



**Universitat de les
Illes Balears**

Facultat de Ciències

Memòria del Treball de Fi de Grau

Caracterización del método de Hough para la detección de ondas gravitacionales

Rodrigo Tenorio Márquez

Grau de Física

Any acadèmic 2017-18

Treball tutelat per Alicia Magdalena Sintés Olives
Departament de Física

S'autoritza la Universitat a incloure aquest treball en el Repositori Institucional per a la seva consulta en accés obert i difusió en línia, amb finalitats exclusivament acadèmiques i d'investigació	Autor		Tutor	
	Sí	No	Sí	No
	X		X	

Paraules clau del treball:

Ondas gravitacionales, ondas gravitacionales continuas, análisis de datos

Índice

1. Introducción	2
1.1. Ondas gravitacionales	2
1.2. Detectores interferométricos	3
1.3. Estrellas de neutrones en rotación	3
1.3.1. Estructura de una estrella de neutrones	4
1.3.2. Población de estrellas de neutrones	5
1.3.3. Mecanismos de emisión	5
1.3.4. La señal	6
1.4. Métodos de análisis de datos	8
2. Método de Hough	9
2.1. La transformada de Hough	9
2.2. Método de Hough para ondas gravitacionales continuas	10
2.3. Límites operacionales	11
2.3.1. Umbral de potencia	11
2.3.2. Resolución en frecuencia	12
2.3.3. Resolución en spindown	12
2.3.4. Resolución celeste	13
2.4. Post processing	13
2.4.1. Subespacios de frecuencia y spindown: contribución métrica	13
2.4.2. Subespacio de posición celeste: contribución métrica	14
2.4.3. Radios de coincidencia y clústering	16
2.5. Inyección de señales	16
3. Resultados	18
3.1. Eficiencia	18
3.2. Precisión de los candidatos: radio de clúster	20
3.3. Exactitud de los candidatos: distancia a la inyección	20
3.4. Seguimiento de los candidatos: relación radio - distancia	20
4. Conclusión	26
5. Referencias	27

1. Introducción

1.1. Ondas gravitacionales

La teoría de la Relatividad General representa la cúspide de la Mecánica Clásica, consiguiendo unificar las leyes de la gravedad y la inercia por medio de la introducción de un espacio métrico denominado espacio-tiempo, unión de las ideas de tiempo y espacio ya presentes siglos atrás. La idea principal es la descripción de la gravedad y el movimiento en términos de geometría: los cuerpos no se mueven naturalmente en líneas rectas, como propone la primera ley de Newton, sino que siguen las geodésicas del espacio-tiempo, una generalización del concepto de línea recta entendida como el camino más corto posible entre dos puntos, las cuales se encuentran determinadas por la distribución de masa y energía. Así, la Tierra órbita al Sol no porque exista una fuerza de interacción a distancia entre ambos cuerpos, sino porque las geodésicas del espacio-tiempo en el que se mueve la Tierra no son líneas rectas, sino más bien curvas similares a elipses alrededor del Sol. Este efecto se ve claramente en Mercurio, cuya precesión de perihelio fue perfectamente descrita a partir de esta teoría.

La ecuación (1) expresa las ideas anteriores,

$$G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}, \quad (1)$$

donde G_{ab} es el tensor de Einstein, un tensor simétrico de orden 2 construido a partir de la métrica del espacio-tiempo; T_{ab} representa el tensor de energía-impulso, de nuevo simétrico y de orden 2 y que da cuenta de la energía contenida en el espacio-tiempo; G representa la constante de gravitación universal y c la velocidad de la luz en el vacío, factores de escala para mantener las unidades del sistema internacional y recuperar el límite clásico newtoniano.

La ecuación (1) pone de manifiesto dos características importantes de la Relatividad General: en primer lugar, la ecuación relaciona explícitamente la geometría del espacio-tiempo y la energía que este contiene; en segundo lugar, la ecuación está escrita en términos de tensores, lo que significa que es manifiestamente covariante, esto es, la Física detrás de esta ecuación es independiente de la forma en que se describa. Cuando se trabaja en el marco clásico de las leyes de Newton, éstas sólo aplican a sistemas de referencia inerciales, siendo necesaria la introducción de fuerzas de inercia para describir sistemas de referencia no inerciales; la estructura de la ecuación (1) ya incluye estos efectos, y además garantiza que, por dispares que sean las contribuciones en diferentes sistemas de referencia, la Física será la misma en todos ellos.

Esta concepción de la gravedad permite tratar problemas anteriores con nuevas herramientas. Por ejemplo, la ausencia de gravedad en un espacio-tiempo es equivalente a establecer como métrica de dicho espacio-tiempo g_{ab} la métrica de Minkowski $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Esta métrica corresponde a un espacio-tiempo plano en el que no hay gravedad y que por consiguiente se encuentra vacío, i. e. $T_{ab} = 0$. No obstante, la vaciedad de un espacio-tiempo no implica la ausencia de gravedad; de hecho, es posible establecer ondas en el espacio-tiempo vacío, siguiendo el desarrollo de [1].

Consideremos un espacio-tiempo cuya métrica puede ser desarrollada como métrica de Minkowski (espacio-tiempo plano) más una perturbación débil, $g_{ab} \simeq \eta_{ab} + h_{ab}$, $|h_{ab}| \ll 1$. Introduciendo esta métrica en la ecuación (1), despreciando órdenes superiores al lineal en un espacio-tiempo vacío y estableciendo condiciones de *gauge* similares al gauge de Lorentz utilizado en la propagación de ondas electromagnéticas se obtiene que

$$\square h_{ab}^{TT} = 0, \quad (2)$$

donde h_{ab}^{TT} representa la perturbación bajo gauge *Transverse-Traceless*, de manera que viaja perpendicularmente al plano de oscilación y deformando el espacio-tiempo, y \square representa el

operador D'Alembertiano, de manera que la perturbación verifica una ecuación de ondas. El uso de esta condición de gauge permite describir las ondas gravitacionales de forma sencilla; [2] describe las consecuencias de esta elección en términos de coordenadas, si bien no serán necesarias para este trabajo.

En resumen, una onda gravitacional es una perturbación viajera de la métrica que modifica las distancias relativas en el espacio-tiempo. Estas ondas presentan dos polarizaciones separadas por 45° a causa de su naturaleza cuadrupolar, pues las conservaciones de masa, momento lineal y momento angular impiden que se produzca radiación de tipo monopolar o dipolar [1].

Existen multitud de anatomías de ondas gravitacionales atendiendo a su frecuencia, amplitud y duración característica. Este trabajo se centrará en las ondas gravitacionales continuas, las cuales persisten durante largos periodos de tiempo en el alcance del detector, haciendo posible su detección mediante métodos basados en el análisis coherente de diversos periodos de observación; la atención se centrará en las ondas continuas procedentes de estrellas de neutrones aisladas en rotación.

1.2. Detectores interferométricos

Una onda gravitacional es una deformación del espacio-tiempo que se propaga a la velocidad de la luz, de la misma manera que las ondas se propagan sobre la superficie de un lago al lanzarle una piedra. Esta deformación provoca cambios en la distancia relativa de los puntos por los que pasa, de manera que cualquier aparato de medida que se utilice también se verá afectado por dicha deformación y, por consiguiente, no se llevará a cabo ninguna medida. Por esto, se utilizan interferómetros láser basados en el interferómetro de Michelson, los cuales no miden *distancias*, sino *tiempos relativos*; concretamente, miden la diferencia de fase entre dos haces de luz que parten de un mismo punto en direcciones diferentes en términos de su patrón de interferencia. Si la luz recorre dos caminos perpendiculares de longitud L y una onda gravitacional deforma dichos brazos una longitud ΔL estirando uno de ellos y acortando el otro, el valor de *strain* o deformación relativa medida vendrá dado por $h = \Delta L/L$, de acuerdo con la perturbación obtenida a partir de (2). En [3] se discute el efecto de una onda gravitacional sobre el detector interferométrico, si bien para este trabajo únicamente se necesita saber que las ondas gravitacionales pueden medirse a partir del strain de un interferómetro láser.

Al trabajar con un instrumento de medida real es necesario que su frecuencia de muestreo sea suficientemente alta como para resolver las señales a detectar. Según el teorema de Nyquist-Shannon, una frecuencia de muestreo de f_s puede resolver exactamente señales de frecuencia inferior a $f_s/2$ [4]. Para el caso de LIGO, la frecuencia de muestreo es de 16384Hz [5] y las frecuencias de las ondas gravitacionales continuas alcanzan a lo sumo 1,5kHz teniendo en cuenta que la frecuencia máxima conocida de un púlsar es de unos 700Hz [6], de manera que es posible resolver las señales sin riesgo de fugas a frecuencias menores (*aliasing*).

