Universitat de les
Illes Balears

Geometria en l'espai. Una proposta d' intervenció per al primer cicle de ESO basada en el model de Van Hiele i la definició de conceptes.

Andrés Albillos Mayol

Memòria del Treball de Final de Màster

Màster Universitari de Formació del Professorat

(Especialitat/Itinerari de Matemàtiques)

de la

UNIVERSITAT DE LES ILLES BALEARS

Curs Acadèmic 2016/2017

05 de juny del 2017 Signatura de l'autor

Tutora: Ana Belén Montoro Medina Signatura Tutor

Acceptat pel Director del Màster Universitari de Formació del Pofessorat Signatura:

Resum:

Les investigacions de Jaime, Chapa i Gutierrez(1992) mostren que els llibres de text, un dels recursos més emprats pel professorat a l'hora de realitzar la seva programació d'aula, contenen nombrosos errors didàctics i matemàtics en els conceptes geomètrics. Llavors, com abordar el seu ensenyament? Dins el camp de la didàctica de la geometria, cal destacar les aportacions del matrimoni Van Hiele, i Vinner i Hershkowitz. Els primers detallen amb molta precisió quins són els diferents nivells de desenvolupament geomètric, les seves característiques i planificació de les tasques per avançar de nivell.... Els segons, Vinner i Hershkowitz, varen posar en manifest com els exemples proposats després de definir un concepte sovint fan als alumnes caure en una sèrie de errors, i proposen una metodologia per definir els conceptes a partir de seus atributs rellevants e irrellevants. El present treball ha incorporat tota aquesta teoria, juntament amb articles relacionats d' altres autors, per fer una proposta d'ensenyament del concepte de poliedre, cos rodo, prisma i piràmide per al primer cicle de la ESO.

Paraules clau: nivells Van Hiele, fases de l'aprenentatge, definició de conceptes, mecanisme exemple-contraexemple

Índex de continguts

1.Justificació del treball

Durant els darrers anys hi ha hagut grans avenços en la investigació sobre com ensenyar matemàtiques, degut a una nova branca de recerca anomenada “Didàctica de les Matemàtiques”; malauradament, aquesta recerca no s’ha traduït a una millora de les lliçons que s’imparteixen a les escoles(o almenys no de manera integra). Els llibres de text no en són excepció, i també incorporen sovint errades de tipus metodològic (Fernandes i Caballero , 2013).

Concretament en Geometria, un dels grans blocs principals en que es centra l’ensenyament en Matemàtiques durant la etapa de secundària (BOIB nº73, 2015), podem veure errors metodològics significatius; com són que la posició de les figures planes i en l’espai que es posen com exemple sempre sigui la mateixa ,o les definicions formals que apareixen dins els llibres sense prèvia introducció (Jaime, Chapa i Gutierrez, 1992). Aquesta raó em motiva a fer recerca en noves metodologies que s’ha demostrat que són més adients per explicar la Geometria i a poder posar en pràctica la meva recerca.

2.Objectiu del treball

El present treball té com a objectiu fer una proposta d’ensenyament de la Geometria a 2n d’ESO fonamentades en diverses teories de la didàctica de les Matemàtiques. Més concretament, volem treballar la classificació dels cossos en l’espai i la relació amb les característiques d’ aquests cossos. La proposta metodològica s’ha de pensar tenint en compte que volem un desenvolupament del pensament geomètric, volem graduar el nivell de assoliment d’ aquest pensament i tenir unes garanties de que s’ha arribat al nivell assolit. Juntament amb això, es treballarà la construcció de les pròpies definicions en geometria mitjançant el mecanisme de exemple-contraexemple, i la classificació de cossos geomètrics lligant-la amb les característiques dels cossos geomètrics com nombre de cares, arestes...

3.Estat de la qüestió.

Les matemàtiques són una ciència formal, amb una axiomàtica molt fonamentada, demostracions formals i amb una manera de procedir molt deductiva. D'altra banda la psicologia és una ciència empírica, de recollir dades i d'emprar eines estadístiques per treure conclusions. Malgrat això, Efraim Fishbein (1990) fa la reflexió de que, en donar classe o en fer investigació, un pot observar que el procés de construcció de noves idees en els dos camps és molt similar; ambdós parteixen d' una hipòtesis, es contrasta la hipòtesis, es realitza un procés inductiu(en el cas de les matemàtiques pot ser mental)... El problema que es té, i que canvia la percepció dels matemàtics envers altres ciències, i dels estudiants envers les matemàtiques, és que el resultat, l'estructura axiomàtica de les matemàtiques, sí es diferent a la que sorgeix de altres branques del coneixement. És aquesta similitud la que fa que els matemàtics haguin pensat que pot haver un punt de confluència, la matemàtica és axiomàtica, però els mecanismes que permeten arribar al coneixement matemàtic poden ser variats i han de ser objecte de estudi.

3.1 Els processos d'aprenentatge en Geometria

> *Los procesos matemáticos ponen de relieve las formas de adquisición y uso de los contenidos matemáticos. En otras palabras, son las herramientas que nos proporcionan las matemáticas para trabajar los diferentes contenidos.* (Alsina, 2012,pag.4)

Les matemàtiques són una ciència que comparteix i connecta diferents continguts i els aplica a la realitat, permet raonar de múltiples maneres davant un problema(algebraica,geomètrica...) i permet deduir tot a partir de principis bàsics. Això fa pensar que no només amb els continguts (Estadística i probabilitat, Álgebra, Geometria, Anàlisi i Nombres) es pot enfocar bé l'ensenyament de les matemàtiques, sinó que també s'han de tenir en compte una sèrie de procediments que permeten enfocar l'ensenyament de aquests continguts. Segons el NCTM (2003), aquests processos són:

- Resolució de problemes: Entendre i saber aplicar diferents estratègies de resolució de problemes.

- Raonament i demostració: Implica saber raonar, construir i avaluar argumentacions matemàtiques de manera rigorosa, i que aquestes et permetin desenvolupar un pensament.
- Comunicació: Capacitat de comunicar les teves idees matemàtiques tant oralment com de manera escrita.
- Connexió: Capacitat de reconèixer, utilitzar i crear connexions entre diferents idees matemàtiques i en contexts de la vida real per construir l'enteniment matemàtic.
- Representació: Fer servir diferents representacions de idees matemàtiques que complementin i permetin enriquir l'enteniment matemàtic.

Dins d'aquest treball volem incidir no només en els processos generals en matemàtiques, sinó en els processos que es treballen dins el bloc de Geometria que és el que centra el treball.

Aquests són (NCTM):

- Analitzar característiques i propietats dels objectes en 2D i en 3D i desenvolupar arguments matemàtics sobre relacions geomètriques.
- Especificar localitzacions i descriure relacions espacials emprant les coordenades geomètriques i altres representacions de sistemes.
- Aplicar transformacions i emprar les simetries per analitzar situacions matemàtiques.
- Emprar la visualització, raonament espacial, i modelització geomètrica per resoldre problemes.

Guillén (2004) va més enllà i parla dels processos específics de la geometria dels sòlids, que deriven del model de Van Hiele, i que són processos que sorgeixen de manera natural quan treballam en la classificació de sòlids. Aquests són els de descriure, classificar, definir i demostrar. Aquests processos més específics són de gran importància a l'hora de preparar una proposta en geometria de sòlids perquè concreten i determinen com s'ha de treballar la proposta.

3.2 Com podem orientar el desenvolupament del pensament geomètric? El model de Van Hiele.

> *"Cuando empecé mi carrera como profesor de Matemáticas, pronto me di cuenta de que era una profesión difícil. Había partes de la materia en cuestión que yo podía explicar y explicar, y aún así los alumnos no entendían. Podía ver que ellos lo intentaban realmente, pero no tenían éxito. Especialmente al comienzo de la Geometría, cuando había que demostrar cosas muy simples, podía ver que ellos daban el máximo de sí, pero la materia parecía ser demasiado difícil. De pronto parecía que comprendían la materia en cuestión. Podían hablar de ella con bastante sentido y a menudo decían: No es tan difícil, pero ¿por qué nos lo explicó usted de forma tan complicada? En los años que siguieron cambié mi explicación muchas veces, pero las dificultades se mantenían. Parecía como si siempre estuviera hablando en una lengua distinta. Y considerando esta idea descubrí la solución, los diferentes niveles del pensamiento."*
>
> (Van Hiele, 1986, citat per Corberán et al., 1994)

Els nivells de pensament als que fa referència aquesta cita és el conegut com Model de Van Hiele que gradua el nivell de desenvolupament geomètric ,en que es proposen 5 nivells de desenvolupament geomètric, que són: visualització, anàlisi, demostració informal, demostració formal i rigor. Aquests nivells tenen les següents característiques, segons apareix a nombrosos textes (Corberán et al., 1994 i Crowley, 1987):

1. Visualització(Nivell 0):

En el nivell 0 l'estudiant només té la noció del concepte geomètric, però no de les parts que el composen. Visualitza una imatge del concepte com un tot, però no identifica les parts que defineixen el concepte, o les identifica de manera molt imprecisa; també pot atribuir a l'objecte atributs que no són rellevants per a la descripció de l'objecte(de tipus físic o visual) .Els alumnes en aquest nivell empren frases com "... se pareix a ...", "... té la forma de ...". En aquest nivell es pot donar el cas que els alumnes sí reconeguin parts del cos geomètric, però no saben veure la relació entre aquestes propietats i el cos geomètric sencer. Juntament amb tot això, el llenguatge empra un rol clau, al no emprar el llenguatge adequat, no són capaços de estructurar be la informació.

2. Anàlisi(Nivell 1):

En el nivell 1 es comença a analitzar les propietats que tenen els cossos geomètrics(angles, cares...); segons alguns autors (Crowley, 1987) els alumnes són capaços d'establir les relacions més senzilles entre aquestes propietats(si els costats d'un quadrat són paral·lels els angles oposats són iguals) dins una mateixa figura, però no són capaços de generalitzar-les, en aquest aspecte difereix (Corberán et al., 1994) que pensa que els alumnes en aquest nivell encara no tenen aquesta capacitat encara. Una característica que sí defineix aquest segon grup és la no necessitat que tenen els alumnes de definicions formals d' objectes geomètrics com a un mecanisme de classificar diferents cossos baix una mateixa definició; d'altra banda, el que fan és crear una definició a partir d'un sol objecte.

3. Demostració Informal/ Classificació (Nivell 2):

La demostració informal permet identificar propietats més generals de les figures(com que angles oposats iguals necessiten de costats paral·lels), o que la categoria dels paral·lelograms inclou els rectangles i la dels rectangles els quadrats... Dins aquest nivell ja podem parlar de que els alumnes saben classificar diferents cossos en grups segons les seves característiques. En aquest nivell, els alumnes entenen les definicions dels conceptes geomètrics, i poden justificar que un determinada imatge representi un cert concepte. També entenen certes estructures lògiques com seria si $p \rightarrow r$ i si $r \rightarrow q$, implica que si $p \rightarrow q$. D'altra banda, els alumnes no són capaços d'entendre una demostració de manera completa ni entendre el rol que prenen els axiomes en aquestes demostracions. En aquest cas, els alumnes les demostracions que fan no són formals, sinó que es basarien en comprovar una sèrie de enunciats mitjançant exemples (Corberán et al., 1994).

4. Deducció formal(Nivell 3):

S'entén la necessitat d' una demostració per tal de formalitzar els conceptes, i la necessitat de uns axiomes que serveixin de base per la nostra demostració. En aquest nivell els alumnes són capaços de construir demostracions per ells mateixos, i les demostracions queden generalitzades per qualsevol cas.

5. Rigor(Nivell 4):

El nivell més abstracte, les demostracions es poden fer per geometries no-Euclidianes, i les diferents demostracions poden ser comparades. No s'ha fet molta recerca d'aquest nivell perquè la branca de didàctica de les matemàtiques no treballa a un nivell tan elevat.

Per tal de que aquest model d'aprenentatge es segueixi de manera adient, alguns punts s'han de tenir en compte:

1. L'aprenentatge ha d'esser seqüencial. Això implica que per avançar a un nou nivell s'ha d'haver consolidat tot el nivell anterior.
2. L'aprenentatge d'un nou nivell va lligat a una metodologia i a un material específic. Per tant, cada material s'ha d'ajustar al nivell que es vol treballar de l'alumne.
3. L'aprés al nivell anterior és la base pel següent nivell, per exemple, les demostracions informals requereixen que tot els conceptes d'angles, costats, paral·lelisme, perpendicularitat... estiguin entesos.
4. Cada nivell té un llenguatge propi(tant el matemàtic com l'escrit) , i cal que aquest llenguatge sigui emprat només al nivell corresponent.

