aplicar el concepte de derivada d'una funció en un punt, la seva interpretació geomètrica i aplicar-ho a la resolució de problemes geomètrics.

Competències

- Competència matemàtica i competències bàsiques en ciència i tecnologia: a causa de la matèria que es tracta en les següents activitats.

- Aprendre a aprendre: s'hauran d'establir estratègies i maneres diferents de treballar per tal d'anar resolent les diferents activitats que es proposen.

- Competències socials i cíviques: el fet de treballar per parelles provocarà que els alumnes es vegin obligats a participar i millorar en aquest sentit.

- Comunicació lingüística: a partir de l'entrega de documents a on s'hauran d'expresar de manera clara i concisa les investigacions realitzades i els coneixements assolits.

- Consciència i expressions culturals: una de les activitats plantejades fa referència al personatge Sherlock Holmes rellevant dins la cultura popular.

Coneixements previs

- Figures planes elementals

- Teorema de Pitàgores

Metodologia

Materials i recursos

- Projector i pissarra

Agrupament

- Per parelles, ja que per la càrrega de conceptes i durada de l'activitat no tendria molt sentit fer grups més nombrosos.

Espai

- Aula habitual a on s'imparteix l'assignatura.

Temporització

- 1 sessió

Paper del professor

El paper del professor serà, en primer lloc, facilitar i explicar els coneixements per tal de poder afrontar les activitats plantejades.

Més endavant, facilitarà les diferents activitats als alumnes a on ajudarà de manera puntual a resoldre-les.

Finalment, un cop ja entregats els documents, corregirà les activitats a la pissarra.

Paper de l'alumne

- Agrupats per parelles segueixen les pautes que els hi indica el professor en cada moment. Hauran d'entregar les diferents activitats en els terminis acordats.

Atenció a la diversitat

L'agrupament per parelles es realitzarà per tal de conformar grups que més o menys es puguin compensar entre si, com a mesura d'atenció a la diversitat. És a dir, que els alumnes amb més dificultat s'ajuntin amb d'altres que tenen més capacitats a l'hora d'enfrontar-se amb la matèria.

Com en les propostes anteriors, els 6 millors alumnes s'agruparan pel seu compte. Aquesta fet s'explica com una mesura de suport de cara als alumnes amb altes capacitats. L'activitat 3 també es contempla com a una activitat d'ampliació per a aquest tipus d'alumnat

La tasca de conformar grups correspondrà al professor. De la mateixa manera el professor proporcionarà ajuda a les parelles que ho requeresquin.

Procediment

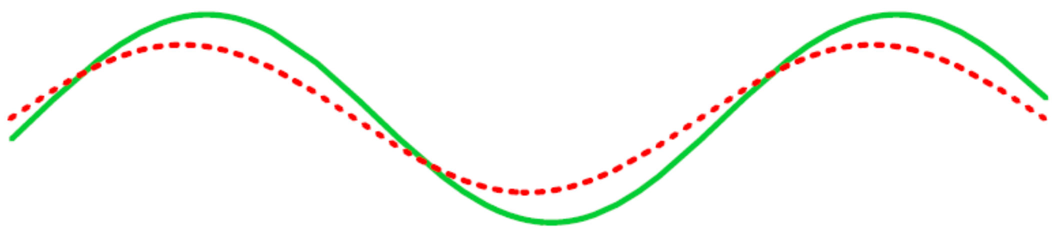
Activitat 1. Esbrinar el sentit d'una bicicleta a partir del rastre de les seves rodes

S'entrega un full a cada parella amb el següent enunciat:

'Al 1903 Arthur Conan Doyle escrivia un dels seus relats protagonitzats per Sherlock Holmes titulat *The Adventure of the Priory School.*

En aquesta història el detectiu esbrinava el sentit en el que s'havia mogut una bicicleta analitzant els rastres que havien deixat les seves rodes sobre la neu (imatge 4.3.2.). En determinava el sentit argumentant que la més profunda de les dos trajectòries era la corresponent a la roda del darrere ja que aquesta és la més pesada. Una vegada ja sabia quin rastre corresponia a cada roda ja en podia esbrinar el sentit.

Amb el temps s'ha pogut demostrar que aquest mètode no és del tot correcte ja que la roda més pesada també podria ser la davantera. Així, i segons les dues trajectòries que es mostren a continuació, podries ajudar a Sherlock Holmes a resoldre el problema?'



