Universitat
de les Illes Balears

# La importància de la resolució de problemes matemàtics dins i fora de l'aula

Bàrbara Rotger Mas

Memòria del Treball de Fi de Màster

Màster Universitari en Formació del professorat

(Especialitat/Itinerari de Matemàtiques)

de la

UNIVERSITAT DE LES ILLES BALEARS

Curs Acadèmic 2016-2017

Juny 2017

*Signatura de l'autor*

Tutor del Treball: Daniel Ruiz Aguilera

Signatura tutor

## RESUM

En aquest treball es pretén aprofundir en la resolució de problemes matemàtics dins l'aula i sobretot en activitats fora de l'aula que tenen com a principal objectiu la resolució de problemes. Es començarà amb un marc teòric on s'analitzarà que diu la normativa sobre la resolució de problemes, la qual cosa es contrastarà amb l'opinió d'alguns experts en el tema.

En segon lloc es descriuran una sèrie d'activitats extraescolars on els problemes són el principal protagonista. D'entre aquestes activitats destaquen les proves cangur, que serà l'activitat en què més s'aprofundirà donat que engloba més nivells educatius. Es farà una classificació dels enunciats d'aquesta prova segons els blocs que marca el currículum de matemàtiques de les Illes Balears per seguidament analitzar-ne els resultats. Amb l'anàlisi dels resultats no es troba un bloc concret on els alumnes tendeixen a equivocar-se sinó que depèn del tipus de pregunta i del procediment a seguir per resoldre-la. A més també es veu com el fet de ser preguntes d'opció múltiple afecta tant positivament com negativament.

Finalment es farà una petita proposta per acostar aquests tipus de problemes al dia a dia de l'aula matemàtica. En aquesta proposta s'introduiran les eines multimèdia, tan importants en l'actualitat, i es proposaran activitats en grups i individualment per tal de motivar als alumnes.

**PARAULES CLAU:** problemes, matemàtiques, proves cangur, currículum

ÍNDEX DE CONTINGUTS

# 1 INTRODUCCIÓ

*En què consisteixen realment les matemàtiques? En axiomes, en teoremes, en conceptes, en definicions, en teories, en fórmules, en mètodes…? Tots són elements essencials, però cap d'ells és el cor de la disciplina, perquè en el que realment consisteixen les matemàtiques és a plantejar problemes i trobar les seves solucions* (Halmos, 1980).

Fa 37 anys Paul Halmos definia les matemàtiques d'aquesta forma, és a dir, donava una gran importància al plantejament i la resolució de problemes. El que sembla que volia dir és que sense saber plantejar i resoldre problemes un alumne no tendrà uns coneixements complets en matemàtiques. Està clar que han d'aprendre conceptes, fórmules i mètodes però també cal saber-ho aplicar correctament i seguir un procediment diferent depenent del problema que es planteja. Aleshores, l'objectiu principal no és convertir els alumnes en uns experts a l'hora de resoldre problemes, sinó en emprar els problemes per aprendre el conjunt de competències matemàtiques, inclosa la capacitat de resoldre problemes (Calvo, 2016). Es fa evident la gran importància que té la resolució de problemes per tal d'adquirir una bona competència matemàtica, si un alumne és capaç de resoldre un problema, és perquè té una base ferma de la resta de conceptes, teoremes o fórmules.

La competència matemàtica s'entén com la capacitat d'utilitzar els coneixements matemàtics adquirits per resoldre situacions pràctiques de la vida personal, familiar i social de l'alumne, aplicant els processos cognitius adients.

Dins les dimensions de la competència hi ha els processos cognitius que impliquen la realització de les tasques o la resolució de problemes [1]. S'emmarquen en tres grans grups:

- Reproducció: fan referència a la reproducció dels coneixements practicats, com el reconeixement de tipus de processos i problemes

[1] Conselleria d'Educació i Universitat del Govern de les Illes Balears. Institut d'Avaluació i Qualitat del Sistema Educatiu (IAQSE). Avaluació de diagnòstic 2008-2009. Informe executiu.

matemàtics familiars i la realització d'operacions habituals. Aquestes destreses són necessàries per a la realització dels exercicis més senzills.

- Connexió: exigeixen que els alumnes vagin més enllà dels problemes habituals, realitzin interpretacions i estableixin interrelacions en diverses situacions, però també en contextos relativament coneguts. Aquestes destreses acostumen a presentar-se en els problemes difícils.
- Reflexió: impliquen perspicàcia i reflexió per part de l'alumne, com també creativitat a l'hora d'identificar els elements matemàtics d'un problema i establir-hi interrelacions.

Fa un bon grapat d'anys de l'afirmació de Paul Halmos sobre la importància dels problemes i també dels estudis sobre com plantejar bons problemes d'altres grans matemàtics com Polya (Polya, 1965) o Miguel de Guzmán (Guzmán, 2006). Tot i això sembla que la realitat és molt distinta. Els alumnes estan acostumats a resoldre problemes reproductius, és a dir, aquells que es resolen mecànicament mitjançant un procediment idèntic per tots els problemes de la mateixa branca. Informes recents[2] demostren aquest fet, la mitjana global dels resultats en puntuacions sobre cent en aquests tipus d'exercicis és de 67,4 punts mentre que en els exercicis que exigeixen reflexió s'obté una mitjana de 34,5 punts. Aleshores, queda clar que la puntuació es redueix a la meitat quan es tracta de reflexionar. Tot i això, aquesta puntuació també demostra que el nivell d'adquisició dels processos cognitius de la competència matemàtica és baix, ja que la mitjana dels resultats no arriba a 70 punts sobre 100.

Aleshores, alguna cosa no està funcionant perquè els informes indiquen uns mals resultats en l'adquisició de la competència matemàtica. Això pot ser degut a la dificultat a l'hora de resoldre problemes i al fet que possiblement la majoria de problemes que estan acostumats a resoldre els alumnes siguin de tipus reproductiu. Aquest fet ens duu a pensar que no es treballa suficient en la capacitat de reflexió dels alumnes i quan se'ls posa davant un problema que

[2] Conselleria d'Educació i Universitat del Govern de les Illes Balears. Institut d'Avaluació i Qualitat del Sistema Educatiu (IAQSE). Avaluació de diagnòstic 2013-2014. 2n d'educació secundària obligatòria. Informe executiu.

exigeix pensar una mica més no el sabran resoldre si no tenen una bona capacitat de reflexió. Com diu Dan Meyer (Meyer, 2017) els llibres de text no ajuden a la bona adquisició de la competència matemàtica, ja que sovint plantegen problemes reproductius on es tenen totes les dades a simple vista i només cal aplicar una fórmula. A més, també destaca el fet dels problemes dividits en apartats senzills per arribar a la solució final, i diu que no és bo perquè els alumnes no arriben a pensar en tot el problema globalment sinó només en petits trossos i per tant al final no són conscients del que resolen.

La motivació principal a l'hora de realitzar aquest treball varen ser les proves cangur, una activitat on s'han de resoldre problemes matemàtics. Els tipus de problemes de les proves cangur sembla que són una mica diferents dels que els alumnes estan acostumats a resoldre en el seu dia a dia, ja que normalment requereixen més reflexió la qual cosa s'ha vist que manca als alumnes. Tot i que la idea principal era endinsar-se dins d'aquesta prova, no es pot dur a terme sense primer realitzar una anàlisi sobre la resolució de problemes. Aleshores després de descriure el que és un problema i les seves principals característiques es realitzarà una anàlisi sobre els estudis realitzats per matemàtics experts en el tema sobre la resolució de problemes. A més, es compararan aquestes opinions amb el que diu la llei a les Illes Balears. Tot això formarà part del marc teòric del treball.

Una vegada realitzat el marc teòric el treball s'endinsarà dins un dels seus objectius principals que és l'estudi en profunditat de les proves cangur. En aquest estudi hi haurà una mica la història i el funcionament de la prova. Per continuar s'han agafat els enunciats de la prova d'enguany amb els quals s'han realitzat dues feines. La primera ha estat classificar els problemes segons els blocs de continguts que determina el currículum de les Illes Balears per a l'assignatura de matemàtiques. En segon lloc s'ha pogut accedir a les respostes dels alumnes i a partir d'això s'ha fet una anàlisi per determinar els errors i els encerts dels alumnes. A més de les proves cangur també es descriuen altres activitats extraescolars on les matemàtiques són les protagonistes.

Per acabar el treball i per tal d'ajudar als alumnes a millorar la seva capacitat de connexió i reflexió es farà una proposta d'actuació. Aquesta proposta d'actuació descriu diferents activitats per realitzar amb els alumnes dins el centre, sigui dins l'aula o en l'àmbit del centre, per tal de motivar-los en el tema de resolució de problemes i que d'aquesta forma puguin adquirir correctament la competència matemàtica.

# 2 OBJECTIUS

Els principals objectius del present treball són els següents:

- Analitzar el que diu el currículum sobre la resolució de problemes.
- Analitzar els estudis dels experts sobre la resolució de problemes.
- Descriure activitats extraescolars on la resolució de problemes és el centre d'atenció.
- Descriure el que són les proves cangur i els tipus de problemes que es resolen en aquestes proves.
    - Classificar els problemes de les proves cangur segons els blocs que estableix el currículum.
    - Analitzar els resultats de les proves cangur realitzades enguany.
- Realitzar una proposta per apropar els problemes de les cangur a l'aula de matemàtiques.

# 3 ESTAT DE LA QÜESTIÓ

## 3.1 DEFINICIÓ DE PROBLEMA

Abans d'endinsar-se dins el món de la resolució de problemes el primer que s'ha de fer és definir el que s'entén per problema dins la classe de matemàtiques. Es diu que els alumnes es troben davant un problema quan tenen davant una tasca que no saben com l'han de resoldre. És a dir, quan es troben davant una tasca per la qual no tenen cap estratègia per trobar-ne la solució i per tant l'hauran de cercar. Només en casos com el descrit es dirà que els alumnes es troben davant un problema, ja que si per exemple els és assignada una tasca de la qual tenen un algorisme per resoldre-la mecànicament, sigui una fórmula o un procediment a seguir, es dirà que els alumnes es troben davant un exercici i no davant un problema. (Calvo, 2016).

Un vertader problema és un autèntic repte. Se sap, més o menys, on es vol arribar, però s'ignora el camí a seguir. Davant d'aquesta situació existeixen diverses actituds negatives que poden obstaculitzar l'avanç: por al desconegut, nerviosisme i pressa per acabar, cert neguit davant la prova, etc. Aquestes actituds negatives poden minar seriosament la intervenció (Guzmán, 2006).

És habitual definir un problema com aquells exercicis els quals consten d'un enunciat i els alumnes han de seguir un procediment per resoldre-ho. Però no tots els exercicis amb un enunciat llarg poden ser considerats problemes segons el que s'ha definit anteriorment. Per aquest motiu se sol distingir entre exercicis i problemes; un exercici seria una tasca on l'enunciat diu "resol", "calcula", etc., mentre que un problema tal com s'ha definit seria una tasca on es dona un enunciat descrivint una situació i s'ha de trobar-hi una solució. Si aquesta tasca es pot resoldre d'una forma mecànica, no seria considerada un problema.

Aleshores, per tal de poder avançar, cal fer caure el mite dels problemes i mostrar als alumnes el que és realment un problema i el que han de fer per resoldre-ho quan es trobin davant un.

### 3.1.1 CARACTERÍSTIQUES D'UN PROBLEMA

Una vegada definit el que s'entén per problema a l'aula de matemàtiques, cal veure amb més profunditat les seves característiques. Es defineix un "bon problema" com aquell que (Calvo, 2016):

- ➢ Ajuda als alumnes a progressar en la seva autonomia, mitjançant la comprensió i selecció de la informació, la presa de decisions per la seva resolució, el desenvolupament de la creativitat i el sentit crític.
- ➢ Desenvolupa el conjunt de les competències matemàtiques i contribueix a la construcció del coneixement propi.

- ➢ Mostra el que signifiquen les matemàtiques pel coneixement humà i crea interès per elles.
- ➢ Dona sentit al fet de plantejar-se problemes i al repte que suposa resoldre'ls.

A més a més, aquests tipus d'activitats per realitzar dins l'aula han de complir les següents característiques: han de permetre experimentar, realitzar proves, construir o argumentar, han d'admetre distints nivells de resolució, han de possibilitar la discussió i la reelaboració, s'han d'emmarcar dins d'una situació amplia o han de permetre generar altres problemes i s'han de relacionar conceptes i procediments del currículum del curs al qual es troben (Calvo, 2016).

Com deia Paulo Abrantes (Abrantes, 1996), el més important és que hi hagi un ambient de resolució de problemes dins l'aula de matemàtiques. Es referiria a un ambient d'interrogació, repte i desenvolupament de la creativitat. Per tant, en el moment en el qual hi ha una interrogació sobre les passes a seguir, en aquest moment es dirà que un alumne està davant un problema matemàtic. Per resoldre-ho serà necessari experimentar, aplicar coneixements previs, realitzar conjectures i demostracions, etc.

## 3.2 QUÈ DIUEN ELS EXPERTS

No es pot parlar de resolució de problemes sense anomenar al gran matemàtic hongarès George Polya (1887-1985). L'esmentat matemàtic és l'autor d'una sèrie de llibres sobre resolució de problemes; destaca, *How to solve it* (1945) que, amb més d'un milió d'exemplars venuts, és considerat un dels llibres més populars sobre l'ensenyança de les matemàtiques. També va tenir molt èxit la seva versió en espanyol *Cómo plantear y resolver problemas* (1965) sobrepassant les 20 reimpressions. Varen ser els treballs de Polya (1945,1965) els que crearen els fonaments de la didàctica de la resolució de problemes.

Segons George Polya (Polya, 1965), per resoldre un problema són necessàries una sèrie de passes: comprendre el problema, dissenyar un pla, executar el pla i examinar la solució obtenguda.

Per comprendre el problema correctament és necessari saber quina és la incògnita i quines són les dades de les quals es disposa, a més també cal saber quina és la condició i si aquesta és suficient per determinar la incògnita.

Per tal de concebre un pla s'ha de pensar si s'han trobat anteriorment amb un problema semblant o amb el mateix problema però plantejat de forma distinta. També s'ha de pensar si es coneix algun problema relacionat amb aquest i si es coneix algun teorema que pugui ser útil per a la seva resolució; per dur a terme això cal mirar atentament la incògnita i tractar de recordar un problema que sigui familiar i que tengui la mateixa incògnita o una de similar. Una vegada s'ha trobat un problema relacionat amb el que s'ha de resoldre però que ja té solució s'ha de pensar si podria ser utilitzat, almenys el seu resultat o si es podria emprar el mateix mètode o si seria necessari introduir algun element auxiliar per tal de poder-ho emprar. Després de fer tot això cal pensar si es podria enunciar el problema d'una altra forma; si es podria plantejar encara d'una altra forma diferent. Si no es pot resoldre el problema proposat, s'ha de tractar de resoldre primer algun problema similar; per això s'ha de pensar si es podria imaginar algun problema anàleg més accessible o un problema més general o un problema particular. I, si només es considera una part de la condició, com quedaria la incògnita? També es pot mirar de canviar la incògnita o les dades, o ambdós, si és necessari, de forma que la nova incògnita i les noves dades siguin més properes entre si. Per acabar amb la concepció del pla cal demanar-se si s'han emprat totes les dades i tota la condició.

Seguidament cal executar el pla, és a dir, concebre la idea de la solució, la qual cosa no és gens fàcil. Per aconseguir-ho cal que es duguin a terme una sèrie de circumstàncies: coneixements ja adquirits, bons hàbits de pensament, concentració, i el que és més, bona sort. Així és molt més senzill executar el pla. Per això el que més es requereix és paciència. A l'hora d'executar el pla s'ha d'anar comprovant cada un dels passos que es donin. Cal examinar els detalls un rere l'altre, pacientment, fins que tot estigui perfectament clar, sense que quedi cap racó on hi pugui haver un error. Es poden assegurar de l'exactitud d'una passa del raonament per intuïció o per mitjà d'una demostració formal.

Però, és essencial que els alumnes estiguin completament segurs de cada passa donada.

Finalment és necessari examinar la solució obtenguda, o el que és el mateix mirar cap enrere. S'ha de poder verificar el resultat i el seu raonament. També cal demanar-se si es pot obtenir el resultat de diferent forma, si es pot veure de cop o si es pot emprar el resultat o el mètode en algun altre problema.

El professor juga un paper molt important a l'hora que els alumnes resolguin problemes, és qui ha d'impulsar els alumnes a resoldre problemes i, a més, ha de guiar-los en el camí cap als procediments necessaris per arribar a la solució. Una opció seria l'elaboració d'una base d'orientació explicitant els procediments. Aquesta base d'orientació seria bo que fos elaborada conjuntament per tots els alumnes, sempre amb l'ajuda del professor, i els serviria per emprar contínuament fins que arribés un moment que ho tenguessin ben interioritzat (Calvo, 2016). A continuació, es mostra una adaptació d'aquestes bases d'orientació (Villalonga & Deulofeu, 2017).

| **Base d'orientació per a la resolució de problemes** | |
|---|---|
| **Dominis** | **Dimensions** |
| Comprenc el problema | Distingesc les preguntes que s'han de respondre i entenc tot allò que es demana. |
| | Distingesc les dades i m'assegur de que les entenc. |
| | Exprès el problema per entendre'l millor fent un dibuix, esquema, diagrama i faig proves si ho consider necessari. |
| Per cada pregunta formulada | |
| Tenc un pla d'acció | Pens en alguna estratègia de resolució a partir de la representació i les proves o exemples que he fet, i tract d'aplicar-ho. |
| | Trob les dades i els raonaments o algoritmes que necessit per aplicar l'estratègia. |
| | Aplic l'estratègia i l'escric de forma que s'entengui tot el que he pensat. |
| Revís la meva tasca | Si no ho aconseguesc, detect on està el bloqueig o l'error i aplic una nova estratègia. |
| | Una vegada resolt, investig si hi ha altres solucions i les trob. Si només n'hi ha una, raon per què no n'hi ha més. Raon si es podria fer d'altres formes. |
| | Rellegesc el que he fet, i m'assegur d'explicar-ho tot, de què contest de forma raonada i que s'entén. Relacion, si fa falta, amb la resta de preguntes i tasques sol·licitades. |

Un dels matemàtics que més va estudiar les estratègies heurístiques de Polya fou Alan Schoenfeld (Schoenfeld, 1992). Es deia que aquestes estratègies eren més descriptives que prescriptives i per tant Schoenfeld es va encarregar d'estudiar aquesta problemàtica (Nieto & José, 2005). En aquesta anàlisi s'identifiquen quatre factors rellevants per la resolució de problemes:

- Recursos cognitius, són els coneixements matemàtics generals, tant de conceptes i resultats com de procediments (mètodes i algorismes).
- Heurística, és el conjunt d'estratègies i tècniques per resoldre problemes que es coneixen i s'està en capacitat d'aplicar.
- Control o metacognició, és la capacitat d'emprar el que se sap per aconseguir un objectiu.
- Creences, es refereix a aquelles creences i opinions relacionades amb la resolució de problemes i que poden afectar favorablement o desfavorablement.

Amb la implantació de la LOE [3] i en concret amb la introducció de les competències bàsiques dins del currículum van canviar molts aspectes. Un element essencial pel seu correcte desenvolupament consisteix a plantejar activitats competencialment riques, formulant preguntes que promoguin connexions, reflexions i argumentacions. Aquest fet ha donat la possibilitat d'emergir a aquells treballs que van en la línia d'enriquir les tasques d'ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques que permeten la pràctica en un ambient de resolució de problemes (Calvo, 2016).

Segons el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2003), resoldre problemes no és només un objectiu de l'aprenentatge de les matemàtiques, sinó també una de les principals formes de fer-ho. Els alumnes haurien de tenir sovint oportunitats de formular problemes complexos, d'enfrontar-se a ells i de resoldre'ls- problemes que requereixin una quantitat considerable d'esforç- i, llavors, se'ls hauria d'estimular a reflexionar sobre el seu pensament.

La resolució de problemes constitueix una part integral de tot l'aprenentatge de les matemàtiques, i per això no hauria de ser una part aïllada del programa

[3] Llei Orgànica 2/2006, de 3 de maig, d'educació, article 121. BOE núm. 106 – 4/05/2006.

d’aquesta disciplina. Els contextos dels problemes poden variar des de les experiències familiars o escolars dels alumnes a les aplicacions científiques o del món laboral. Els bons problemes hauran d’integrar múltiples temes i involucrar matemàtiques significatives.

El NCTM defineix els bons problemes com aquells que donen als alumnes l’oportunitat de solidificar i ampliar els seus coneixements i, si estan ben elegits, poden estimular l’aprenentatge de les matemàtiques.