Sovint passa en matemàtiques que els professors tractam d' explicar conceptes complexes pels alumnes quan no han assolit conceptes més elementals que són clau per aprendre aquests nous conceptes. Això té unes conseqüències en l'aprenentatge dels alumnes, que resolen els problemes mecanitzant tot el que fan, i es senten desmotivats perquè no tenen la noció de estar aprenent res. Aquests fets, juntament amb la difícil etapa que suposa l' adolescència a nivell psicològic i social, fan que les matemàtiques siguin una de les grans causes del fracàs escolar dels alumnes i l'abandonament dels estudis (Corberán et al., 1994)

Per això, ens trobam alumnes que no són capaços d' identificar característiques elementals de les figures geomètriques, que es veuen forçats a estudiar conceptes d' una complexitat major i que, a més, sovint es presenten de manera descontextualitzada e independent. Es podria donar el cas que un alumne estigui atenent a definicions de certs cossos geomètrics sense saber reconèixer de manera correcta els components de aquestes definicions; i es que sense un determinat camí ni sense haver assolit una sèrie de eines(analitzar, classificar o descriure), no es pot arribar a assumir una definició. Dins aquest marc, a mesura que es van assimilant més eines, s'ha d'anar introduint un nou vocabulari; ja que el vocabulari serà el catalitzador per aquesta millora amb una estructura nova que permet classificar més precisament

Amb totes les característiques donades, podem dissenyar una metodologia a seguir per tal de pautar el procés d'ensenyament-aprenentatge de l'alumne i fer que l'alumne pugui avançar d'un nivell a un altre. Les fases per les que ha de passar l'alumne en el seu aprenentatge són les següents:

1. Observació/Informació: El professor fa qüestions als alumnes que suggereixen els nous continguts que es veuran en aquest nou nivell . Aquesta fase té doble funció: el professor avalua quin és el nivell dels alumnes per guiar de manera adient el seu aprenentatge, i als alumnes se lis introdueix els conceptes claus que es treballaran a classe.
2. Orientació Directa: En aquest nivell s'orienta a l'alumne amb activitats que poc a poc vagin mostrant els continguts que es treballen en el nivell, connectant-los amb continguts de nivells anteriors i construint una estructura que els faci anar avançant. Dins aquest nivell les activitats seran curtes i simples, e intentaran aïllar el que es vol treballar d' altres conceptes dins el mateix nivell.
3. Explicació: Els alumnes, a partir de les activitats de la fase 2, tracten de construir les relacions entre els conceptes treballats. Dins aquesta part, es genera un moment de diàleg en els alumnes que canvien impressions i incorporen el nou vocabulari. Aquesta fase, malgrat estigui descrita després de la fase 2, no implica que únicament es doni després de la fase 2, els alumnes han de dialogar després de la fase de cada una de les fases de l'aprenentatge. El rol del professor ha ser guiar als alumnes a

que puguin assolir aquest aprenentatge, i resoldre dubtes que puguin anar sorgint.

4. Orientació lliure: Als alumnes se lis proposen activitats més complexes dins el nivell que es resolen dividint el problema en diferents passes i relacionant diferents conceptes. Dins aquesta fase, l'alumne aprèn de manera autònoma diferents estratègies per resoldre els problemes, i veu de manera explicita les relacions introduïdes a l'anterior fase.
5. Integració: Els alumnes fan una recopilació de tot el que han après i de tot el procés seguit perquè tenguin una perspectiva del que han après i de quin és el camí seguit per assolir un nou coneixement. Amb aquesta darrera fase podríem dir que l'aprenentatge del nou nivell s'ha assolit.

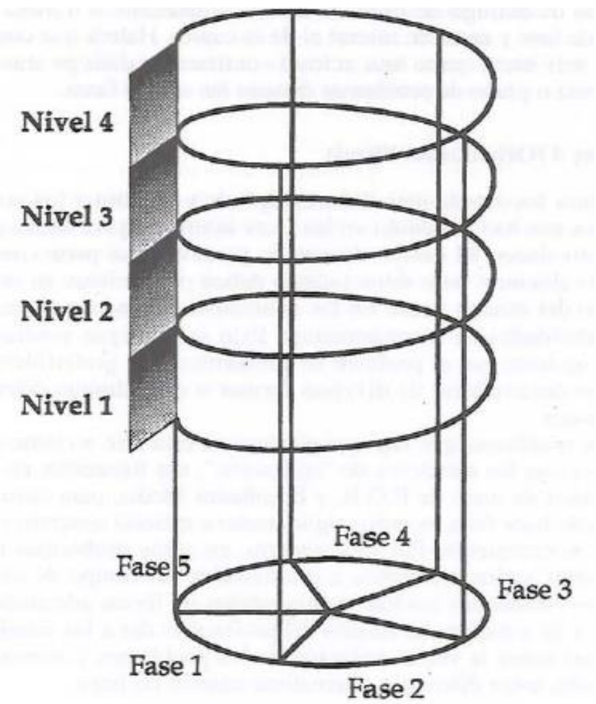


Figura 1. Resum de la seqüència de l'aprenentatge geomètric. Imatge treta de Corberan(1994).

On cada fase suposa un petit avançament més en el desenvolupament, i el conjunt de totes les fases és el que suposa avançar un nivell.

Dins tot aquest marc, Van Hiele i altres autors motiven treballar amb una metodologia en que es faci un gran ús dels materials manipulatius, com indica la següent cita:

> *"It would also be valuable to look beyond text materials, to the many other resources for teaching geometry available to teachers, for example, sets of activity cards, enrichment masters, teaching guides*

to accompany commercially available geometry manipulative materials. Foreign text series might also be examined. Most interesting would be to examine the texts written by Pierre van Hiele himself (available only in Dutch at present), and also Soviet texts which were revised based on van Hiele principles." (Fuys, Geddes, i Tischler, 1988, pág. 176)

La teoria de Van Hiele ha estat explorada de manera molt més intensiva en el cas de la geometria plana que en el cas de la geometria en l'espai, dins el llibre de Corberán (1994) podem veure de manera explicita quines activitats es poden preparar en el cas de la geometria plana per guiar de desenvolupament geomètric dels alumnes. En aquest exemple, Corberan i els seus companys realitzen unes activitats per alumnes de 2n d'ESO en geometria plana que consisteixen en treballar els nivells 2(Demostració informal) i 3(Demostració formal); treballen totes les propietats que tenen els cossos en geometria plana amb activitats que treballen cada concepte de manera independent(diagonals, paral·lelisme de costats, angles rectes o no rectes, congruència de costats...) per relacionar-ho finalment amb les propietats de tot el cos.

3.3 Aprenentatge dels conceptes geomètrics a partir d' imatges.

Segons Hershkowitz (1990), hi ha dues maneres d'enfocar l'aprenentatge de la geometria(tant en 2 dimensions com en 3 dimensions), la primera seria l'aprenentatge mitjançant la visualització dels elements, com a aprenentatge més intuïtiu; d'altra banda, també hi ha l'aprenentatge més formal, que consisteix en donar una estructura matemàtica a la geometria. Existeix un consens clar que aquests dos aspectes estan lligats, i que no pots desenvolupar una gran habilitat de visualització sense tenir un cert nivell de aprenentatge formal i viceversa. Aquest fet és molt important pel que suposa l'aprenentatge per conceptes, i més concretament, l'aprenentatge per mecanisme exemple-contraexemple.

En parlar d'aprenentatge de conceptes en geometria, resulta imprescindible parlar del treball de Vinner (Tall i Vinner, 1981), precursor del treball de Herskowitz, ja que ell va estudiar com es formava un concepte que tingues una visualització relacionada des del punt de vista psicològic, al seu article que parlava de com els alumnes no s'atenien tant a la definició per treballar la continuïtat, sinó a la representació gràfica; aquesta mateixa idea que es va fer servir en funcions es va exportar a altres blocs com és el de la Geometria per ell mateix i per altres autors (Turégano, 2006 i Hershkowitz,1990) . Aquesta teoria pivota al voltant del concepte de *concept-image*, segons el qual els alumnes no associen un concepte a una definició formal, sinó que associen el concepte amb una imatge que és forma a partir de cassos particulars que l'alumne reconeix del concepte matemàtic. De fet, la teoria també recalca que l'alumne pot reaccionar de manera diferent a un mateix concepte segons la imatge que s'hagui format del concepte en aquell moment, que no té perquè ser consistent amb la imatge formada en un altre moment, a això li diuen els autors *evoked concept-image*. Així, com veurem més endavant, el que està passant és que els alumnes responen a les preguntes de manera intuïtiva segons la imatge evocada del concepte, i no responen atenent-se a una definició formal.

L'ensenyament clàssic dels conceptes en Geometria sol constar de una definició formal i un exemple de la definició. Segons Hershkowitz (1990) aquest mecanisme d'ensenyar el concepte és un error pedagògic, i al seu article recalca 3 errors que solen donar-se en aquest tipus de situacions:

- Error 1: L'alumne veu en l'exemple una propietat del cos que no és rellevant per la seva definició, i no atén a la definició. En el seu estudi, Hershkowitz ens parla de l'exemple de la altura de un triangle, i com els alumnes sempre ho identifiquen amb un segment interior al triangle degut als mals exemples posats.
- Error 2: L'alumne interpreta erròniament la definició del concepte i això li suposa donar al concepte atributs que no se arriben a correspondre amb l'exemple. En aquest cas, l'alumne pot arribar a negar l'exemple posat amb la definició. Posem per cas que la definició de quadrilàter (Hershkowitz,1990) , " polígon delimitat per 4 costats" vé acompanyada d'una imatge de un quadrilàter còncau. L'alumne esta temptat a llegir la definició de quadrilàter i pensar en un quadrat o rectangle, ja que el 90% de les vegades que hagi vist un quadrilàter o be era un quadrat o be era un rectangle. Pot passar que el fet de pensar en aquest concepte de manera exclusiva, elimini el propi exemple que li està mostrant la definició.

- Error 3: Sovint els alumnes erren en que consideren que dos conceptes diferents han de ser exclusius a la força. Per exemple, presentam un triangle equilàter, i demanam si és isòsceles o no, els alumnes ens diran que no és isòsceles, que és equilàter. Aquesta fet vé acompanyat de un altre que és que sovint, els alumnes no entenen la direcció de la implicació lògica, i cauen en una lògica de dir "el concepte de triangle equilàter és equivalent al de triangle isòsceles" o "si tots els triangles equilàters son isòsceles, tots els triangles isòsceles són equilàters".

Per corregir tots aquests errors, el que proposa Hershkowitz (Turégano, 2006 i Hershkowitz,1990) és enriquir l'experiència amb el major nombre d'imatges possibles, per tal que això li serveixi a l'alumne a construir la seva pròpia definició del concepte, i així determinar quins són els atributs rellevants i quins són atributs irrellevants per a la seva definició. Els atributs irrellevants ens serviran per classificar dins el concepte diferents casos. La idea es podria il·lustrar amb el següent esquema(veure figura 2):

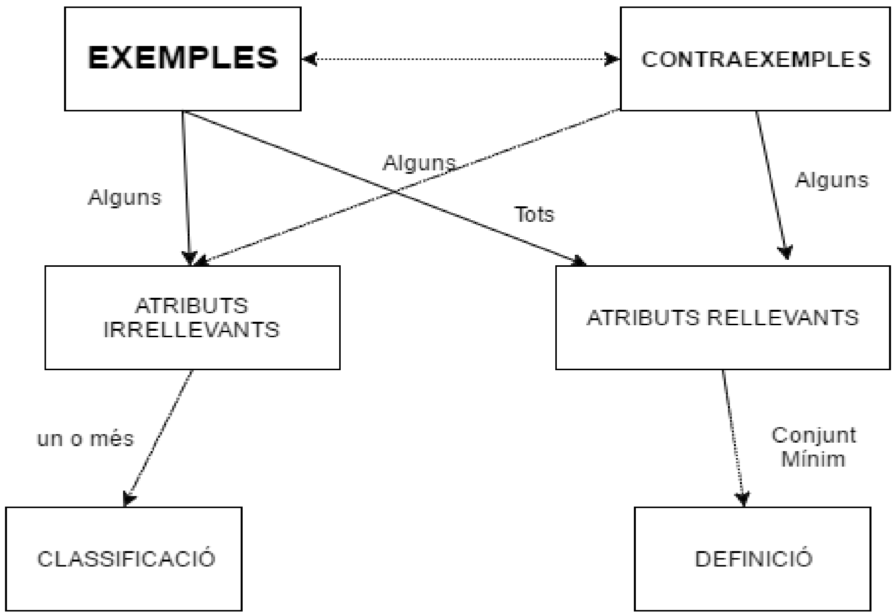


Figura 2. Esquema de com treballam atributs rellevants i atributs irrellevants. Imatge treta de Turegano (2006).

Així doncs, el que es proposa és un mecanisme repetiu en que s'exposa un exemple i un contraexemple del concepte, cadascun amb uns atributs, i mitjançant cada exemple-contraexemple es va construint la pròpia definició. Després, es posen exemples del concepte, per tal que els alumnes sàpiguen quins són els atributs irrellevants per a la definició, que classifiquen el cos en subcategories. Convé que cada exemple-contraexemple difereixin només en un atribut per tal que quan els comparin quedi molt clar quin és el atribut rellevant.

Un exemple d' aquest procediment seria el que veim a l'article de Turegano (2006) de definició de concepte de poliedre. En aquest exemple, l'autora comenta que els alumnes no són capaços de determinar els atributs rellevants i irrellevants del concepte, que tenen imatges incompletes del concepte. Per això ella proposa una sèrie de activitats en que els alumnes determinen els atributs rellevants i els irrellevants. Primer, Turegano comença amb els atributs rellevants del poliedre(veure figura 3):

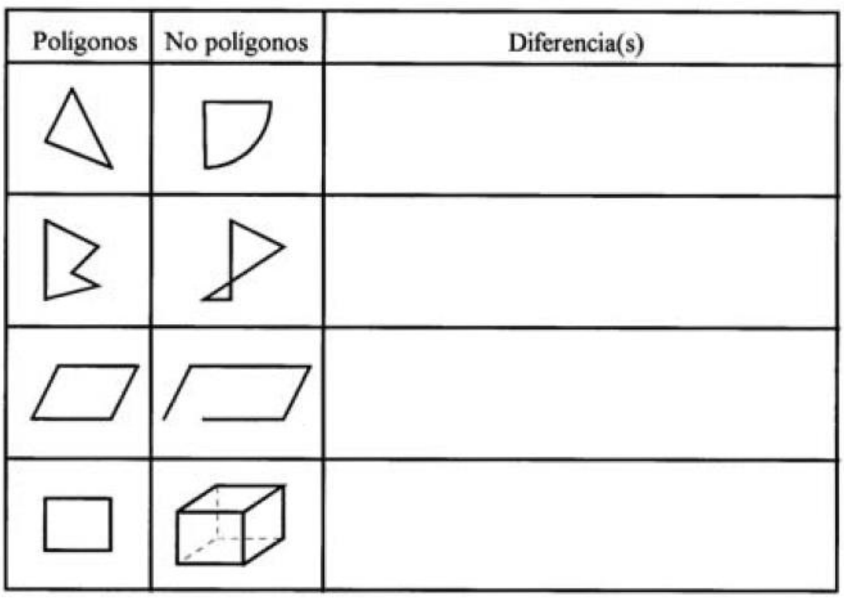


Figura 3. Exemple-contraexemple de polígon, atributs rellevants. Treta de Turegano(2006).