1.3. Estrellas de neutrones en rotación

Las estrellas de neutrones fueron propuestas en 1933 por Walter Baade y Fritz Zwicky mientras estudiaban las posibles fuentes de rayos cósmicos detectados, proponiendo que estos procedían de supernovas, la fase final de la evolución de cierto tipo de estrellas, siendo las estrellas de neutrones un remanente de éstas [9]. Fue en 1968 cuando Jocelyn Bell y Anthony Hewish detectaron una señal de radio periódica especialmente robusta cuando se planteó la posibilidad de que se tratara de una estrella de neutrones de rotación rápida [10]. En particular, aquellas estrellas de neutrones detectadas vía radio se denominan *púlsares*, acrónimo de *Pulsating Star*, ya que la radiación

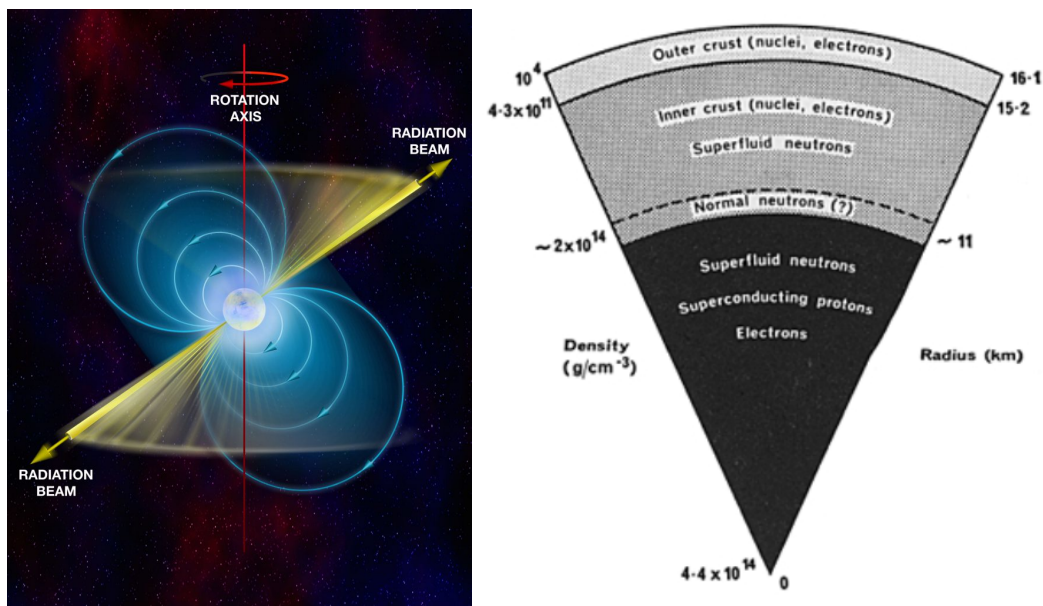


Figura 1: (Izquierda) Representación artística de una estrella de neutrones donde se muestra su eje de rotación, el eje de radiación y las líneas de campo magnético. Fuente: [7]. (Derecha) Representación esquemática de la estructura de una estrella de neutrones en función de su radio y densidad típica. Fuente: [8]

detectada mostraba picos de intensidad cortos y regulares debidos a la emisión de radiación a lo largo de sus polos magnéticos, tal y como se muestra en la figura 1 (izquierda).

1.3.1. Estructura de una estrella de neutrones

Las estrellas de neutrones son objetos extremadamente compactos, concentrando una masa de $(1-2)M_{\odot}$ en un radio de $(10-30)\text{km}$, donde $M_{\odot} \simeq 2 \cdot 10^{30}\text{kg}$ representa la masa del Sol. Esto las convierte en el segundo objeto más compacto conocido, por delante de las enanas blancas y por detrás de los agujeros negros. Existen diversas propuestas de ecuación de estado para las estrellas de neutrones [11], si bien la mayoría de modelos predice un resultado similar al esquematizado en la figura 1 (derecha). La corteza exterior está formada por núcleos pesados y electrones degenerados que se vuelven relativistas a medida que la densidad aumenta, posibilitando el proceso de captura electrónica. Esto permite que los núcleos aumenten su número de neutrones, los cuales no pueden decaer a protones a causa de la degeneración de los electrones circundantes, provocando que algunos neutrones escapen de los núcleos y formen un superfluido. A medida que penetramos en la estrella la distinción entre neutrones superfluidos y neutrones nucleares desaparece, estableciéndose un fluido de neutrones degenerados que se encargan de sustentar la estrella, acompañados de electrones degenerados relativistas y protones que forman a su vez un superfluido superconductor. Llegados a este punto, algunos modelos predicen la existencia de un núcleo sólido formado por piones u otra clase de partículas.

La detección de ondas gravitacionales procedentes de estos objetos permitirá aclarar su composición y estructura, así como establecer ecuaciones de estado más precisas que permitan entender como se comporta la materia en situaciones tan extremas.

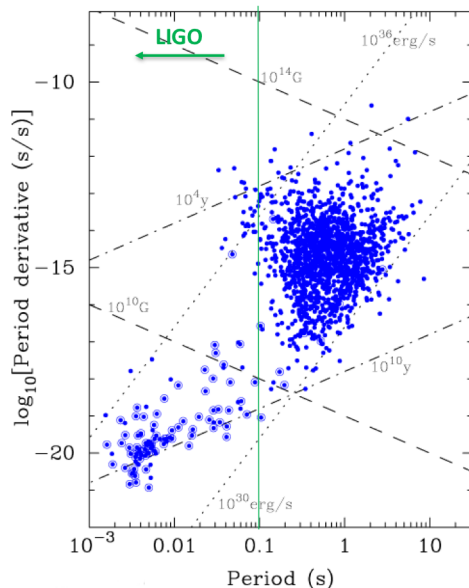


Figura 2: Población de púlsares conocidos en términos de su periodo y la derivada temporal de éste (tasa de frenado). Los puntos azules representan púlsares aislados, mientras que los puntos rodeados representan púlsares en sistemas binarios. Las líneas representan valores constantes de campo magnético (discontinuas), edad (discontinua punteada) y pérdida de energía por frenado (punteada). La línea verde vertical marca el mayor periodo detectable por LIGO. Fuente: [12]

1.3.2. Población de estrellas de neutrones

Actualmente se estima que existen del orden de 10^8 estrellas de neutrones en la galaxia, de los cuales se estima que 10^5 son púlsares [13]. No obstante, sólo han podido detectarse unos 2000, puesto que la radiación electromagnética emitida por estos objetos interacciona con el medio interestelar antes de alcanzar la Tierra, dificultando la detección de los más alejados. Estos púlsares, representados en la figura 2, permiten reafirmar los eventos de supernova como origen de las estrellas de neutrones, así como establecer una relación entre la edad de los púlsares y su periodo de rotación, siendo los púlsares más viejos los de menor periodo, del orden de milisegundos [12, 13]. Este estudio demográfico permitirá establecer restricciones a la hora de realizar búsquedas de ondas gravitacionales continuas procedentes de estrellas de neutrones como veremos en secciones posteriores: la edad de las estrellas de neutrones buscadas está relacionada con la cantidad de parámetros de frenado (*spindown*) a tener en cuenta. La sensibilidad de los detectores de LIGO acota los púlsares conocidos detectables según la figura 2, luego la edad de los púlsares detectables permitirá disminuir el coste computacional de las búsquedas realizadas, así como establecer nuevos límites realistas en la sensibilidad de los detectores.

1.3.3. Mecanismos de emisión

Las estrellas de neutrones pueden emitir ondas gravitacionales principalmente por medio de tres mecanismos:

- **Distorsiones asimétricas:** Se trata de deformaciones de la corteza de la estrella de neutrones, llamadas informalmente *montañas*, que permiten la emisión de radiación gravitacional al generar asimetrías en un cuerpo en rotación. Dicha deformación puede caracterizarse en términos de la *elipticidad ecuatorial*

$$\epsilon = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}}, \quad (3)$$

donde I_{ii} representan los momentos principales de inercia de la estrella, llamando eje z al eje de simetría de la estrella en ausencia de esta deformación. El valor de ϵ es altamente dependiente de la ecuación de estado que se utilice, si bien se considera la cota superior de 10^{-6} para una estrella de neutrones promedio de 10km de radio y 1,4 masas solares [14].

Una estrella de neutrones situada a una distancia d del punto de observación rotando a una frecuencia ν alrededor de su eje de z y asumiendo que este eje esté dirigido hacia la Tierra emitirá ondas gravitacionales a una frecuencia $f = 2\nu$ con una amplitud característica del orden de [15]

$$h_0 = \frac{4\pi^2 G I_{zz} f^2}{c^4 d} \epsilon = (1,1 \cdot 10^{-24}) \left(\frac{I_{zz}}{I_0} \right) \left(\frac{f}{1\text{kHz}} \right) \left(\frac{1\text{kpc}}{d} \right) \left(\frac{\epsilon}{10^{-6}} \right), \quad (4)$$

donde $I_0 = 10^{38} \text{kg} \cdot \text{m}^2$ representa el momento de inercia de una estrella de neutrones promedio considerada como una esfera y $1\text{kpc} \simeq 3 \cdot 10^6 \text{m}$.

- **Inestabilidades de modo r :** Las estrellas de neutrones jóvenes pueden ser objeto de inestabilidades no axisimétricas que den lugar a ondas gravitacionales continuas, como las inestabilidades de modo r , las cuales consisten en un modo toroidal al cual se le acopla una fuerza restauradora de tipo Coriolis. Las ondas emitidas por este mecanismo son de frecuencia $f = \frac{4}{3}\nu$, si bien su amplitud es débil y su duración demasiado corta como para considerar factible su detección en este momento [16].
- **Precesión Libre:** Si bien la rotación de una estrella de neutrones tiende a que su forma sea simétrica alrededor del eje de rotación, es posible que este eje y el de simetría se encuentren desalineados, ya sea por interacción con un cuerpo celeste, por causa de un torque electromagnético o una oscilación súbita de la corteza de la estrella (*glitch*). La no alineación entre el eje de simetría de la estrella de neutrones y su momento angular provoca un movimiento de precesión que genera ondas gravitacionales continuas. No obstante, los mecanismos considerados son demasiado improbables o dan lugar a señales demasiado débiles como para poder ser detectadas con la tecnología actual [17].

Debido a su naturaleza, las estrellas de neutrones emiten energía a través de múltiples canales al mismo tiempo; esto implica que no toda la energía se emite en forma de ondas gravitacionales, sino que existe una contribución no despreciable a través de ondas electromagnéticas, afectando esto a las estimaciones anteriores. El *límite de spindown*, definido como la amplitud de la onda gravitacional que se detectaría si toda la pérdida de energía cinética de una estrella de neutrones se produjera por medio de radiación gravitacional [18]

$$h_0^{sd} = \sqrt{\frac{5 G I_{zz} |\dot{\nu}|}{2 c^3 d^2 \nu}} \quad (5)$$

permite evaluar el estado de las búsquedas realizadas. Se ha respetado la notación de los apartados anteriores, I_{zz} suele tomarse como I_0 y $|\dot{\nu}|$ representa el valor absoluto de la tasa de variación temporal de la frecuencia de rotación de la estrella de neutrones. Superar el límite de spindown para alguna estrella de neutrones en una búsqueda de ondas gravitacionales continuas es un indicador de la mejora en sensibilidad tanto de los interferómetros utilizados como de las técnicas de análisis de datos.