D’entre tots aquests experts que s’ha parlat també cal destacar l’americà Dan Meyer (Meyer, 2017). És un famós professor de matemàtiques que divideix les matemàtiques en dues categories: el còmput i el raonament. Diu que el còmput és tot allò que les persones han après al llarg de la seva formació educativa però que ja han oblidat. En canvi, el raonament és més difícil d’ensenyar i és el que realment haurien d’aprendre els alumnes. Segons Meyer existeix una por generalitzada als problemes. Descriu cinc símptomes de per què es fa un mal raonament a l’aula de matemàtiques: falta d’iniciativa, falta de perseverança, falta de retenció, aversió als problemes descriptius i la necessitat de tenir una fórmula. A més, creu que els llibres de text normalment proposen uns tipus de problemes on es tenen totes les dades i l’única cosa que cal fer és col·locar-les dins d’una fórmula i ja es té el problema resolt; també és habitual veure el problema dividit en petits apartats senzills la qual cosa fa que els alumnes no pensin en el problema complet sinó només en una part. Diu que és necessari plantejar als alumnes problemes reals, sobre fets observables i que siguin ells mateixos els que es vagin formulant el problema, és a dir, no han de tenir totes les dades necessàries, sinó que han de descobrir aquestes dades per tal de poder resoldre el problema.

Les possibles solucions als cinc símptomes esmentats anteriorment són l’ús multimèdia, ajudar a la intuïció de l’alumne per tal d’arribar a la igualtat de condicions, fer les preguntes tan curtes com es pugui per tal que sorgeixin del debat entre els alumnes les preguntes més específiques, deixar als estudiants construir el problema i per tant no ajudar-los tant.

Dan Meyer és el creador dels anomenats problemes en tres actes. En el primer acte se'ls mostra als alumnes una situació, normalment es tracta d'un vídeo. A partir d'aquesta situació els alumnes s'han de fer preguntes, és a dir, han de pensar preguntes que es poden fer un cop vist el vídeo. En el segon acte, els alumnes han de demanar les dades que els fan falta per a respondre la pregunta que plantejarien. Si és possible, el professor els donarà la resposta, la qual també pot ser de forma indirecta. L'acte 3 es realitza una vegada resolt el problema i es tracta de comparar les solucions dels alumnes amb la solució real i obrir un possible debat a partir d'això. En definitiva, és una forma distinta de fer matemàtiques, la qual pot cridar l'atenció als alumnes i per tant motivar-los per resoldre problemes.

## 3.3 QUÈ DIU EL CURRÍCULUM

Segons el currículum de les Illes Balears de l'assignatura de matemàtiques[4], el primer bloc de continguts, anomenat "Processos, mètodes i actituds matemàtiques", és comú a tota l'etapa. A més de ser comú a tota l'etapa, també és comú a tota la resta de blocs, és a dir, de forma directa o indirecta tots els blocs estan relacionats amb aquest. No és un bloc que es desenvolupi en un moment determinat de l'etapa o en el qual s'estudiï una cosa en concret, sinó que ha de ser desenvolupat transversalment dins dels altres. En ell es tracta sobre la resolució de problemes i els projectes d'investigació, les actituds adequades per desenvolupar el treball científic i la utilització de mitjans tecnològics. A més a més, es coneix com l'eix vertebrador de l'assignatura de matemàtiques.

Per tal d'analitzar el que diu el currículum sobre aquest bloc en concret es començarà pels continguts. En aquests continguts es pot observar que d'alguna forma estan una mica relacionats amb les idees de Polya sobre com s'han de resoldre els problemes.

[4] Decret 34/2015, de 15 de maig, pel qual s'estableix el currículum de l'educació secundària obligatòria a les Illes Balears. Butlletí Oficial de les Illes Balears, núm. 73, de 16 de maig de 2015.

En primer lloc es parla d'una planificació del procés a l'hora de resoldre el problema tal com s'ha vist en les descripcions dels passos a seguir de Polya. També es pot observar que es parla de reformulació del problema o resolució de casos més senzills, una altra vegada això s'ha destacat dins el pla que segons Polya s'ha de dissenyar per tal de resoldre el problema. A més a més, un d'aquests continguts parla sobre els resultats i la seva reflexió el qual és el darrer punt al qual fa referència Polya.

Un altre dels continguts parla de la utilització de les eines tecnològiques en el procés d'aprenentatge. Per tant, en aquest cas es pot comparar amb el que deia Dan Meyer sobre l'ús multimèdia. És una eina que està a l'abast de tothom i que per tant s'ha d'aprofitar en el procés d'ensenyament.

Aleshores s'ha pogut comprovar que el currículum actual està cada vegada més a prop d'allò que deia Polya en els seus treballs fa ja un bon grapat d'anys i que d'alguna manera també introdueix alguna de les idees de Dan Meyer.

A més dels continguts del bloc, el currículum també defineix uns criteris d'avaluació i uns estàndards d'aprenentatge.

Els criteris d'avaluació són el referent específic per avaluar l'aprenentatge de l'alumnat. Descriuen allò que es vol valorar i que l'alumnat ha d'assolir, tant en coneixements com en competències; respon al que es vol aconseguir en cada assignatura[5].

Els estàndards d'aprenentatge són especificacions dels criteris d'avaluació que permeten definir els resultats d'aprenentatge, i que concreten allò que l'alumne ha de saber, comprendre i saber fer en cada assignatura; han de ser observables, mesurables i avaluables i permetre graduar el rendiment o meta assolit. El seu disseny ha de contribuir i facilitar el disseny de proves estandarditzades i comparables[6].

[5] Ordre ECD/65/2015, de 21 de gener per la qual es descriuen les relacions entre les competències, els continguts i els criteris d'avaluació de l'educació primària, l'educació secundària obligatòria i el batxillerat. Boletín Oficial del Estado, núm. 25, de 29 de gener de 2015.
[6] Ordre ECD/65/2015, de 21 de gener per la qual es descriuen les relacions entre les competències, els continguts i els criteris d'avaluació de l'educació primària, l'educació secundària obligatòria i el batxillerat. Boletín Oficial del Estado, núm. 25, de 29 de gener de 2015.

Una vegada definits els conceptes de criteris d'avaluació i estàndards d'aprenentatge es farà una anàlisi del que especifica sobre aquests el currículum de les Illes Balears pel Bloc 1 de continguts comuns que s'està estudiant.

El bloc de Processos, mètodes i actituds matemàtiques descriu 12 criteris d'avaluació. Cada un d'aquests criteris conté una sèrie d'estàndards d'aprenentatge, depenent de la importància i la densitat del criteri; hi ha criteris que només tenen un estàndard i n'hi ha que en tenen fins a cinc.

Analitzant aquests criteris d'avaluació i estàndards d'aprenentatge es pot assegurar que també estan fortament lligats amb les idees de Polya sobre la resolució de problemes. Entre aquests criteris i estàndards cal destacar que es parla sobre les estratègies de resolució de problemes i la comprovació d'aquests; a més dins aquest criteri, l'estàndard parla de l'anàlisi i comprensió de l'enunciat, de l'elaboració de conjectures i de les estratègies heurístiques, la qual cosa s'ha vist que és molt important. En un altre criteri parla de l'aprofundiment en problemes ja resolts mitjançant variacions de les dades; dins d'aquest criteri es troba el plantejament de nous problemes a partir d'un de ja resolt, de cercar altres formes de resoldre un problema ja resolt. També es parla del desenvolupament de les actituds personals inherents a la tasca matemàtica, dins del qual surt la capacitat de diferenciar entre exercici i problema. Finalment s'hi troba l'ús de les noves tecnologies i les diferents eines tecnològiques a l'abast dels alumnes.

Per tant, dins d'aquests criteris i estàndards s'han trobat conceptes com són: l'anàlisi de l'enunciat, estratègies de resolució, estratègies heurístiques, variacions dins del mateix problema, diferència entre exercici i problema, etc. Una vegada més, analitzant el currículum es pot observar com realment hi ha molta influència del matemàtic hongarès a l'hora d'establir tant els continguts com els criteris d'avaluació i els estàndards d'aprenentatge. Molts dels punts del currículum fan palès a les grans idees de Polya.

Tot i la gran influència d'aquestes idees dins del currículum pareix que alguna cosa no s'està fent bé. Analitzant els documents d'avaluació de diagnòstic realitzats per l'IAQSE[7] a 2n d'ESO es poden trobar uns resultats que criden l'atenció. Observant els resultats per blocs de continguts, per processos cognitius i per ítems de la competència matemàtica destaquen les puntuacions en els processos cognitius. La mitjana de puntuació sobre cent més alta amb 67,4 punts es dona en el procés de reproducció, la segueix el procés de connexió amb 45,3 punts i la puntuació més baixa amb 34,5 punts és pel procés de reflexió. Això ens indica que als alumnes els va molt millor reproduir un procediment que saben que no pensar en un nou procediment a seguir. És a dir, obtenen millors puntuacions en aquells exercicis en els quals tenen un patró a seguir per arribar a la solució que en aquells que han de pensar per tal de trobar un pla a seguir. Però, en el procés de reproducció, tot i ser el procés on s'obté una major puntuació, tampoc no es veuen uns grans resultats per part dels alumnes. Aleshores cal canviar això, ja que és molt important la capacitat de reflexionar a l'hora de resoldre problemes matemàtics i per tant els alumnes haurien d'estar capacitats per fer-ho.

# 4 ACTIVITATS AMB PROBLEMES MATEMÀTICS

A més dels problemes que els alumnes poden resoldre dins l'aula, ja sigui com a activitats complementàries a les explicacions o com a enunciats d'exàmens, existeixen altres formes de resoldre problemes. Avui en dia es duen a terme moltes activitats extraescolars, encara que relacionades amb els centres, on la resolució de problemes és el principal protagonista. A més, en aquestes activitats es poden trobar enunciats diferents dels que normalment estan acostumats els alumnes, és a dir, problemes on la reflexió juga un paper important, i que haurien de ser capaços de resoldre. A continuació es veuran algunes d'aquestes activitats com són les proves cangur, l'Estalmat, la festa de les matemàtiques i l'olimpíada matemàtica de batxillerat. S'aprofundirà especialment en les proves cangur i de la resta només es veurà una breu descripció.

[7] Conselleria d'Educació i Universitat del Govern de les Illes Balears. Institut d'Avaluació i Qualitat del Sistema Educatiu (IAQSE). Avaluació de diagnòstic 2013-2014. 2n d'educació secundària obligatòria. Informe executiu.

## 4.1 PROVES CANGUR

### 4.1.1 HISTÒRIA

Tot va començar a principis dels anys 80 quan un professor de matemàtiques de Sydney, anomenat Peter O'Halloran, va inventar un nou tipus de joc en les escoles d'Austràlia. Aquest nou joc consistia en un qüestionari d'opció múltiple que era corregit automàticament per un ordinador, aquest fet significava que milers d'alumnes podien participar en el joc a l'hora.

L'any 1991 va néixer a França, de la mà de André Deledicq i Jean Pierre Boundine, la competició matemàtica anomenada Cangur per retre homenatge als seus companys australians. En la primera edició van participar-hi 120.000 joves; aquest nombre de participants va anar incrementant amb els anys i l'any 1993 ja en foren 500.000. Aquesta elevada xifra va deixar impressionats a la resta de països d'Europa que el juny del 1993 assistiren a una reunió a París. Després d'aquesta reunió 7 països decidiren adoptar aquest mateix esquema: Bielorússia, Països Baixos, Hongria, Polònia, Romania, Rússia i Espanya. Però no és fins al 1994 quan es va crear l'associació internacional *Le Kangourou Sans Frontières (KSF)*.

Es va decidir que cada país tendria la seva pròpia organització i no hi hauria comparació de resultats entre els diferents països. Tot i això, el context tècnic era el mateix (qüestions d'opció múltiple), s'establia el mateix calendari i els mateixos premis.

El novembre de l'any 1996 es va decidir que tots els temes de competència en tots els nivells serien els mateixos per a tots els països membres de l'associació. A Budapest, a l'octubre del 1997, els 21 països que hi foren presents van adoptar el reglament definitiu definint amb precisió la participació financera i les normes que havia de seguir qualsevol membre.

Des de 1995, l'assemblea general anual de l'associació es reuneix en un país diferent, a l'octubre o al novembre. S'elegeixen els temes del concurs de l'any següent, s'intercanvien els documents i els premis i es programen uns campaments que es duen a terme a l'estiu entre els diferents països (Association Kangourou sans Frontières, 2017).

Actualment aquesta associació està formada per membres de 81 països dins dels quals està inclòs Espanya, tot i que les comunitats de parla catalana com són Catalunya, València i les Illes Balears pertanyen a l'associació amb el nom de Catalunya (Societat Catalana de Matemàtiques, 2017) i no estan incloses dins Espanya.

La data oficial per a la realització de les proves cangur arreu del món és el tercer dijous del mes de març. A les Illes Balears l'hora oficial d'inici és a les 9.30.

### 4.1.2 DESCRIPCIÓ DE LA PROVA

Les proves Cangur, en la seva versió a Catalunya, consisteixen en donar la quantitat més gran possible de respostes correctes a una llista de 30 problemes en un temps màxim de 75 minuts. Cal destacar que són molt pocs els alumnes que aconsegueixen donar resposta a tots els problemes. Aquests problemes es presenten en el format de problema amb resposta múltiple, ja que cada problema ofereix cinc opcions de resposta després de l'enunciat, on una i només una és correcta. Els alumnes han de marcar una única opció d'entre les cinc possibles. No han de justificar la resposta ni mostrar el procediment seguit per arribar-hi, tot i així disposen d'un paper en blanc per poder realitzar els càlculs i gràfics que considerin necessaris. No està permès emprar calculadora ni cap dispositiu electrònic. Tot i que des d'un principi, a l'àmbit catalanoparlant, només existien 4 nivells de dificultat corresponents a 3r i 4t d'ESO i 1r i 2n de batxillerat; a partir del 2015 es varen afegir els nivells de 5è i 6è de primària, i el 2016 s'introduïren 1r i 2n d'ESO. Per tant, el dia d'avui a Balears es compta amb 8 nivells, des de 5è de primària a 2n de Batxillerat on cada curs té el seu nivell (Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX , 2017).

La puntuació de la prova ve donada de les següent forma:

- inicialment es tenen 30 punts.
- cada pregunta encertada del primer terç dona 3 punts, una del segon terç 4 punts i una del tercer terç, 5 punts. (Hi ha 10 qüestions de cada tipus).

- una pregunta sense contestar es puntua amb 0 punts.
- una resposta incorrecta es puntua negativament amb una quarta part de la puntuació que li correspongui.

La llista de problemes que es plantegen en cada competició és elaborada per una comissió internacional formada per professors que pertanyen a totes les organitzacions de la KSF. D'aquesta manera s'aconsegueix que les proves siguin les mateixes pels estudiants de tots els països membres de l'organització. Els coneixements necessaris per resoldre els problemes són adequats per a l'edat a la qual van dirigits. Donat que no hi ha una uniformitat entre els currículums de matemàtiques de tots els països participants i que no es pretén avaluar el coneixement del currículum escolar, sinó la capacitat de raonament i l'habilitat per resoldre problemes, les eines teòriques que es necessiten per resoldre aquests problemes es corresponen amb els continguts estudiats en cursos anteriors. Un repte al qual s'enfronta la comissió internacional és la decisió del nivell de dificultat de cada problema. Aquesta decisió es pren per la intuïció dels propis membres de la comissió després d'analitzar les possibles resolucions que pugui admetre un problema, però no tenen en compte les estratègies que els estudiants puguin emprar en el context del concurs.

Tot i que les Illes Balears pertanyen al conjunt de Catalunya hi ha certs aspectes que els diferencien. Un dels més destacables és la correcció, a les Illes Balears només es fa correcció oficial dels 4 nivells superiors mentre que a Catalunya es fa la correcció oficial de tots els nivells de l'educació secundària. La resta de nivells es corregeixen tot i que no es fa de manera oficial, són els centres els encarregats de corregir i premiar els seus guanyadors.

Un altre dels aspectes que diferencia Catalunya de Balears és el fet de la Gimcana. A les Illes després de finalitzar la prova s'organitza una gimcana matemàtica per tots els alumnes participants dels 4 nivells superiors d'una durada de 40 minuts. En aquesta gimcana s'han de resoldre una sèrie de problemes encadenats per grups, i les puntuacions obtengudes per cada grup es van calculant i ponderant en funció dels alumnes de cada nivell que té cada centre. El centre que té una participació destacada rep un reconeixement.

Els alumnes que obtenen una de les deu millors puntuacions de cada nivell són premiats amb material informàtic, llibres sobre matemàtiques, o altre material escolar. A més, la UIB atorga als tres primers classificats del nivell més alt (2n batxillerat) la matrícula gratuïta del primer curs a la UIB.

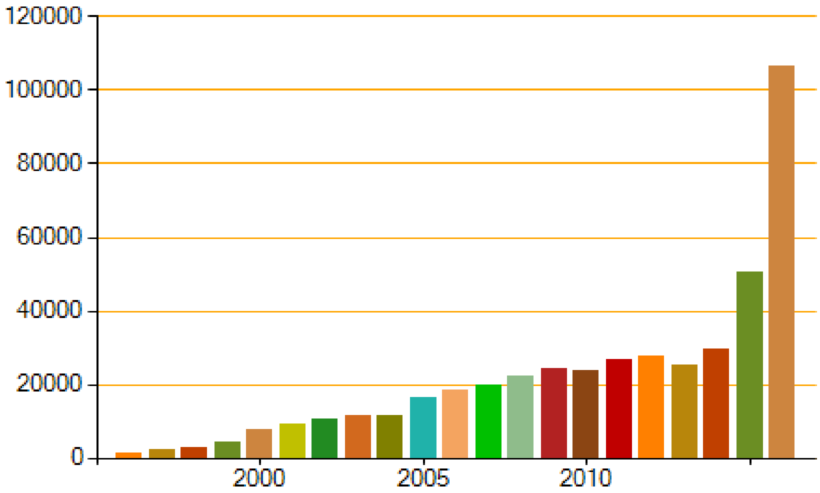
La comissió organitzadora està integrada per una dotzena de persones de la Societat Balear de Matemàtiques, l'SBM-XEIX. L'alumnat de Matemàtiques de la UIB ajuda amb el suport logístic en la preparació i durant el dia de la prova.

Aquest any 2017 a les Illes Balears també es varen realitzar les proves dels 8 nivells de dificultat, amb un total de 13.136 alumnes inscrits a totes les Illes.

### 4.1.3 PARTICIPACIÓ

Com ja s'ha dit anteriorment pel que fa a l'organització de les proves Cangur, les Illes Balears pertanyen al "districte" de Catalunya per abastar tots els territoris de parla catalana. La plana web oficial de l'associació *Kangourou Sans Frontières* (Association Kangourou sans Frontières, 2017) ofereix uns gràfics estadístics sobre la participació de cada membre de l'associació durant tots els anys que han realitzat les proves.

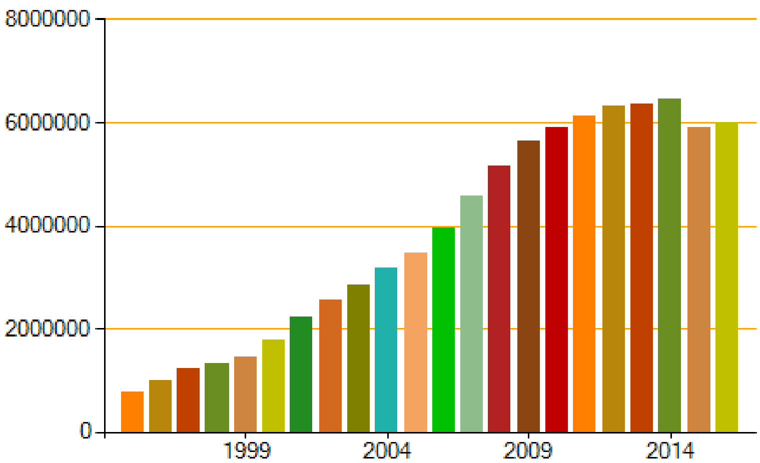
A continuació es pot observar el gràfic que mostra la participació al territori de Catalunya on pertanyen les Illes Balears. En aquest gràfic s'observa clarament un augment de la participació al llarg dels anys. El gràfic abasta un període de 20 anys, des del 1996 fins al 2016 i es veu com ha anat evolucionant la participació durant aquests anys. El primer any la participació va ser molt baixa però va augmentant any rere any, encara que algun any pareix que hi ha certa disminució. A més, també es pot observar com el 2015 hi ha un augment important dels participants i l'any següent aquest augment és encara més brusc. Del 2014 al 2015 es passa d'uns 300.000 participants a uns 500.000, però el 2016 aquest nombre de participants es duplica fins a superar el milió de participants.




***Gràfic 1*: Participació a Catalunya**

Aquest fet té una explicació raonable, ja que l'any 2015 es va introduir la prova a 5è i 6è de primària i el 2016 coincideix amb l'any de la introducció dels nivells de 1r i 2n d'ESO. Aleshores aquest brusc creixement es pot associar a aquest fet, ja que és totalment lògic que si s'amplien els nivells, vagin augmentant el nombre de participants. Tot i això, també és cert que a més, el nombre de participants dels altres nivells també ha anat augmentant, ja que és la tendència del gràfic i de cada vegada hi ha alumnes més interessats a participar en aquests tipus de proves.