De cada comparació surt un atribut rellevant, i tots junts delimiten el que és el polígon.

Els diferents exemples de polígons determinaran els atributs irrellevants, que classifiquen l'objecte, Turegano proposa aquests(veure figura 4):

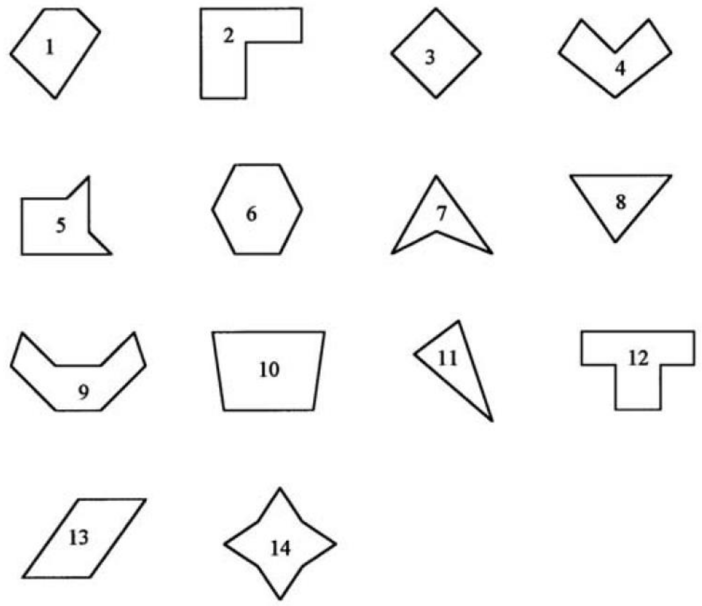


Figura 4. Exemples de poliedres, determinen els atributs rellevants. Treta de Turegano(2006).

Finalment, Turegano incorpora un exercici que posin a prova els coneixements que s’han adquirit. Com la següent imatge(veure figura 5):

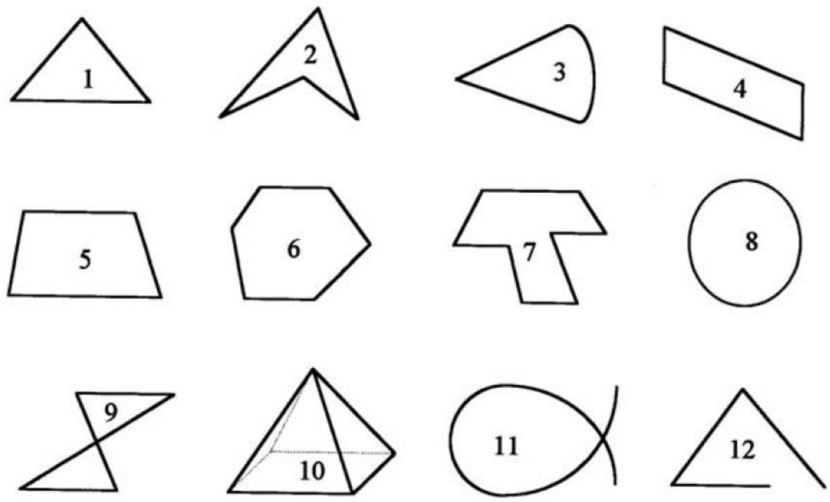


Figura 5. Exercici de reconeixement, quins són poliedres i quins no?. Identifica atributs rellevants. Treta de Turegano(2006).

Herskowitz (Herskowitz i Vinner, 1983) empra el sistema de classificació a partir de atributs rellevants i irrellevants per fer èmfasis en la classificació inclusiva i la classificació exclusiva. El que diu és que si tenim un cos donat que té uns atributs rellevants i un altre cos que té els mateixos atributs rellevants, més d'altres. El segon cos ha d'estar inclòs en la definició del primer cos, i el conjunt de tots els cossos amb la segona definició ha d'estar inclòs en el conjunt de tots els cossos amb la primera definició.

Com a exemple(veure figura 6), ho podem veure en el cas dels quadrats i els paral·lelograms, un quadrat té com a atributs rellevants el de tenir quatre costats, costats paral·lels dos a dos, costats de la mateixa longitud i els 4 angles rectes, mentre que el paral·lelogram compleix costats paral·lels dos a dos i 4 costats. Això fa que un quadrat sempre sigui un paral·lelogram.

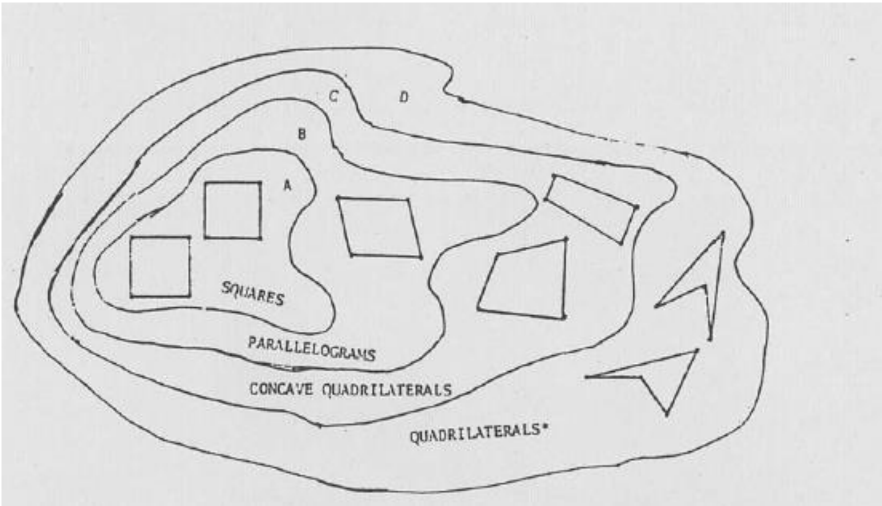


Figura 6. Exemple de classificació inclusiva, els quadrilàters. Imatge treta de Herskowitz i Vinner, (1983) .

Segons Hershkowitz (Turégano, 2006 i Hershkowitz,1990), adquirir un concepte geomètric implica adquirir un mecanisme de construcció e identificació del concepte. En aquest cas, mitjançant el mecanisme s' ha arribat a la construcció total del concepte de polígon.

Aquest darrer punt ho podem relacionar amb els mecanismes que es fan servir per identificar conceptes a partir d' imatges. Imaginem una estructura cognitiva en que s'analitza de manera independent la definició pura del concepte i la imatge del concepte, el que volem és construir un pont entre aquestes dues estructures a priori independents.

Tendriem un primer cas, en que els alumnes responen només a partir de la imatge del concepte, aquest seria el cas més usual i que pretenem corregir. Es decir, a partir de un exemple que recorda o que creu recordar, de manera automàtica i sense tenir cap mecanisme més que el memorístic. Aquesta resposta reb el nom de resposta intuïtiva(veure figura 7)

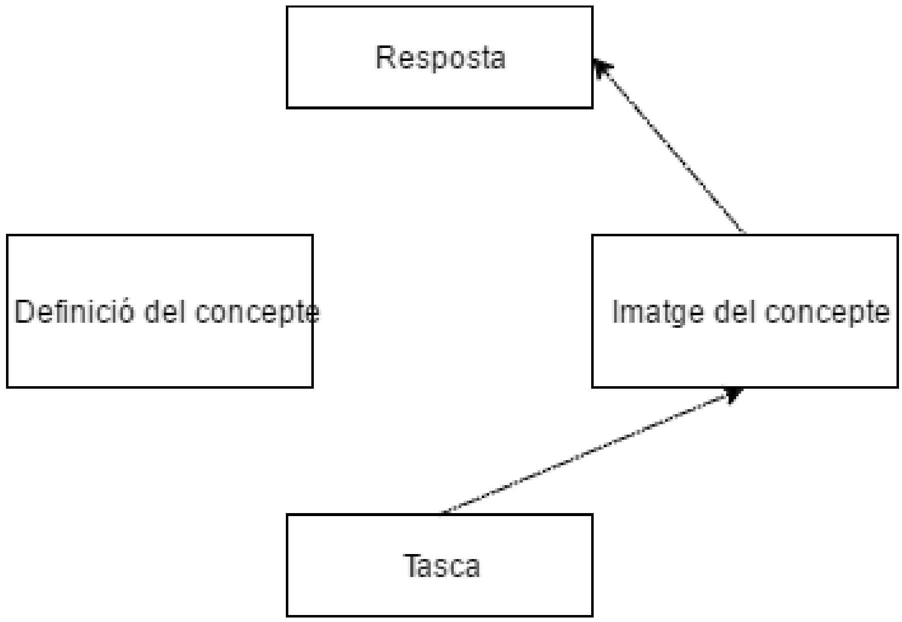


Figura 7. Resposta intuïtiva. Imatge treta de Turegano(2006)

Com a característica general, els alumnes haurien de comprovar la definició formal sempre abans de donar una resposta a la tasca comenada.

Tendriem un segon cas, en que un alumne s'atén directament a la definició per donar resposta a una determinada identificació. Aquesta resposta té el problema de que no construeix ell la definició formal, sinó que reprodueix de memòria la definició i per tant pot tenir alguna errada sense cap mecanisme de comprovació. Aquesta resposta reb el nom de resposta formal(veure figura 8).

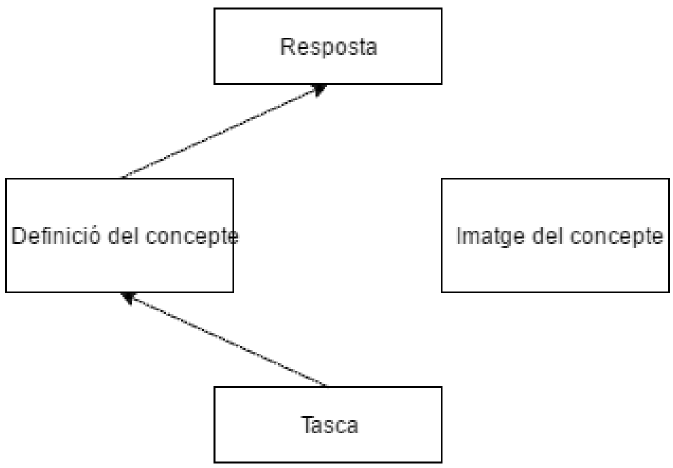


Figura 8. Resposta formal. Imatge treta de Turegano(2006)

El darrer cas seria el desitjat, els alumnes visualitzen varies imatges d'un concepte i perfilen o construeixen(segons la dificultat), la definició del concepte per després donar resposta(veure figura 9)

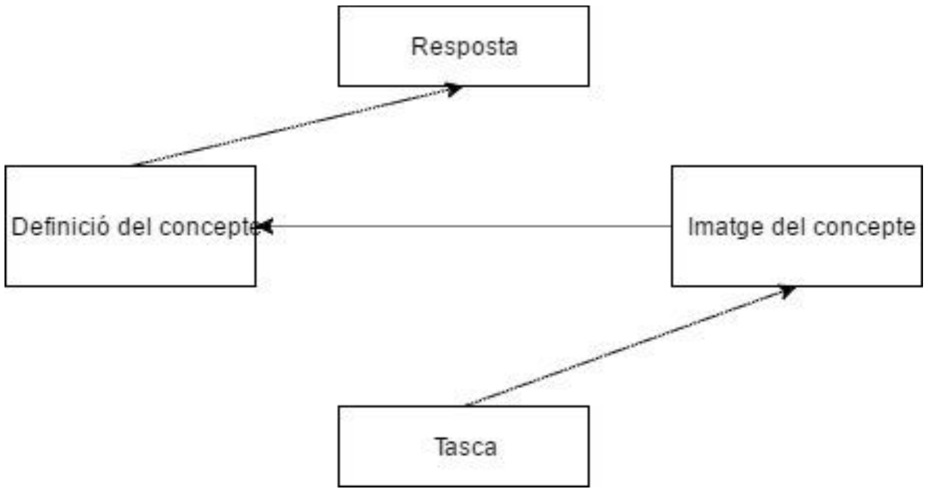


Figura 9. Cas desitjat .Imatge treta de Turegano(2006)

4.Desenvolupament de la proposta

Segons el currículum de les Illes Balears, al llarg del primer cicle d'ESO han de treballar-se (Decret 34/2015, 2015) dins el bloc de Geometria, els poliedres i els cossos de revolució, juntament amb la classificació de les famílies i els seus elements característics; així com les propietats i relacions entre poliedres i el càlcul d'àrees i volums

Concretament, volem fer un especial èmfasi en els elements característics i en la relació entre diferents propietats entre els objectes. Ja que són les grans oblidades respecte dels altres continguts, com és la resolució de problemes i el càlcul, que prenen un rol primari dins la programació.

Com pot veure-se'n als estàndards d'aprenentatge avaluable, els estudiants han de ser capaços d' analitzar e identificar les característiques dels diferents cossos geomètric emprant el llenguatge geomètric adequat, e identificar els cossos geomètrics a partir dels seus desenvolupaments plans i recíprocament.
Malgrat això, en moltes ocasions aquests aspectes no es treballen a l'aula o es treballen de forma dogmàtica, donant una sèrie de característiques de manera descontextualitzada i que es demanen en contexts memorístics. En aquest treball es descriu una proposta d'ensenyament dels cossos geomètrics en l'espai

a 2n d'ESO, treballant la formació del concepte mitjançant un procés continu i graduat.
Per això, es necessari conèixer el nivell de desenvolupament geomètric dels estudiants. Inicialment, agafarem com a punt de referencia els aprenentatges que els alumnes han d'haver assolit a l'Educació Primària; segons el currículum de les Illes Balears de Matemàtiques en Educació Primària (Decret 32/2014, 2014) els alumnes han d'haver treballat la classificació de cossos geomètrics, els seus elements i relacions, i els elements bàsics dels poliedres(vèrtexs, cares i arestes), així com els diferents poliedres.