Imatge 4.3.2. Trajectòria descrita per les dues rodes d'una bicicleta**.** Font: Bicycle Math. Timothy E. Goldberg.

Solució

En primer lloc s'ha de determinar quina trajectòria correspon a la roda del davant i quina a la roda del darrere. Això s'esbrina a partir de la propietat de que la tangent al rastre de la roda del darrere sempre intersecta amb el rastre de la roda davantera.

Per tant el rastre de la roda posterior es correspon amb la línia discontínua al dibuix.

A partir d'aquí, escollir una sèrie de punts en la trajectòria de la roda posterior i dibuixar la tangent a aquests punts. Per cada punt escollit a la línia discontínua (punt B), identifica el primer punt a l'esquerra i a la dreta allà on la tangent intersecta la traçada de la roda davantera (línia contínua). S'anomenen el punt R (dreta) i el punt L (esquerra) i es mesuren la longitud d'aquest segments entre els punts BL i BR.

Repetir aquests passos per a d'altres punts de la mateixa línia discontínua.

La bicicleta anirà en la direcció en que aquesta distància sigui constant.

Els alumnes entregaran l'activitat al professor que aquest corregirà a la pissarra abans d'acabar la sessió.

Activitat 2. Deficiències d'aquest mètode

Les mateixes parelles hauran d'entregar un altre document responent a aquesta qüestió i raonant les respostes

'Hi ha algun exemple (o exemples) de trajectòria a on no sigui vàlid aquest mètode?'

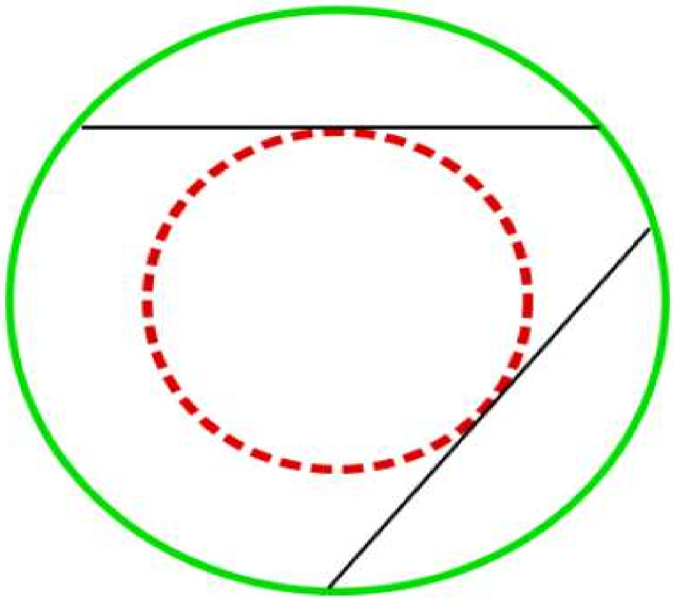
Solució

En primer lloc, si la bicicleta descrivís una trajectòria completament recta com es mostra en el seguent dibuix (imatge 4.3.3.):

Imatge 4.3.3. Trajectòria a on es superposen les trajectòries de la roda davantera i posterior. Font: Bicycle Math. Timothy E. Goldberg.

No es podrien traçar les rectes tangents i per tant no es podria saber en quin sentit avança la bicicleta.

Un altre cas seria quan la bicicleta avancés de manera que es forméssin dos cercles concentrics (imatge 4.3.4.):



Imatge 4.3.4. Trajectòria descrita per un ciclista que avança en cercles**.** Font: Bicycle Math. Timothy E. Goldberg.

A causa de la simetria que es presenta en aquesta situació no es pot afirmar quin és el sentit que porta la trajectòria de la bicicleta

Igual que l'activitat 1 aquesta activitat es corregeix al final de la sessió.

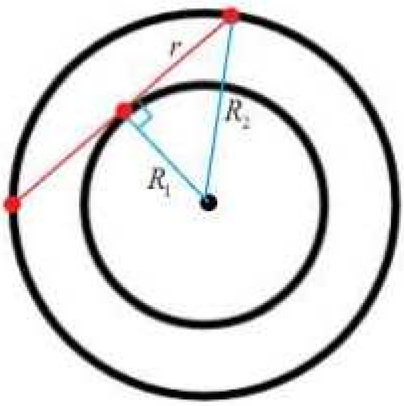
Activitat 3. Àrea entre dos trajectòries circulars (ampliació).

El professor plantejarà aquesta activitat com un afegit dins l'activitat 2, és dir, al mateix document.