També es pot observar el gràfic que mostra les estadístiques de participació de tots els membres de l'associació *Kangourou Sans Frontières,* des de l'any 1995 fins al 2016.




***Gràfic 2: Participació total***

En aquest gràfic es poden trobar moltes diferències respecte al gràfic comentat anteriorment. En primer lloc, i la diferència més important, és el fet que en l'àmbit global l'any 2015 va disminuir una mica la participació. Des del 2011 havia superat els 6 milions de participants, però el 2015 aquesta xifra disminueix i baixa dels 6 milions. Després es pot observar com el 2016 torna a augmentar una mica i sembla que es torna a fregar la xifra dels sis milions de participants.

### 4.1.4 CLASSIFICACIÓ DELS PROBLEMES

A continuació es farà una petita classificació dels problemes que es poden trobar els alumnes a les proves cangur. A partir d'això s'estudiarà la relació d'una forma o altra amb el currículum de les Illes Balears. S'han agafat els enunciats de les darreres proves cangur, realitzades dia 16 de març del 2017, i s'han classificat tenint en compte els blocs amb els quals està distribuït el currículum. Aquests blocs són: nombres i àlgebra, geometria, funcions i estadística i probabilitat. Per fer aquesta classificació només es tenen en compte els quatre darrers nivells, de 3r d'ESO a 2n de batxillerat, que són els que actualment són competitius a les Illes Balears. A més, dins cada curs s'han classificat els problemes segons la puntuació que tenen, és a dir, es diferencia entre les qüestions de 3 punts, les de 4 punts i les de 5 punts.

## 3r ESO

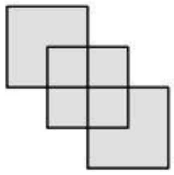
El tercer curs de l'educació secundària obligatòria és el primer on la prova és competitiva a les Illes Balears. Una vegada estudiats els enunciats es pot concloure que es tracta d'una prova amb preguntes variades tot i que no es cobreixen tots els blocs del currículum. El bloc de funcions és l'únic del qual no hi ha cap pregunta.

| | **3 punts** | **4 punts** | **5 punts** | **Total** |
|---|---|---|---|---|
| **Nombres i Àlgebra** | 6 | 5 | 6 | 17 |
| **Geometria** | 4 | 5 | 2 | 11 |
| **Estadística i Probabilitat** | 0 | 0 | 2 | 2 |

**Taula 1:Classificació dels problemes a 3r d'ESO**

En primer lloc, pel que fa a les qüestions de 3 punts, s'han trobat 6 problemes emmarcats dins el bloc de nombres i àlgebra, encara que algun d'ells a més de nombres i àlgebra també necessita una mica de lògica. Dins d'aquest bloc es poden diferenciar problemes en els quals només és necessari emprar els nombres i les seves operacions o problemes en els quals la base és l'àlgebra. Els altres quatre problemes de 3 punts pertanyen al bloc de geometria, tots ells també variats dins d'aquest bloc. Es pot diferenciar clarament entre problemes d'àrees de perímetres o d'angles. Per tant, s'ha observat que les qüestions de 3 punts es divideixen entre els dos grans blocs del currículum com són el de nombres i àlgebra i el de geometria.

**2.** Tres quadrats iguals de costat 2 cm s'han col·locat tal com mostra la figura, amb els costats paral·lels i de manera que un vèrtex del primer i un vèrtex del tercer coincideixen amb el centre del segon. Quin és el perímetre exterior de la zona ombrejada?

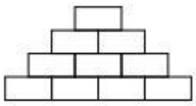


A) 10 cm  B) 12 cm  C) 24 cm  D) 16 cm  E) 20 cm

**Il·lustració 1: Exemple de problema de geometria a 3r d'ESO**

Continuant amb les qüestions de 4 punts es té que també es divideixen entre els dos mateixos blocs que les qüestions de 3 punts. En aquest cas es pot observar que cinc preguntes pertanyen a cada un dels dos blocs respectivament. Una altra vegada aquestes preguntes estan repartides dins del bloc al qual pertanyen, encara que algunes d'elles estan molt relacionades amb la lògica.

**19.** La Sara vol escriure un nombre enter positiu en cadascuna de les caselles del diagrama adjunt. Posa els nombres que vol en la fila inferior i cadascun dels altres nombres és la suma dels dos que té immediatament a sota. Quina és la quantitat màxima de nombres imparells que pot escriure la Sara?

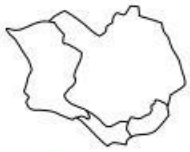


A) 7  B) 6  C) 8  D) 5  E) 4

**Il·lustració 2: Exemple de nombres i àlgebra a 3r d'ESO**

Finalment hi ha les qüestions de 5 punts que aparentment són les més complicades pel fet de valer més punts. En aquest cas hi ha 5 preguntes emmarcades dins el bloc d'àlgebra i nombres, entre les quals es tracten els percentatges, les fraccions i l'àlgebra; i on també hi ha present la lògica. A més, es poden trobar 2 preguntes de geometria on s'han de tractar propietats de figures planes i de poliedres. I per tancar les qüestions que més puntuació tenen hi ha dues preguntes que es podrien emmarcar dins el bloc d'estadística i probabilitat donat que són les típiques preguntes de combinatòria.

**21.** La Júlia té 4 colors diferents amb els quals vol pintar les 4 regions d'aquesta illa, amb la condició que dues regions amb una part de frontera en comú no poden estar pintades del mateix color. De quantes maneres diferents pot pintar aquest mapa amb el benentès que tant pot utilitzar tots 4 colors com només alguns, sempre que es compleixi la condició indicada?



A) 48 B) 12 C) 24 D) 18 E) 36

**Il·lustració 3: Exemple de problema d'estadística i probabilitat a 3r d'ESO**

Una vegada analitzada la prova de 3r ESO es pot dir que es van tractant tots els blocs del currículum excepte el bloc de funcions, això es pot deure a simple coincidència o al fet que aquest bloc als primers cursos de l'educació secundària obligatòria es tractat molt per damunt, és a dir, es veuen els conceptes bàsics però no es veuen moltes més coses.

Una altra característica destacable és la detecció que encara que es toquen quasi tots els blocs del currículum abunden les preguntes de nombres i àlgebra i de geometria.

## 4t ESO

A continuació es classificaran els problemes del nivell pertanyent a 4t d'ESO. Com ha passat al nivell anterior, en aquest també es troben problemes variats dins dels blocs del currículum excepte el bloc de funcions que no en conté cap.

| | 3 punts | 4 punts | 5 punts | Total |
|---|---|---|---|---|
| **Nombres i Àlgebra** | 6 | 7 | 5 | 18 |
| **Geometria** | 4 | 2 | 4 | 10 |
| **Estadística i Probabilitat** | 0 | 0 | 2 | 2 |

**Taula 2: Classificació dels problemes a 4t d'ESO**

Començant per les qüestions de 3 punts, tal com passava amb les de 3r d'ESO es té que 6 de les preguntes pertanyen al bloc de nombres i àlgebra i les 4 restants pertanyen al bloc de geometria. En aquest cas les preguntes de geometria tenen més a veure amb els triangles, àrees, perímetres i les seves respectives característiques. Pel que fa a les preguntes que pertanyen al bloc de nombres i àlgebra es poden trobar preguntes relacionades amb les hores, amb percentatges o amb fraccions.

**1.** Quina hora és quan han passat 20 hores i 17 minuts després de les 20.17 h?

A) 19.34 h B) 17.34 h C) 14.34 h D) 18.34 h E) 16.34 h

**Il·lustració 4: Exemple de nombres i àlgebra a 4t d'ESO**

El bloc intermedi de preguntes de 4 punts també es pot classificar entre els dos blocs habituals, encara que aquí es pot trobar una pregunta la qual es podria resoldre emprant combinatòria i per tant l'emmarcaríem dins del bloc d'estadística i probabilitat. Per tant, així es tenen 7 qüestions del bloc de nombres i àlgebra, entre les quals hi ha fraccions, percentatges o àlgebra; 2 qüestions emmarcades dins el bloc de geometria amb radis, longituds de circumferència o àrees de figures planes; i, finalment una qüestió d'estadística i probabilitat.

**19.** La Núria s'ha de preparar un calendari d'entrenament de manera que corri sempre els mateixos dos dies de la setmana. A més, no vol córrer mai dos dies seguits. Quants calendaris diferents es podrà preparar?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 8 E) 16

**Il·lustració 5: Exemple d'estadística i probabilitat a 4t d'ESO**

Dins de les qüestions de 5 punts es poden observar 5 preguntes de nombres i àlgebra i 4 preguntes de geometria. La pregunta restant es pensa que no es podria emmarcar dins d'un bloc concret, ja que per resoldre-la és necessari emprar la lògica, encara que per ventura es podria emmarcar dins del bloc d'estadística i probabilitat per les característiques que presenta que podrien ser semblants a les d'una pregunta de combinatòria. Dins de les qüestions de nombres i àlgebra es poden trobar proporcionalitat, successions, operacions amb fraccions o sistemes d'equacions, entre d'altres. Pel que fa al bloc de geometria està present en aquestes qüestions mitjançant les figures planes i les seves característiques i algun políedre.

Aleshores, tal com ja s'havia observat a la prova de 3r d'ESO es pot dir que les qüestions cobreixen tots els blocs excepte el de funcions. En aquest cas les qüestions majoritàriament pertanyen al bloc de nombres i àlgebra, seguides per les qüestions emmarcades dins el bloc de geometria i finalment dues qüestions que es quedarien dins el bloc d’estadística i probabilitat.

**22.** Hi ha deu cangurs en una filera, tal com mostra el dibuix. En un moment donat, dos cangurs que estan un al costat de l’altre i es miren de cara, intercanvien els seus llocs. Per fer l’intercanvi, salten un per damunt de l’altre i segueixen mirant cap al mateix lloc que miraven. Aquests intercanvis es van repetint fins que ja no se’n poden fer més. Quants intercanvis de cangurs s’hauran fet?

A) 18 B) 21 C) 15 D) 20 E) 16

**Il·lustració 6: Exemple de pregunta de lògica a 4t d’ESO**

Un altre aspecte que es pot observar és que hi ha algunes qüestions del nivell de 4t d‘ESO que coincideixen amb preguntes de 3r d’ESO. D’aquest fet cal destacar que la majoria de les qüestions que coincideixen no tenen la mateixa puntuació a un curs que a l’altre sinó que com és obvi en el curs més baix tenen més puntuació i en el curs més alt tenen menys puntuació, encara que en alguns casos tenguin la mateixa puntuació.

## 1r Batxillerat

Una vegada estudiades les proves dels dos primers nivells s’endinsa l’estudi dins el primer curs de batxillerat. Es pot observar que la dificultat de les qüestions va en augment a mesura que es puja de nivell. Es classificaran els problemes de la mateixa forma que s’ha fet als cursos anteriors. Cal destacar que en el currículum de batxillerat no existeix el bloc de funcions tal com a 3r i 4t d’ESO, sinó que el bloc que engloba aquests tipus de continguts és el bloc d’anàlisis.

| | 3 punts | 4 punts | 5 punts | Total |
|---|---|---|---|---|
| Nombres i Àlgebra | 6 | 4 | 5 | 15 |
| Geometria | 2 | 3 | 3 | 8 |
| Anàlisis | 1 | 0 | 0 | 1 |
| Estadística i Probabilitat | 1 | 3 | 2 | 6 |

**Taula 3:Classificació dels problemes a 1r de batxillerat**

Observant les qüestions de 3 punts es pot dir que 6 d’elles pertanyen al bloc de nombres i àlgebra, 2 pertanyen al bloc de geometria, 1 al bloc d’anàlisis i una darrera al bloc d’estadística i probabilitat. Entre les que pertanyen al bloc de nombres i àlgebra es pot trobar varietat com fraccions, percentatges o expressions algebraiques entre d’altres. Dins el bloc de geometria hi ha àrees de figures planes i propietats de circumferències. La pregunta del bloc d’anàlisi es podria dir que fa referència al gràfic d’una funció, mentre que la que pertany al bloc d’estadística i probabilitat és una qüestió de probabilitat.

**5.** Quina de les imatges següents mostra la trajectòria que segueix el centre de la roda quan gira per la carretera en ziza-zaga de la figura?

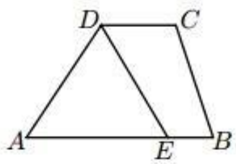
A) B) C) D) E)

**Il·lustració 7: Exemple d’enunciat de funcions a 1r de batxillerat**

Entre les qüestions de 4 punts s’hi troben quatre preguntes emmarcades dins nombres i àlgebra, entre les quals hi ha propietats dels nombres i de les potències a més d’expressions algebraiques. Seguidament es tenen 3 qüestions de geometria basades en figures planes i les seves àrees i perímetres. I, per acabar les 3 qüestions que resten pertanyen al bloc d’estadística i probabilitat, amb dues dedicades a la combinatòria i una de probabilitat.

**11.** $ABCD$ és un trapezi amb bases $AB = 50$ cm i $CD = 20$ cm. El punt $E$ és un punt del costat $AB$ amb la propietat que el segment $DE$ divideix el trapezi en dues parts de la mateixa àrea. Quina és la longitud $AE$?

A) 30 cm B) 25 cm C) 40 cm D) 35 cm E) 45 cm

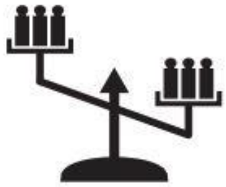



**Il·lustració 8: Exemple de geometria a 1r de batxillerat**

Finalment, entre les qüestions de 5 punts, 5 són del bloc de nombres i àlgebra, 3 són del bloc de geometria i 2 d’estadística i probabilitat. Dins de les qüestions de nombres i àlgebra cal destacar que la majoria d’elles es resolen amb més lògica que nombres, encara que aquests també són molt necessaris i a més, cal fer alguna operació. Les preguntes de geometria estan relacionades amb les figures planes i les seves característiques. La combinatòria i la probabilitat completen les preguntes que pertanyen al bloc d’estadística i probabilitat.

**27.** Hem posat a l'atzar tres pesos en cada plat d'una balança. Les masses són 101, 102, 103, 104, 105 i 106 grams. Quina és la probabilitat que el pes de 106 grams estigui al plat que més pesa?

A) Un 90% B) Un 100% C) Un 95% D) Un 75% E) Un 80%



**Il·lustració 9: Exemple d'estadística i probabilitat a 1r de batxillerat**

Una vegada emmarcats cada un dels problemes dins els seus respectius blocs es pot dir que en aquest curs de 1r de batxillerat ja es cobreixen tots els blocs, uns en menor mesura que els altres però hi són tots presents. Es pot observar que, de la mateixa forma que passava amb 3r i 4t d'ESO, la majoria dels problemes estan repartits entre els blocs de nombres i àlgebra i geometria. Però, en aquest cas han incrementat el nombre de preguntes relacionades amb l'estadística i la probabilitat i, fins i tot, apareix una pregunta relacionada amb els gràfics, dels quals no se n'havia trobat cap en els cursos anteriors.

També cal destacar que alguns dels enunciats són els mateixos que a 4t d'ESO, però amb puntuacions diferents. És a dir, aquestes qüestions tenen major puntuació a 4t d'ESO que a 1r de Batxillerat, però són les mateixes. També es troben algunes preguntes que tot i no tenir l'enunciat ben igual en els dos nivells són molt semblants i es resoldrien de la mateixa forma.

## 2n Batxillerat

Per acabar aquesta anàlisi cal estudiar el que passa al darrer curs de batxillerat, el més alt dels nivells de les proves cangur.

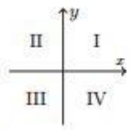
| | **3 punts** | **4 punts** | **5 punts** | **Total** |
|---|---|---|---|---|
| **Nombres i Àlgebra** | 2 | 3 | 6 | 11 |
| **Geometria** | 3 | 4 | 2 | 9 |
| **Anàlisis** | 3 | 0 | 0 | 3 |
| **Estadística i Probabilitat** | 2 | 3 | 2 | 7 |

**Taula 4: Classificació dels problemes de 2n de batxillerat**

Dins de les qüestions de 3 punts, dos enunciats pertanyen al bloc de nombres i àlgebra, tres pertanyen a geometria, tres a anàlisi i els dos restants s'engloben dins d'estadística i probabilitat. Per tant, per primera vegada s'ha trobat un bloc de qüestions on cada una d’aquestes 10 està repartida entre tots els blocs del currículum.

**10.** Quin dels quatre quadrants no conté cap punt de la gràfica de la funció lineal

$$f(x) = -3{,}5x + 7 \ ?$$

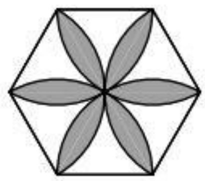



A) I B) II C) III D) IV E) Tots els quadrants en contenen.

***Il·lustració 10: Exemple de funcions*** **a 2n de batxillerat**

Pel que fa a les qüestions de 4 punts, s’han trobat 3 preguntes del bloc de nombres i àlgebra, es poden trobar decimals i polinomis entre altres propietats dels nombres. També es poden trobar 4 preguntes sobre geometria, figures planes i poliedres juntament amb les seves característiques. Les 3 preguntes restants pertanyen al bloc d’estadística i probabilitat encara que una d’elles és completament de lògica també estaria emmarcada dins d’aquest bloc.

**11.** La figura mostra un hexàgon regular amb costats de longitud 1. La flor és formada per arcs de circumferències de radi 1 amb centres en els vèrtexs de l’hexàgon. Quant val l’àrea ombrejada?



A) $\frac{\pi}{2} + \sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3} - \pi$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $2\pi - 3\sqrt{3}$ E) $\frac{2\pi}{3}$

**Il·lustració 11: Exemple de geometria a 2n de batxillerat**

Per acabar, dins de les qüestions de 5 punts n’hi ha 6 que pertanyen al bloc de nombres i àlgebra, preguntes de successions, potències o expressions algebraiques. A més, es tenen dues preguntes de geometria i dues d’estadística i probabilitat.

**23.** Considereu la successió $\{a_n\}$ amb $a_1 = 2017$ i $a_{n+1} = \dfrac{a_n - 1}{a_n}$. Quin és el valor de $a_{2017}$ ?

A) 2017 B) 1 C) $-2017$ D) $\frac{-1}{2016}$ E) $\frac{2016}{2017}$

**Il·lustració 12: Exemple de nombres i àlgebra a 2n de batxillerat**

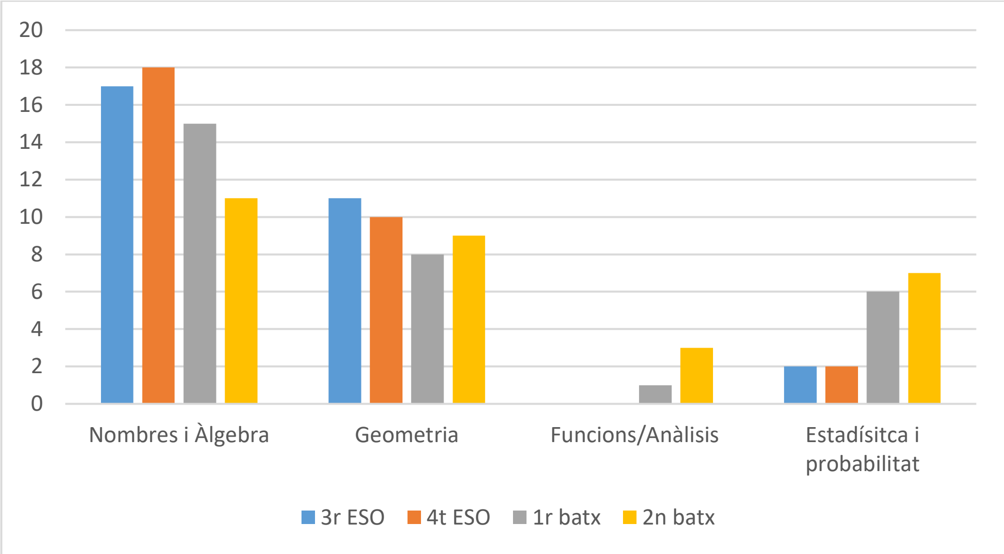
Per tant, s’ha observat que en el darrer nivell s’abasten tots els blocs del currículum, encara que com en tots els casos uns abundin més que altres. Per primera vegada es pot observar com les preguntes estan una mica repartides entre tots els blocs i no hi ha un bloc que se'n dugui tots els enunciats.

A més a més, de la mateixa forma que passava amb els cursos anteriors es té que hi ha alguns enunciats que es repeteixen en els diferents nivells tot i que les puntuacions són diferents, ja que en el nivell més baix té més puntuació que en el nivell més alt; i en alguns casos tenen la mateixa puntuació.

Aleshores, una vegada realitzada aquesta classificació i observant el Gràfic 3 es poden concloure una sèrie d'aspectes. En primer lloc es conclou que majoritàriament es tenen en compte els blocs del currículum a l'hora de proposar els enunciats, i les preguntes estan ben repartides entre aquests. En segon lloc s'ha observat que en els primers nivells abunden les preguntes de nombres i àlgebra i geometria, això podria ser degut simplement a casualitat o al fet que aquests són els temes en els quals s'aprofundeix més en els primers cursos de l'educació secundària. Però, es veu com en els darrers nivells van disminuït les preguntes que pertanyen a aquest bloc.