En relació a aquests continguts, el currículum també incorpora uns estàndards avaluables per els diferents blocs. Dels poliedres, diu que els alumnes haurien de saber emprar la composició i descomposició per formar desenvolupaments plans i cossos geomètrics l'una a partir de l'altra, identificar i anomenar els polígons a partir del nombre de costats i reconèixer e identificar primes i piràmides, així com els seus elements bàsics. Pel que fa als cossos rodons, cal que reconeguin e identifiquin els més bàsics, el con, cilindre i esfera, i els seus elements més bàsics. Els estàndards avaluables serien els procediments que assumim els alumnes haurien d'haver après, i això ens pot determinar el seu nivell de desenvolupament geomètric de Van Hiele en que estan situats.

Com es pot observar, molts del conceptes que són treballats a Primària, tornen a ser treballats en la secundària, i els conceptes estan molt relacionats, inclús molts són els mateixos. Parlant en termes de nivell de Van Hiele, podríem dir que els alumnes no comencen amb un nivell 0 en classificació, ja que en teoria sí que saben reconèixer vèrtexs, arestes i cares, i són capaços de composar i descomposar cossos en l'espai i cossos en el pla. Així doncs, podríem inferir que un alumne acaba la Educació Primària amb un nivell 1 de desenvolupament geomètric, i en alguns casos molt particulars nivell 2; en Romero i Cañadas (2015) confirmen que els alumnes durant la etapa de Educació Primària treballen majoritàriament els nivells 0 i 1 de desenvolupament geomètric. L'experiència sembla dir que els alumnes no sempre assoleixen tots els estàndards, ja que molts de mestres contemplen els llibres de text com programacions d'aula, ignorant les indicacions del currículum. Per això assumirem que el punt de partida pels alumnes de 2n que s’enfrontin a aquesta metodologia serà de nivell 1.

4.1 Objectius pedagògics

L’objectiu final de les activitats és el treball de la classificació de cossos juntament amb la formació de cada concepte. L’objectiu és que els alumnes assoleixin en aquest contingut un nivell de desenvolupament geomètric de 2, caracteritzat per poder classificar i fer demostracions informals. Per aconseguir aquest objectiu, ens fixam els següents objectius pedagògics:

- Els alumnes han de conèixer les propietats elementals dels poliedres, i saber reconèixer qualsevol tipus de piràmide o prisma, a partir dels seus atributs rellevants.
- Els alumnes han de saber reconèixer els atributs que classifiquen les piràmides i els prismes.
- Els alumnes han de saber veure les característiques del cos a partir del seu desenvolupament pla, i sí un desenvolupament pot correspondre amb una figura en l’espai.
- Els alumnes han de conèixer les atributs bàsics de tots els cossos geomètrics(cares, vèrtexs, arestes, paral·lelisme de cares, paral·lelisme de arestes...)
- Els alumnes han d’haver adquirit els conceptes de poliedre còncau i poliedre convex.
- Els alumnes han de haver desenvolupat la lògica inclusiva i exclusiva dins el context de la geometria.

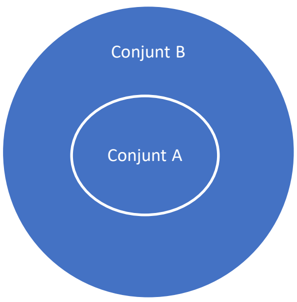


Figura 7.Diagrama de Venn de la classificació inclusiva. En aquest cas el conjunt B inclou el conjunt A.

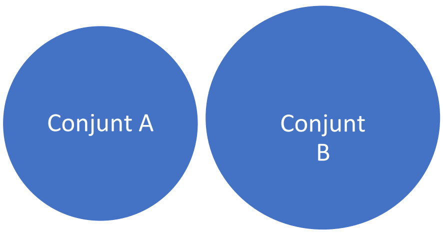


Figura 8 .Diagrama de Venn de la classificació En aquest cas cap objecte que sigui A pot ser B i viceversa.

4.2 Metodologia, seqüenciació de la proposta i activitats.

La metodologia de la meva proposta metodològica ve inspirada per la proposta metodològica (Corberán et al., 1994) comentada a la part de estat de la qüestió. En aquesta proposta es segueix el model de Van Hiele per al desenvolupament del pensament geomètric, i s'estructura tota la metodologia en blocs diferenciats que permeten a l'alumne estructurar millor el que esta aprenent. En el meu cas adoptaré aquesta manera de procedir per estructurar les meves activitats. També ha estat una inspiració el treball de Guillen (2000), que repara en els errors metodològics que es donen quan s'imparteix classe de geometria dels sòlids.

En el meu cas, donats els objectius que s'han establert, s'ha decidit dividir la proposta metodològica en 3 temes que venen seqüenciats de la següent manera:

1. Concepte de poliedre i concepte de cos rodó.
2. Concepte de prisma i de piràmide.
3. Relació entre desenvolupament pla i el cos en l'espai.

S'ha decidit primer començar per la geometria des del punt de vista espacial, perquè la millor manera de treballar la geometria és que els alumnes es familiaritzin amb el concepte tridimensional per després fer el anàlisi, i convertir el cos al pla o a l'invers (Romero i Cañadas, 2015).

En aquest sentit, començarem per la definició de poliedre i de cos rodó, el primer tema , que compren les dues famílies més grans que hi ha en la geometria en l'espai. El primer que han de saber és identificar les propietats que tenen els cossos en l'espai(vèrtexs, arestes i cares), i com aquestes propietats determinen com són els cossos. També s'han de treballar els poliedres regulars, els poliedres còncaus i convexos, i els cossos de revolució. Finalment, es treballaren propietats dels poliedres, com és la relació d'Euler o els 5 poliedres regulars convexos possibles.

Una vegada introduïts els conceptes de poliedres i cossos rodons. Es treballen dues subfamílies dels poliedres, els prismes i les piràmides, que formarien el segon tema. Els alumnes han de construir la definició a partir dels atributs rellevants de les dues famílies, i classificar els cossos segons els atributs irrellevants; i treballar les propietats de les dues famílies.

Finalment, es treballarà el desenvolupament pla dels cossos geomètrics en l'espai(tant els poliedres, com els cossos rodons), el tercer tema , que relaciona les propietats que tenen els desenvolupaments plans i els cossos geomètrics en l'espai, i les condicions que s'han de donar perquè un desenvolupament pla tanqui en un objecte geomètric.

PRIMER TEMA: Concepte de poliedre i concepte de cos rodó.

Treballarem amb la metodologia descrita per Van Hiele per al treball des del nivell 1 fins al nivell 2, dividint les activitats segons les 5 fases de desenvolupament.

1. Observació:

<u>Activitat 1:</u>

- Amb objectes duts de casa (se li demanarà als alumnes que duguin objectes com caixes de cartró, botelles, capses de bombons...) , els alumnes han de separar els objectes en dos grups i justificar quin ha estat el criteri de separació que han decidit. La activitat es farà en grups de 3 o 4 persones.

Amb aquesta primera activitat volem introduir el tema als alumnes, que treballaran els conceptes de poliedre i cos rodó, les dues famílies més grans que hi ha dins els cossos en l'espai. Pel que he vist amb la meva experiència (veure Annex I), els alumnes, sense justificar amb rigor la seva separació ni saber que són poliedres i cossos rodons , si que visualment separen entre els cossos rodons i poliedres. Després se lis farà una breu explicació de les dues famílies, poliedres i cossos rodons, com a conjunts exclusius.

2. Orientació directa:

<u>Activitat 2:</u>

- Els alumnes han de construir un cos geomètric amb cercles de diferents radis i un pal que punxi els cercles pel centre, quina forma tindran els cossos que s'han construït? Serien poliedres o cossos rodons?

Figura. Exemple de figura de l'exercici 4. Imatge treta de (Peterson, 2013)

Aquesta activitat permet introduir als alumnes els cossos de revolució, mitjançant l' experimentació. Als alumnes el concepte de cos de revolució lis sorgirà de manera natural quan vegin que els objectes són iguals al voltant del pal, e identificaran aquest pal amb un eix de simetria.

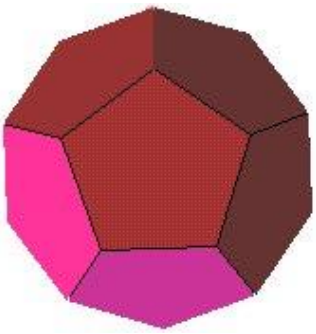
Activitat 3:

Definir el poliedre regular amb el mecanisme de exemple-contraexemple, emprant les següents figures. Per tal de que es vegi clar, contraposarem objectes similars, però que pertanyen a dos grups diferents. Els alumnes han d' escriure quina diferència hi ha entre l'exemple de poliedre, i el contraexemple (no poliedre), per determinar els atributs rellevants.

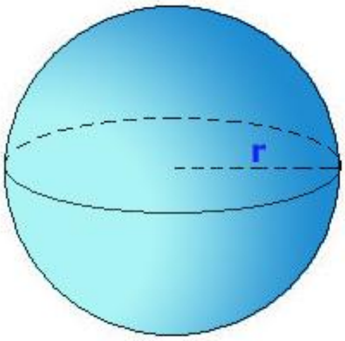
a. Definició del concepte:

Primera imatge:

Exemple

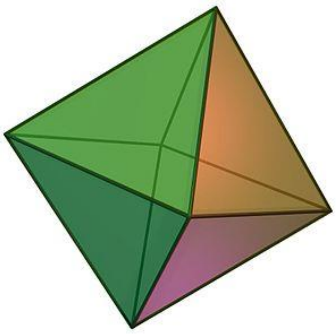


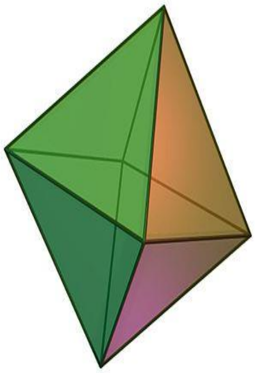
Contraexemple :



Segona imatge:

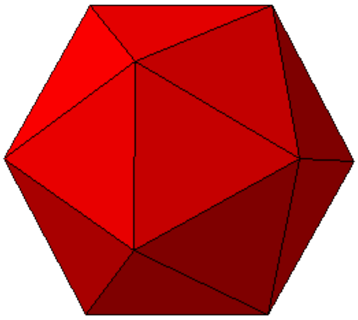
Exemple: Contraexemple:

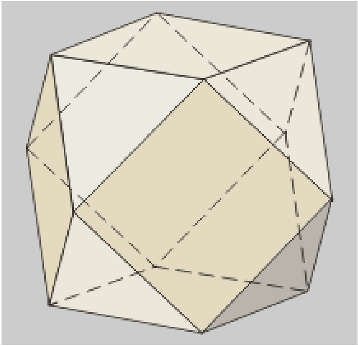




Tercera imatge:

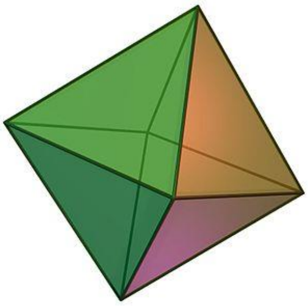
Exemple: Contraexemple:

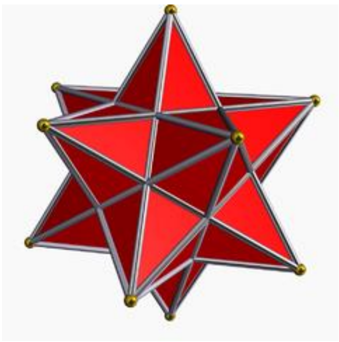




Quarta imatge:

Exemple: Contraexemple:





En aquesta activitat, aplicarem el mecanisme d' exemple-contraexemple de Hershkowitz (Hershkowitz i Vinner, 1983) perquè els alumnes creïn la seva definició del concepte de poliedre regular. La primera imatge exposa com exemple un dodecaedre i com a contraexemple una esfera, d'aquí volem que els alumnes vegin que el dodecaedre és un cos format per polígons (un poliedre) i l'esfera no. A continuació, en la segona imatge tenim d'exemple l'octaedre regular, i en l'altre una bipiràmide de base quadrangular, en aquest cas els alumnes veuran que les dues tenen el mateix nombre de cares, i les cares són totes iguals també, però en el primer cas les cares són polígons regulars (triangles equilàters) i en el segon cas, són poligons irregulars (triangles isòsceles), per tant el segon atribut rellevant és que les cares han de ser poliedres regulars. La tercera imatge mostra el icosaedre en contraposició amb el cuboctaedre, en aquest cas farem èmfasi en quantes cares diferents compossen cada cos, perquè en aquest cas totes les cares són polígons regulars, però en el primer cas és un sol polígon regular(el triangle equilàter) i en l'altre són 2 (el triangle equilàter i el quadrat). Finalment, el quart exemple, el octaedre, que es contraposa al petit dodecaedre estrellat, que és el cos que hem vist a continuació. En aquest cas, haurem de guiar als alumnes i demanar-lis pels vèrtexs, ja que la diferència entre aquests dos cossos geomètrics és que en el primer tots els vèrtexs veuen la mateixa configuració(mateix nombre de cares) , i en el segon els vèrtexs de les puntes no tenen la mateixa configuració que els de les concavitats; així doncs, ja tendriem totes les característiques rellevants del poliedre regular.

Aquest darrer exemple també ens permet introduir els poliedres concaus, en aquest cas li demanarem que li veuen de diferent a aquest cos respecte dels altres que hem vist fins al moment; al que els alumnes ens respondran "té pics cap a fora" o "té puntes", llavors és quan els formalitzam el concepte de poliedre còncau com el poliedre que té qualque diagonal que no passi dins el cos, en contraposició als poliedres convexos.

<u>Activitat 4:</u>

- Feis el desenvolupament pla de tots els poliedres regulars que pogueu. Que li passa al vèrtex per el qual obrim el poliedre? Quantes cares conflueixen en aquest vèrtex? Que sumen els angles?

  Intentau fer un poliedre regular amb hexaedres, que passa?
- Quin és el nombre mínim de plans que necessitem per tancar un volum?