L'activitat correspon a esbrinar l'expressió que permeti calcular l'àrea entre dos cercles concèntrics. Cercles que es corresponen a la trajectòria d'una bicicleta quan va girant.

Solució

Com es mostra en el dibuix següent (imatge 4.3.5.), anomenam r a la distància que hi ha entre les dues trajectòries que formen les rodes i anomenam R_1 i R_2 als radis intern i extern respectivament



Imatge 4.3.5. Dos cercles concèntrics on es mostra r, R1 i R2. Font: http://www.mathteacherscircle.org/

Una recta tangent al cercle interior és perpendicular al radi d'aquest cercle al punt de contacte.

D'aquesta manera i utilitzant el teorema de Pitàgores:

$$R_1^2 + r^2 = R_2^2$$

L'àrea que hi ha entre els dos cercles queda de la següent manera:

$$\grave{a}rea = \pi R_2^2 - \pi R_1^2$$

$$\grave{a}rea = \pi(R_2^2 - R_1^2)$$

$$\grave{a}rea = \pi r^2$$

És a dir, que l'àrea és independent de la mida dels cercles concèntrics.

Avaluació

S'avaluarà de manera qualitativa (insuficient, suficient, bé, notable i excel·lent) el document final entregat. On com a mínim hi haurà d'haver la resposta a les activitats 1 i 2.

El suficient correspondrà a respondre i argumentar correctament l'activitat 1.

El bé a respondre correctament una de les possibles respostes a l'activitat 2 i notable si s'aporten i argumenten dos possibles casos en aquesta mateixa activitat.

Si, a més a més, es respon de manera correcta l'activitat d'ampliació 3, la nota serà d'excel·lent.

5. Conclusions

La presència de la geometria en el currículum de secundària, entenent-la com la branca de les matemàtiques que estudia l'espai, la forma i la mesura, resulta imprescindible perquè els alumnes puguin desenvolupar de manera correcta la competència matemàtica.

La seva connexió amb altres blocs de les matemàtiques, amb el conjunt d'altres disciplines i la seva relació directa amb la vida quotidiana en fan una matèria bàsica ja des de primària.

Així, els baixos resultats en aquest bloc que es mostren any rere any en diferents proves d'avaluació i diagnòstic fan que en primer lloc s'hagin d'analitzar les diferents causes que provoquen aquestes dificultats en els alumnes, per, a continuació, ser capaços d'implantar correctament un seguit de millores en el procés d'ensenyament-aprenentatge.

A partir del que hem analitzat en aquest treball, creiem que les millores haurien d'anar orientades a fomentar la manipulació i l'experimentació a l'hora de dissenyar els materials didàctics; a augmentar la dedicació a l'aula a aquest bloc en detriment d'altres als quals se li dediquen més sessions, com per exemple el càlcul; i a impulsar sempre que sigui possible activitats que estiguin connectades amb altres branques de les matemàtiques o fins i tot altres assignatures.

En aquest sentit també volem comentar la necessitat d'introduir les eines TIC a l'aula, especialment fent servir programes informàtics de geometria dinàmica com pugui ser el *GeoGebra*, ja que poden repercutir molt positivament en aquest procés d'aprenentatge.

Pel que fa a la utilització de la bicicleta com a recurs didàctic, volem ressaltar la importància que té com a element motivador a l'hora de dissenyar diferents activitats. La gran quantitat de material que s'ha trobat així ho corrobora, especialment en el camp de la física. Respecte a les matemàtiques en general i de la geometria en particular, aquesta quantitat de recursos docents no ha sigut tant abundant com era d'esperar; en part, ja que molt d'aquest material corresponia a nivells més aviat universitaris i no tant a la secundària.

En base a les millores descrites anteriorment s'han desenvolupat les diferents activitats docents. Alguns dels plantejaments a l'hora de dissenyar-les han estat l'ús de material manipulable, la utilització del *GeoGebra* i la relació amb altres continguts no estrictament geomètrics.

Per acabar, comentar que la realització d'aquest treball m'ha servit per adonar-me de la necessitat de corregir i millorar alguns aspectes en l'ensenyament de la geometria, de les possibilitats que ofereix la geometria a l'hora de relacionar-la amb altres matèries o continguts, i de les enormes possibilitats docents que ofereix un recurs com el *GeoGebra* tant als professors com als propis alumnes.

6. Referències bibliogràfiques

Documents i recursos en xarxa

- Alsina, C. (2008). **Geometria y realidad**. Aspectos didácticos de matemáticas, 8. pàg.11-33.