A mesura que es va pujant de nivell s'ha observat com es van introduint problemes d'altres blocs que abans no apareixien. En primer lloc apareixen alguns problemes de combinatòria emmarcats dins del bloc d'estadística i probabilitat, una vegada apareixen en un nivell es veu com en els següents nivells segueixen apareixent. Després apareixen els problemes de funcions i gràfics, encara que no és fins al primer nivell de batxillerat on es pot trobar un problema d'aquest bloc i finalment en el segon nivell de batxillerat ja es poden trobar uns quants problemes més.

Tot i aquesta classificació, i com ja s'ha anat comentat, hi ha problemes que es poden resoldre emprant únicament la lògica. En molts d'aquests casos es deu al fet de tenir opcions múltiples de les quals es pot anar descartant o provant. Per tant, això ens duu a pensar que per ventura canviaria molt la situació si no es tenguessin les opcions múltiples.




***Gràfic 4:*** **Classificació dels problemes de cada curs per blocs**

També es pot destacar, seguint la definició de problema que s'ha fet al principi del treball, que hi ha alguns enunciats que es podrien emmarcar com a problemes i alguns que no, ja que no necessiten moltes reflexions per trobar-ne la solució. Aquest fet també es deu en part a les opcions múltiples pel fet que moltes vegades es pot trobar la solució correcta descartant les errònies i aquest és un fet que condiciona molt els encerts. Per exemple, la il·lustració 12, que és un exemple d'un enunciat del bloc de nombres i àlgebra en la qual s'ha de calcular el valor d'un terme concret d'una successió, no estaria emmarcat dins de la definició de problema perquè simplement han d'aplicar una fórmula per tots coneguda. En canvi, l'enunciat de la il·lustració 11 sí que seria un problema tal com s'ha definit. En aquest cas als alumnes els serà necessari crear una estratègia per resoldre el problema i raonar.

### 4.1.5 Anàlisi dels resultats

S'ha pogut tenir accés a un document amb les respostes donades per 5.582 alumnes de les Illes Balears a les proves cangur d'enguany. D'aquests 5.582 alumnes, 2.005 pertanyen al nivell de 3r d'ESO, 1.923 al nivell de 4t d'ESO, 1.155 al nivell de 1r de batxillerat i 499 al nivell de 2n de batxillerat. Aquest document constava del nivell de cada alumne i de la seva resposta a cada pregunta, hi havia set tipus de resposta, les cinc respostes d'opció múltiple (a, b, c, d, e), resposta en blanc o resposta nul·la, aquesta darrera es correspon a quan un alumne senyala més d'una opció.

Per tal de poder analitzar aquests resultats de manera més còmoda el que s'ha fet ha estat primer de tot ordenar-los per nivell. Una vegada agrupats per nivell s'ha comptabilitzat per cada pregunta quants alumnes havien elegit cada una de les respostes. Aquest primer recompte s'ha fet emprant l'eina informàtica Excel. Una vegada fet aquest primer recompte es començava a tenir una idea de les preguntes més encertades i les que menys. Però, per tal de poder comparar entre els diferents nivells, ja que hi ha preguntes que pertanyen a dos nivells diferents, el que s'ha fet és passar els recomptes a percentatges. És a dir, en lloc de tenir el nombre d'alumnes que han elegit cada resposta es té el percentatge, i això permet comparar entre nivells a part d'observar molt millor les conclusions.

Una vegada s'ha tengut la taula completa per cada nivell amb les preguntes i les respostes, s'ha procedit a passar-ho a un altre programa informàtic anomenat R. Amb aquest programa el primer que s'ha fet ha estat trobar els percentatges d'encerts i els percentatges de respostes en blanc de cada nivell, els quals s'han agrupat en diferents intervals per tal d'extreure'n una sèrie de conclusions. En segon lloc s'ha procedit a cercar dins cada nivell quina era la pregunta amb major percentatge d'encert i quina la que el tenia menor. El mateix s'ha fet amb les preguntes sense resposta. A partir de totes aquestes observacions s'ha fet una petita anàlisi sobre els fets més destacats que s'han trobat.

A continuació tenim dues taules d'encerts i de respostes en blanc respectivament per a cada curs. En la Taula 5 tenim per cada curs quantes preguntes hi ha dins cada interval d'encerts. És a dir, s'han dividit els percentatges en 4 intervals, entre 80 i 100, entre 50 i 80, entre 20 i 50 i menys de 20. Llavors la taula indica per cada curs quantes preguntes pertanyen a cada interval. Observant aquesta taula es pot observar que la majoria de preguntes obtenen menys d'un 50% d'encert. Així, s'observa que només hi ha una pregunta del nivell de 4t d'ESO i una altra del nivell de 2n de batxillerat que han obtengut més d'un 80% d'encert. Entre un 50% i un 80% d'encerts tenim que hi ha unes quantes preguntes a cada nivell, on segon de batxillerat amb 7 preguntes és el que en té més. Entre un

20% i un 50% d'encert a 3r d'ESO, 4t d'ESO i 1r de batxillerat es pot dir ho compleixen la meitat de les preguntes, mentre que a 2n de batxillerat només 8 preguntes tenen aquests percentatges d'encert. En canvi, a 2n de batxillerat la meitat de les preguntes tenen menys d'un 20% d'encert, tot i que als altres cursos no es queden molt enrere.

| Percentatge\Curs | 3r ESO | 4t ESO | 1r batx | 2n batx |
|---|---|---|---|---|
| **80%-100%** | 0 | 1 | 0 | 1 |
| **50%-80%** | 6 | 4 | 4 | 7 |
| **20%-50%** | 16 | 14 | 14 | 8 |
| **0%-20%** | 8 | 11 | 12 | 14 |

**Taula 5: Preguntes encertades dins cada interval per cursos**

Pel que fa a deixar respostes en blanc tenim la taula 6 una mica més variada. A 3r i 4t d'ESO en cap pregunta més d'un 50% dels alumnes l'ha deixada en blanc. És a dir, el percentatge de preguntes sense resposta a aquests dos cursos és menor que un 50%. La cosa canvia una mica a 1r i 2n de batxillerat, en el primer curs es troben 3 preguntes on entre un 50% i un 80% dels alumnes han deixat sense respondre, mentre que al segon curs en són 8 les preguntes que oscil·len entre aquests percentatges. Aleshores, després d'aquesta observació es pot dir que al nivell més alt és on més respostes en blanc es deixen en comparació amb la resta dels nivells. Al contrari passa amb les respostes nul·les, el nivell més alt és on hi ha menys respostes nul·les si es compara amb els nivells inferiors.

| Percentatge\Curs | 3r ESO | 4t ESO | 1r batx | 2n batx |
|---|---|---|---|---|
| **80%-100%** | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **50%-80%** | 0 | 0 | 3 | 8 |
| **20%-50%** | 12 | 18 | 17 | 11 |
| **0%-20%** | 18 | 12 | 10 | 11 |

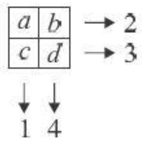
**Taula 6:Preguntes en blanc dins cada interval per cursos**

Després d'aquesta primera anàlisi, tal com ja s'ha esmentat anteriorment s'ha analitzat per cursos quina era la pregunta amb més percentatge d'encert i quina amb menys. De la mateixa forma s'ha procedit amb les respostes en blanc. Vegem idò aquesta anàlisi distingint entre els distints nivells.

**3r d'ESO**

A 3r d'ESO la pregunta amb més encerts és la pregunta 7 amb un 76,6% d'encerts. Es tracta d'una pregunta emmarcada dins del bloc de nombres i àlgebra, per resoldre-la es pot plantejar un sistema d'equacions i anar descartant les diferents respostes.

**7.** Tenim 4 nombres $a$, $b$, $c$ i $d$ col·locats en una graella $2 \times 2$. Si fem la suma de cada fila i de cada columna, obtenim els resultats indicats. Quina afirmació és certa?




A) $b$ és igual a $c$. B) $a$ és més gran que $d$. C) $a$ és igual a $d$.
D) $a$ és més petit que $d$. E) $c$ és més gran que $b$.

Per tant, el gran percentatge d'encerts d'aquesta pregunta pot ser degut al fet de tenir múltiples opcions de resposta. De totes maneres aquesta pregunta no tendria molt de sentit sense aquestes múltiples opcions.

En canvi, la pregunta 17 ha estat la menys encertada amb un 5,54% d'encerts. Aquesta pregunta també pertany al bloc de nombres i àlgebra encara que per resoldre-la també és necessària la lògica.

**17.** Quants nombres naturals $A$ tenen la propietat que només un dels dos nombres $A$ i $A + 10$ és un nombre de tres xifres?
A) 10 B) Cap C) 19 D) 20 E) 9

Està clar que per resoldre aquesta pregunta cal pensar i en aquest cas pareix que els alumnes no ho han fet suficientment perquè només un 5,54% l'ha encertada. El que més crida l'atenció és que un 40,3% dels alumnes ha elegit la resposta B) Cap. Això pot dur a pensar que com que aquesta resposta és diferent de la resta de respostes els alumnes s'han decantat per elegir-la sense aturar-se a pensar si realment era la correcta. També es pot deure a una falta de raonament per part dels alumnes ja que si només han pensat uns quants nombres i cap ho complia no han anat més enllà; o simplement a una falta de comprensió de l'enunciat.

Pel que fa a les preguntes deixades en blanc, tenim que la pregunta 13 ha estat la que més vegades han deixat sense contestar els alumnes amb un 38,95%.

**13.** Un full de paper rectangular té un perímetre de 252 cm. El pleguem tres vegades, cada vegada per la meitat del costat llarg del rectangle o dels rectangles successius, i només al final obtenim un quadrat. Quina era la longitud inicial del costat llarg del full de paper?

A) 116 cm B) 100 cm C) 104 cm D) 108 cm E) 112 cm

A més, es pot dir que aquesta pregunta també és una de les que ha rebut menys encerts amb un 13,32%. Està emmarcada dins del bloc de geometria tot i que també són necessàries algunes nocions d'àlgebra per tal d'arribar a la solució. Aquesta pregunta es pot dir que correspon a un problema tal com ha estat definit al principi d'aquest treball. És a dir, no es pot arribar a la solució tan fàcilment, ja que no es té cap patró per seguir, sinó que primer s'ha de pensar un pla per tal de poder-ho resoldre i després anar continuant amb les passes necessàries per arribar a la solució.

La pregunta 1 ha estat la que menys han deixat en blanc els alumnes amb un 1,4%. Això pot venir motivat per un parell de fets, un d'ells seria que és la primera pregunta i per tant els alumnes s'esforcen per contestar-la. En segon lloc podria ser perquè realment l'han sabuda respondre. Tot i no ser la pregunta més encertada té un 68,03% d'encerts, per tant és una de les més encertades.

**1.** La Carla sap que $1111 \times 1111 = 1234321$. Quin és el valor de $2222 \times 2222$?

A) 9874568 B) 4568654 C) 4321234 D) 2468642 E) 4937284

Aquesta pregunta també correspon al bloc de nombres i àlgebra, per trobar la solució calia veure que el valor de la multiplicació provenia de multiplicar el valor de la primera multiplicació per 4 i tot i que la majoria ho han encertat, un 21,95% ha pensat que només s'havia de multiplicar per 2 la qual cosa és un error típic que solen cometre els alumnes en aquests casos.

**4t d'ESO**

Canviat de nivell, a 4t d'ESO la pregunta amb major nombre d'encerts és la pregunta 1 amb un 86,9% d'encerts. Aquesta pregunta pertany al bloc de nombres i àlgebra on s'han de realitzar operacions amb magnituds.

**1.** Quina hora és quan han passat 20 hores i 17 minuts després de les 20.17 h?

A) 19.34 h B) 17.34 h C) 14.34 h D) 18.34 h E) 16.34 h

En canvi, la pregunta que ha rebut menys encerts ha estat la pregunta 10 amb un 2,86% d'encerts, la qual està emmarcada dins del bloc de nombres i àlgebra encara que necessita una mica de lògica.

**10.** Quants nombres naturals $A$ tenen la propietat que només un dels dos nombres $A$ i $A + 10$ és un nombre de tres xifres?

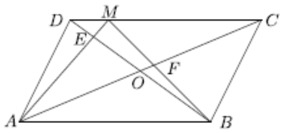
A) Cap B) 19 C) 10 D) 9 E) 20

Com es pot observar aquesta pregunta es correspon amb una pregunta de 3r d'ESO la qual també havíem observat que era la que havia rebut menys nombre d'encerts en aquell curs. En aquest cas tenim que quasi la meitat dels alumnes, un 47,3%, han elegit l'opció A) Cap, que com ja s'havia comentat anteriorment és l'única resposta no numèrica que sembla diferent de la resta. Aquesta no és una pregunta on s'hagin de fer molts de càlculs sinó que es necessita raonar una mica per arribar a la solució. Per tant, sembla que als alumnes els ha costat realitzar un bon raonament per aquesta pregunta la qual cosa per ventura també pot venir motivada per la falta de detalls a l'enunciat. És a dir, és una pregunta molt directa amb un enunciat curt que per ventura els alumnes no han acabat d'entendre.

El que més crida l'atenció és el fet que tot i els percentatges d'encerts ser molts baixos tant a 3r com a 4t, es té que un 5,54% dels alumnes de 3r han encertat mentre a 4t només ha encertat un 2,86% que s'acosta a la meitat. Seria més lògic que els alumnes de 4t que en principi tenen més coneixements que els de 3r i són una mica més madurs encertessin en major proporció que no els de 3r però no és així.

Pel que fa a les preguntes deixades en blanc, es té que la pregunta 30 és la que més han deixat en blanc els alumnes amb un 47,84%. Aquesta pregunta correspon al bloc de geometria i és una de les que té major puntuació a la prova.

**30.** La figura mostra un paral·lelogram $ABCD$ d'àrea $S$. La intersecció de les diagonals del paral·lelogram és el punt $O$. El punt $M$ es troba sobre el costat $DC$. La intersecció del segment $AM$ amb la diagonal $BD$ és el punt $E$ i la intersecció del segment $MB$ amb la diagonal $AC$ és el punt $F$. La suma de les àrees dels triangles $AED$ i $BFC$ és $\frac{S}{3}$. Quina és l'àrea del quadrilàter $EOFM$?




A) $\frac{S}{6}$ B) $\frac{S}{10}$ C) $\frac{S}{14}$ D) $\frac{S}{12}$ E) $\frac{S}{8}$

Es veu que el nivell d'aquesta pregunta ja és més elevat i es necessiten uns càlculs més complexos per resoldre-la. A més, sembla que l'enunciat dóna molta informació i això pot fer que els alumnes s'atabalin amb tantes coses i passin de respondre a la pregunta. Es podria dir que això també és un problema tal com s'ha definit anteriorment, ja que la solució no es pot trobar immediatament amb un patró sinó que s'han d'anar realitzant una sèrie de càlculs més complexos i fer-ho pas a pas fins a arribar a la solució. També cal dir que no és la pregunta que ha rebut menys encerts, sinó que un 16,74% dels alumnes ha elegit l'opció correcta. Per tant, això ens duu a pensar que només els que estaven molt segurs han contestat aquesta pregunta.

La pregunta 1 amb un 0,78% de respostes amb blanc ha estat la que menys vegades s'ha deixat sense respondre. A més, s'havia observat que aquesta era la pregunta que havia rebut més encerts la qual cosa és lògica que sigui la que menys alumnes han deixat fora contestar.

### 1r de batxillerat

Després d'haver analitzat els resultats de 3r i 4t d'ESO ens endinsam dins del batxillerat. Pel que fa al primer curs d'aquest nivell tenim que la pregunta 9 amb un 75,06% d'encerts és la pregunta més encertada. Aquesta pregunta està emmarcada dins del bloc de nombres i àlgebra i en ella s'han de fer operacions amb percentatges.

**9.** La Martina juga a escacs. Aquesta temporada ha jugat quinze partides i n'ha guanyat nou. Encara ha de jugar cinc partides més. Quin tant per cent de partides haurà guanyat en tota la temporada si guanya les cinc que falten?

A) Un 60% B) Un 65% C) Un 75% D) Un 80% E) Un 70%

En canvi, la pregunta amb menys proporció d'encerts és la pregunta 22 amb un 7,27% d'alumnes que han elegit l'opció correcta. És una pregunta que està emmarcada dins del bloc de nombres i àlgebra, ja que necessita una sèrie d'operacions, però també seria necessari fer servir una mica la lògica per arribar a la solució correcta.

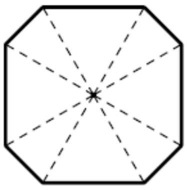
**22.** Escrivim set nombres enters positius $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ i $g$ en fila. La suma de tots set nombres és 2017 i la diferència entre dos nombres veïns a la fila és o bé 1, o bé $-1$. Quin d'aquests nombres pot ser igual a 286?

A) Pot ser $b$ i també pot ser $f$, i cap altre nombre.
B) Pot ser $c$ i també pot ser $e$, i cap altre nombre.
C) Només pot ser $d$.
D) Pot ser $a$ i també pot ser $g$, i cap altre nombre.
E) Cap dels set nombres no pot ser mai igual a 286.

Tot i això, no hi ha cap de les opcions que tengui un percentatge d'elecció molt gran, la que el té més gran en té un 17,49%. Per tant això ens duu a pensar que els alumnes estaven un poc confusos a l'hora d'elegir la resposta i per això quasi la meitat, un 48,57% van deixar-la amb blanc.

Pel que fa a la proporció de preguntes sense contestar, es té que la pregunta 26 és la que més vegades s'ha deixat en blanc amb un 60%. Aquesta és una pregunta emmarcada dins del bloc de geometria.

**26.** Una sala d'actes té forma d'octàgon, que es pot descompondre en quatre triangles equilàters i uns altres quatre triangles isòsceles, com es veu en la figura. La distància del punt central de la sala a qualsevol dels vèrtex és de 10 m. Quina és la superfície total de la sala d'actes, expressada en $m^2$?



A) $100(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ B) $200(\sqrt{2}+1)$ C) $100(\sqrt{2}+1)$ D) $200(\sqrt{3}+1)$ E) $100(\sqrt{3}+1)$

En aquest cas cal emprar les propietats dels triangles i saber calcular la seva superfície. Però, per fer-ho correctament s'ha de tenir molt clara l'estratègia a seguir per tal d'arribar a la solució, per tant aquesta pregunta també seria un problema. Cal dir que ha tengut un percentatge molt baix d'encerts, ja que tan sols un 8,74% d'alumnes han encertat la resposta correcta. Tal com s'ha observat més de la meitat l'han deixada sense contestar perquè és una de les preguntes que val més punts i si no estan segurs, s'estimen més assegurar i no contestar que no contestar erròniament i que els restin punts.

Per altra banda, la pregunta que menys han deixat en blanc és la pregunta 1 on només un 0,87% dels alumnes no han donat resposta. Es tracta d'una pregunta emmarcada dins del bloc de nombres i àlgebra que es pot resoldre fàcilment de forma algebraica.

1. La Maria té 24 €. Cadascun dels seus tres germans en té 12. Quants euros ha de donar a cadascun dels seus germans perquè tots quatre tinguin la mateixa quantitat de diners?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 1

A més amb un 73,94% d'encerts és una de les que té major proporció d'encerts. Per tant es podria considerar que aquesta és una pregunta en la qual els alumnes no tenen massa problemes per arribar a la solució correcta. Tot i això, cal dir que el fet de tenir les opcions múltiples pot ajudar a resoldre-la fàcilment, ja que només es tractaria d'anar provant fins a trobar la solució correcta.

**2n de batxillerat**

Finalment s'analitzarà el que passa a 2n de batxillerat. Amb un 92,52% d'encerts es té que la pregunta 1 és a la que més alumnes han elegit l'opció correcta. Es tracta d'una pregunta de nombres i àlgebra a la qual s'ha de fer un càlcul molt senzill per tal d'arribar a la solució correcta.

1. Quin és el resultat de l'operació $\frac{20 \cdot 17}{2+0+1+7}$ ?

A) 20,17 B) 3,4 C) 34 D) 340 E) 201,7

El que crida l'atenció és que no l'hagi encertada el 100% de l'alumnat, ja que es requereix uns càlculs molt senzills pel nivell de 2n de batxillerat. Aquest fet es pot deure a no poder emprar calculadora, els alumnes estan acostumats a realitzar tots els càlculs, per bàsics que siguin, amb la calculadora i quan han de resoldre un càlculs mà els pot jugar una mala passada i pot ser és el que els ha passat en aquesta pregunta.

Respecte a la pregunta amb menys proporció d'encerts és la darrera pregunta, és a dir la 30. Aquesta pregunta s'ha de resoldre emprant la lògica i anteriorment ha estat emmarcada dins del bloc d'estadística i probabilitat.