L'activitat 5 està relacionada amb el tema 3, i es podria ubicar tant en aquest tema com en el 3r. Aquí el que volem és que els alumnes prenguin consciència de que els poliedres requereixen com a mínim 3 cares que creuin en un vèrtex, i que els poliedres sorgeixen de plegar aquestes cares, per tant la suma dels angles no pot mai passar de 360º, aquest fet s'intentarà guiar amb les preguntes demanades. Al segon apartat es vol que els alumnes treballin el raonament geomètric i la capacitat visual. Una opció és fer aquest treball amb programari específic com *Geogebra* o *Mathematica*, que permeti a l'alumne visualitzar el problema.

Activitat 5:

- Es donen diferents poliedres (prismes, antiprismes, piràmides, poliedres concaus...). Crear una taula amb els vèrtexs, les arestes i les cares de cada un dels cossos, existeix alguna relació entre elles?

Aquesta activitat permetrà als alumnes treballar el vocabulari del tema, i deduir la relació de Euler pels poliedres mitjançant la experimentació.

3. Explicació:

La fase de explicació apareix entre la orientació directa i la indirecta en la teoria sobre la metodologia, però en la pràctica és una fase que s'intercala entre activitats. Malgrat això, si que és profitós fer un breu resum després de la part de orientació directa.

Orientació indirecta:

Activitat 6:

- Argumenta perquè o perquè no el següent cos és o no cos rodó.

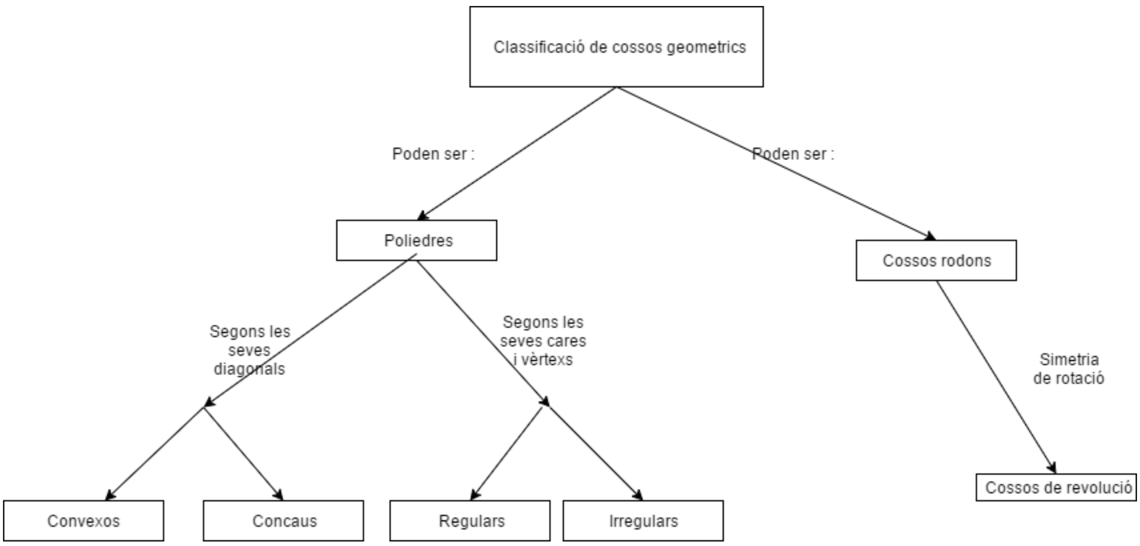
En la activitat 6 volem que els alumnes treballin el procés de comunicació, que verbalitzin quines característiques té el cos, i argumentin quin tipus de cos és. En la meva experiència (veure annex I), els sol confondre un cos que sigui una unió entre un poliedre i un cos rodó, i ens serveix per donar èmfasi en que si no és un poliedre, automàticament és un cos rodó, perquè són conceptes exclusius.

4. Integració:

Dins aquesta fase farem una activitat que resumeixi els continguts que hem tractat i el vocabulari emprat, s'adjuntarà la següent activitat amb una explicació final.

Activitat 7:

S'adjunta el següent quadre amb algunes o totes les caselles tapades, els alumnes l'han de completar.



Completa cada cas amb un exemple dels que no s'hagui vist a classe.

Activitat 8:

Completa les següents oracions dels poliedres regulars:

- Hi ha ______ poliedres regulars.
- Hi ha _______ poliedres regulars amb cares triangulars, ______ amb cares quadrats, i ____ amb cares pentagonals.
- Els angles dels polígons que conflueixen a un vèrtex sumen _______ de 360º.

- Als vèrtexs del _______________ conflueixen 3 cares triangulars.
- El _____________ té 6 cares.
- El _____________ és l'únic que hi conflueixen 5 cares en un vèrtex.
- El dodecaedre està format per polígons de ___ costats
- L' octaedre està format per _ piràmides de base _____________ unides per la base.

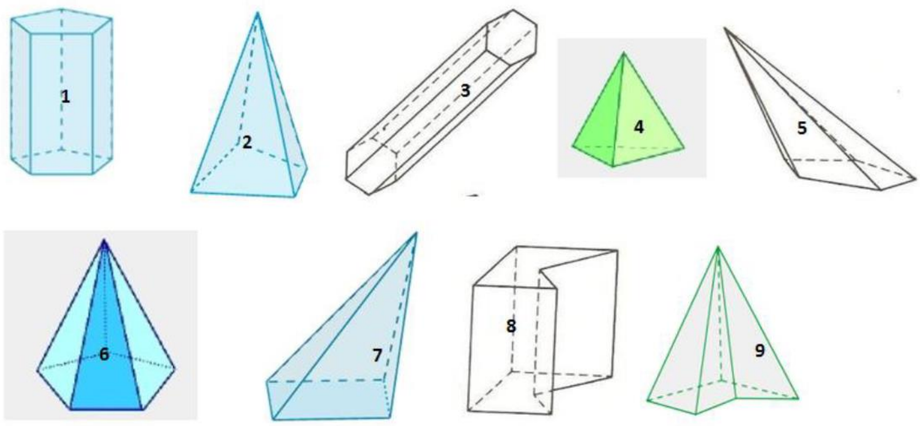
SEGON TEMA: Concepte de prisma i de piràmide

De manera anàloga, procedirem a descriure les activitats proposades.

1. Observació

Activitat 1:

- Se lis demanarà als alumnes classificar entre els següents cossos geomètrics, i que agafin un criteri per classificar-los.



Amb aquesta activitat volem introduir la classificació de prismes i poliedres, per això els demanam que classifiquin els cossos en 2 grups, segons el criteri que ells estimin correctes, i argumentar per que el criteri que han agafat separa els dos grups.

2. Orientació dirigida:

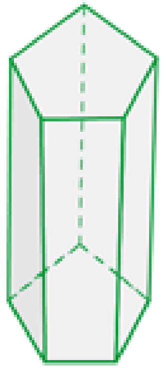
Activitat 2:

- Mitjançant el mecanisme de exemple-contraexemple, s'ha de determinar la definició del concepte de prisma, identificant atributs rellevant i irrellevants.
-

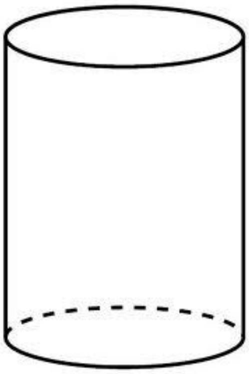
1. Definició del concepte(Atributs rellevants)

Primera passa:

Exemple:

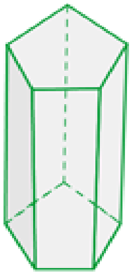


Contraexemple:

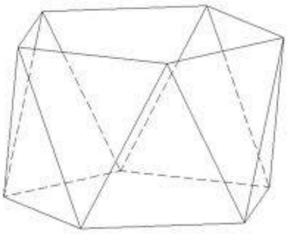


Segona passa:

Exemple:

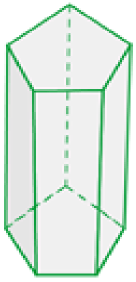


Contraexemple:

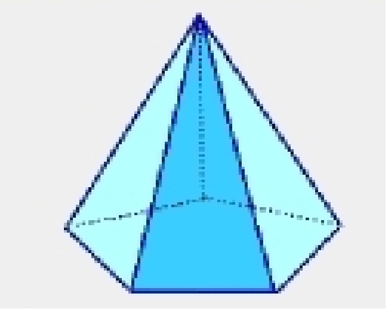


Tercera passa:

Exemple:

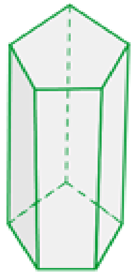


Contraexemple:

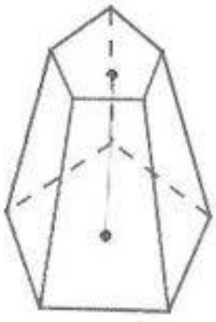


Quarta passa:

Exemple:



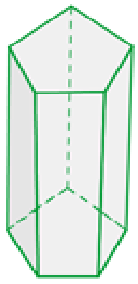
Contraexemple:



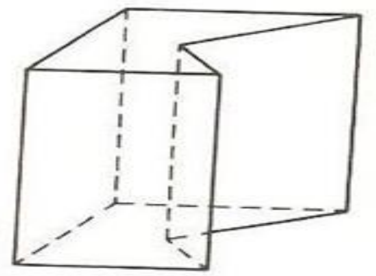
2. Classificació del concepte(Atributs irrellevants)

Primera passa:

Exemple:

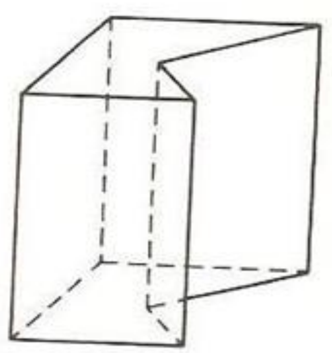


Exemple:

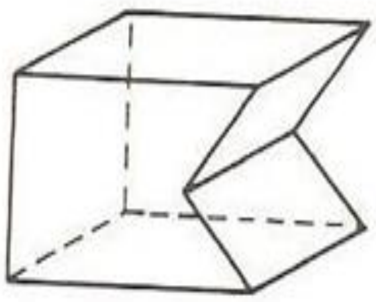


Segona passa:

Exemple:

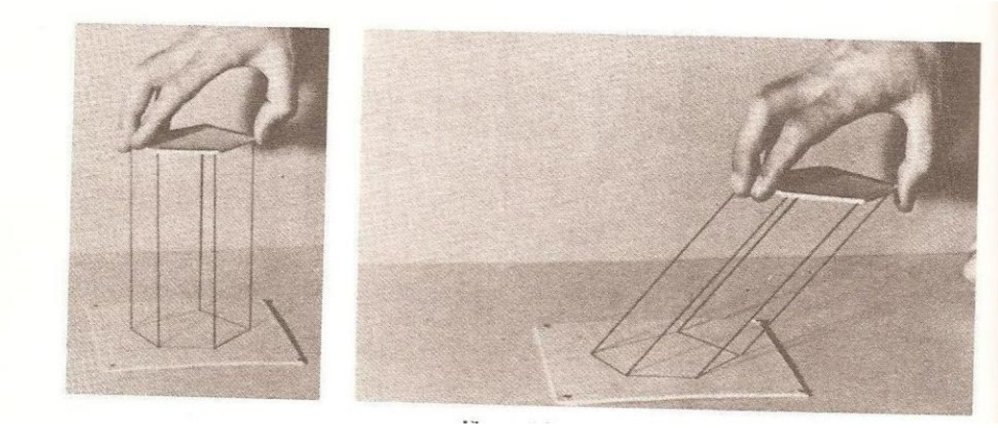


Exemple:



Tercera passa:

Exemple: Exemple:

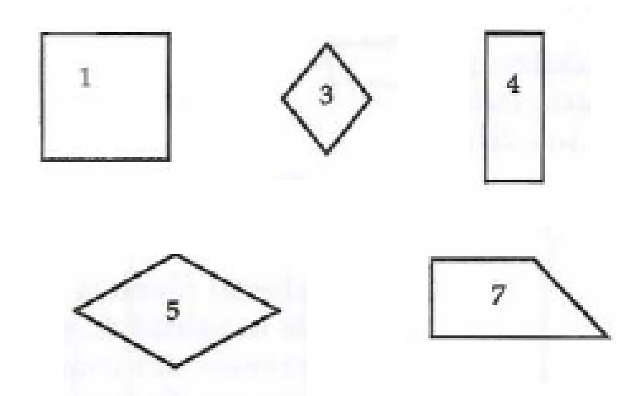


- Hi ha algun prisma que sigui un poliedre regular?

En aquesta activitat guiarem als alumnes cap el concepte de prisma. En aquesta proposta per que defineixin el concepte, propossam exemples i contraexemples relacionats entre ells, pero diferenciats en un atribut que serà l'atribut rellevant. Possem per cas la segona passa, en que els dos cossos són poliedres, tenen dues bases i aquestes són pentagonals; si els contrapossam, és visualitza clarament que la característica que defineix el prisma és que les seves cares són laterals són rectangulars. D'altra banda, a la classificació veim no només poden ser rectangulars les cares laterals (determinen la familia de prismes rectes), sino que una cara pot ser qualsevol paral·lelogram, terme més ampli i que inclou el rectangle. Per remarcar aquest fet, es realitzarà l'activitat 3, que treballa els diferents quadrilaters amb conceptes inclusius. Amb la darrera pregunta volem treballar que els alumnes pensin en el cub, que comparteix els atributs rellevants del prisma,com a un prisma.

<u>Activitat 3:</u>

- Proposam una sèrie de figures, i hem de dir si cadascuna d'aquestes figures és un quadrat, un rombe o un rectangle; la idea és que els conceptes no siguin exclusius i veure com aquest fet crea conflicte en l'alumne.



Per exemple, és el quadrat un rectangle? És el quadrat un rombe? La figura 5 és un rombe, és un paral·lelogram també?

L' activitat 3 té l'objectiu que els alumnes entenguin la lògica de la classificació inclusiva, i la lliguin amb la definició de cada objecte. Concretament, volem que vegin que els rectangles són paral·lelograms, perquè a la definició del concepte de prisma és un dels atributs rellevants.