1.3.4. La señal

Independientemente del mecanismo de emisión, las ondas gravitacionales continuas procedentes de estrellas de neutrones son prácticamente monocromáticas en el sistema de referencia en reposo

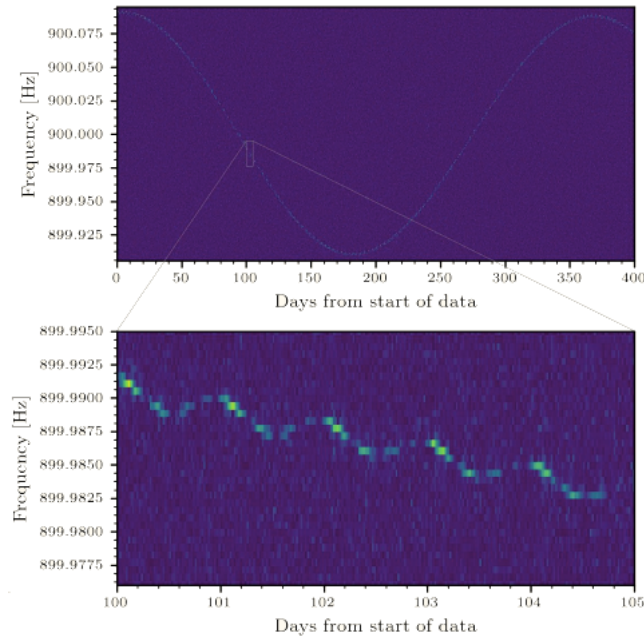


Figura 3: Modulación en frecuencia de una onda gravitacional producida por el movimiento de la Tierra en el SSB. El color da una estimación de la intensidad de la señal, siendo más alta cuanto más claro. Arriba: Modulación debida al movimiento de traslación. Abajo: Modulación debida al movimiento de rotación. En ambos casos se observa cierta periodicidad en los intervalos de crecimiento y decrecimiento a causa de la periodicidad anual y diaria de ambos movimientos, respectivamente. También puede observarse la cuasiperiodicidad diaria de la modulación en amplitud debida a las funciones antenna patern. Fuente:[19]

respecto a la estrella. Al tratarse de una emisión continua cuasiperiódica es útil caracterizarla en términos de la fase de la onda emitida

$$\Phi_{NS}(t_{NS}) = \phi_0 + 2\pi \sum_{n=0}^s \frac{f_{NS}^{(n)}}{(n+1)!} t_{NS}^{n+1}, \quad (6)$$

donde ϕ_0 , $f_{NS}^{(0)}$, $f_{NS}^{(n>0)}$ representan respectivamente la fase inicial, la frecuencia instantánea y los parámetros de spindown de la señal en el sistema de referencia en reposo, s indica el número de parámetros de spindown utilizados y t_{NS} es el tiempo medido a partir de un momento consistente con ϕ_0 . Esta fase está relacionada con la deformación relativa que medirán los interferómetros situados en la Tierra, donde la señal detectada se encontrará modulada en amplitud y frecuencia, tal y como se muestra en la figura 3.

La respuesta del detector al paso de una onda gravitacional será una combinación de las respuestas del detector a ambas polarizaciones de la onda según

$$h(t) = F_+(t)h_+(t) + F_\times(t)h_\times(t) \quad (7)$$

donde $h_{+,\times}$ son las componentes de *strain* de la onda gravitacional en cada polarización y $F_{+,\times}$ son las funciones *antenna pattern*, las cuales dependen de la posición celeste de la fuente en el sistema de referencia del detector y dan una medida de la sensibilidad de este a las diferentes polarizaciones en las diferentes orientaciones celestes [2]. A causa del movimiento de rotación y traslación de la Tierra, la posición relativa de la fuente cambia con el tiempo, modulándose la amplitud de la onda detectada a escala diaria y anual, como se muestra en la figura 3.

Este mismo movimiento de traslación y rotación de la Tierra respecto al baricentro del sistema solar (SSB por sus siglas en inglés) provoca un corrimiento Doppler dependiente del tiempo dado

por

$$f(t) = \hat{f}(t) \left(1 + \frac{\vec{v}(t) \cdot \vec{n}(t)}{c} \right), \quad (8)$$

donde f es la frecuencia de la onda gravitacional en el sistema de referencia del detector, \hat{f} la frecuencia de la onda emitida en el sistema de referencia de la estrella de neutrones, \vec{v} la velocidad del detector en el SSB y \vec{n} el vector unitario correspondiente a la posición celeste de la fuente desde el detector. El uso de la formulación no relativista del efecto Doppler viene justificado por las velocidades típicas de traslación y rotación de la Tierra, que se encuentran entre la 10^{-4} y 10^{-6} veces la velocidad de la luz en el vacío [20].

La frecuencia en el sistema de referencia de la estrella de neutrones \hat{f} puede desarrollarse como

$$\hat{f}(t) = f_0 + \sum_{n=0}^s \frac{f^{(n)}}{n!} \left(t - t_0 + \frac{\Delta\vec{r}(t) \cdot \vec{n}(t)}{c} \right)^n, \quad (9)$$

donde t_0 es el tiempo de inicio de medida del detector, $f^{(n>0)}$ son los parámetros de spindown en el SSB (en general diferentes a los de (6)) y $\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)$, siendo $\vec{r}(t)$ la posición del detector en el SSB a tiempo t . Este desarrollo asume que la estrella de neutrones se mueve uniformemente en el SSB a una distancia tal no se observa movimiento propio, si bien estos efectos podrían tenerse en cuenta añadiendo más parámetros. Finalmente, no se ha tenido en cuenta el *delay* de Shapiro, consistente en un retraso en la llegada de señales debido a la presencia de materia, ya que sus efectos son demasiado pequeños como para ser observados [21, 22].

1.4. Métodos de análisis de datos

Actualmente es posible llevar a cabo búsquedas de ondas gravitacionales continuas en datos recogidos por los detectores interferométricos de LIGO. Los diferentes tipos de búsquedas pueden clasificarse según la cantidad de parámetros conocidos de la fuente: En las búsquedas focalizadas (*targeted searches*) se intentan identificar ondas gravitacionales procedentes de púlsares conocidos en términos de su frecuencia, spindown, posición celeste y cuantos parámetros se hayan podido detectar por medio de otras técnicas; en las búsquedas a ciegas (*blind searches*), por contra, se intentan detectar ondas gravitacionales cuyas fuentes se desconocen [23]. La diferencia principal recae sobre la cantidad de patrones compatibles con la señal detectada a analizar. Un patrón es una combinación de parámetros que da lugar a una señal que podría hallarse en los datos. Las búsquedas focalizadas son computacionalmente más baratas que las búsquedas a ciegas, ya que el conocer cierto número de parámetros de una fuente con cierta precisión permite disminuir el número de patrones a analizar.

Los métodos de análisis de datos pueden separarse en dos familias según la información de la señal que utilicen: los coherentes y los semicoherentes.

- Métodos coherentes:** Trabajan con la fase y la frecuencia de la señal. Están basados en el filtrado adaptado (*matched filtering*): se define un producto escalar mediante el cual las medidas del detector se comparan con patrones de señal calculados a partir de modelos numéricos. Cualquier variación de la fase o la frecuencia no contemplada en el patrón provocará una discrepancia creciente en el tiempo de la señal respecto al patrón utilizado, disminuyendo la significancia de esta. El número de patrones necesarios para esta búsqueda escala con la quinta potencia del tiempo de observación, mientras que el coste computacional escala con la sexta; un alto número de patrones involucra un aumento de posibles falsos positivos, de manera que deben aumentarse los umbrales de detección a medida que se trabaja con periodos de tiempo más largos para mantener la sensibilidad de la búsqueda. El análisis *Time-Domain \mathcal{F} -statistic* [22] pertenece a esta familia de métodos, y ha sido

utilizado en los análisis del primer periodo de observación del interferómetro Virgo (VSR1) y el primer periodo de observación de los interferómetros de LIGO (O1) dividiendo los datos en fragmentos de días de duración a causa del alto coste computacional, buscando candidatos coincidentes entre los diversos fragmentos analizados [23, 24].

- **Métodos semicoherentes:** Trabajan con la frecuencia de la señal. Se basan en dividir los datos tomados en bloques de menor duración, los cuales se analizan coherentemente por separado para, en conjunto, analizarse incoherentemente (sin tener en cuenta la variación de la fase). El hecho de disminuir el tamaño de los segmentos coherentes conlleva una drástica reducción del coste computacional del método, así como una reducción de la sensibilidad respecto a los métodos coherentes. Actualmente se utilizan diversos métodos basados en un enfoque semi-coherente, como por ejemplo *PowerFlux* o *SkyHough*, utilizados en los análisis del primer periodo de observación de LIGO, así como en periodos previos [25, 26, 27, 24, 23]. En este caso, el coste computacional escala con el tiempo de duración de los segmentos coherentes y el cuadrado del tiempo de observación.

La combinación de ambos métodos da lugar a esquemas jerarquizados, en los cuales se utilizan métodos semicoherentes para barrer el espacio de parámetros y acotar los posibles candidatos a onda gravitacional continua, de manera que es posible analizar los candidatos sobrevivientes por medio de métodos coherentes más sensibles en cierto entorno acotado alrededor de dichos candidatos donde el coste computacional no resulta prohibitivo.

No se han detectado ondas gravitacionales continuas en ninguna de las búsquedas realizadas hasta ahora. No obstante, se han podido establecer cotas superiores sobre las amplitudes esperadas por medio de diferentes análisis [23] y ha sido posible batir el límite de spindown para cinco púlsares conocidos en búsquedas focalizadas [28]. Estos hechos muestran el estado de mejora de los métodos de búsqueda de ondas gravitacionales continuas, indicando que su detección podría llevarse a cabo en futuros periodos de observación.