**30.** Els 2017 habitants d'una illa són de dues menes diferents. Cadascun o bé és mentider (i sempre diu mentida) o bé no és mentider (i sempre diu la veritat). Més de 1000 d'aquests habitants participen en un banquet asseguts en una taula rodona. Cadascun d'ells diu: «Les dues persones que tinc al costat són de menes diferents.» Quants no mentiders hi ha com a màxim a l'illa?

A) 668 B) 670 C) 1343 D) 1683 E) 1344

És una mica enrevessada i no és cap de les preguntes que els alumnes estan acostumats a resoldre habitualment. També l'emmarcaríem dins el que s'ha definit com a problema, ja que la resposta no és immediata i es necessita una bona estratègia per arribar a trobar-la. A més, cal destacar que un 50,51% dels alumnes, és a dir, la meitat, l'han deixada sense contestar.

A la pregunta 29, un 66,13% dels alumnes no han donat resposta, convertint-la així amb la pregunta que més alumnes han deixat sense contestar. Aquesta és una proporció bastant gran la qual dóna a pensar que és una de les preguntes més complicades de la prova i una de les que té més puntuació.

**29.** Quants nombres enters positius de tres xifres $abc$ hi ha de manera que $(a+b)^c$ és un nombre de tres xifres i potència de 2 d'exponent enter?

A) 18 B) 21 C) 13 D) 20 E) 15

Aquesta pregunta està emmarcada dins del bloc de nombres i àlgebra i és una mica complexa. A més, donat que és una de les preguntes de més punts és normal que si els alumnes no estan molt segurs, prefereixin deixar-la en blanc. També és una de les preguntes amb menor percentatge d'encert, ja que només un 5,41% dels alumnes han arribat a la solució correcta. Per tant, això és un senyal que aquesta era una de les preguntes més complexes.

En canvi, la pregunta 1 és la que menys han deixat en blanc, ja que només ho han fet un 0,4%. Però ja s'havia observat que aquesta pregunta era molt senzilla i que l'havien encertada un 92,59%, per tant el percentatge d'alumnes que l'havien deixada en blanc no podia ser molt gran.

Aleshores, una vegada analitzats els resultats es poden extreure una sèrie de conclusions. En primer lloc es pot dir que no s'ha trobat cap bloc concret on els alumnes obtenguin menys encerts, és a dir que els errors dels alumnes no vénen generats pel bloc al qual pertany la pregunta. En canvi, sí que es podria dir que el tipus de pregunta i el procediment a seguir per trobar-ne la solució hi té molt a veure. S'ha pogut comprovar que moltes de les preguntes que els alumnes encerten menys, o que directament no contesten, són aquelles que es classificarien com a problemes. Per resoldre aquests problemes no és necessari un simple càlcul rutinari ni es té un patró a seguir, sinó que cal raonar i crear una estratègia per poder arribar a la solució correcta.

També s'ha pogut comprovar, en algunes ocasions, el fet de ser preguntes d'opció múltiple hi juga un paper important, tant per bé com per malament. En molts de casos el fet de tenir opcions múltiples ajuda a poder resoldre la pregunta de forma diferent, ja que es poden anar descartant respostes comprovant quina és la que funciona. Però, en canvi, en alguns casos aquest fet juga una mala passada als alumnes i acaben elegint l'opció incorrecta. S'ha detectat que en els casos que hi ha 4 respostes semblants i la cinquena és una mica diferent els alumnes decideixen decantar-se per aquesta opció que és diferent jugant a una estratègia errònia que finalment els acaba perjudicant perquè no és la correcta.

## 4.2 ESTALMAT

Estalmat és un projecte de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. A les Illes Balears ho organitza la Universitat de les Illes Balears conjuntament amb la Societat Balear de Matemàtiques. Aquest projecte s'ha duit a terme per primera vegada aquest curs 2016-17 (Estalmat Illes Balears, 2017).

Es tracta de detectar, orientar i estimular de manera continuada, al llarg de dos cursos escolars, el talent matemàtic excepcional d'estudiants de 12-13 anys (alumnes de 1r i 2n d'ESO), sense desarrelar-los del seu entorn, mitjançant una orientació setmanal d'aproximadament tres hores. Es tracta de detectar els nins i nines amb altes capacitats per les matemàtiques i estimular-los perquè aprenguin mètodes, tècniques i estratègies matemàtiques fent servir una metodologia d'aprenentatge actiu i lúdic on els nins i nines són els protagonistes, s'entrena la seva capacitat de raonament i de resolució de problemes.

Les activitats de l'Estalmat acostumen a tractar temes que no formen part del currículum de l'educació secundària obligatòria a través de metodologies innovadores i engrescadores per als alumnes. Tracta de desenvolupar aspectes que generalment es deixen fora de la programació de les assignatures i que es consideren una part essencial de l'activitat matemàtica més genuïna.

Mitjançant aquest programa es desenvolupen capacitats que són difícils de desenvolupar a les classes. Es coneixen altres nins i nines amb interessos i capacitats similars. S'aprèn un vessant diferent de les matemàtiques. I el més important, els alumnes s'ho passen bé fent matemàtiques.

Per poder formar part d'aquest projecte s'han de passar unes proves de selecció. Tots els alumnes interessants en formar part d'aquest projecte es poden inscriure a les proves de selecció les quals consisteixen en una prova escrita i una entrevista personal i se solen realitzar a principis de juny. D'aquesta prova escrita no es valoren només les solucions sinó que també es valoraran els camins i raonament propis que han portat cap a la solució. La prova consisteix en la resolució de problemes pensats per detectar el talent precoç en matemàtiques. S'intenta que no siguin imprescindibles els coneixements curriculars. Les proves obeeixen a models contrastats a altres països i són comuns a tots els projectes Estalmat del territori espanyol.

Els alumnes que siguin preseleccionats a aquesta primera prova passaran una entrevista personal per tal d'avaluar el seu interès i la seva adequació al programa. En aquesta entrevista també es convoquen els pares o tutors per assegurar la seva implicació durant dos anys en el projecte.

D'entre tots els participants només 15 podran formar part del projecte. En primer lloc se seleccionen 15 alumnes provisionalment i uns altres 10 queden en llista d'espera. Després de les entrevistes, cada vegada que algú renuncia o no és acceptat, es procedeix a seleccionar un alumne de la reserva.

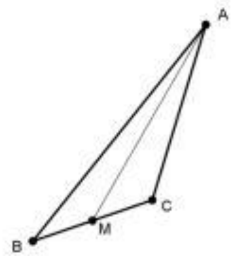
El programa és gratuït per a tots els participants. Hi ha borses de transport per aquelles famílies que les puguin necessitar (subjecte a la disponibilitat pressupostària.)

Cada curs comença amb un campament matemàtic de cap de setmana i, posteriorment, es desenvolupa en unes 20 sessions d'octubre a maig que se celebren els dissabtes al matí. A part d'això, hi ha activitats complementàries (cerimònies d'obertura i tancament, sortides educatives i lúdiques, etc.)

Aquestes sessions estan dirigides per un equip docent format per uns vint professors de Secundària i de la universitat. A més, es compta amb el suport psicopedagògic de professionals especialitzats en l'atenció a nins i nines amb altes capacitats intel·lectuals.

A continuació es pot observar un apartat d'un problema trobat a les proves de selecció de l'Estalmat. Cal dir que es tracta d'un problema amb una sèrie d'apartats relacionats els uns amb els altres i que tenen un objectiu final.

a) Consideremos un triángulo cualquiera ABC y en el lado BC su punto medio M. Dividimos el triángulo en otros dos AMB y ACM, como se ve en la figura. Si al área de AMB es 4 $cm^2$, ¿cuál es el área del otro triángulo ACM? Justifica la respuesta




**Il·lustració 13:Exemple Estalmat**

Aquest enunciat es pot dir que pertany al bloc de geometria on es tracten els triangles i les àrees. En aquest cas es pot observar com al final de la pregunta demana que es justifiqui la resposta. Per tant aquesta és una de les grans diferències d'aquests tipus d'enunciats i els de les proves cangur. A més, tampoc es tenen les opcions múltiples per tant aquí conta més el procediment realitzat fins a arribar la solució i és necessària molta més feina per part de l'alumne.

## 4.3 FESTA DE LES MATEMÀTIQUES

La festa de les matemàtiques és una activitat oberta a tots els centres de les Illes Balears que se celebra cada dos anys a un poble distint des del 2002. Aquesta festa està adreçada a alumnes de 1r i 2n d'ESO i, consta d'una prova individual i d'algunes proves en grup, com per exemple una gimcana matemàtica, que permeten descobrir quins aspectes matemàtics amaguen els pobles on es realitza (Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX , 2017).

Per poder participar-hi, s'hi ha d'implicar de forma voluntària el professorat del departament de matemàtiques del centre. Se suggereix que cada centre organitzi pel seu compte una fase selectiva dels alumnes i inscrigui els millors de cada nivell. El professor responsable serà l'encarregat d'inscriure els grups d'alumnes, que estaran formats per 3 persones del mateix nivell amb ganes de gaudir de les matemàtiques.

El principal objectiu de la festa de les matemàtiques és aconseguir que els estudiants experimentin les matemàtiques fora de l'aula, s'adonin de la importància que tenen en la vida quotidiana i adquireixin seguretat i confiança en les capacitats pròpies.

Els alumnes guanyadors de 2n d'ESO representaran les Illes Balears a l'Olimpíada Matemàtica Nacional, que enguany se celebrarà a Valladolid a finals de juny. I els alumnes guanyadors de 1r d'ESO representaran les Illes Balears a l'Olimpíada Matemàtica de l'any següent.

Observant una mica els tipus de problemes que resolen els alumnes en la gimcana en grups es pot dir que són situacions que poden observar, és a dir, aspectes del poble on es realitza la festa dels quals han de realitzar alguna operació matemàtica. A continuació es té un exemple.

B) S'han de canviar les vidrieres de dalt de tot de la façana de l'Ajuntament, les que hi ha just damunt l'escut. Sabem que són quadrades i fan 49 cm de costat. Quants de metres quadrats de vidre necessitam? Expressau el vostre raonament a continuació:

..................................................................................................................

..................................................................................................................

..................................................................................................................

**Il·lustració 14: Exemple gimcana festa de les matemàtiques**

## 4.4 OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Segons el reglament de les Olimpíades Internacionals, aquestes competicions són concursos entre joves estudiants, l'objectiu principal de les quals és estimular l'estudi de les matemàtiques i el desenvolupament de joves talents en aquesta ciència (Real Sociedad Matemàtica Española, 2017).

El concurs consta de tres fases amb un nivell de dificultat ascendent.

1. Fase de districte: normalment se celebra al final del primer trimestre en cada districte universitari; consta de dues proves escrites en les quals s'han de resoldre un total de vuit problemes. Els participants són estudiants de batxillerat menors de 19 anys que es presenten voluntàriament sense cap requisit previ.
2. Fase nacional: se celebra a finals de Febrer, consta de dues proves escrites de quatre hores i mitja de duració cada una, en el transcurs de les quals, els participants s'han d'enfrontar a un total de sis problemes proposats per un tribunal. Des de l'any 1994 la seu d'aquesta fase és itinerant, i es va celebrant cada any en una comunitat diferent.

   Els sis primers classificats en aquesta fase poden participar en la fase Internacional i els quatre primers participen a més a l'Olimpíada Iberoamericana.
3. Fase internacional: se celebra a mitjan juliol; consta de dues proves escrites de quatre hores i mitja de duració cada una, mitjançant les quals els participants han d'enfrontar-se a un total de sis problemes proposats per un tribunal.

Observant el tipus de problemes que han de resoldre els alumnes en aquestes proves es pot dir que el nivell és molt alt. Són uns enunciats molt complexos que només estan a l'abast dels millors. A continuació es té un exemple.

**Problema 1.** El triángulo $BCF$ es rectángulo en $B$. Sea $A$ el punto de la recta $CF$ tal que $FA = FB$ y $F$ está entre $A$ y $C$. Se elige el punto $D$ de modo que $DA = DC$ y $AC$ es bisectriz del ángulo $\angle DAB$. Se elige el punto $E$ de modo que $EA = ED$ y $AD$ es bisectriz del ángulo $\angle EAC$. Sea $M$ el punto medio de $CF$. Sea $X$ el punto tal que $AMXE$ es un paralelogramo (con $AM \parallel EX$ y $AE \parallel MX$). Demostrar que las rectas $BD$, $FX$, y $ME$ son concurrentes.

**Il·lustració 15: Exemple olimpíada**

D'aquest exemple es pot dir que el tipus de problema és molt diferent del que hem vist fins ara. En primer lloc destacar que es té un enunciat de geometria sense cap mena de dibuix al contrari del que s'havia vist fins ara. També cal destacar que el que es demana és una demostració, per tant serà molt important el procediment seguit i l'estratègia utilitzada. Aleshores, aquest enunciat sí que seria un problema tal com s'ha definit anteriorment.

# 5 DESENVOLUPAMENT DE LA PROPOSTA

A continuació es realitzarà una proposta per tal de portar a l'aula problemes diferents dels que es veuen habitualment. Les propostes es centrarem bàsicament en els tipus de problemes de les proves cangur. És a dir, a partir dels tipus de problemes de les cangur es faran una sèrie de propostes per treballar aquests tipus de problemes dins l'aula. Cal dir que aquesta proposta només és una primera passa per canviar els tipus de problemes que es resolen a l'aula de matemàtiques, amb ella es pretén anar introduint canvis a poc a poc fins arribar un moment que es doni als problemes la importància que realment tenen que és molta la qual cosa només s'aconseguirà amb molta feina dins l'aula.

**Resoldre els problemes de geometria amb el Geogebra**

Amb aquesta proposta es tracten dos temes a la vegada. En primer lloc es té la resolució de problemes reals, és a dir, problemes els quals els alumnes no tenen una estratègia per poder-los resoldre. En segon lloc es tracta el tema de les noves tecnologies tan important en els darrers temps, amb el qual els alumnes aprendrien a manejar l'eina del Geoegebra que és molt útil i important dins l'assignatura de matemàtiques, ja que no només serveix per als problemes geomètrics.

L'activitat consistirà a agafar problemes d'anys anteriors de les proves cangurs, problemes en els quals jugui un paper clau una figura geomètrica. Aquesta activitat es podria realitzar a tots els nivells sempre respectant-los, és a dir, fent servir el problema adequat per a cada nivell. El que haurien de fer els alumnes seria construir la figura geomètrica amb el Geogebra i a partir de la figura digital poder trobar la solució del problema.

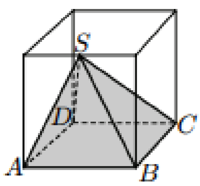
És a dir, els alumnes tendran un enunciat de les proves cangur on la protagonista és una figura geomètrica. El primer que han de fer és construir aquesta figura amb l'ajuda del Geogebra. Aquesta activitat es pot realitzar per parelles per tal de potenciar el treball cooperatiu. Donat que se suposa que els alumnes no són molt experts en la utilització d'aquesta eina tecnològica, per parelles es podrien anar ajudant un a l'altre i entre els dos treure profit de l'activitat.

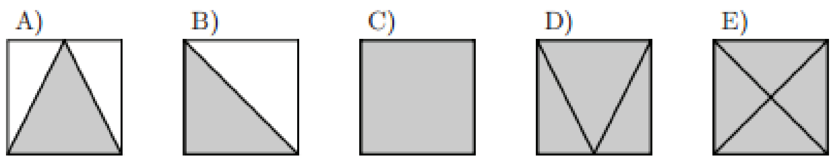
Una vegada hagin construït la figura al Geogebra han d'emprar les eines necessàries per trobar la solució de l'enunciat. És a dir, emprant diferents característiques del Geogebra han d'arribar a la solució final.

Amb aquesta activitat es pretén que els alumnes aprenguin a resoldre problemes d'una forma diferent i tal vegada més divertida que emprant paper i bolígraf. A la vegada també aprenen a emprar més profundament una eina tecnològica que de cada vegada es va fent més necessària dins l'aula de matemàtiques. I finalment aprenen a col·laborar i ajudar-se entre ells, la qual cosa és molt important.

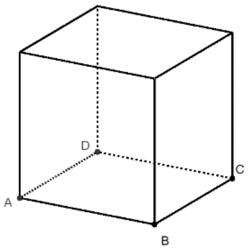
**Exemple:** Es té el següent enunciat de les proves cangur de l'any 2013 per al nivell de 2n de batxillerat.

En el cub transparent de la figura es pot veure una piràmide sòlida i opaca $ABCDS$ amb base $ABCD$, de manera que el vèrtex $S$ és en el punt mig d'una de les arestes del cub. Si ens mirem el cub des de totes les cares possibles, quina de les vistes següents no és possible?

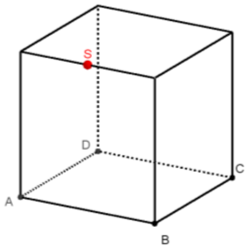


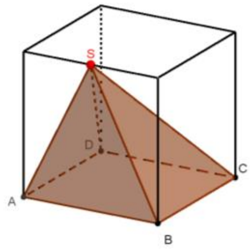

El primer que haurien de fer els alumnes és realitzar la construcció de la figura. Per fer-ho, en primer lloc caldria construir el cub transparent. Aquesta passa és molt senzilla de realitzar ja que el Geogebra té una eina que construeix el cub. Una vegada construït el cub haurien de marcar el punt S, que l'enunciat diu que és el punt mig d'una de les arestes; també hi ha una eina que troba el punt mig de qualsevol segment. Finalment cal construir la piràmide la qual també es pot construir mitjançant una eina específica.



Cub

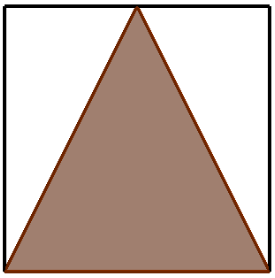


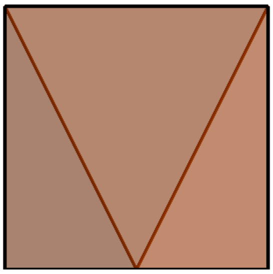
Punt S

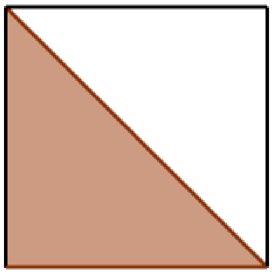


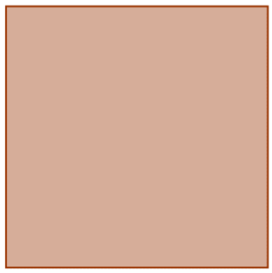
Piràmide

Un cop es té la construcció s’ha de rotar per tal de poder observar el cub des de totes les seves cares i així determinar la solució. Observant la construcció des de cada una de les seves cares es troba que la solució correcta és la E), és a dir, la cara que no és possible veure per molt que es roti el cub.


Resposta A)


Resposta D)


Resposta B)


Resposta C)

**Resoldre els problemes de geometria amb policubs**

Aquesta activitat és molt semblant a l’anterior, es podria dir que és una variació de l’activitat del Geogebra. En aquest cas no s’empraria el programa informàtic per resoldre els problemes de geometria, sinó que s’empraria un material anomenat policubs. Els policubs són peces cúbiques de plàstic que es poden unir les unes a les altres per tal de formar figures geomètriques en tres dimensions.

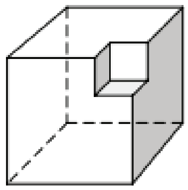
Aleshores, es plantejarien als alumnes problemes de geometria que es poguessin resoldre mitjançant la manipulació d’aquest material. Per exemple, l’exemple de l’activitat anterior no serviria. Així, es tendrien dues possibles vies per resoldre problemes geomètrics i no sempre funcionarien les dues.

Una vegada plantejat el problema els alumnes haurien de construir la figura que el problema defineix i a partir de la manipulació arribar a la solució correcta. La manipulació de la figura els pot ajudar a entendre el problema molt millor que si el tenen dibuixat a un paper.

**Exemple:** De la mateixa forma que s'ha fet a l'activitat anterior també s'agafa un problema de les proves cangur d'edicions anteriors. En aquest cas el problema correspon al nivell de 3r d'ESO.

La figura representa un cub de fusta amb una aresta de 3 cm del qual, en un vèrtex, hem retallat un petit cub d'aresta 1 cm. Quantes cares tindrà la figura que resulti de tallar un petit cub com aquest en cada un dels vèrtexs del cub gros?

A) 16 B) 20 C) 24 D) 30 E) 36



El que haurien de fer els alumnes en primer lloc es construir un cub gran mitjançant els policubs que com s'ha dit són cubs petits. Donat que l'enunciat diu que l'aresta mesura 3 cm es podria emprar aquest fet per fer que l'aresta del cub que construeixen els alumnes estigues formada per tres policubs. Així, a l'hora d'eliminar el cub d'aresta 1 cm s'eliminaria un polibub del vèrtex. Per tant, una vegada tendrien el cub format pels policubs llevarien tots els policubs dels vèrtexs i procedirien a contar-ne les cares.