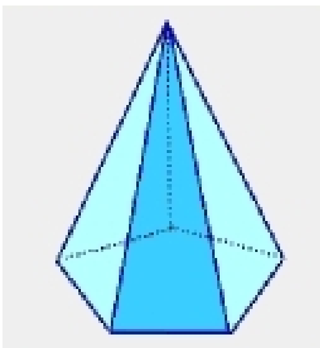
<u>Activitat 4:</u>

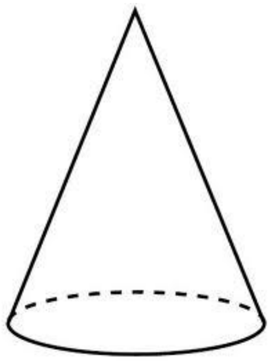
- Definirem el concepte de piràmide amb el mecanisme de exemple-contraexemple.

1. Definició del concepte(Atributs rellevants)

Primera passa:

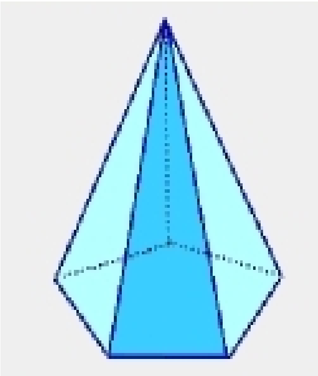
Exemple: Contraexemple:

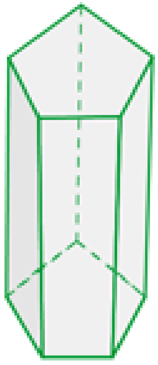




Segona passa:

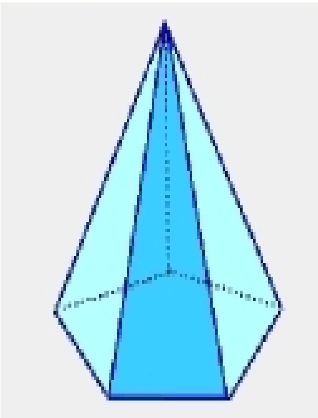
Exemple: Contraexemple:

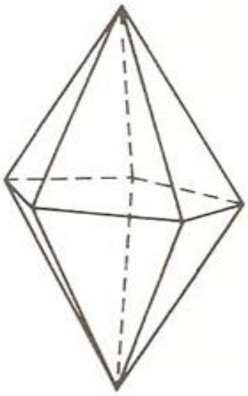




Tercera passa:

Exemple: Contraexemple:

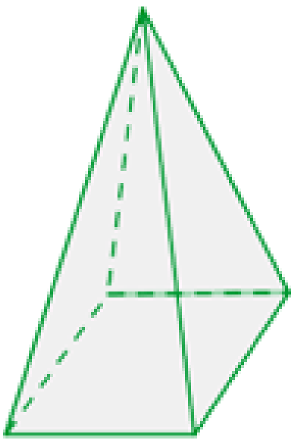


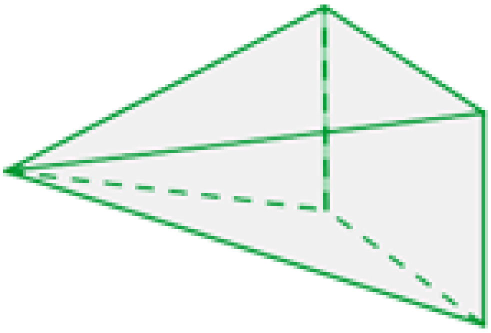


2. Classificació del concepte(Atributs irrellevants)

Primera passa:

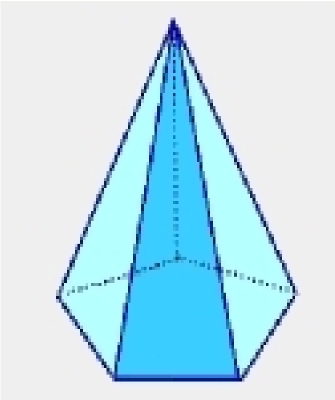
Exemple: Exemple:

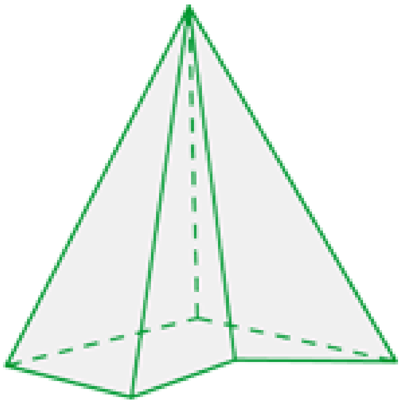




Segona passa:

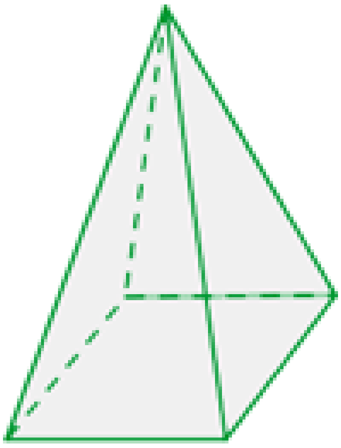
Exemple: Exemple:

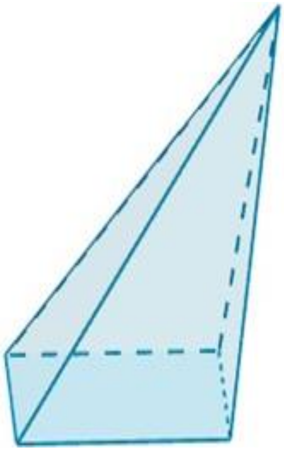




Tercera passa:

Exemple: Exemple:





En aquest cas, s'ha aplicat el mecanisme de exemple-contraexemple per la piràmide de manera anàloga al cas del prisma. Els atributs rellevants per a la piràmide són: poliedre, cares triangulars i té una base. D'altra banda, no importa quina sigui l' orientació de la piràmide. Els atributs irrellevants per la definició ens classifiquen les families de piràmides, la convexitat de la base ens determina la convexitat del poliedre; anàlogament, si el triangle és isosceles podem parlar de piràmides rectes, si no és isosceles, la piràmide és obliqua.

3. Explicació:

Les explicacions es fan de forma pertinent per formalitzar el treballat als exercicis, i s'haurien d'intercalar amb els exercicis.

4. Orientació indirecta:

Activitat 5:

D'aquestes figures, identifica quines són prismes, piràmides, i quines no. Identifica els atributs rellevants de cada cos(veure figura 10)

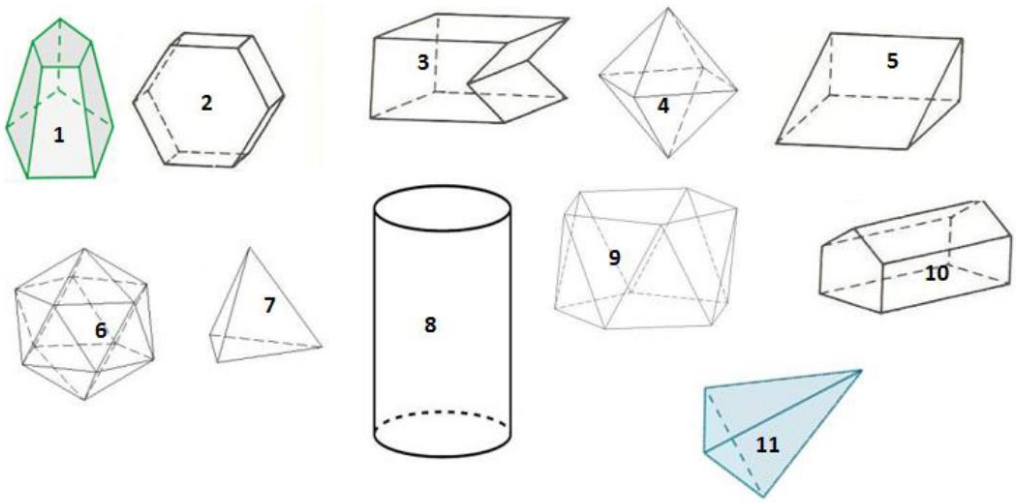


Figura 10. Figures de l'activitat 5.

En l'activitat 5 es posen a prova els conceptes treballats anteriorment, es vol que els alumnes identifiquin correctament els prismes i les piràmides de la següent imatge i que sàpiguen identificar perquè són prismes o piràmides a partir dels seus atributs rellevants.

Activitat 6:

- Se li demana a l'alumne quantes cares, arestes i vèrtexs té un prisma de base triangular, quadrada, i hexagonal. I un prisma de base n-gonal?
- Se li demana a l'alumne quantes cares, arestes i vèrtexs té una piràmide de base triangular, quadrada, i hexagonal. I un prisma de base n-gonal?

En l'activitat 6, volem que els alumnes trobin relacions generals mitjançant un procés inductiu, que cerquin quantes cares, vèrtexs i arestes tenen els prismes i piràmides de base triangular, quadrangular... i extreguin una relació general.

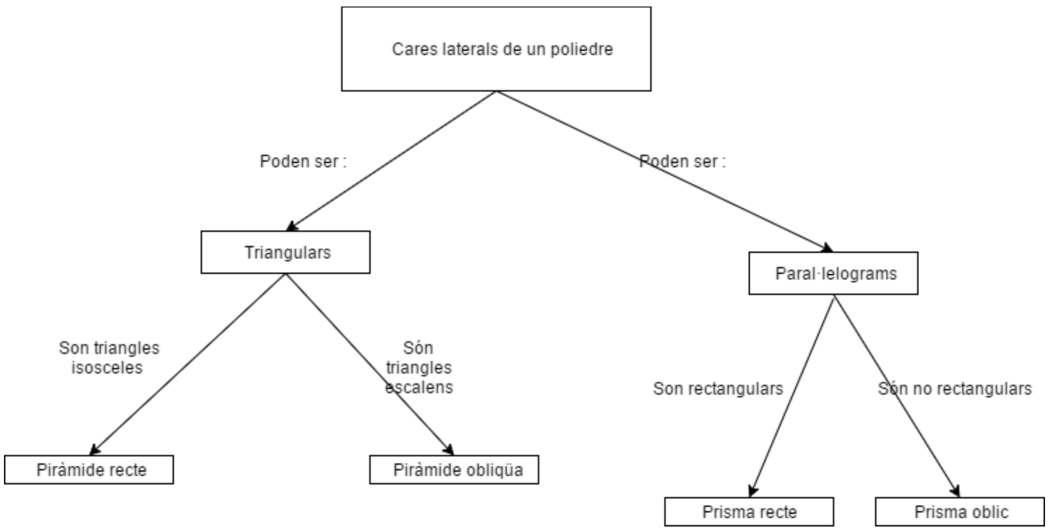
Activitat 7:

- Se li demana als alumnes que dedueixin quin es el nombre de diagonals(en principi omitirem si parlam de diagonals en les cares o diagonals en l'espai al cos, i esperam que el dubte sorgeixi d'allà), tant en els prismes com a les piràmides, en funció dels costats que tingui la base.

En l'activitat 7 treballarem les diagonals que té el cos en l'espai, quan sorgeixi el dubte aclararem que són diagonals en l'espai. L'activitat es un problema de combinatòria, i la solució si es treballen uns quants cassos surt de manera natural.

5. Integració:

Completa el següent diagrama(cobrint algunes de les caselles) :



TERCER TEMA: Relació entre desenvolupament pla i el cos en l'espai.

El tercer bloc, que treballa relació entre desenvolupament pla i cos en l'espai.

1. Observació:

En aquesta etapa ens servirà per introduir certs conceptes e idees de les que tractarà aquest primer tema, i per avaluar als nostres alumnes.

Activitat 1:

Amb peces del Polydron, tractau de construir el major nombre d'cossos possibles. Quina forma tenen els cossos? Donades unes certes peçes, podrem construir una figura? Feis una llista de les propietats que tenen els cossos construïts, i escriviu els noms de les cossos que conegueu.

Amb aquesta activitat el que s'intenta és que els alumnes vegin que no ens val amb qualsevol tipus de cares perquè aquestes encaixin, sinó que han de tenir una certa relació. D'aquesta manera, també podem veure com s'han d'encaixar les peces i quina forma tenen.
També volem saber quins coneixements tenen de cossos geomètrics, si tenen el llenguatge apropiat(empren els termes aresta, vèrtex i cara), i si es saben els noms d'alguns dels cossos.

2. Orientació directa:

En aquesta fase propossam una sèrie d'activitats que orientin l'aprenentatge de l'alumne i que facilitin l'assoliment dels coneixements que se li demanen.

<u>Activitat 2:</u>

Com es veu a l'exemple, s'han de crear figures planes que tenguin les següents característiques, i després s'ha de veure quines solapen per fer un con(base circular i cara lateral amb forma de secció circular), o fer un cilindre(dues bases circulars i una cara lateral rectangular).

- Cercles: 2 cm de radi, 3 cm de radi i 5 cm de radi.
- Rectangles: 31.5 cm(base) x 20 cm(altura), 19 cm x 20 cm, 15 cm x 20 cm i 19 cm x 30 cm
- Seccions circulars: 7cm de radi i 260º d'arc, 6 cm de radi i 180º d'arc, 5 cm de radi i 215º d'arc, 5 cm de radi i 145º d'arc, 6 cm de radi i 120º d'arc, i 7 cm de radi i 215º d'arc.

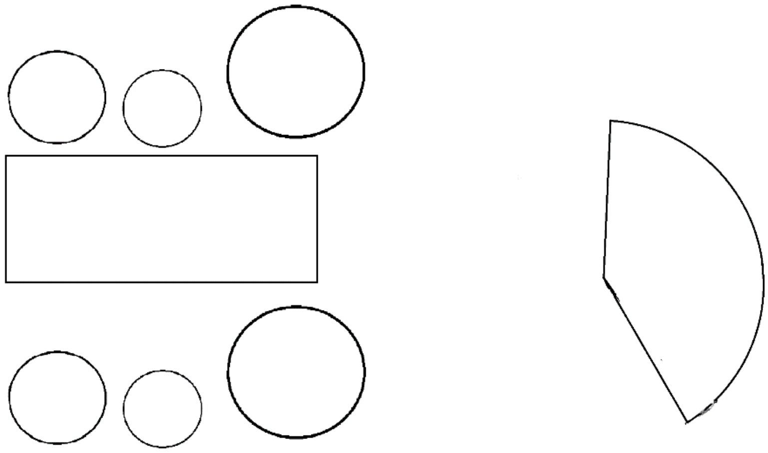


Figura 10.Exemple de cares de desenvolupament pla.