2. Método de Hough

2.1. La transformada de Hough

La transformada de Hough es un método de reconocimiento de patrones inventado por Paul Hough en 1962 con el fin de automatizar la detección de partículas cargadas en las cámaras de burbujas (*bubble chambers*), facilitando la interpretación de imágenes que podrían llevar horas de análisis a científicos bien entrenados [29]. Posteriormente, Richard Duda y Peter Hart generalizaron esta idea a fin de poder detectar formas arbitrarias en una imagen, dando lugar a la transformada de Hough utilizada hoy en día [30].

La figura 4 muestra un ejemplo sencillo de transformada de Hough para detectar líneas en una imagen. A través de cada uno de los puntos de la imagen inicial se hacen pasar un conjunto de líneas (idealmente infinitas) las cuales se caracterizan por su distancia al origen de coordenadas r y el ángulo que forma dicha distancia con el eje horizontal θ . Cada familia de rectas que pasan por un punto dado (x, y) se corresponde con una curva sinusoidal en el espacio de parámetros (r, θ) según la forma normal de una recta $r = x \cos \theta + y \sin \theta$; por consiguiente, el punto de intersección de las sinusoidales en el espacio de parámetros, si existe, corresponde a los parámetros de la recta que pasa por los tres puntos de la imagen original.

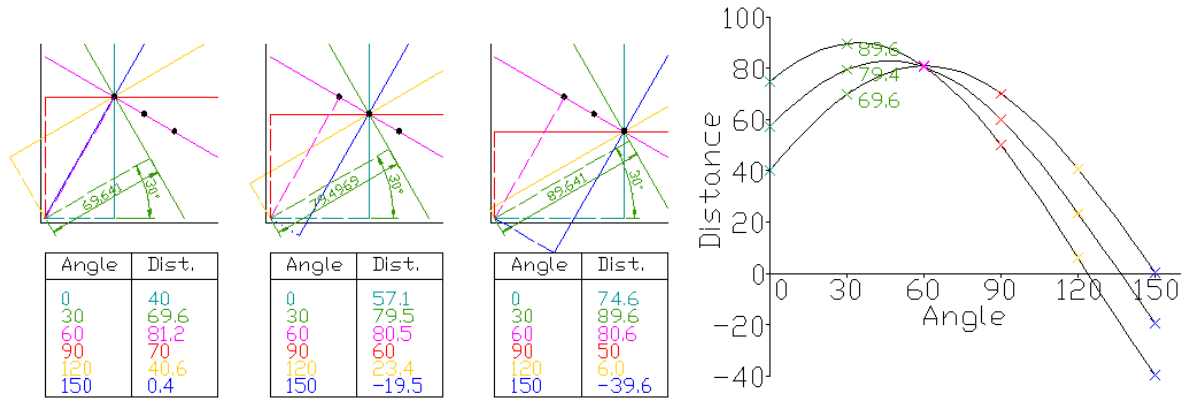


Figura 4: Ejemplo de uso de la transformada de Hough para la detección de rectas en una imagen. (Izquierda) Por cada punto se hacen pasar seis rectas de parámetros conocidos. En este caso, se utiliza la distancia de estas rectas al origen r y el ángulo que forma esta distancia con el eje horizontal θ en vez de la pendiente y la coordenada en el origen para evitar problemas al lidiar con rectas verticales. Esta caracterización se denomina *forma normal*. (Derecha) La forma normal permite representar a cada familia de rectas como una curva sinusoidal en términos de sus parámetros (r, θ) ; los puntos de intersección de estas curvas corresponden a los parámetros de la recta que pasa por los tres puntos de la imagen inicial. Fuente: [31]

2.2. Método de Hough para ondas gravitacionales continuas

La aplicación de esta técnica a la búsqueda de ondas gravitacionales continuas requiere lidiar con ciertas dificultades, puesto que las imágenes iniciales no serán tres puntos claramente definidos en un plano, sino que serán puntos en el espacio de tiempo-frecuencia construido a partir de transformadas de Fourier de segmentos de datos de 30min de duración, en los cuales la señal se encuentra *enterrada* varios órdenes de magnitud por debajo del ruido del detector. Además, al implementar el procedimiento numéricamente se limita la resolución del espacio de parámetros, de manera que no es posible resolver infinitamente los parámetros de la señal, sino que debe recurrirse a un procedimiento estadístico según el cual el espacio de parámetros se interpreta como un histograma en el que cada curva aumenta en uno el conteo de los bins por los que pasa, siendo el bin de mayor conteo el correspondiente a los parámetros de una posible señal de ondas gravitacionales continuas.

La búsqueda de ondas gravitacionales continuas parte de los datos de strain obtenidos por los detectores interferométricos y las ecuaciones (8) y (9). En primer lugar, los datos temporales de cada detector se dividen en segmentos de duración $T_{coh} = 30\text{min}$, desechándose aquellos segmentos incompletos o con fragmentos de datos no útiles. Se calcula el espectro de potencia de cada segmento por medio de la transformada de Fourier discreta y se construye el plano de tiempo-frecuencia, el cual se encuentra discretizado en tiempo y frecuencia, asignando a cada bin (t, f) la potencia de la señal a tiempo t a frecuencia f normalizada según el ruido de fondo $S_n(f)$. Formalmente, $S_n(f)$, denominada *espectro de potencia unilateral*, representa la transformada de Fourier de la función de autocorrelación y se encuentra definida para frecuencias $f \geq 0$; para el caso que nos ocupa, es una referencia del ruido presente en el detector. Sobre plano de tiempo-frecuencia se impone un umbral de potencia ρ_{th} sobre todos los bins: Si la potencia de un bin excede el valor umbral, se asigna a dicho bin un conteo de 1; en caso contrario, se asigna un conteo de 0, obteniéndose como resultado un histograma de potencia binario denominado *peak-gram* en el cual aparecen representadas las principales componentes espectrales de la señal del detector.

Finalmente, se aplica la transformada de Hough sobre los peak-grams para obtener los parámetros que generan los patrones observados. En este caso se utilizan cuatro parámetros: la frecuencia

de la onda gravitacional en el sistema de referencia del detector f ; el spindown f_1 , tasa de cambio de la frecuencia, independiente del sistema de referencia; y las coordenadas ecuatoriales de la fuente, ascensión recta y declinación (α, δ) . Esto genera un histograma en el espacio de parámetros (f, α, δ, f_1) , donde cada bin representa un candidato a fuente de ondas gravitacionales caracterizado mediante su *significancia*

$$s = \frac{n - \langle n \rangle}{\sigma}, \quad (10)$$

donde n representa el conteo de un bin en presencia de señal y $\langle n \rangle$, σ representan el valor esperado y la desviación estándar de dicho conteo para un peak-gram de ruido puro.

Como resultado del paso anterior se obtienen dos listas de candidatos (una por cada detector, L1 y H1) ordenados según su significancia, llamadas *toplists*. Los candidatos de ambas listas son comparados mediante la construcción de una métrica en el espacio de parámetros; esto es, dados los parámetros de un candidato de cada toplist, se calcula la distancia entre ellos y se dan por coincidentes aquellas parejas que se encuentren dentro de cierto radio previamente establecido, obteniendo una nueva toplist, llamada toplist *global*, a partir de el promedio de los parámetros de ambos candidatos coincidentes. Sobre esta nueva toplist se lleva a cabo el mismo proceso, en busca de conjuntos de candidatos consistentes con una misma señal. A este conjunto se le llama clúster, y su construcción se lleva a cabo agrupando transitivamente los candidatos coincidentes. Finalmente, se calcula el centro del clúster como un promedio ponderado en significancia de todos los elementos que conforman el clúster, obteniéndose como resultado los parámetros de las señales de ondas gravitacionales presentes en los datos. La figura 5 resume este algoritmo en un diagrama de flujo.

Se utilizará un espacio de parámetros de cuatro dimensiones, a saber frecuencia, spindown y posición celeste, de manera que la distancia entre dos candidatos vendrá dada por una expresión de la forma

$$d_{\text{Hough}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta f}{\delta f}\right)^2 + \left(\frac{\Delta f_1}{\delta f_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \theta}{\delta \theta}\right)^2}, \quad (11)$$

donde las deltas mayúsculas se refieren a la diferencia en frecuencia, spindown y posición estelar de dos candidatos y las deltas minúsculas hacen referencia a la resolución de las diferentes dimensiones del espacio de parámetros.

Todo este proceso está poblado de parámetros libres cuyo valor debe ser escogido buscando un compromiso entre capacidad de cálculo y sensibilidad de la búsqueda. Para ello se establecen cotas de acuerdo a convenios que faciliten el análisis de datos o se realizan inyecciones de señales artificiales en los datos para evaluar el comportamiento de la búsqueda ante diferentes parámetros libres.

2.3. Límites operacionales

2.3.1. Umbral de potencia

La elección del umbral de potencia ρ_{th} está basada en argumentos estadísticos sobre la distribución de los conteos de la transformada de Hough: Se definen las probabilidades de falso positivo α y falso negativo β y bien se maximiza la ratio crítica del conteo en el espacio de parámetros n , bien se minimiza la probabilidad de falso negativo. Ambos procedimientos alcanzan el mismo resultado de $\alpha \simeq 0,20$ y $\rho_{th} \simeq 1,6$ [32].

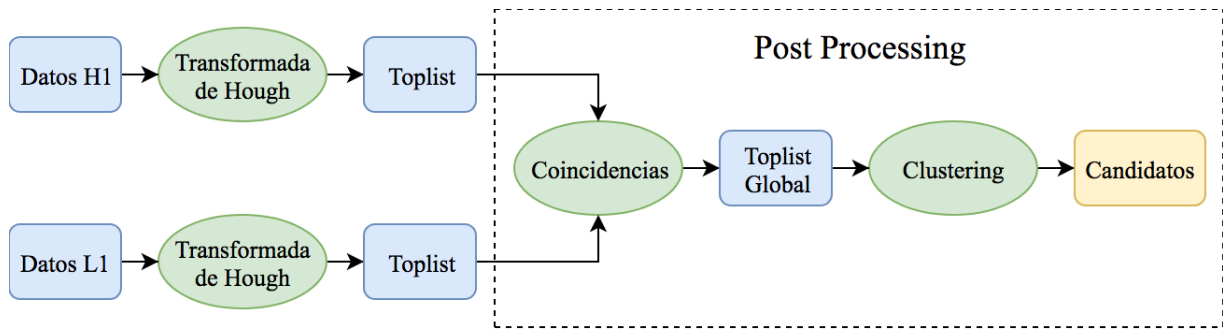


Figura 5: Diagrama de flujo del método de Hough aplicado a la detección de ondas gravitacionales continuas. El método se divide en dos partes. En la primera, se aplica la transformada de Hough a cada serie de datos en busca de posibles ondas gravitacionales continuas. En la segunda, llamada *post processing*, se hacen coincidir los elementos de ambas toplists resultantes a fin de agruparlos y hallar candidatos a onda gravitacional continua que puedan ser revisados por medio de otros métodos.