A part de resoldre problemes de les cangur es poden resoldre altres problemes semblants a partir d'aquests, sempre i quan sigui possible trobar-ne la solució mitjançant la manipulació dels policubs.

### Gimcana matemàtica en l'àmbit del centre

Per poder dur a terme aquesta proposta ja seria necessària la implicació de tot el centre, ja que no seria una activitat dividida per nivells. La proposta d'aquesta activitat consisteix a dedicar un dia complet a les matemàtiques, de la mateixa forma que se celebra per exemple el dia del llibre. També es podria fer els dies abans de les vacances de nadal o pasqua que és quan es fan dies culturals o altres activitats diverses. Doncs en aquests dies es podria establir el dia de les matemàtiques.

El dia de les matemàtiques consistirà en un dia dedicat només a fer matemàtiques per tots els alumnes del centre. Al llarg del dia es realitzarà una gimcana matemàtica per equips durant la qual s'han d'anar resolent una sèrie de qüestions matemàtiques pertanyent a diferents nivells.

L'activitat es realitzarà en grups mixts, és a dir, en grups amb almenys un integrant de cada curs amb coneixements variats. El que es vol dir quan es parla de coneixements variats és que es mirarà d'equilibrar coneixements a l'hora de formar els grups. Es refereix al fet que si es posa un alumne de cada curs al grup, no es posin els millors en un mateix grup, és a dir, no hi pot haver un grup format pels millors alumnes de cada curs. D'aquesta forma es tendrien grups més o menys equilibrats i totalment heterogenis.

La gimcana constarà de problemes de diferents tipus i nivell que podran ser resolts per tots els membres del grup. Els membres pertanyents a un nivell més baix per ventura no podran resoldre totalment un problema però sí que podran ajudar. Hi haurà diferents punts de control i no tots els grups realitzaran la mateixa prova a la vegada sinó que aniran rotant. Cada grup tendrà un paper en l'ordre que han de seguir a l'hora de realitzar les proves. No es podrà començar una prova que no s'hagi finalitzat l'anterior.

Moltes de les proves tractaran de problemes reals que es pugin trobar pel centre, és a dir problemes reals que puguin observar en l'indret en el qual realitzen l'activitat.

**Exemple 1:** Un exemple seria situar un punt enmig del pati i demanar als alumnes l'angle que es forma si s'observa la finestra del primer pis des d'aquell punt. En un primer moment els alumnes no tendran cap dada i a partir de la pregunta hauran d'esbrinar quines dades són necessàries per calcular l'angle. Una vegada tenguin clares quines són les dades que necessiten ho diran al cap del punt de control; en cas de ser correctes se'ls facilitaran les dades necessàries per poder calcular l'angle i, en cas contrari tendran una altra oportunitat per esbrinar quines són les dades necessàries, però els restaran punts per haver tengut dues oportunitats.

**Exemple 2:** Una altra prova consistiria en que fossin els propis alumnes els que creessin un problema a partir de les qüestions que han anat resolent. És a dir, han de redactar l'enunciat d'un problema per tal que pugui ser resolt pels altres companys. Una vegada tenguin l'enunciat redactat el cap del punt de control el validarà, és a dir, decidirà si és vàlid o no perquè altres grups el puguin resoldre. En cas de ser correcte formarà part d'una altra de les proves que resoldran alguns grups diferents del que ha creat l'enunciat.

Al final del dia es coneixeran els resultats d'aquesta gimcana matemàtica i als tres millors grups se'ls atorgarà un reconeixement. Aquest reconeixement serà un premi en forma de material escolar.

**Problemes en tres actes**

Aquesta activitat consisteix en introduir dins l'aula els problemes en tres actes d'en Dan Meyer que s'han esmentat anteriorment. En primer lloc es projectarà el vídeo del problema a partir del qual els alumnes es poden començar a fer preguntes. En segon lloc, cada alumne es plantejarà una possible pregunta sobre el vídeo. Un cop cada alumne tengui una pregunta es formaran parelles d'alumnes per tal d'acabar de discutir quin és la pregunta que s'hauria de fer. És a dir, pot ser que els dos alumnes hagin plantejat la mateixa pregunta i per tant no tendran gaire per discutir, o pot ser que hagin plantejat dues preguntes diferents, llavors d'entre aquestes dues preguntes s'hauran de quedar amb la que els pareixi millor o amb una fusió de les dues, això és decisió de la parella. A continuació es formaran grups de 4, una altra vegada tornaran a tenir dues preguntes de les quals al final del temps n'haurà de quedar només una. Finalment cada grup de quatre alumnes tendrà una pregunta que serà plantejada al professor, a més cada grup ha de dir quines són les dades que necessita per resoldre aquesta pregunta. Després de tots els plantejaments el professor els pot donar, directa o indirectament les dades necessàries per tal de resoldre les preguntes. Així, cada grup procedirà a resoldre la pregunta amb les dades aportades pel professor, ja sigui amb un altre vídeo o amb una simple dada. Per acabar, es donarà la solució i s'anirà comprovant amb la de cada grup per tal d'obrir un petit debat entre tota la classe.

Per realitzar aquesta activitat s'empra la dinàmica de 1-2-4 en la qual l'alumne comença la tasca tot sol, la continua amb un altre company i l'acaba amb un grup de 4 alumnes. En el cas d'aquesta activitat el final és un debat conjunt per tant, a més d'emprar la dinàmica de 1-2-4 s'empra el debat en grup gran, moderat en tot moment pel professor.

**Reptes setmanals**.

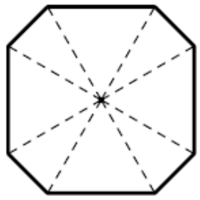
Aquesta activitat serà proposada setmanalment per part del professor i consistirà en una sèrie de reptes setmanals per anar motivant els alumnes en el tema de la resolució de problemes. Està pensada bàsicament pels cursos d'educació secundària obligatòria els quals han de resoldre setmanalment un o dos problemes de les proves cangur d'anys anteriors d'un nivell superior al seu. Aleshores, a final de setmana se'ls donaran als alumnes dos problemes, distints per cada alumne, els quals han de resoldre pas a pas. És a dir, a l'hora d'entregar la solució hi hauria d'haver totes les passes realitzades fins a arribar a aquesta i a l'hora de corregir es tendrà en compte el procediment quasi més que la solució. Donat que el procediment és molt important, als enunciats que se'ls facilitin de les proves cangur no contendran les respostes múltiples, la qual cosa és una dificultat afegida.

Entre tots els alumnes participants de cada curs s'anirà fent un rànquing per tal de motivar-los a seguir endavant. Cada setmana es mirarà qui és el primer alumne del rànquing i tendrà un avantatge sobre la resta a l'hora de resoldre el seu repte. A final de curs, els tres primers alumnes del rànquing obtendran un premi en material escolar.

**Exemple:** L'exemple que es mostra a continuació conté dos enunciats agafats de les proves cangur del nivell de 1r de batxillerat. Per tant, aquest repte seria plantejat als alumnes de 4t d'ESO i consta de dues preguntes de temàtiques diferents, una d'àlgebra i l'altra de geometria.

Quin és el valor de $\dfrac{2017^2 - 1}{2016 \times 2018}$ ?

Una sala d'actes té forma d'octàgon, que es pot descompondre en quatre triangles equilàters i uns altres quatre triangles isòsceles, com es veu en la figura. La distància del punt central de la sala a qualsevol dels vèrtex és de 10 m. Quina és la superfície total de la sala d'actes, expressada en $m^2$?



Durant el cap de setmana, els alumnes hauran de resoldre aquest repte passa a passa. És a dir, ha de quedar molt clar el procediment que han seguit per arribar a la solució. Així, passa a passa han de donar una solució final i els serà avaluat tant el procediment com la solució. No pot ser que el procediment sigui incorrecte i la solució correcta.

# 6 CONCLUSIONS

En base dels resultats de les avaluacions de diagnòstic dutes a terme als alumnes de 2n d'ESO de les Illes Balears, es pot dir a que els costa molt resoldre problemes on han de reflexionar profundament per tal d'arribar a la solució correcta. És a dir, els alumnes obtenen millors resultats en aquells exercicis reproductius, en els que simplement cal aplicar una fórmula o un procediment aprés anteriorment. Per tant el que fan és aprendre un procediment que moltes vegades ni tan sols entenen i a partir d'això van resolent el que anomenen problemes. Tot i tenir els procediments mecanitzats, quan es troben amb problemes de reflexió no els saben resoldre i per tant obtenen pitjors resultats que en els problemes de reproducció.

Partint d'una definició del que s'entén realment per problema s'ha analitzat el que diu el currículum sobre la resolució de problemes. Una vegada fet això s'ha pogut comprovar que en la majoria de casos no se sol complir el que diu el currículum sobre la resolució de problemes simplement pel fet descrit anteriorment. Els alumnes aprenen un procediment per a resoldre cada tipus de "problema" que els planteja el professor i no aprenen realment a reflexionar.

Estudiant el que diuen els experts sobre el tema s'ha arribat a una base d'orientació per a resoldre problemes (Villalonga & Deulofeu, 2017). A més analitzant els estudis del matemàtic hongarès Polya (Polya, 1989) s'ha detectat la influència de les seves idees a l'hora de redactar el currículum de matemàtiques de les Illes Balears. En el currículum destaquen moltes de les idees de Polya, però a la vista dels resultats, sembla que en la majoria d'aules no s'aplica de la forma que s'hauria de fer.

Una vegada s'ha tengut tota la part teòrica s'ha procedit a estudiar més a fons el que són les anomenades proves cangur de matemàtiques. A partir d'aquestes proves s'ha fet una classificació dels problemes d'enguany ajustant-se als blocs en què es divideix el currículum de les Illes Balears. Mitjançant aquesta classificació es pot constatar que realment els enunciats d’aquestes proves s’ajusten al que diu el currículum. Encara que als nivells inferiors no s’abasten tots els blocs del currículum sí que es fa als nivells més alts.

Seguidament s'ha pogut tenir accés al document on constaven les respostes dels alumnes a cada pregunta, sense noms, només amb el nivell al qual pertanyia cada alumne. Així es tenien els resultats de les 30 preguntes de 5.582 alumnes dividits entre cada un dels nivells. Després de treballar amb aquesta informació s'han pogut extreure una sèrie de conclusions entre les quals hi ha el fet que els enunciats plantejats difereixen bastant dels que els alumnes resolen en el seu dia a dia dins l'aula. Aquest fet juga un paper important a l’hora de realitzar la prova, tot i això també és important el fet que les preguntes siguin d’opció múltiple, ja que en molts de casos és de gran ajuda, encara que s’ha vist que en alguns casos més que ajudar-los els perjudica.

A més de les proves cangur existeixen altres activitats on predominen els problemes matemàtics. D'entre aquestes activitats s'ha fet una descripció de tres d’elles, molt diferents les unes de les altres. La festa de les matemàtiques, activitat per als alumnes de 1r i 2n d'ESO que se celebra a Mallorca cada dos anys. L'Estalmat un programa que el present curs s'ha duit a terme per primera vegada a les Illes Balears que estimula el talent matemàtic dels alumnes del primer cicle d'educació secundària. I l'olimpíada matemàtica per a alumnes de batxillerat que conté problemes a un nivell molt elevat.

D'acord amb les observacions que s'han fet sobre els resultats de les proves cangur s'ha decidit realitzar una proposta per tal d'acostar aquests tipus de problemes a les aules. Per fer-ho s'han realitzat propostes de diferents activitats, per realitzar dins l’aula, a casa o en l’àmbit del centre. En la primera proposta es pretén que els alumnes aprenguin a resoldre problemes de forma diferent emprant l'eina informàtica Geogebra. A més, a la vegada estarien aprenent molt més sobre les grans utilitats que té aquesta eina que no són poques. En segon lloc s'ha proposat una activitat molt semblant a la primera però enlloc d’emprar una eina informàtica s’empra un material manipulable anomenat policubs amb el qual es poden construir figures geomètriques en tres dimensions. Així a partir de la manipulació poden extreure moltes conclusions. Seguidament s’ha proposat una activitat en l'àmbit de centre, per acostar les matemàtiques a tots els alumnes; es tracta d'una festa matemàtica on hi participen tots els alumnes del centre. Una altra proposta consistiria en introduir dins l’aula els problemes en tres actes proposats per Dan Meyer (Meyer, 2017) i a partir dels quals els alumnes poden millorar les seves capacitats reflexives. Finalment s'ha proposat una activitat que consisteix a resoldre uns reptes setmanals i que al llarg del curs podran anar realitzant els alumnes que hi estiguin interessats.

Aquestes propostes només són una petita empenta per apropar problemes diferents a les aules de matemàtiques. Amb aquestes propostes es pretén que els alumnes passin una estona divertida alhora que van augmentant els seus coneixements sobre el món de les matemàtiques que a vegades els és tan desconegut. A més s’ha intentat que les activitats siguin motivadores per tal de cridar l’atenció dels alumnes.

Seria interessant que a poc a poc s’anés canviant el concepte de problema dins les aules i s'abordés el tema des d'una perspectiva diferent. La primera passa ja està guanyada, ja que el currículum especifica molt bé que és la resolució de problemes i com s'ha de dur a terme. Per tant, la següent passa s'hauria de donar des dels centres plantejant activitats diferents per tal que els alumnes se sentin motivats cap a les matemàtiques i especialment a l'hora de resoldre problemes i reflexionar sobre aquests que avui en dia és el moment més temut per ells.

# 7 REFERÈNCIES


Abrantes, P. (1996). El papel de la resolución de problemas en un contexto de innovación curricular. *Revista UNO, 8*, 7-18.

*Association Kangourou sans Frontières*. (2017). Recollit de Kangourou sans Frontières: http://www.aksf.org/index.xhtml

Calvo Pesce, C., Deulofeu Piquet, J., Jareño Ruiz, J., & Morera Úbeda, L. (2016). *Aprender a esneñar matemáticas en la educación secundaria obligatoria.* Madrid: Editorial Sintesis.

Centre For Mathematical Sciences. (1997-2017). *Nrich enriching mathematics*. (Cambrige: University of Cambrige (UK)) Recollit de https://nrich.maths.org

*Estalmat Illes Balears*. (2017). Recollit de http://estalmat.uib.es/

Guzmán, M. D. (2006). *Para pensar mejor.* Madrid: Pirámide.

Halmos, P. R. (1980). *The Heart of Mathematics.* American Mathematical Monthly.

Meyer, D. (2017). Recollit de http://blog.mrmeyer.com/

NCTM. (2003). Principios y Estàndares para la educación matemàtica. Sevilla: Sociedad andaluza de educación matemática Thales.

Nieto, S., & José, H. (2005). Resolución de problemes, Matemática y Computación. *Revista Venezolana de Información, Tecnologia y Conocimiento*, 37-45.

Polya, G. (1965). *Cómo Plantear y Resolver Problemas.* México: Trillas.

*Real Sociedad Matemàtica Española*. (2017). Recollit de OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA: http://www.olimpiadamatematica.es

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. A D. Grouws (Ed.), *NCTM Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 334-370). Macmillan, New York.

*Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX* . (2017). Recollit de http://www.xeix.org

*Societat Catalana de Matemàtiques*. (2017). Recollit de Cangur: http://www.cangur.org/

Villalonga, J., & Deulofeu, J. (2017). Representar problemas usando una base de orientación. *UNO Revista de didáctica de las matemáticas, 75*, 59-65.

# 8 ANNEX: CLASSIFICACIÓ DELS ENUNCIATS DE LES PROVES CANGUR 2017

A continuació es poden trobar els enunciats de les proves cangur d'aquest any dels nivells de 3r i 4t d'ESO i de 1r i 2n de batxillerat classificats segons els blocs dels currículum. Aquests enunciats encara que són els de Catalunya són els mateixos de les Illes Balears (Societat Catalana de Matemàtiques, 2017).

Les llegendes que es poden trobar tenen el següent significat:

- NA: nombres i àlgebra
- G: geometria
- F: funcions
- EP: estadística i probabilitat

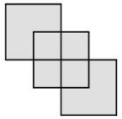
# XXII Cangur SCM   16 de març de 2017   Nivell: 3r ESO

## Qüestions de 3 punts

NA **1.** La Carla sap que $1111 \times 1111 = 1234321$. Quin és el valor de $2222 \times 2222$?

A) 9874568  B) 4568654  C) 4321234  D) 2468642  E) 4937284

G **2.** Tres quadrats iguals de costat 2 cm s'han col·locat tal com mostra la figura, amb els costats paral·lels i de manera que un vèrtex del primer i un vèrtex del tercer coincideixen amb el centre del segon. Quin és el perímetre exterior de la zona ombrejada?

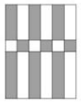


A) 10 cm  B) 12 cm  C) 24 cm  D) 16 cm  E) 20 cm

NA **3.** Les edats de la Pilar, en Robert i en Santi són més grans que 5 i més petites que 11. La Pilar és quatre anys més gran que en Robert i en Santi és dos anys més jove que la Pilar. Quants anys té en Santi?

A) 10  B) 7  C) 8  D) 9  E) 6

G **4.** La figura mostra un rectangle amb franges verticals de la mateixa amplada amb zones blanques i zones grises. Quina porció de l'àrea del rectangle és blanca?



A) $\frac{2}{3}$  B) $\frac{1}{3}$  C) $\frac{3}{4}$  D) $\frac{1}{2}$  E) $\frac{2}{5}$

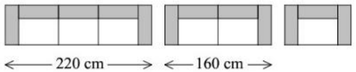
NA **5.** En Toni escriu tots els nombres de l'1 al 20 seguits en una fila i obté aquest nombre de 31 xifres:

**1234567891011121314151617181920.**

Llavors esborra 24 xifres d'aquestes 31, de manera que les 7 xifres que queden formen, en l'ordre en què han quedat, un nombre que és el més gran possible. Quin és aquest nombre?

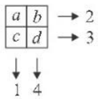
A) 9567892  B) 9818192  C) 9912345  D) 9781920  E) 9671819

G **6.** Una botiga de mobles ven sofàs i butaques fets amb mòduls prefabricats. L'amplada del sofà de tres places és de 220 cm i la del de dues places és de 160 cm. Quina és l'amplada de la butaca individual?




A) 120 cm  B) 90 cm  C) 80 cm  D) 60 cm  E) 100 cm

NA **7.** Tenim 4 nombres $a$, $b$, $c$ i $d$ col·locats en una graella $2 \times 2$. Si fem la suma de cada fila i de cada columna, obtenim els resultats indicats. Quina afirmació és certa?



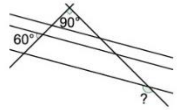

A) $b$ és igual a $c$.  B) $a$ és més gran que $d$.  C) $a$ és igual a $d$.
D) $a$ és més petit que $d$.  E) $c$ és més gran que $b$.

NA **8.** Quatre jugadors marquen gols en un partit d'handbol, i tots ells han marcat un nombre diferent de gols. De tots quatre, en Miquel és qui ha marcat menys gols. Els altres tres han marcat, entre tots tres, 20 gols. Amb aquestes dades, quants gols, com a màxim, ha marcat en Miquel?

A) 2  B) 1  C) 4  D) 5  E) 3



G **9.** En la figura teniu tres rectes paral·leles i dues rectes perpendiculars. Sabem la mesura d'un altre angle (60°). Quina és la mesura de l'angle indicat amb un signe d'interrogació?




A) 130°  B) 110°  C) 120°  D) 140°  E) 150°

NA **10.** La Berta té una certa quantitat de diners i tres varetes màgiques que només es poden utilitzar un cop. La vareta $V1$ afegeix 1 € als diners de la Berta; la vareta $V2$ resta 1 € als diners de la Berta, i la vareta $V3$ dobla la quantitat de diners que té la Berta. En quin ordre s'han d'utilitzar aquestes tres varetes, cadascuna una vegada, per a obtenir la quantitat màxima de diners?

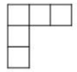
A) $V1, V3, V2$  B) $V3, V2, V1$  C) $V2, V3, V1$  D) $V2, V1, V3$  E) $V1, V2, V3$

## Qüestions de 4 punts

G **11.** En el dibuix, la línia discontínua i el camí negre formen set triangles equilàters. Sabem que la llargada de la línia discontínua és 200 m. Quina és la longitud del camí negre?

A) 400 m  B) 250 m  C) 450 m  D) 350 m  E) 300 m

NA **12.** Els nombres 1, 2, 3, 4, i 5 s'han d'escriure en les cinc caselles de la figura. Si llegim els tres nombres que estan en columna de dalt a baix, els llegim en ordre creixent. Si llegim els tres nombres que estan en fila d'esquerra a dreta, també els llegim en ordre creixent. De quantes maneres es pot aconseguir emplenar les caselles amb aquestes condicions?



A) 4  B) 8  C) 6  D) 3  E) 5

NA **13.** Un full de paper rectangular té un perímetre de 252 cm. El pleguem tres vegades, cada vegada per la meitat del costat llarg del rectangle o dels rectangles successius, i només al final obtenim un quadrat. Quina era la longitud inicial del costat llarg del full de paper?