- Quina relació ha d' haver entre les cares per tal de que poguem tancar els cossos? Hi ha cap relació entre la generatriu del triangle, el radi de la base, i l'altura del con?
- Alguna d'aquestes figures forma un vèrtex? I una aresta?
- Podeu diferenciar quines són les bases, i quines les cares laterals dels cossos construïts?

En aquesta activitat es treballarà el solapament entre els cossos, i les relacions que hi ha d'haver perquè els desenvolupaments plans tanquin en un cos. Tenim l'objectiu de que els alumnes dedueixin les relacions de manera experimental, i manipulant amb les diferents cares . Amb la tercera pregunta, se lis dirà que un aresta és la intersecció entre dues cares(no cal que siguin planes), i que un vèrtex és un punt d'unió entre dos o més segments que estiguin sobre les cares de la figura.

3. Explicació:
4. Orientació indirecta:

Es proposen una sèrie d'activitats, desprès de la orientació que se'ls ha donat, en que ells hauran de treballar nous conceptes o nous problemes amb els mecanismes que se lis han ensenyat.

Activitat 3:

Identifica quins d'aquests desenvolupaments corresponen a un cos en l'espai.

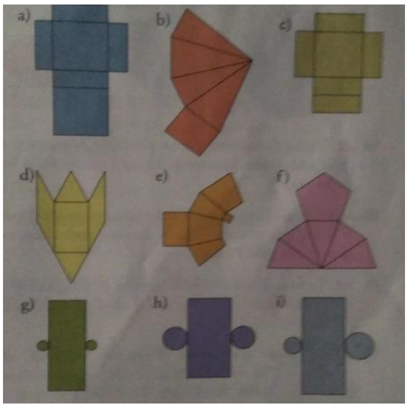


Figura 11. Imatge treta del llibre d'Anaya de Matemàtiques (2016).

En aquest exercici es treballa la capacitat visual, i la capacitat de relacionar els cossos en l'espai amb el seu desenvolupament pla, mitjançant les relacions apreses a l'activitat 2, i altres de anàlogues.

Activitat 4:

Construeix un con que la seva base tengui 10 cm de diàmetre i la seva altura sigui 15 cm.

L'objectiu de l'activitat 4 és que treballin les relacions entre les variables dels cossos en l'espai com l'altura, amb les variables de les seves cares lateral. Mitjançant la construcció de l'objecte es com s'expliciten més aquestes relacions.

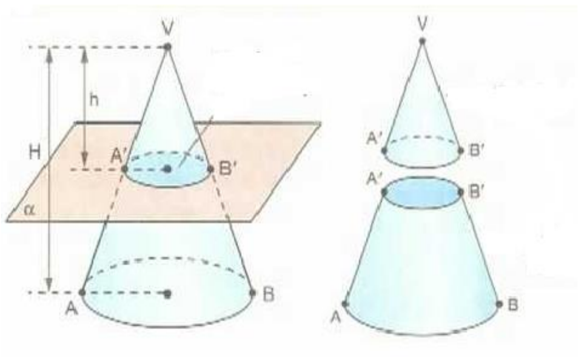
Activitat 5:

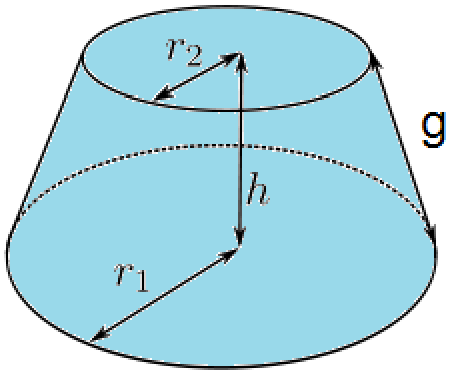
Construeix una piràmide de base quadrada amb aresta de la base 5 cm i aresta lateral 7 cm. Mesura l'altura de la piràmide que ha sorgit, guarden les arestes de la base i lateral alguna relació amb aquesta altura?

De manera anàloga a l'activitat 5, aquest exercici té l'objectiu de que els alumnes treballin les relacions entre cares del desenvolupament pla i les variables del cos en l'espai. Juntament amb aquesta activitat es treballa la mesura, i també pot sorgir alguna incertesa dels càlculs que s'haguin fet.

Activitat 6:

El següent cos es diu con truncat, i correspon a un tronc que ha estat seccionat superiorment de manera que la base i la cara seccionada són paral·leles.





Dibuixa el seu desenvolupament pla (Ajuda: La cara lateral del tronc de con és la cara lateral del total del con menys la cara lateral del con que hem llevat)

Amb l' activitat 7 el que volem és treballar la capacitat de descomposar el cos en les seves cares planes dins un nou context. Podem també construir un tronc de con amb paper i que els alumnes el desmuntin, o visualitzar-ho a través de algun software tipus *Geogebra.*

5. Integració:

- Completa les següents oracions:

1. Al desenvolupament pla d'un cilindre hem de fer coincidir el __________ de la base i la __________ de la cara lateral.
2. El radi, l'altura i la generatriu d'un con formen un triangle ___________ .
3. Dues cares d'un cos en l'espai coincideixen en una ___________ .
4. Tres segments es creuen en un punt, i els tres no es troben dins un pla, el punt és un _________ en l'espai.
5. Amb 8 peces del Polydron podem formar un cos de 8 __________ .

Després, els alumnes hauran de justificar que posen aquesta resposta a aquesta casella.

En la fase de integració es proposen una sèrie d'oracions que integren tots els continguts treballats dins el tema, per tal que tenguin dins una activitat un resum del que s'ha treballat a les altres activitats.

5.Conclusions.

L'objectiu del treball era trobar una manera d' explicar la geometria en l'espai que solucions els errors metodològics esmentats en la justificació, i que tengués un fonament pedagògic i psicològic. En aquest sentit, el treball m'ha permès conèixer la feina del matrimoni Van Hiele, que gradua els nivells de coneixement geomètric, i aporta una metodologia que seguir per botar d' un nivell a l'altre; i el treball de Vinner i Hershkowitz, que treballen la definició dels conceptes d' una manera més proactiva. En incorporar la teoria a la proposta, pensada pel curs de 2n d'ESO, he fet referència al currículum per determinar quin nivell és el que cal treballar. Les activitats plantejades han treballat aspectes sovint poc treballats a les aules. Concretament, he volgut fer molt d'èmfasis en la lògica darrera la definició de conceptes, a l'anàlisi dels cossos geomètrics i de les seves característiques, i a la comunicació com a eina per interioritzar el vocabulari típic de la matèria. Les activitats estan plantejades perquè l'alumne sigui un subjecte actiu en el seu procés d'aprenentatge, on la teoria sol sorgir dels problemes que es van plantejant, i el propi alumne cerca les seves solucions.

Per acabar, voldria fer algunes observacions de l'activitat que he fet(veure Annex I). Primer, m'ha sorprès fins a quin punt els alumnes tenen la necessitat de comprovar tot amb els llibres de text, i pens que és perquè ells pensen que aquestes activitats qualifiquen per a nota final. Hauriem de motivar que els alumnes vulguin experimentar al marge dels llibre. Segon, he pogut veure com els costa molt escriure als alumnes, ells realitzen l'activitat però després els costa molt comunicar el que han fet, i el paper de la comunicació es clau per interioritzar els conceptes. Tercer, pens que el mecanisme de exemple-contraexemple ens hagués ajudat a formalitzar molt més els conceptes després de les sessions inicials, i que a més hagués donat als alumnes una manera de procedir lògica per definir els conceptes. Finalment, destacar que els alumnes es varen mostrar motivats a treballar amb una nova metodologia i de manera cooperativa, i així m'ho varen fer saber. A més, després de les dues sessions varen incorporar el vocabulari treballat a la resta de la unitat didàctica, identificant correctament els cossos geomètrics quan sortien en altres activitats.

Referències

Alsina, A. (2012). Más allá de los contenidos, los procesos matemáticos en Educación Infantil. *EDMA 0-6. Educación Matemática en la infancia.*, 1-14.

BOIB. (2014). Decret 32/2014. En C. d'educació.

BOIB. (14 de Mayo de 2015). Decret 34/2015.

Colera, J., Gaztelu, I., i Colera, R. (2016). *Matemàtiques 2n ESO.* Anaya.

Corberán, R., Gutierrez,A., Huerta,M.P., Jaime.A, Margarit, J.B., Peñas, A., i Ruiz,E. (1994). *DIseño y evaluación de una propuesta de aprendizaje de la geometria en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele.* Madrid: CIDE.

Crowley, M. (1987). The Van Hiele Model of the Development of Geometric Thought. *Learning and Teaching Geometry, K-12*, 1-16.

Fernandes , P., & Caballero, P. (2013). ¿Yerra el niño o yerra el libro de Matemáticas? *Numeros, 83*, 131-148.

Fischbein, E. (1990). Psychology and Mathematics. En P. Nesher, & J. Kilpatrick, *Mathematics and Cognition* (págs. 1-13). Cambridge University Press.

Fuys, D., Geddes, D., i Tischler, R. (1988). *The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents.* Nacional Council of Teachers of Mathematics.

Guillén, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los solidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación Matemátics*, 103-125.

Herskowitz, R. (1990). Psychological Aspects of Learning Geometry. En N. &. Kilpatrik, *Mathematics and Cognition* (págs. 70-95). Cambridge.

Herskowitz, R., i Vinner, S. (1983). On concept formation in geometry. *Zentralblatt fur didaktik fur Mathematik*.

Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight.* N.York, USA: Academic Press.

Jaime, A., Chapa, F., i Gutierrez, Á. (1992). Definiciones de triángulos y cuadriláteros: inconsisténcias en libros de texto de E.G.B. *Epsilon, 23*, 49-62.

NCTM. (2003). *NCATE(NCTM Program Standards.* Obtenido de Standards for Secondary Mathematics Teachers: http://www.math.uri.edu/~eaton/NCATENCTM.pdf

NCTM. *Principles and Standards- Geometry*. Obtenido de NCTM.

Peterson, R. (2013). *http://www.epsilon-delta.org/2013/*. Obtenido de http://www.epsilon-delta.org: http://1.bp.blogspot.com/-

bwoZL6yLEeE/UdNPGGziczI/AAAAAAAAA0k/PbEy3uZL2q0/s1600/vase3.JPG

Romero, I., i Cañadas, M. C. (2015). Enseñanza y aprendizaje de la geometria. En P. Flores Martinez, & L. Rico Romero, *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (págs. 253-280). Piramide.

Guillen, G. (2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geometricos relativos a los solidos: ideas erroneas. *Enseñanza de las ciencias*, p.35-53.

Tall, D., i Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*.

Turégano, P. (2006). Una interpretación de la formación de conceptos y su aplicación en el aula. *Ensayos. Revista de Educación de Albacete*, 35-50.

ANNEX I: Posada en pràctica de algunes activitats de la proposta.

Les següents activitats me varen servir com a una primera pressa de contacte per fer les activitats del meu treball. Per motius de planificació de l'assignatura, vaig haver de fer les activitats sense tenir molt fonamentada la proposta, motiu pel qual, encara que inspirades en la feina, les activitats no surten de manera literal a la proposta. Les activitats es varen fer els dies 20 i 21 de març del present any.

Activitat 1:Separació de cossos rodons i poliedres i les seves característiques

Hem separat la classe de 15 alumnes en 3 grups de 5 alumnes cadascun. Cada grup té 4 objectes que ha de classificar en 2 grups, a partir d'un criteri que ells agafen.

Disposam dels següents objectes, que es mostren a la figura 12 (Grup al que li hem donat cada objecte)

- Una miniatura del Big Ben. (Grup A)
- Una botella de plàstic. (Grup A)
- Una caixa de un aparell digital. (Grup A)
- Un esborrador. (Grup A)
- Un envàs de cacau de forma cilíndrica. (Grup B)
- Una capsula de Nespresso. (Grup B)
- Un cartró de llet. (Grup B)
- Una capsa de arròs. (Grup B)
- Una caixa de aparell digital.(Grup C)
- Un envàs d'Axe.(Grup C)
- Un envàs de nata.(Grup C)
- Un bric de suc, amb forma prismàtica, però no totes les cares paral·leles. (Grup C)
- Una copa amb una base. (No entregada)

Figura 12. Activitat 1 de l'Annex.

Després es mostra el objecte no entregat, perquè té una base polièdrica, però després la copa és un cos rodó. Es a dir, l'objecte és la suma de un poliedre i un cos rodó.

Tots els grups han separat entre els que són poliedres i els que són cossos rodons. Per diferenciar-los, han sabut identificar els elements que tenen cadascun dels grups.

Per separar els poliedres, els alumnes han esmentat característiques com: tenen rectangles, tenen triangles...

Per separar els cossos rodons, els alumnes han fet esment a característiques com són: tenen cercles, o són cilindres (tots els cossos tenien forma cilíndrica, menys la capsula de Nespresso).

Després lis hem demanat dins quin grup podria entrar una pilota de futbol, i saben identificar ràpidament que la pilota de futbol és un cos rodó; però quan lis hem introduit la copa, dubten molt de com es diu el nou objecte. Alguns diuen si l'objecte entra dins una nova categoria o no, i l'anomenen "polidó" , ja que pensen que no és una cosa ni una altra. En aquest cas, es quan lis hem dit que el poliedre només és tal quan totes les cares són poligonals,i que són conceptes exclusius, i en aquest moment ja han sabut determinar fàcilment que el cos era un cos rodó.