2.3.2. Resolución en frecuencia

El uso de transformadas de Fourier cortas (llamadas Short Fourier Transform, SFT) de fragmentos de duración T_{coh} involucra una discretización en frecuencia dada por $\delta f = 1/T_{coh}$. De cara a los peak-gram, es conveniente que la señal se encuentre bien localizada en un solo bin de frecuencia en cada SFT en tanto que una fuga de potencia a bins vecinos deslocalizaría los parámetros consistentes e, incluso, podría provocar que la señal no superara la cota en potencia, descartándola de ser detectada. Típicamente, se considera que el desplazamiento de la señal debe estar acotado entre la mitad de un bin y uno entero. Considerando que la Tierra da una vuelta completa sobre sí misma al día, es posible acotar el tiempo de duración de las SFT derivando la ecuación (8), despreciando la variación de \hat{f} frente a la aceleración del detector y tomando como dominante la componente centrípeta de esta última, obteniendo

$$T_{coh} < \sqrt{\frac{1}{n} \frac{c}{\hat{f}} \frac{T_{\oplus}^2}{4\pi^2 R_{\oplus}}} \lesssim 50\text{min} \cdot \sqrt{\frac{500\text{Hz}}{n\hat{f}}}, \quad (12)$$

donde \hat{f} corresponde a la frecuencia de la señal en el sistema de referencia del baricentro del sistema solar, T_{\oplus} al periodo de rotación terrestre, R_{\oplus} al radio terrestre y c a la velocidad de la luz en el vacío. El parámetro n regula el corrimiento máximo permitido de la señal en fracciones de bin, es decir, $n = 1$ corresponde a un corrimiento de un bin completo y $n = 2$ a un corrimiento de medio bin. La elección de T_{coh} es bastante libre dentro de la ligadura dada por (12), pudiéndose tomar tanto un valor fijo de 30min con el correspondiente riesgo de fugas de potencia a altas frecuencias [32] como tomar diferentes valores que verifiquen la ligadura y además optimicen el cálculo de transformadas rápidas de Fourier utilizando potencias de 2 [33].

2.3.3. Resolución en spindown

La discretización afecta de igual modo a la resolución de spindown de la búsqueda. En efecto, si se considera un sólo parámetro de spindown, es decir, una señal de la forma

$$\hat{f} = f_0 + f_1 \Delta t, \quad (13)$$

donde f_0 corresponde a la frecuencia intrínseca de la fuente y f_1 al primer parámetro de spindown, el mínimo valor discernible de spindown provocaría un corrimiento de un bin de frecuencia en todo el periodo de observación T_{obs} , es decir

$$f_1^{min} = \frac{\delta f}{T_{obs}} = \frac{1}{T_{coh} T_{obs}} \equiv \delta f_1. \quad (14)$$

Este razonamiento puede extenderse al resto de posible parámetros de spindown asumiendo que la frecuencia instantánea de la fuente pudiere expresarse como un desarrollo temporal en serie de Taylor, obteniendo como resultado

$$\delta f_n = n! \frac{1}{T_{coh} T_{obs}^n}. \quad (15)$$

Cada parámetro de spindown extra debe situarse dentro de un rango de valores determinado por la edad del púlsar emisor, y este rango debe ser resoluble según (15). El hecho importante es que el valor máximo del n-ésimo parámetro de spindown decrece como τ^{-n} donde τ representa la edad del púlsar, muy superior a la duración de los periodos de observación [32]. Esto provoca que exista cierto parámetro de spindown crítico a partir del cual los rangos de valores no son resolubles según (15), y por tanto no afectan a la búsqueda realizada. Del mismo modo, si se limitan los parámetros de spindown utilizados, automáticamente se acotan inferiormente las edades de los púlsares detectables. Esto último debe tenerse en cuenta al fijar el valor de T_{coh} , pues la edad de los púlsares debe ser tal que los parámetros de spindown sean despreciables frente al corrimiento Doppler a fin de mantener la consistencia con (12).

A la hora de desarrollar búsquedas de ondas continuas se utilizan argumentos basados en el coste computacional y en la probabilidad de encontrar objetos astrofísicos por encima de cierta tasa de frenado para fijar el número de parámetros de spindown y sus rangos de valores, siendo estos consistentes con lo expuesto anteriormente. El uso parámetros de *spinup* (es decir, parámetros de spindown que *augmenten* la frecuencia de la fuente) sigue el mismo razonamiento.

2.3.4. Resolución celeste

En lo que se refiere a la posición celeste, se puede construir una discretización naturalmente a partir del corrimiento Doppler (8) considerando todas aquellas posiciones celestes consistentes con una observación de frecuencia $f(t)$ en el detector. Esto es, dado un tiempo t en el cual se obtiene dicha observación, los puntos consistentes en la bóveda celeste verificarán, a partir de (8),

$$\cos \phi = \frac{\mathbf{v}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{n}}{v(t)} = \frac{c}{v(t)} \frac{f(t) - \hat{f}(t)}{\hat{f}(t)} \rightarrow \delta \phi = \frac{c}{v(t)} \frac{\delta f}{\hat{f}(t) \sin \phi}, \quad (16)$$

manteniendo la notación anteriormente utilizada, donde se supuesto que las frecuencias se encuentran dispersadas un bin como máximo. Así, el lugar geométrico de dichas posiciones celestes corresponde a un anillo de grosor variable $\delta \phi$. La resolución celeste se toma como una fracción del grosor del más delgado de los anillos según un factor P_f denominado *pixel factor*

$$\delta \theta = \frac{1}{P_f} \delta \phi|_{min} = \frac{10^4}{P_f \hat{f}(t)} \delta f, \quad (17)$$

donde se ha tomado que la velocidad de la Tierra es 10^{-4} veces la velocidad de la luz en el vacío. El uso de un pixel factor permite variar el grosor de la malla celeste de acuerdo a la sensibilidad buscada y el coste computacional asequible.

2.4. Post processing

2.4.1. Subespacios de frecuencia y spindown: contribución métrica

Tras establecer límites operacionales de la transformada de Hough se ejecuta el código DriveHoughMulti.c alojado en [34] y se obtienen dos toplist, una por cada detector (L1 y H1), en

las que se encuentran los candidatos más significativos. Diversas fuentes de ruido pueden causar señales continuas en frecuencia [35], de manera que el post processing se encarga de cruzar ambas toplists y discriminar los candidatos físicos de aquellos espurios provocados por el ruido. Este paso tiene incluso más grados de libertad que el anterior, ya que las justificaciones no se basan en límites computacionales sino en la Física que se espera detectar.

El método utilizado explota la persistencia de las señales para emparejar candidatos coincidentes en ambos detectores. Siguiendo el razonamiento de [36], es plausible que existan fuentes que produzcan una misma clase de ruido en ambos detectores, pero no lo es tanto que haya una correlación entre ambos ruidos, es decir, que produzcan los mismos efectos al mismo tiempo; así, como las señales continuas buscadas se deben encontrar en ambos detectores en todo momento, al buscar candidatos correspondientes a fenómenos equivalentes en ambos detectores automáticamente se descartarán aquellos espurios producidos por el ruido.

Para poder emparejar candidatos es necesario tener en cuenta que los detectores se están separados por una distancia de unos 7ms luz, lo que provoca una modulación en frecuencia de las señales detectadas que debe corregirse realizando un corrimiento de frecuencias de una de las toplists de acuerdo al spindown obtenido a fin de colocar los candidatos en un origen común. Hecho esto, se realiza una primera fase de coincidencias en la cual se intentan emparejar los elementos de ambas toplists mediante el uso de la distancia descrita en la ecuación (11). Los análisis realizados tratan con bandas de frecuencia estrechas, de 0,1Hz de amplitud, de manera que el tamaño de los bins dependientes en frecuencia puede calcularse utilizando una frecuencia representativa de la banda. Del mismo modo los tiempos de observación de ambos detectores son similares, de manera que el tamaño de los bins en frecuencia y spindown pueden calcularse tanto promediando ambas magnitudes como tomando una para ambas toplists. Hecho esto, se calculan las contribuciones de frecuencia y spindown a la distancia (11) para todo par de candidatos i, j pertenecientes a diferentes toplists como

$$\Delta f_{ij} = |f_i - f_j| , \quad (18)$$

$$\Delta f_{1ij} = |f_{1i} - f_{1j}| . \quad (19)$$

2.4.2. Subespacio de posición celeste: contribución métrica

La contribución celeste a (11) puede calcularse siguiendo dos prescripciones

La primera interpreta $\Delta\theta$ como la distancia *geodésica* entre dos candidatos en el cielo, esto es, la distancia entre dos candidatos en la esfera celeste se corresponde con la longitud del menor de los segmentos del gran círculo que intersecta a ambos candidatos,

$$\Delta\theta_{ij}^{geo} = \arctan \frac{|\mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_j|}{\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j} , \quad (20)$$

siendo \mathbf{n}_i el vector unitario en dirección al candidato i desde la tierra, \times el producto vectorial y \cdot el producto escalar habitual. El uso de la arcotangente permite identificar automáticamente el cuadrante de cada ángulo al implementar numéricamente la función. Esta opción es la más natural en tanto que los vectores \mathbf{n}_i pueden calcularse directamente a partir de las coordenadas ecuatoriales (α, δ) . La estructura de malla propuesta conlleva la existencia de cierta curva en la esfera celeste alrededor de la cual las señales se encuentran particularmente deslocalizadas, de manera que el uso de esta prescripción perjudicará los resultados cercanos a dicha curva, ya que no contrarresta el efecto de separación inherente a la malla celeste.