A) 116 cm  B) 100 cm  C) 104 cm  D) 108 cm  E) 112 cm

NA **14.** La Mònica tria 5 nombres diferents. Després multiplica cadascun d'ells o bé per 2 o bé per 3, i d'aquesta manera obté cinc resultats. Quin és el nombre mínim de resultats diferents que la Mònica pot obtenir?

A) 1  B) 2  C) 5  D) 4  E) 3

G **15.** Hem dividit en quatre parts iguals un costat d'un triangle equilàter, i després, ajudats amb el traçat de línies paral·leles, hem acabat dissenyant el logotip que mostra la figura. Quina part del triangle inicial està ocupada pel color blanc de la M?

A) $\frac{3}{4}$  B) $\frac{3}{5}$  C) $\frac{1}{2}$  D) $\frac{5}{7}$  E) $\frac{2}{3}$

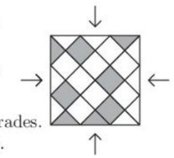
NA **16.** En Robert escriu quatre nombres diferents. Després calcula la suma de totes les parelles que pot formar amb aquests nombres. Quants resultats diferents pot obtenir?

A) En pot obtenir 5, també en pot obtenir 6 i també en pot obtenir 7, però cap més quantitat.
B) Exactament 6
C) En pot obtenir 4, també en pot obtenir 5 i també en pot obtenir 6, però cap més quantitat.
D) Exactament 5
E) En pot obtenir 5 i també en pot obtenir 6, però cap més quantitat.

NA **17.** Quants nombres naturals $A$ tenen la propietat que només un dels dos nombres $A$ i $A + 10$ és un nombre de tres xifres?

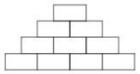
A) 10 B) Cap C) 19 D) 20 E) 9

G **18.** Un espai quadrat està enrajolat amb rajoles quadrades i triangulars, blanques o grises, tal com es veu a la figura. Volem intercanviar, per parelles, algunes rajoles grises amb algunes rajoles blanques de l'enrajolat perquè aquest espai tingui la mateixa aparença mirat des dels quatre costats. Quina de les opcions permet fer-ho amb els mínims intercanvis?



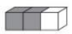
A) Intercanviar un parell de rajoles triangulars i dos parells de quadrades.
B) Intercanviar tres parells de rajoles triangulars i tres de quadrades.
C) Intercanviar un parell de rajoles triangulars.
D) Intercanviar dos parells de rajoles triangulars i dos parells de quadrades.
E) Intercanviar un parell de rajoles triangulars i un parell de quadrades.

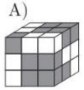
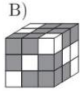
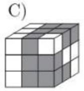
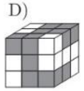
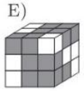
NA **19.** La Sara vol escriure un nombre enter positiu en cadascuna de les caselles del diagrama adjunt. Posa els nombres que vol en la fila inferior i cadascun dels altres nombres és la suma dels dos que té immediatament a sota. Quina és la quantitat màxima de nombres imparells que pot escriure la Sara?



A) 7 B) 6 C) 8 D) 5 E) 4

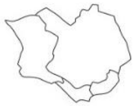
G **20.** Disposem de 9 peces totes iguals, formades cadascuna per dos cubs negres i un cub blanc enganxats, com mostra el dibuix. Només un dels cubs següents es pot construir amb les nou peces. Quin és?



A)  B)  C)  D)  E) 

## Qüestions de 5 punts

EP **21.** La Júlia té 4 colors diferents amb els quals vol pintar les 4 regions d'aquesta illa, amb la condició que dues regions amb una part de frontera en comú no poden estar pintades del mateix color. De quantes maneres diferents pot pintar aquest mapa amb el benentès que tant pot utilitzar tots 4 colors com només alguns, sempre que es compleixi la condició indicada?



A) 48 B) 12 C) 24 D) 18 E) 36

NA **22.** Una formiga i una marieta estan situades en els dos extrems d'un pal. Cadascuna es posa a caminar cap a l'altre extrem del pal. Si la formiga ha caminat dues terceres parts de la llargada del pal i la marieta ha caminat tres quartes parts de la llargada del pal, quina fracció de la llargada del pal les separa?

A) $\frac{5}{12}$ B) $\frac{5}{7}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{3}{8}$

NA **23.** Aquest any, a la Cursa del Cangur, exactament el 35% de la participació eren dones, i hi havia 252 homes més que dones. Quin era el nombre total de participants?

A) 810 B) 824 C) 822 D) 840 E) 802

Model de la prova: **PAB**

NA **24.** Quatre cosines, la Sara, la Rita, la Joana i la Neus, tenen 3, 8, 12 i 14 anys, no necessàriament en aquest ordre. La suma de les edats de la Neus i la Sara és divisible per 5. La suma de les edats de la Neus i la Joana també és divisible per 5. Quants anys té la Rita?

A) 5 B) 14 C) 8 D) 12 E) 3

NA **25.** La Rosa vol escriure un nombre en cada quadrat de la figura següent, i ja n'ha escrit dos. Vol que la suma de tots els nombres sigui igual a 35; que la suma dels nombres situats en els tres primers quadrats sigui 22, i que la suma dels nombres situats en els tres darrers quadrats sigui 25. Quin és el producte dels nombres que la Rosa escriu en els quadrats grisos?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | | | | 4 |

A) 48 B) 108 C) 63 D) 0 E) 39

NA **26.** En Simó vol tallar un tros de cordill en 12 parts, totes de la mateixa longitud, i hi marca els punts per on ha de tallar. La Bàrbara vol tallar el mateix tros de cordill en 8 parts, totes de la mateixa longitud, i també hi marca els punts per on ha de tallar. La Carla troba el cordill i el talla per tots els punts que veu marcats. Quants trossos de cordill obté la Carla?

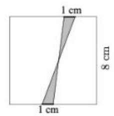
A) 18 B) 12 C) 8 D) 20 E) 16

NA **27.** La Paula ha d'escriure un nombre en cadascun dels quadrats de la taula $3 \times 3$ de la figura, de manera que la suma dels nombres que hi ha en dos quadrats qualssevol que tenen un costat en comú sempre val el mateix. Ja ha escrit un 2 i un 3 en les caselles que mostra la figura. Quan hagi acabat d'emplenar la taula, quina serà la suma de tots els nombres que hi apareixeran?

| | | |
|---|---|---|
| 2 | | |
| | | 3 |
| | | |

A) 22 B) 21 C) 18 D) 20 E) 23

G **28.** En un quadrat de 8 cm de costat, es consideren dos segments de mida 1 cm, un sobre cadascun de dos costats oposats. Després es tracen dues rectes que uneixen els extrems dels dos segments, tal com mostra la figura. Quina és la mida en $cm^2$ de l'àrea ombrejada de la figura?

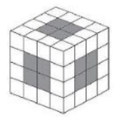



A) 8 B) 2 C) 10 D) 6.4 E) 4

EP **29.** La Núria s'ha de preparar un calendari d'entrenament de manera que corri sempre els mateixos dos dies de la setmana. A més, no vol córrer mai dos dies seguits. Quants calendaris diferents es podrà preparar?

A) 10 B) 14 C) 8 D) 16 E) 12

G **30.** Tenim un cub gros que s'ha construït enganxant cubs petits. Alguns cubs petits són blancs i uns altres són grisos. Els cubs grisos travessen el cub de dalt a baix, de dreta a esquerra i del davant al darrere com mostra la figura. Quin percentatge del cub gros és de color gris?



A) Un 30% B) Un 75% C) Un 50% D) Un 40% E) Un 25%

# XXII Cangur SCM 16 de març de 2017 Nivell: 4t ESO

## Qüestions de 3 punts

NA **1.** Quina hora és quan han passat 20 hores i 17 minuts després de les 20.17 h?

A) 19.34 h B) 17.34 h C) 14.34 h D) 18.34 h E) 16.34 h

NA **2.** Un grup de noies formen una rotllana. Sabem que la Maria és la quarta noia a l'esquerra de la Núria i la setena a la dreta. Quantes noies hi ha en la rotllana?

A) 13 B) 12 C) 11 D) 10 E) 9

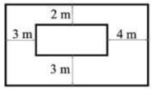
G **3.** En el dibuix, la línia discontínua i el camí negre formen set triangles equilàters. La llargada de la línia discontínua és 200 m. Quina és la longitud del camí negre?

A) 400 m B) 450 m C) 300 m D) 350 m E) 250 m

NA **4.** D'un dipòsit d'una benzinera sabem que quan se n'ha buidat un 25% conté 25 tones de benzina més que quan està ple fins al 25%. Quina és la capacitat del dipòsit, expressada en tones?

A) 80 B) 50 C) 37,5 D) 75 E) 100

G **5.** La figura mostra dos rectangles de costats paral·lels. Quina és la diferència dels perímetres?




A) 21 m B) 20 m C) 24 m D) 12 m E) 16 m

G **6.** Hem dividit en quatre parts iguals un costat d'un triangle equilàter, i després, ajudats amb el traçat de línies paral·leles, hem acabat dissenyant el logotip de la figura. Quina part del triangle està ocupada pel color blanc de la M?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{5}{7}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

NA **7.** La suma de tres nombres enters positius diferents és 7. Quin n'és el producte?

A) 5 B) 8 C) 12 D) 9 E) 10

G **8.** L'Agnès ha fet la figura de la dreta, en què ha superposat quatre estels, tots amb el mateix centre i amb els costats paral·lels. Tenia un estel gris de 16 $cm^2$; a sobre ha posat un estel blanc de 9 $cm^2$; a sobre d'aquest, un de gris de 4 $cm^2$, i finalment, al cim, un de blanc d'1 $cm^2$. Quina és l'àrea total que es veu de color gris?

A) 13 $cm^2$ B) 9 $cm^2$ C) 10 $cm^2$ D) 11 $cm^2$ E) 12 $cm^2$

NA **9.** La Laura té 20 euros. Cadascuna de les seves quatre germanes té 10 euros. Quants euros ha de donar la Laura a cadascuna de les seves germanes perquè les cinc germanes tinguin els mateixos diners?

A) 8 B) 4 C) 2 D) 5 E) 10

NA **10.** Quants nombres naturals $A$ tenen la propietat que només un dels dos nombres $A$ i $A+10$ és un nombre de tres xifres?

A) Cap B) 19 C) 10 D) 9 E) 20



## Qüestions de 4 punts

NA **11.** La sisena part del públic d'un circ són persones adultes. Dues cinquenes parts de la mainada són nens. Quina fracció del total del públic són nenes?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{5}$

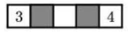
NA **12.** Quatre cosines, la Sara, la Rita, la Joana i la Neus, tenen 3, 8, 12 i 14 anys, no necessàriament en aquest ordre. La suma de les edats de la Neus i la Sara és divisible per 5. La suma de les edats de la Neus i la Joana també és divisible per 5. Quants anys té la Rita?

A) 14 B) 3 C) 8 D) 12 E) No es pot saber.

NA **13.** Aquest any, a la Cursa del Cangur, exactament el 35% de la participació eren dones, i hi havia 252 homes més que dones. Quin era el nombre total de participants?

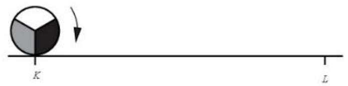
A) 840 B) 810 C) 822 D) 824 E) 802

NA **14.** La Rosa vol escriure un nombre en cada quadrat de la figura següent, i ja n'ha escrit dos. Vol que la suma de tots els nombres sigui igual a 35, la suma dels nombres situats en els tres primers quadrats sigui 22 i la suma dels nombres situats en els tres darrers quadrats sigui 25. Quin és el producte dels nombres que la Rosa escriu en els quadrats grisos?



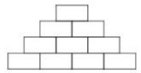

A) 108 B) 39 C) 0 D) 63 E) 48

G **15.** Es fa rodar sense lliscament un cercle de radi 1 cm per una línia recta des de $K$ fins a $L$. Si la distància $KL$ és de $11\pi$ cm, quina serà la posició del cercle quan el punt inferior arribi al punt $L$?



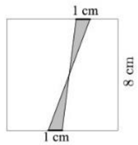

A)  B)  C)  D)  E) 

NA **16.** La Sara vol escriure un nombre enter positiu en cadascuna de les caselles del diagrama de la dreta. Posa els nombres que vol en la fila inferior i cadascun dels altres nombres és la suma dels dos que té immediatament a sota. Quina és la quantitat màxima de nombres imparells que pot escriure la Sara?



A) 7 B) 8 C) 6 D) 5 E) 4

G **17.** En un quadrat de 8 cm de costat, es consideren dos segments de mida 1 cm, un sobre cadascun de dos costats oposats. Després es tracen dues rectes que uneixen els extrems dels dos segments, tal com mostra la figura. Quina és l'àrea ombrejada de la figura?




A) 10 $cm^2$ B) 6,4 $cm^2$ C) 4 $cm^2$ D) 2 $cm^2$ E) 8 $cm^2$

NA **18.** Una formiga i una marieta estan situades en els dos extrems d'un pal. Cadascuna es posa a caminar cap a l'altre extrem del pal. Si la formiga ha caminat dues terceres parts de la llargada del pal i la marieta tres quartes parts de la llargada del pal, quina fracció de la llargada del pal les separa?

A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{5}{7}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{5}{12}$

Model de la prova: **PAB**

**EP 19.** La Núria s'ha de preparar un calendari d'entrenament de manera que corri sempre els mateixos dos dies de la setmana. A més, no vol córrer mai dos dies seguits. Quants calendaris diferents es podrà preparar?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 8 E) 16

**NA 20.** La Paula ha d'escriure un nombre en cadascun dels quadrats de la taula $3 \times 3$ de la figura, de manera que la suma dels nombres que hi ha en dos quadrats qualssevol que tenen un costat en comú sempre val el mateix. Ja ha escrit un 2 i un 3 en les caselles que mostra la figura. Quan hagi acabat d'emplenar la taula, quina serà la suma de tots els nombres que hi apareixeran?

| | | |
|---|---|---|
| 2 | | |
| | | 3 |
| | | |

A) 18 B) 22 C) 23 D) 21 E) 20

## Qüestions de 5 punts

**G 21.** Les mesures, en graus, dels angles d'un triangle són tres nombres enters diferents. Quin és el valor mínim que pot tenir la suma del més petit i el més gran dels angles?

A) 61° B) 90° C) 120° D) 89° E) 91°

**EP 22.** Hi ha deu cangurs en una filera, tal com mostra el dibuix. En un moment donat, dos cangurs que estan un al costat de l'altre i es miren de cara, intercanvien els seus llocs. Per fer l'intercanvi, salten un per damunt de l'altre i segueixen mirant cap al mateix lloc que miraven. Aquests intercanvis es van repetint fins que ja no se'n poden fer més. Quants intercanvis de cangurs s'hauran fet?

A) 18 B) 21 C) 15 D) 20 E) 16

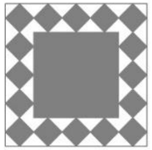
**NA 23.** En Miquel té nou nombres: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. Suma 2 a alguns d'aquests nombres i 5 a tots els altres, i obté els nou resultats corresponents. Quina és la quantitat més petita de resultats diferents que pot obtenir?

A) 6 B) 9 C) 8 D) 5 E) 7

**NA 24.** Els autobusos d'un aeroport surten cada 3 minuts cap al centre de la ciutat. Van per un carril reservat i tarden 35 minuts a arribar al centre. Un cotxe surt de l'aeroport al mateix temps que un autobús cap al centre i fa el mateix recorregut que el autobús però tarda 60 minuts. Sense comptar l'autobús que ha sortit al mateix temps que el cotxe, quants autobusos l'avançaran en el trajecte cap al centre?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 13

**G 25.** En les tovalles quadrades de la figura tots els quadrats grisos petits són iguals. Quin percentatge de les tovalles és de color blanc?



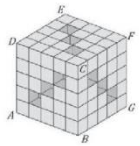
A) Un 32% B) Un 36% C) Un 25% D) Un 16% E) Un 24%

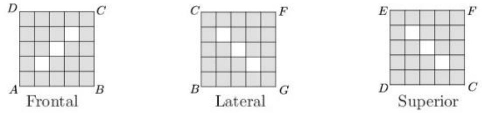
**NA 26.** Comencem una llista numèrica amb els nombres 2, 3 i, a partir d'aquests, cada nombre següent de la llista és la darrera xifra del nombre que s'obté en multiplicar els dos nombres anteriors i, doncs, obtenim la llista $\{2, 3, 6, 8, 8, ...\}$. Quin és el nombre que ocupa la posició 2017 d'aquesta llista?

A) 4 B) 6 C) 3 D) 8 E) 2

Model de la prova: **PAB**

**G 27.** La Diana construeix un cub amb 125 cubs petits tots iguals i després en treu 9 fileres de banda a banda, que travessen el cub gran en línia recta, com mostra la figura de la dreta. Tot seguit es mostren les tres vistes del cub (frontal, lateral dreta i superior), després de treure els cubs petits.




Quants cubs petits ha tret la Diana?

A) 52 B) 42 C) 39 D) 36 E) 45

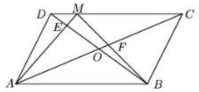
**NA 28.** Dos corredors s'entrenen en una pista circular de 720 metres. Els dos corren a velocitat constant en direccions oposades. El primer corredor triga quatre minuts a fer una volta completa i el segon triga cinc minuts. Quants metres corre el segon corredor entre la primera i la segona vegada que es creuen?

A) 320 B) 350 C) 340 D) 330 E) 355

**NA 29.** En Simó vol tallar un tros de cordill en 60 parts, totes de la mateixa longitud, i hi marca els punts per on ha de tallar. La Bàrbara vol tallar el mateix tros de cordill en 36 parts, totes de la mateixa longitud, i també hi marca els punts per on ha de tallar. La Carla troba el cordill i el talla per tots els punts que veu marcats. Quants trossos de cordill obté la Carla?

A) 96 B) 95 C) 90 D) 80 E) 84

**G 30.** La figura mostra un paral·lelogram $ABCD$ d'àrea $S$. La intersecció de les diagonals del paral·lelogram és el punt $O$. El punt $M$ es troba sobre el costat $DC$. La intersecció del segment $AM$ amb la diagonal $BD$ és el punt $E$ i la intersecció del segment $MB$ amb la diagonal $AC$ és el punt $F$. La suma de les àrees dels triangles $AED$ i $BFC$ és $\frac{S}{3}$. Quina és l'àrea del quadrilàter $EOFM$?




A) $\frac{S}{6}$ B) $\frac{S}{10}$ C) $\frac{S}{14}$ D) $\frac{S}{12}$ E) $\frac{S}{8}$

# XXII Cangur SCM 16 de març de 2017 Nivell: 1r batx.

## Qüestions de 3 punts

NA **1.** La Maria té 24 €. Cadascun dels seus tres germans en té 12. Quants euros ha de donar a cadascun dels seus germans perquè tots quatre tinguin la mateixa quantitat de diners?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 1

NA **2.** Uns nois estan ballant i formen un cercle. L'Antoni és el cinquè noi a l'esquerra d'en Biel i el vuitè a la dreta d'en Biel. Quants nois hi ha en el cercle?

A) 15 B) 11 C) 14 D) 13 E) 12

G **3.** L'Agnès ha fet la figura adjunta, en què ha superposat quatre estels, tots amb el mateix centre i amb els costats paral·lels. Tenia un estel gris de 16 cm$^2$; a sobre ha posat un estel blanc de 9 cm$^2$; a sobre d'aquest, un de gris de 4 cm$^2$, i, finalment al cim, un de blanc d'1 cm$^2$. Quina és l'àrea total que es veu de color gris?

A) 10 cm$^2$ B) 11 cm$^2$ C) 12 cm$^2$ D) 9 cm$^2$ E) 13 cm$^2$

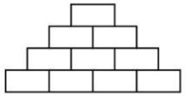
NA **4.** Quin és el valor de $\dfrac{2017^2-1}{2016\times 2018}$ ?

A) 2017 B) 1 C) $\dfrac{2016}{2018}$ D) $\dfrac{2017}{2018}$ E) Un altre valor

F **5.** Quina de les imatges següents mostra la trajectòria que segueix el centre de la roda quan gira per la carretera en ziza-zaga de la figura?

A) B) C) D) E)

NA **6.** En Pau vol escriure nombres enters i positius en les caselles del diagrama adjunt. Posa els nombres que vol en la fila inferior i cadascun dels altres nombres és la suma dels dos que té immediatament a sota. Quina és la quantitat màxima de nombres senars que pot escriure en Pau?



A) 6 B) 8 C) 7 D) 4 E) 5

G **7.** Es fa rodar sense relliscar un cercle de radi 1 cm per una línia recta des de $K$ fins a $L$. Si la distància $KL$ és de $11\pi$ cm, quina serà la posició del cercle quan el punt inferior arribi al punt $L$?


A) B) C) D) E)

NA **8.** En una reunió familiar la mainada era la vuitena part del conjunt d'assistents. Tres setens de les persones adultes eren homes. Quina part del total d'assistents eren dones adultes?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{7}$ E) $\frac{1}{5}$



NA **9.** La Martina juga a escacs. Aquesta temporada ha jugat quinze partides i n'ha guanyat nou. Encara ha de jugar cinc partides més. Quin tant per cent de partides haurà guanyat en tota la temporada si guanya les cinc que falten?