- Alsina, C.; Fortuny, J.; Pérez, R. (1997). **¿Por qué la Geometría?**. Propuestas didácticas para la ESO, Madrid: Síntesis.

- Alsina, C.; Nelsen, R.B. (2006). **Math Made Visual. Creating images for understanding Mathematics**. Washington: MAA.

- Arranz, J.M.; Losada, R.; Mora, J.A.; Sada, M. (2011). **Realidades de GeoGebra**. Suma 67. Pàg.7-20.

- Aubanell, A. (2015). **Orientacions pràctiques per a la millora de la Geometria**. Quaderns d'avaluació 31. Direcció General d'Educació Secundària Obligatoria i Batxillerat. Generalitat de Catalunya. (http://xtec.gencat.cat/web/.content/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/0035/14114b3a-7752-46c4-9ccb-46542a9b680c/quaderns31orientacions.pdf)

- Brousseau, G. (2007). **Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas**. (D. Fregona, Trad.) Ed. Zorzal.

- Canals, M.A. (2010). **Els reglets**. Barcelona, Associació de Mestres Rosa Sensat (Col·lecció Dossiers de la Maria Antònia Canals).

- Calvo, X. *et al.* (2002). **La Geometría: De las ideas del espacio al espacio de las ideas en el aula**. Vol.17. Ed. Graó. Colección Claves para la Innovación Educativa.

- Guzmán, M. de. (2005). **Textos de Miguel de Guzmán**. Madrid: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, revista Suma.

- López, O.L.; García, S. (2008). **La enseñanza de la Geometría.** Colección: Materiales para apoyar la práctica educativa. Instituto para la evaluación de la educación, México.

- National Council of Teachers of Mathematics (2000). **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston, Estats Units. (http://www.nctm.org)

- Peña, A. (2012). **Las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría en la ESO**. Suma, 69. Pàg.37-48.

- **PISA 2012: Informe Español.** (2013). Volumen I: Resultados y contenido. Ministerio de Educación, Cultura y deporte. Gobierno de España. (http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/pisa2012lineavolumeni.pdf?documentId=0901e72b81786310)

- **Resultats PISA 2012**. Illes Balears. (2013). Conselleria d'Educació, Cultura i Universitats. Govern de les Illes Balears. (http://iaqse.caib.es/documentos/avaluacions/pisa/pisa_2012/informe_pisa_balears_2012.pdf)

- Roca, M. (2014). **Dificultades de aprendizaje de la geometría por parte de alumnos del primer ciclo de la ESO**. Treball final de màster. Universitat Politècnica de Catalunya. (http://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2099.1/23570/88319_mem%C3%B2ria.pdf?sequence=1&isAllowed=y)

- Viquipèdia. (2016) **Geometria**. (https://ca.wikipedia.org/wiki/Geometria)

Annexos

Annex 1. Rúbrica per avaluar la proposta didàctica ‘rodes quadrades’

	0	Insuficient	Suficient	Notable	Excel·lent
Material de l’activitat 1 (25%)	No entregat	Material realitzat amb poca cura i en mal estat	Presentació del material correcte tot i que en cap cas les rodes llisquen sense presentar sotracs	Bona presentació del material i tot i no ser perfecta s’aproxima a que les rodes llisquin suament	Rodes que llisquen suament sobre la superfície creada
Document preguntes activitat 1 (25%)	No entregat	No arriba a 3 preguntes contestades correctament	3 de les 5 preguntes respostes de manera correcta	4 de les 5 preguntes respostes de manera correcte	Més de 4 de les 5 preguntes respostes de manera correcta
Pràctica GeoGebra (25%)	No entregat	Pràctica inacabada a on li manquen més de la meitat dels passos	Practica amb més de la meitat dels passos realitzats correctament	Practica realitzada correctament però li manquen 1 o 2 passos	Pràctica realitzada correctament, tal i com s’explica a l’aula
Treball individual (10%)	No realitzat	No ha treballat el mínim requerit	Ha treballat el mínim requerit	Ha realitzat totes les feines que li pertocaven correctament i amb independència	Ha realitzat aportacions addicionals que han beneficiat al grup
Treball dins la parella (15%)	No realitzat	Falta de organització i coordinació	Coordinació i organització mínima per a que el projecte tiri endavant	Bona coordinació i organització de la parella de treball	Molt bona coordinació i organització de la parella de treball