De acuerdo con el desarrollo que llevó a la ecuación (16), la región celeste consistente con señales procedentes de la zona alrededor de $\phi = 0$ es mucho más grande (de hecho diverge, formalmente)

que la de aquellas señales que proceden de los polos. Esta curva es el lugar geométrico de los puntos de la esfera tales que el vector unitario hacia la posición de la fuente es paralelo al vector velocidad, es decir, los puntos que intersectan con el plano de la eclíptica. Luego las señales situadas cerca de la eclíptica se encuentran mucho más deslocalizadas que aquellas señales situadas en los polos, dificultando el análisis por coincidencias planteado.

La solución propuesta consiste en interpretar $\Delta\theta$ como la *distancia euclidiana* entre los candidatos una vez *proyectados* sobre el plano de la *eclíptica*. Esto es, se transforman las coordenadas ecuatoriales a coordenadas eclípticas y se prescinde de la tercera componente, perpendicular al plano de la eclíptica. Esta transformación es una rotación de ejes rígidos, de manera que las distancias relativas entre candidatos no cambian. Al proyectar sobre el plano de la eclíptica, los candidatos situados en los polos ven sus distancias relativas débilmente modificadas, mientras que aquellos candidatos situados en las inmediaciones de la eclíptica ven sus distancias relativas drásticamente reducidas, puesto que la principal contribución en dicha región, la componente perpendicular, se encuentra suprimida. Esto permite compensar la deslocalización ya comentada: Las regiones en que los candidatos se encuentran bien localizados se mantienen prácticamente inalteradas en términos métricos, mientras que las regiones problemáticas se ven contraídas por medio de una métrica modificada.

La métrica modificada no porta información sobre el hemisferio en que se encuentran los candidatos involucrados, de manera que pudiere suceder que candidatos en el polo norte y en el polo sur se dieran por coincidentes si no se imponen más condiciones. Para evitar tales problemas se impone como condición adicional que las componentes perpendiculares al plano de dos candidatos coincidentes se encuentren dentro del radio de coincidencia.

El cambio de coordenadas ecuatoriales a eclípticas viene dado por una rotación de las coordenadas ecuatoriales rectangulares alrededor de la línea de equinoccios según un ángulo $\varphi = 23,43^\circ$, llamado *oblicuidad* de la eclíptica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad (21)$$

donde (x, y, z) representan las coordenadas eclípticas rectangulares y (ξ, η, ζ) las coordenadas ecuatoriales rectangulares. Estas coordenadas pueden relacionarse mediante las coordenadas esféricas con los ángulos de longitud y latitud (λ, β) y ascensión recta y declinación (α, δ) respectivamente

$$(\xi, \eta, \zeta) = (\cos \delta \cos \alpha, \cos \delta \sin \alpha, \sin \delta), \quad (22)$$

$$(x, y, z) = (\cos \beta \cos \lambda, \cos \beta \sin \lambda, \sin \beta), \quad (23)$$

de manera que la contribución celeste a (11) para un par de candidatos i, j será

$$\Delta\theta_{ij}^{pro} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}. \quad (24)$$

La obliquidad de la eclíptica presenta variaciones a causa del movimiento de nutación provocado por la interacción gravitatoria entre la Tierra y la Luna [37]. Los modelos dados por [38, 39] permiten calcular dicho ángulo con precisiones desde centésimas de arcosegundos hasta millar-cosegundos, según lo lejos que se sitúe la fecha de J2000.0 (1 de Enero del año 2000), si bien el ángulo $\varphi = 23,43^\circ$ es correcto durante el periodo de observación de los datos con que se trabaja. Dado que el objetivo de proyectar sobre el plano de la eclíptica es eliminar la contribución principal a la distancia celeste de los candidatos cercanos a dicho plano, es lícito utilizar el valor de $\varphi = 23,43^\circ$ para definir las coordenadas eclípticas.

2.4.3. Radios de coincidencia y clústering

Una vez establecidas las contribuciones de los diferentes parámetros debe definirse un *radio de coincidencia* r_c . Geométricamente, la ventana de coincidencia es la esfera en el espacio de parámetros de radio r_c tal que, al centrarla en un candidato, cerca en su interior a los candidatos coincidentes con el del origen. Los candidatos no están limitados a coincidir una sola vez: por ejemplo, dos toplists de 1000 candidatos cada una pueden dar lugar tanto a 10^6 coincidencias como a ninguna.

Por cada par de candidatos coincidentes se añade un candidato a una nueva toplists, la toplists global, cuyos parámetros $\{f, \alpha, \delta, f_1\}$ vendrán dados por promedios pesados por significancia de los candidatos coincidentes progenitores. Sobre esta toplist global se vuelve a realizar un análisis de coincidencias sobre ella misma, utilizando el mismo procedimiento que en el caso anterior: Los candidatos que se encuentren dentro de cierto *radio de clústering* r_{cl} serán declarados equivalentes y agrupados en una nueva estructura llamada *clúster parcial*. Tras construir estos clústeres parciales, se procede a agruparlos mediante superposición: Aquellos clústeres parciales que tengan uno o más candidatos en común pasarán a formar parte de un nuevo clúster parcial resultado de la unión de ambos. Este proceso continúa hasta que los clústeres resultantes no se superponen. Obtenidos los clústeres finales, se calculan los centros de estos, promediando los parámetros de todos los constituyentes pesados en significancia.

Llegados a este punto, se vetan aquellos clústeres cuya población de candidatos sea inferior a dos, pues podría tratarse de un clúster espurio formado a partir de ruido. Aquellos clústeres que sobrevivan a todo el procedimiento constituirán candidatos a señal de ondas gravitacionales continuas a falta de un análisis más profundo utilizando otros algoritmos disponibles.

El objetivo, como se verá posteriormente, es maximizar la eficiencia de detección estableciendo radios de coincidencia cortos a fin de descartar coincidencias espurias y radios de clústering largos a fin de agrupar todos los candidatos correspondientes a una sola señal.

2.5. Inyección de señales

Detector	Inicio (GPS)	Inicio (Y/M/D)	Fin (GPS)	Fin (Y/M/D)	Número de SFT $T_{coh} = 30\text{min}$	Duty Cycle (%) NT_{coh}/T_{obs}
H1	1126627217	2015/09/18	1136649617	2016/01/19	3684	60 %
L1	1126627217	2015/09/18	1136649617	2016/01/19	3007	51 %

Cuadro 1: Características de los datos tomados por los observatorios de LIGO situados en Hanford (H1) y Livingston (L1) durante el periodo de observación O1. La diferencia en el número de SFT (short Fourier Transform) y la fracción de datos útiles (*duty cycle*) entre ambos detectores se debe a que no todos los datos tomados pueden ser tratados como válidos, sino que existen ciertos fragmentos que deben ser desechados a causa de fallos técnicos independientes en cada detector.

Los grados de libertad internos del post processing deben fijarse antes de aplicar el algoritmo a datos reales procedentes de detectores interferométricos. Para ello, se utilizan técnicas basadas en inyectar señales de ondas gravitacionales continuas generadas artificialmente en los datos recogidos por el detector. Esta técnica permite controlar tanto los parámetros de la onda gravitacional como la intensidad de ésta respecto al ruido de fondo, de manera que es posible caracterizar el comportamiento del algoritmo de análisis ante diferentes condiciones del detector.

En primer lugar, debe correrse el algoritmo completo sobre la serie de datos a utilizar a fin de descartar la posible existencia de artefactos que puedan interferir con las inyecciones. Como resultado, se guardan las toplists obtenidas ordenadas por significancia. La inyección de las diferentes señales se mediante el código `MakeFakeData_v5` disponible libremente en [34].

Una vez se introducen las señales artificiales en una serie de datos el procedimiento es prácticamente idéntico al explicado en secciones anteriores, si bien hay que tener en cuenta ciertas sutilezas. La más importante es la introducción de un veto en significancia sobre los datos a fin de disminuir el coste de los análisis. En una situación real en la cual se buscaran púlsares arbitrarios, los datos se analizarían teniendo en cuenta toda la bóveda celeste en lo que se conoce como una búsqueda *all sky*. Este proceso es muy costoso en términos computacionales, de manera que se recurre al conocimiento de los parámetros de las inyecciones para simplificarlo: Los candidatos no se obtienen analizando todo el cielo, sino que para cada inyección se analiza la posición celeste consistente con ésta, tomándose como válidos aquellos candidatos cuya significancia se encuentre por encima de la del menor de los candidatos obtenido en el análisis previo. Esto implica una elección en la cantidad de candidatos a tomar en cada toplists. Es decir, cuantos más candidatos se tomen en una toplists, más bajo será el veto en significancia y más deslocalizada se encontrará la señal detectada; cuantos menos candidatos se tomen en cada toplists, mejor localizada se encontrará la señal, pero menor será la robustez ante resultados espurios. Para los análisis realizados se han tomado 1000 candidatos en cada toplists, imponiendo que no más de 300 provengan de una misma posición celeste a fin de evitar que fuentes de ruido colapsen la toplist.

Durante los análisis de O1, se considera que ha habido una detección cuando un clúster formado tras el post processing se encuentre a menos de 13 bins del punto de inyección en el espacio de parámetros [23, 40].

La inyección de señales permitirá estudiar el comportamiento de sus parámetros asociados en el algoritmo de Hough. Esto incluye desde evaluar la eficiencia del método hasta obtener intervalos máximos de dispersión respecto al valor inyectado, permitiendo mejorar los vetos impuestos a la hora de aceptar o desechar candidatos. También será posible evaluar estos resultados a diferentes grados de ruido circundante.