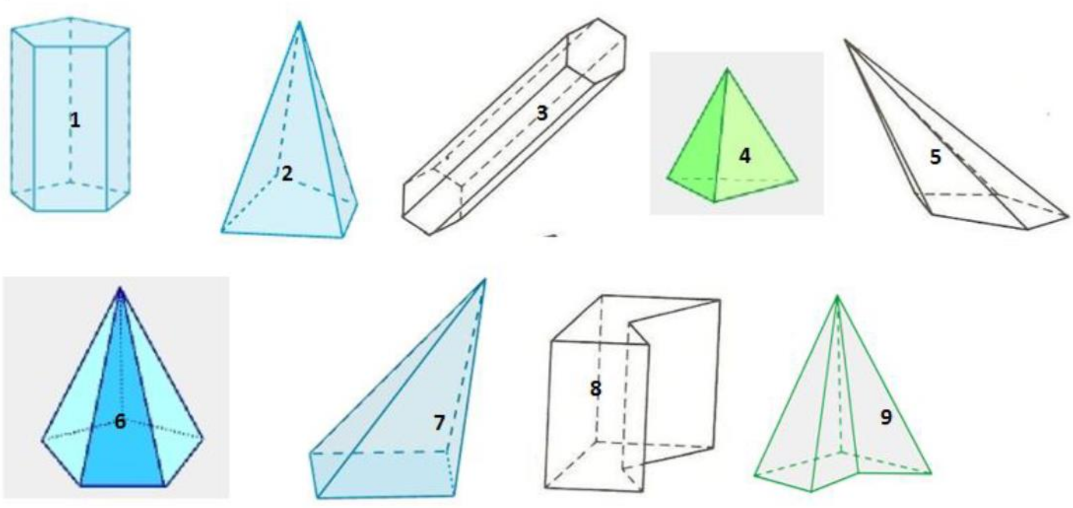
Finalment, hem fet un recull de les característiques que té cada objecte.

Com a comentari posterior a la pràctica, hem vist com el cas de la copa els ha estat problemàtic. En aquest cas, el fet d'amagar la copa s'ha fet de manera intencionada sabent que podia ser conflictiu, però un altre procedir que podríem mirar és aconseguir més objectes amb aquesta característica, i mesclar-los amb els cossos rodons i els poliedres més típics, i forçar a fer els 2 grups. Amb més temps de preparació, també seria adient incorporar més cossos rodons i poliedres, ja que els típics que es solen trobar són cilindres, ortoedres, i prismes, per tal que hi hagi més varietat d'objectes.

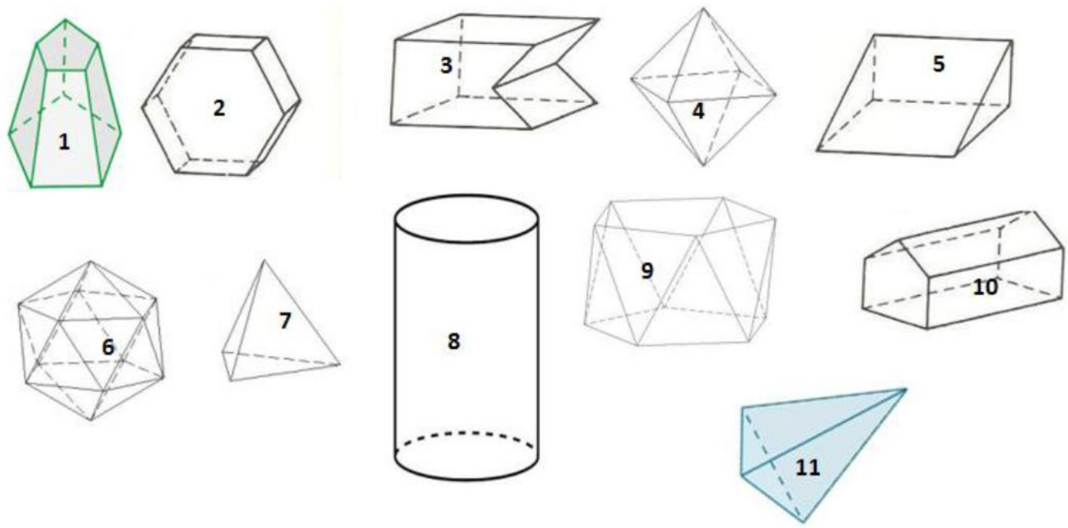
<u>Activitat 2: Consisteix entre separar entre prismes i piràmides, i quins són els trets que les diferencien.</u>

S'ha preparat una activitat introductòria amb els alumnes per a treballar la diferenciació entre els prismes i les piràmides a partir de una sèrie de exemples.

. Els 15 alumnes els dividim en grups de 5 alumnes, com havíem fet a la sessió anterior, i cada grup desenvoluparà la pràctica de manera independent. Els alumnes han de classificar els cossos geomètrics de la figura en dos grups, segons un criteri a escollir.



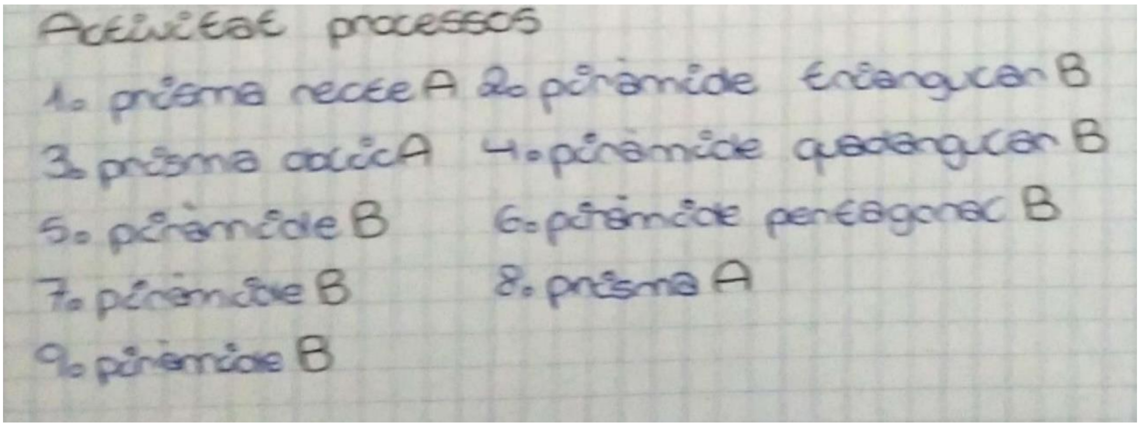
Una vegada s'ha fet això, els alumnes hauran d' escriure quin es el criteri que han agafat a un paper. Finalment, hauran de decidir quin dels cossos de la següent figura pertany als grups i quin no.



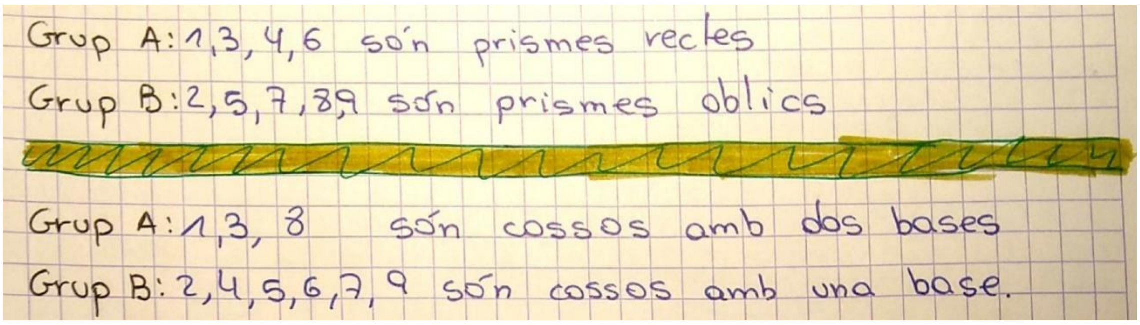
La primera part, de classificació, ha tengut els següents resultats:

- Dels 3 grups, un dels grups(grup A) no hem pogut recollir dades (no havien escrit res).
- Els dos grups restants han dividit els primers poliedres en:

  Grup B:

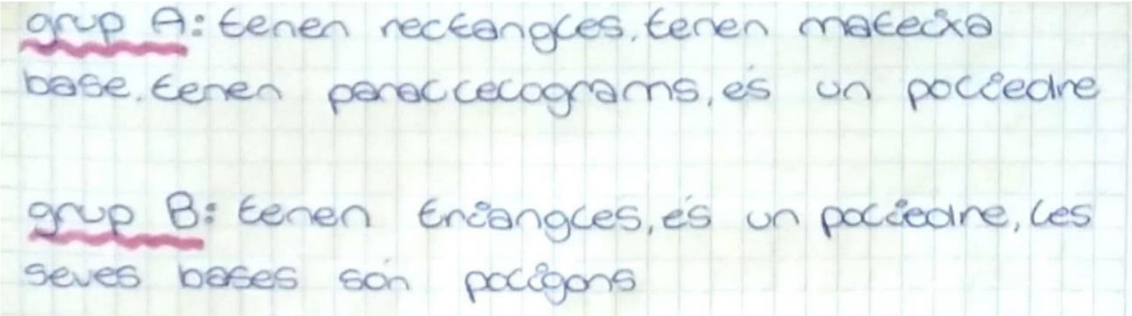


  - Grup C:



Hem pogut veure que el grup B ha separat els poliedres entre prismes i piràmides directament, mentre que el grup C ha separat primer els poliedres entre oblics i no oblics, i després, a partir d'un comentari que li he fet a un dels grups, han sentit el de les dues bases i han fet servir aquest criteri per separar els cossos.

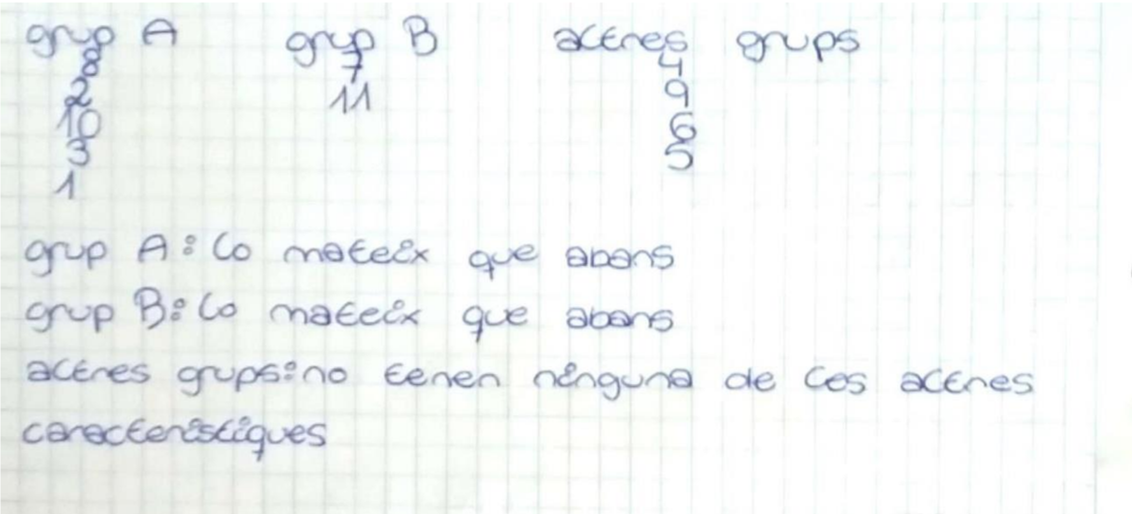
La definició que va fer servir el grup B, i el grup C no va escriure definició.


grup A: tenen rectangles, tenen mateixa base. tenen paral·lelograms, és un políedre

grup B: tenen triangles, és un políedre, les seves bases són polígons

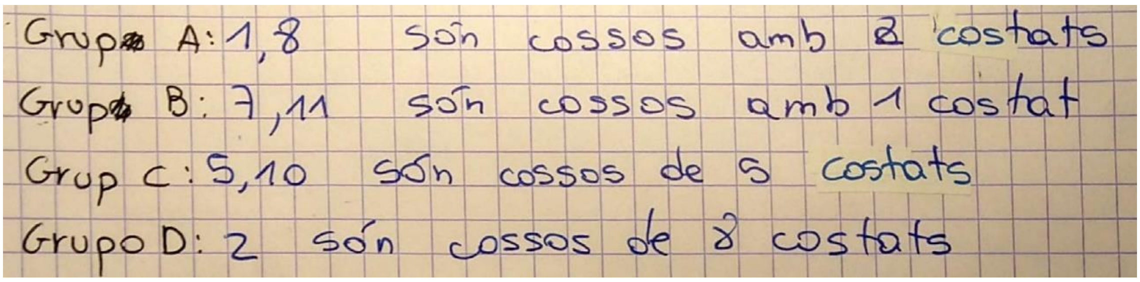
Finalment, quan han hagut de classificar les noves figures, els resultats han estat els següents:

- Grup B:


grup A	grup B	altres grups
8	7	4
2	11	9
10		6
3		5
1		

grup A: lo mateix que abans
grup B: lo mateix que abans
altres grups: no tenen ninguna de les altres característiques

- Grup C:


Grup A: 1,8 són cossos amb 2 costats
Grup B: 7,11 són cossos amb 1 costat
Grup C: 5,10 són cossos de 5 costats
Grupo D: 2 són cossos de 8 costats

Dins d'aquesta darrera activitat, el grup B comet algunes errades com la de catalogar el tronc de piràmide o el cilindre com a prismes, errors que s'hagessin corregit si haguéssim fet el mecanisme de exemple-contraexemple amb el prisma, ja que són precisament els dos primers contraexemples del treball del prisma.

En el grup C també ha dividit els grups, però els ha dividit pels costats, sense atendre a cap criteri dels anteriors. Tampoc hem sabut a que es referien per costats quan han agafat aquest criteri. Pens que un poc més d' orientació en aquest cas els hagués ajudat a tenir els criteris més clars quan feien la classificació.

Finalment, hem reunit a tots els alumnes i hem fet una petita recopilació del que havien dit tots, donant quins dels objectes són prismes i quins són piràmides(són els grups que haviem separat sense haver-los donat nom), i fent en grup un recull de característiques dels dos objectes.