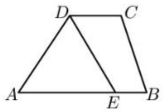
A) Un 60% B) Un 65% C) Un 75% D) Un 80% E) Un 70%

EP **10.** El meu professor de matemàtiques té una caixa amb botons de colors. N'hi ha 203 de vermells, 117 de blancs i 28 de blaus. Els estudiants anem traient botons d'un en un sense mirar-ne el color. Quants botons hem de treure per a estar segurs que, entre els botons que hem tret, n'hi ha com a mínim tres del mateix color?

A) 28 B) 6 C) 203 D) 7 E) 3

## Qüestions de 4 punts

G **11.** $ABCD$ és un trapezi amb bases $AB = 50$ cm i $CD = 20$ cm. El punt $E$ és un punt del costat $AB$ amb la propietat que el segment $DE$ divideix el trapezi en dues parts de la mateixa àrea. Quina és la longitud $AE$?

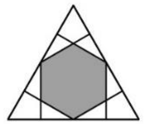



A) 30 cm B) 25 cm C) 40 cm D) 35 cm E) 45 cm

NA **12.** Quants enters positius $n$ tenen la propietat que només un dels dos nombres $n$ i $n+20$ és de quatre xifres?

A) 20 B) 39 C) 38 D) 40 E) 19

G **13.** Des de cadascun dels punts mitjans dels costats d'un triangle equilàter tracem perpendiculars als altres dos costats i així queda dibuixat un hexàgon. Quina és la relació entre l'àrea de l'hexàgon i l'àrea del triangle?

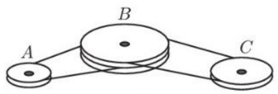


A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

NA **14.** La suma dels quadrats de tres nombres enters positius consecutius és 770. Quin és el més gran d'aquests tres nombres?

A) 16 B) 19 C) 15 D) 18 E) 17

G **15.** Un mecanisme és format per tres politges $A$, $B$ i $C$, unides mitjançant corretges que les arroseguen sense lliscament. La politja $B$ fa quatre voltes, mentre $A$ en fa cinc; i la mateixa politja $B$ fa sis voltes, mentre $C$ en fa set. Quin és el perímetre de la politja $A$ si el de $C$ és de 30 cm?




A) 31 cm B) 28 cm C) 30 cm D) 29 cm E) 27 cm

EP **16.** En Miquel vol preparar un calendari per al seu pla d'entrenament. Cada setmana vol córrer tres dies, sempre els mateixos de la setmana, però mai en dos dies consecutius. Entre quants calendaris diferents pot escollir?

A) 35 B) 9 C) 7 D) 10 E) 6

EP **17.** Ha plogut set vegades durant les vacances. Si ha plogut al matí, ha fet sol a la tarda i si ha plogut a la tarda, ha fet sol el matí. En total hi ha hagut cinc matins amb sol i sis tardes amb sol. Quants dies han durat les vacances, com a mínim?

A) 7 B) 10 C) 9 D) 11 E) 8

NA **18.** Quatre germans tenen diferents alçades. En Toni és més baix que en Víctor i més alt que en Pere, de manera que les dues diferències d'alçades d'en Toni amb aquests dos germans tenen el mateix valor absolut. Aquesta mateixa diferència d'alçades és la que hi ha entre l'Òscar i en Pere, i l'Òscar és el més baix de tots dos. Sabem que en Toni fa 184 cm i que la mitjana de les alçades dels quatre germans és 178 cm. Quant fa d'alt l'Òscar?

A) 166 cm B) 190 cm C) 184 cm D) 160 cm E) 172 cm

NA **19.** La Juliana vol posar un nombre en cadascuna de les caselles de la taula $3 \times 3$, de manera que les sumes dels quatre nombres de cadascun dels quadrats de $2 \times 2$ siguin totes iguals. Comença posant un 1, un 2 i un 3 en les tres caselles indicades en la figura. Quin nombre ha de posar en la casella indicada amb el signe d'interrogació?

| | | |
|---|---|---|
| 3 | | 1 |
| | | |
| 2 | | ? |

A) 4 B) 5 C) 0 D) 1 E) No queda determinat amb les dades donades

EP **20.** En les cares d'un dau hi ha els nombres $-3$, $-2$, $-1$, 0, 1 i 2. Si el tirem dues vegades i multipliquem els resultats, quina és la probabilitat que el producte sigui negatiu?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{13}{36}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{11}{36}$

## Qüestions de 5 punts

NA **21.** El producte de les edats (en anys) de quatre germanes és 882. Totes quatre han nascut en aquest segle i les quatre edats són diferents. Quina és la suma de les edats de les quatre germanes?

A) 25 B) 31 C) 23 D) 33 E) 27

NA **22.** Escrivim set nombres enters positius $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ i $g$ en fila. La suma de tots set nombres és 2017 i la diferència entre dos nombres veïns a la fila és o bé 1, o bé $-1$. Quin d'aquests nombres pot ser igual a 286?

A) Pot ser $b$ i també pot ser $f$, i cap altre nombre.
B) Pot ser $c$ i també pot ser $e$, i cap altre nombre.
C) Només pot ser $d$.
D) Pot ser $a$ i també pot ser $g$, i cap altre nombre.
E) Cap dels set nombres no pot ser mai igual a 286.

NA **23.** Agafem un nombre de dues xifres, $ab$, qualsevol. El repetim tres vegades i formem el nombre de sis xifres $ababab$. Per quin dels nombres següents és segur que és divisible aquest nombre de sis xifres?

A) 5 B) 2 C) 11 D) 9 E) 7

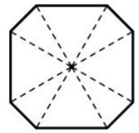
NA **24.** La meva amiga vol tenir una contrasenya especial de 7 xifres. Les xifres de la contrasenya han de ser-hi tantes vegades com el valor de la xifra. Les xifres repetides han d'aparèixer sempre consecutives. Per exemple 4444333 o 1666666. Quantes contrasenyes possibles hi ha amb aquestes condicions?

A) 7 B) 13 C) 10 D) 12 E) 6

EP **25.** Hi ha 30 persones dretes que formen un cercle i totes miren cap al centre del cercle. Tot seguit es dona l'ordre: «Gireu un quart de volta», i algunes persones giren cap a l'esquerra i totes les altres giren cap a la dreta. Després d'això es diu: «Doneu-vos la mà els que heu quedat cara a cara», i resulta que en són 10 que ho fan. A continuació es dóna l'ordre: «Gireu mitja volta», i ho fan totes les persones del cercle. Si ara es tornen a donar la mà els que han quedat cara a cara, quantes persones donaran la mà a una altra?

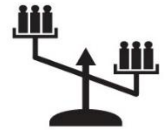
A) 8 B) 20 C) 10 D) 15 E) No es pot assegurar quantes seran.

G **26.** Una sala d'actes té forma d'octàgon, que es pot descompondre en quatre triangles equilàters i uns altres quatre triangles isòsceles, com es veu en la figura. La distància del punt central de la sala a qualsevol dels vèrtex és de 10 m. Quina és la superfície total de la sala d'actes, expressada en m$^2$?



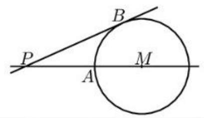
A) $100(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ B) $200(\sqrt{2}+1)$ C) $100(\sqrt{2}+1)$ D) $200(\sqrt{3}+1)$ E) $100(\sqrt{3}+1)$

EP **27.** Hem posat a l'atzar tres pesos en cada plat d'una balança. Les masses són 101, 102, 103, 104, 105 i 106 grams. Quina és la probabilitat que el pes de 106 grams estigui al plat que més pesa?



A) Un 90% B) Un 100% C) Un 95% D) Un 75% E) Un 80%

G **28.** $A$ i $B$ són dos punts d'una circumferència de centre $M$. El punt $P$ és a la recta $AM$ i la recta $PB$ és tangent a la circumferència en el punt $B$. Les distàncies $PA$ i $MB$ són nombres enters i $PB = PA + 6$. Quants valors diferents pot tenir el radi $MB$?

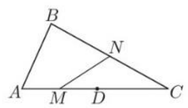



A) Cap B) 4 C) 2 D) 6 E) 8

NA **29.** Quants polinomis de segon grau de la forma $x^2 + ux + v$ hi ha amb la propietat que $u$ i $v$ (iguals o diferents) són les dues solucions de l'equació $x^2 + ux + v = 0$ ?

A) Cap B) 1 C) 2 D) 3 E) Més de 3

G **30.** S'escull un punt $D$ del costat $AC$ del triangle $\triangle ABC$ de manera que $DC = AB$. Els punts $M$ i $N$ són els respectius punts mitjans dels segments $AD$ i $BC$. Si $\widehat{NMC} = \alpha$, quant mesura l'angle $\widehat{BAC}$ ?




A) $3\alpha$ B) $90^\circ - 2\alpha$ C) $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ D) $2\alpha$ E) $45^\circ + \alpha$

Generalitat de Catalunya
Departament
d'Ensenyament

Beques Batxillerat
Internacional
www.cims-cellex.cat

Model de la prova: **PAB**

# XXII Cangur SCM   16 de març de 2017   Nivell: 2n batx.

## Qüestions de 3 punts

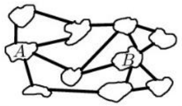
NA **1.** Quin és el resultat de l'operació $\dfrac{20 \cdot 17}{2+0+1+7}$ ?

A) 20,17   B) 3,4   C) 34   D) 340   E) 201,7

G **2.** L'Anna ha calculat la suma dels angles d'un polígon convex. El resultat que obté és 2017°, però s'adona que, en fer els càlculs, s'ha descuidat un dels angles. Quant mesura l'angle que falta?

A) 37°   B) 97°   C) 53°   D) 143°   E) 127°

EP **3.** En aquesta figura es poden veure 10 illes connectades entre elles mitjançant 15 ponts. Quin és el nombre mínim de ponts que cal eliminar perquè sigui impossible anar de l'illa $A$ a l'illa $B$?



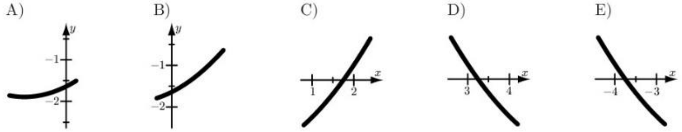

A) 4   B) 1   C) 5   D) 2   E) 3

NA **4.** Dos nombres positius $a$ i $b$ compleixen que el 75% de $a$ és igual al 40% de $b$. Per tant:

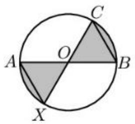
A) $3a = 2b$   B) $5a = 12b$   C) $7a = 8b$   D) $8a = 15b$   E) $15a = 8b$

F **5.** Quatre de les cinc imatges mostrades són part de la gràfica de la mateixa funció quadràtica. Quina d'elles no ho és?

A)   B)   C)   D)   E)

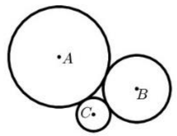



G **6.** Si tenim un cercle amb centre $O$ i diàmetres $AB$ i $CX$, de manera que els segments $OB$ i $BC$ són iguals. Quina part de l'àrea del cercle està ombrejada?




A) $\frac{3}{8}$   B) $\frac{2}{7}$   C) $\frac{1}{3}$   D) $\frac{2}{5}$   E) $\frac{4}{11}$

G **7.** Tres cercles amb centres en els punts $A$, $B$ i $C$ són tangents entre ells i tenen radis 3, 2 i 1, respectivament. Quina és l'àrea del triangle $\triangle ABC$ ?




A) 9   B) $2\sqrt{6}$   C) $4\sqrt{3}$   D) 6   E) $3\sqrt{2}$

F **8.** Quina de les funcions següents té més punts en comú amb el gràfic de la funció $f(x) = x$ ?

A) $g_5(x) = -x$   B) $g_2(x) = x^3$   C) $g_3(x) = x^4$   D) $g_4(x) = -x^4$   E) $g_1(x) = x^2$

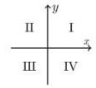


EP **9.** Tenim cinc capses amb boles, vermelles i blaves. La capsa $A$ té 10 boles blaves i 8 boles vermelles; la capsa $B$, 6 de blaves i 4 de vermelles; la capsa $C$, 8 de blaves i 6 de vermelles; la capsa $D$, 7 de blaves i 7 de vermelles, i, finalment la capsa $E$ té 12 boles blaves i 9 boles vermelles. En Bernat vol agafar una bola d'una de les capses sense mirar. De quina capsa li caldrà agafar-la perquè la probabilitat que surti blava sigui la màxima possible?

A) De la capsa $B$   B) De la capsa $E$   C) De la capsa $C$   D) De la capsa $A$   E) De la capsa $D$

F **10.** Quin dels quatre quadrants no conté cap punt de la gràfica de la funció lineal

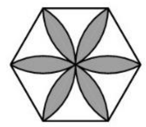
$$f(x) = -3{,}5x + 7 \text{ ?}$$




A) I   B) II   C) III   D) IV   E) Tots els quadrants en contenen.

## Qüestions de 4 punts

G **11.** La figura mostra un hexàgon regular amb costats de longitud 1. La flor és formada per arcs de circumferències de radi 1 amb centres en els vèrtexs de l'hexàgon. Quant val l'àrea ombrejada?



A) $\frac{\pi}{2} + \sqrt{3}$   B) $2\sqrt{3} - \pi$   C) $\frac{\pi}{2}$   D) $2\pi - 3\sqrt{3}$   E) $\frac{2\pi}{3}$

NA **12.** El nombre positiu $p$ és més petit que 1, i el nombre $q$ és més gran que 1. Quin dels nombres següents és el més gran?

A) $q$   B) $p$   C) $p \cdot q$   D) $p + q$   E) $\frac{p}{q}$

G **13.** Dos cilindres rectes $A$ i $B$ tenen el mateix volum. El radi de la base del cilindre $B$ mesura un 10% més que el radi de la base del cilindre $A$. Per tant, l'altura del cilindre $A$ mesura més que l'altura del cilindre $B$ en un...

A) 5%   B) 21%   C) 20%   D) 11%   E) 10%

G **14.** En un políedre totes les cares són quadrats o triangles equilàters. Cada triangle està en contacte amb tres quadrats i cada quadrat està envoltat per 4 triangles. Si hi ha 6 quadrats, quants triangles hi haurà?

A) 9   B) 7   C) 6   D) 8   E) 5

EP **15.** Teniu 5 caixes, 5 boles blanques i 5 de negres. Podeu escollir com posar les boles en les caixes (en cada caixa hi ha d'haver com a mínim una bola). El teu adversari tria una caixa i n'extreu una bola i, si és blanca, guanya. Si no, guanyes tu. Com has de distribuir les boles per a tenir la màxima probabilitat de guanyar?

A) Les boles negres en tres caixes i les boles blanques en les altres dues
B) Una bola blanca i una negra en cada caixa
C) Una bola negra en cada caixa i totes les boles blanques en una mateixa caixa
D) Una bola blanca en cada caixa i totes les boles negres en una mateixa caixa
E) Les boles negres en quatre caixes i les boles blanques en l'altra

NA **16.** Els coeficients $a$ i $b$ del polinomi $5x^3 + ax^2 + bx + 24$ són nombres enters. Quin dels nombres següents podem assegurar que no pot ser una arrel del polinomi?

A) 5 B) $-1$ C) 1 D) 6 E) 3

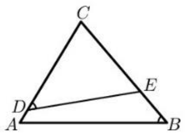
EP **17.** Na Júlia té 2017 fitxes, 1009 són negres i la resta són blanques. Les col·loca de manera que forma un quadrat, com mostra a la figura, començant per una fitxa negra en el cantó superior esquerre i alternant el color en cada fila i columna. Quantes fitxes de cada color li sobraran, si arranja el quadrat més gran possible?

A) Cap
B) 40 blanques i 41 negres
C) 41 de cada color
D) 40 negres i 41 blanques
E) 40 de cada

NA **18.** Escrivim set nombres enters positius $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ i $g$ en fila. La suma de tots set nombres és 2017 i la diferència entre dos nombres veïns a la fila és o bé 1, o bé $-1$. Quin d'aquests nombres pot ser igual a 286?

A) Cap dels set nombres no pot ser mai igual a 286.
B) Només pot ser $d$.
C) Pot ser $c$ i també pot ser $e$, i cap altre nombre.
D) Pot ser $b$ i també pot ser $f$, i cap altre nombre.
E) Pot ser $a$ i també pot ser $g$, i cap altre nombre.

G **19.** Les longituds dels costats d'un triangle $\triangle ABC$ són $AB = 10$, $BC = 9$ i $CA = 8$. El punt $D$ és un punt del costat $CA$ i compleix $CD = 7$ i el punt $E$ és un punt del costat $BC$, de manera que els angles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{CDE}$ són iguals. Quin és el perímetre del triangle $\triangle CDE$ ?




A) 21,7 B) $\frac{199}{8}$ C) 18,9 D) $\frac{189}{8}$ E) 21

EP **20.** Tytti intenta ser un bon canguret, però dir mentides és molt més divertit. De cada tres frases consecutives que diu sempre n'hi ha una de falsa i dues de certes. Per tant, de vegades comença amb una mentida i d'altres amb una o dues veritats. Tytti pensa un nombre de dues xifres i li diu al seu amic aquestes frases: «una de les xifres és un dos», «és més gran que 50», «és un nombre parell», «és més petit que 30», «és divisible per tres» i «una de les seves xifres és 7», en aquest ordre. Quina és la suma de les xifres del nombre que ha pensat?

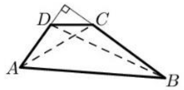
A) 12 B) 17 C) 9 D) 13 E) 15

## Qüestions de 5 punts

NA **21.** Quants nombres enters positius tenen la propietat que el nombre obtingut en suprimir la seva darrera xifra, la de les unitats, és igual a una catorzena part del nombre original?

A) 1 B) 2 C) 3 D) Cap E) 4

G **22.** En un quadrilàter convex $ABCD$, els costats $AD$ i $BC$ són perpendiculars, el costat $DC$ fa 1 cm i les mesures de les diagonals són $AC = 2$ cm i $BD = 3$ cm. Quina és la longitud del costat $AB$?

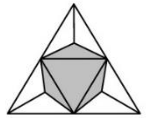



A) $3\sqrt{2}$ cm B) 6 cm C) $2\sqrt{3}$ cm D) $\sqrt{6}$ cm E) 4 cm

NA **23.** Considereu la successió $\{a_n\}$ amb $a_1 = 2017$ i $a_{n+1} = \dfrac{a_n - 1}{a_n}$. Quin és el valor de $a_{2017}$ ?

A) 2017 B) 1 C) $-2017$ D) $\frac{-1}{2016}$ E) $\frac{2016}{2017}$

G **24.** Considerem un tetràedre regular. El tallem per quatre plans, cadascun dels quals passa pels punts mitjans de tres arestes concurrents, i així n'escapcem quatre trossos. Quina part del volum original del tetràedre té el sòlid resultant?



A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

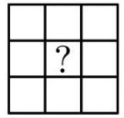
NA **25.** Dos nombres enters consecutius, $A$ i $A+1$, compleixen que la suma de les xifres de cadascun d'ells és un múltiple de 7. Quantes xifres té el nombre $A$ més petit que compleix aquesta propietat?

A) 5 B) 6 C) 3 D) 7 E) 4

EP **26.** Tenim quatre daus tetraèdrics i amb cadascuna de les cares numerades amb un dels números 2, 0, 1 i 7. Si tirem aquests quatre daus, quina és la probabilitat de poder compondre el número 2017 triant una de les cares visibles de cada dau?

A) $\frac{3}{32}$ B) $\frac{63}{64}$ C) $\frac{29}{32}$ D) $\frac{1}{256}$ E) $\frac{81}{256}$

NA **27.** En una taula de $3 \times 3$ escrivim un nombre enter en cada cel·la, de tal manera que tots nou nombres sumen 500 i que cada nombre difereix en una unitat de cadascun dels nombres de les cel·les veïnes (les que tenen un costat comú). Quin és el nombre que hi ha en la cel·la central?




A) 56 B) 57 C) 54 D) 50 E) 55

NA **28.** Si $|x| + x + y = 5$ i $x + |y| - y = 10$, quin és el valor de $x + y$ ?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 3

NA **29.** Quants nombres enters positius de tres xifres $abc$ hi ha de manera que $(a+b)^c$ és un nombre de tres xifres i potència de 2 d'exponent enter?

A) 13 B) 15 C) 21 D) 20 E) 18

EP **30.** Els 2017 habitants d'una illa són de dues menes diferents. Cadascun o bé és mentider (i sempre diu mentida) o bé no és mentider (i sempre diu la veritat). Més de 1000 d'aquests habitants participen en un banquet asseguts en una taula rodona. Cadascun d'ells diu: «Les dues persones que tinc al costat són de menes diferents.» Quants no mentiders hi ha com a màxim a l'illa?

A) 1683 B) 1343 C) 670 D) 1344 E) 668

Generalitat de Catalunya
Departament d'Ensenyament

Beques Batxillerat Internacional
www.cims-cellex.cat