La cuantificación del ruido circundante o, equivalentemente, de la calidad de la señal, se realiza mediante el *depth* \mathcal{D} , definido según

$$\mathcal{D}(f) \equiv \frac{\sqrt{S_n(f)}}{h_0(f)}, \quad (25)$$

donde S_n representa la densidad espectral de potencia de los datos tomados por el detector a una frecuencia f dada y h_0 caracteriza la amplitud de la más débil de las ondas gravitacionales detectables a dicha frecuencia, como se ha visto en la introducción. La figura 6 ilustra la utilidad del *depth* en tanto que éste da cuenta de la razón entre la amplitud de la señal detectada y la menor amplitud detectable: cuanto mayor sea el *depth*, señales más débiles podrán ser detectadas a un mismo nivel de ruido. Esta magnitud permite caracterizar la sensibilidad de los diferentes algoritmos de búsqueda propuestos así como la amplitud relativa de las señales inyectadas artificialmente en los datos.

Los datos utilizados en este estudio pertenecen al periodo de observación O1 de LIGO, cuyas características se encuentran expuestas en la tabla 1 y son públicamente accesibles a través de [42]. En dichos datos se inyectaron 499 señales de parámetros aleatorios en una banda de frecuencia situada a 872,1Hz con una amplitud de 0,1Hz y con parámetros de spindown comprendidos entre -10^{-8} Hz/s y 10^{-9} Hz/s en toda la bóveda celeste para catorce *depths*, siendo las señales diferentes en cada uno de estos *depths*. Se utilizó un pixel factor de 2, y la duración de los segmentos coherentes fue de 1800s, de manera que las resoluciones en el espacio de parámetros resultaron ser

$$\begin{aligned} \delta f &= 6 \cdot 10^{-4} \text{Hz}, \\ \delta f_1 &= 6 \cdot 10^{-11} \text{Hz/s}, \\ \delta \theta &= 3 \cdot 10^{-3} \text{rad}. \end{aligned}$$

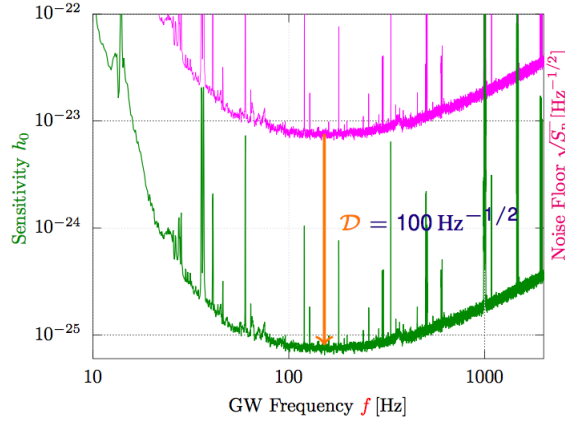


Figura 6: El *depth* permite relacionar la calidad de una señal en términos de su densidad espectral de potencia con la amplitud mínima detectable de una onda gravitacional a una frecuencia dada. Fuente: [41]

3. Resultados

En cada *depth* analizado se inyectaron 499 señales diferentes de frecuencia aleatoria en 0,1Hz alrededor de 872,1Hz y spindown entre -10^{-8} Hz/s y 10^{-9} Hz/s en toda la bóveda celeste. Se utilizaron toplists de 1000 candidatos, no tomando más de 300 en cada posición celeste.

Al analizar la precisión y la exactitud de los candidatos obtenidos se ha impuesto que los clústeres estén formados por al menos dos elementos de la toplist global a fin de evitar clústeres espurios. En el cálculo de eficiencias, además, se considera que una inyección se ha detectado si el clúster correspondiente se encuentra a menos de 13 bins en el espacio de parámetros, tal y como se hizo para la caracterización de O1 [40].

Todos los *depths* estudiados dieron lugar a comportamientos equivalentes con la correspondiente degradación estadística debida a la disminución en el número de clústeres formados, de manera que se muestran los resultados del menor *depth*, $\mathcal{D} = 16,5\text{Hz}^{-1/2}$.

3.1. Eficiencia

La figura 7 muestra las eficiencias de detección para diferentes radios de coincidencia y clústering utilizando ambas prescripciones (20), (24) para calcular la contribución celeste a la distancia en el espacio de parámetros. Se observa como para los datos utilizados la prescripción proyectada arroja mejores resultados que la geodésica, igualándose estos a medida que se aumentan los radios. Esto está de acuerdo con las características de ambas distancias, pues la prescripción proyectada tiende a acercar una fracción de los candidatos respecto a la prescripción geodésica, facilitando la coincidencia y el agrupamiento en clústeres parciales a menores radios. Al aumentarse cualesquiera de los dos radios la eficiencia tiende a aumentar en tanto que los clústeres tienden a incluir un mayor número de vecinos (en caso de que los haya).

Búsquedas anteriores utilizaron radios de coincidencia y clústering de $\sqrt{14}$ bins, ya que a partir de dicha distancia el 90% de eficiencia no aumenta hacia mayores *depths*. En este caso, la introducción de la distancia proyectada permite disminuir el radio de coincidencia a $\sqrt{9}$ bins y aumentar el radio de clústering a $\sqrt{16}$ bins sin disminuir el *depth* de 90% de eficiencia. Esto resulta favorable en tanto que la reducción del radio de coincidencia disminuirá el número de coincidencias espurias, mientras que el aumento del radio de clústering agrupará los diferentes candidatos procedentes de una misma señal, todo esto sin empeorar la sensibilidad de la búsqueda

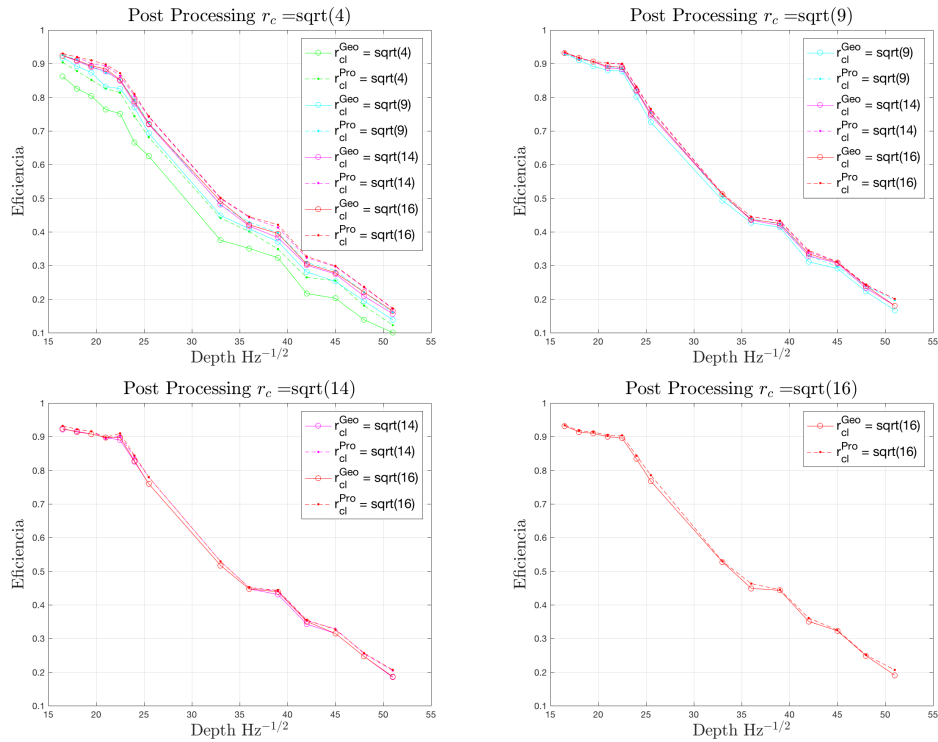


Figura 7: Eficiencias de detección para los post processing realizados mediante prescripción geodésica y proyectada a diferentes radios de coincidencia y clústering. En línea continua se representa la eficiencia de la prescripción geométrica; en línea discontinua se representa la eficiencia de la prescripción proyectada; los colores representan los mismos valores en todos los gráficos. Las distancias están expresadas en bins del espacio de parámetros.

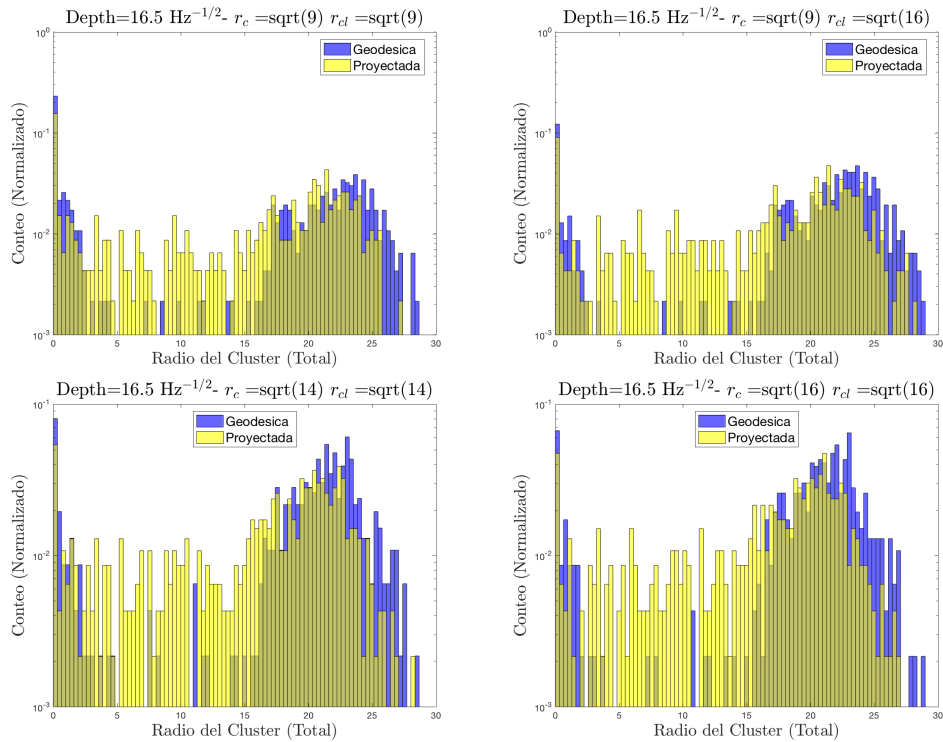


Figura 8: Radio de los clústeres formados por los post processing realizados mediante distancias celestes geodésica y proyectada a diferentes radios de coincidencia y clústering. En color azul se representan los candidatos obtenidos mediante la prescripción geodésica; en color amarillo se representan los candidatos obtenidos mediante la prescripción proyectada.

en tanto que el nivel de depth al 90 % no ha disminuido.

Las bajas eficiencias resultantes del radio de clústering de $\sqrt{4}$ bins se deben a que los clústeres parciales formados no se encuentran lo suficientemente cerca como para agruparse, de manera que aparecen múltiples clústeres finales correspondientes a una misma inyección que acaban siendo descartados por encontrarse demasiado lejos de ésta.

3.2. Precisión de los candidatos: radio de clúster

El radio de un clúster se define como la distancia en el espacio de parámetros entre el centro del clúster, entendido como un promedio pesado por significancia de los parámetros de todos los elementos del clúster, y el más alejado de los elementos del clúster. Esta medida da una idea de cómo de dispersados se encuentran los diferentes candidatos tras llevarse a cabo el proceso de coincidencia: clústeres más pequeños permitirán llevar a cabo análisis posteriores en regiones menores del espacio de parámetros, mientras que clústeres más dispersos pueden involucrar búsquedas más costosas computacionalmente en pasos posteriores.

En la figura 8 se muestran los radios de los diferentes clústeres obtenidos para diferentes distancias de coincidencia y clústering, comparando la opción de mayor depth al 90 % con opciones de radios iguales. La prescripción geodésica tiende a generar dos poblaciones de clústeres, una de clústeres de radio bajo y otra de clústeres de radio alto; por contra, la prescripción proyectada tiende a suavizar esta dicotomía y comprime gran parte de los clústeres. Como se muestra en la figura 9, la reducción de radio de los clústeres se lleva a cabo en la vecindad del plano de la eclíptica, situada en la periferia del plano de la eclíptica mostrado. Consistentemente con el paso anterior, los radios de clústering más bajos forman clústeres de menor tamaño a causa de la menor agregación de los clústeres cercanos.

3.3. Exactitud de los candidatos: distancia a la inyección

Las figuras 10, 11, 12 y 13 muestran la desviación de los parámetros de los clústeres obtenidos mediante el método de Hough respecto a los parámetros de las señales inyectadas para diferentes radios de coincidencia y clústering. Los resultados muestran el comportamiento esperado en líneas generales para ambas métricas; esto es, la métrica proyectada tiende a acercar a los candidatos al punto de inyección, mientras que la métrica geodésica presenta cierto grado de deslocalización en igualdad de condiciones. Este efecto es particularmente fuerte en la contribución celeste de la métrica (figura 12), en la cual los candidatos pasan de dispersarse hasta diez bins respecto al punto de inyección a prácticamente concentrarse en los seis primeros; como resultado de esta concentración celeste, la distancia total de los candidatos disminuye al utilizar la prescripción proyectada. En la figura 14 se observa que esta compresión se lleva a cabo principalmente en la región cercana al plano de la eclíptica, tal y como se esperaba conseguir.

3.4. Seguimiento de los candidatos: relación radio - distancia

Una vez se ha analizado el comportamiento del método de Hough en tanto a la formación de clústeres, es posible establecer estrategias de búsqueda que permitan mantener información acerca de los candidatos sin dedicar un excesivo esfuerzo computacional. Esta es la función de la figura 15, en la que se relaciona el tamaño de los clústeres (su radio) con la distancia a la que se encuentran del punto de inyección.

A medida que se aumentan los radios de coincidencia y clústering los clústeres tienden a crecer en tamaño, puesto que un aumento de los radios de clústering permite que se agrupe una mayor can-

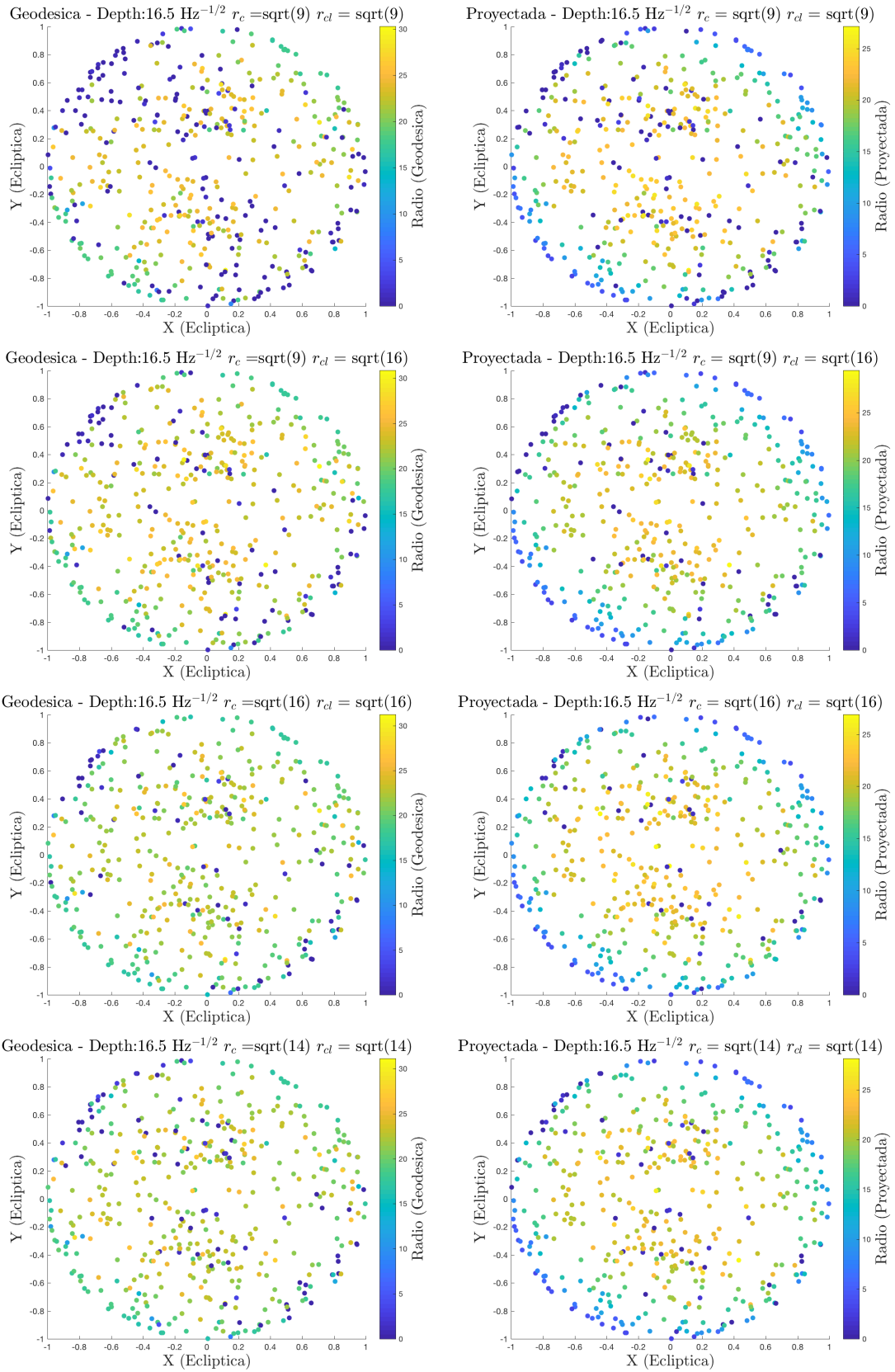


Figura 9: Posición celeste de los centros de los clústeres formados por los post processing realizados mediante prescripción geodésica (columna izquierda) y proyectada (columna derecha) a diferentes radios de coincidencia y clústering. El color representa el radio de cada clúster entendido como la distancia entre el centro del clúster y el candidato más lejano a éste en el espacio de parámetros.

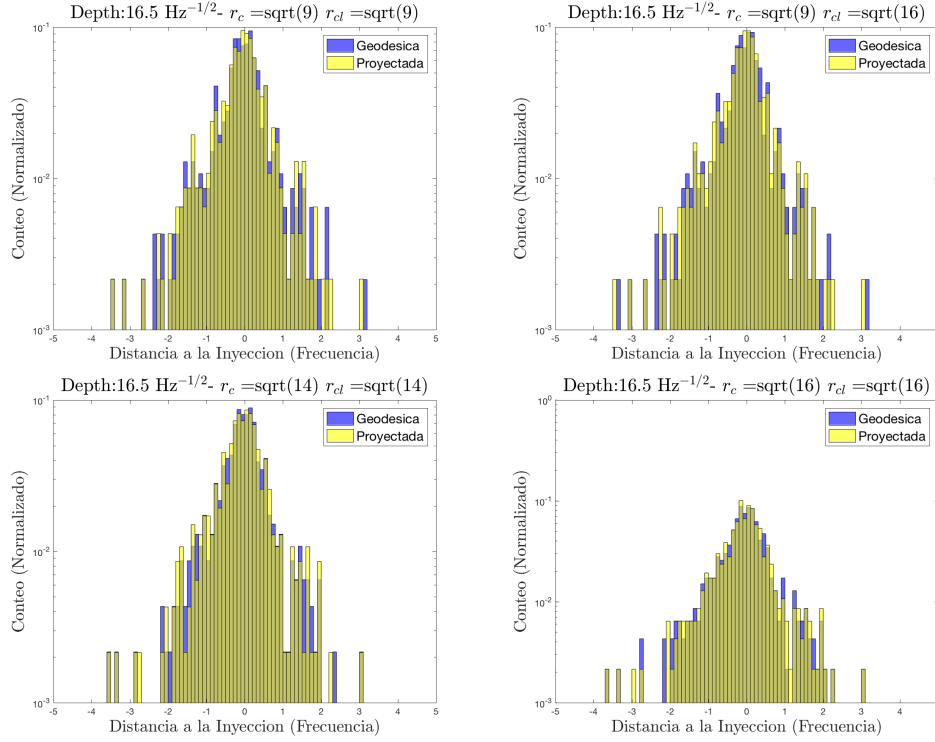


Figura 10: Diferencia (en bins) de la frecuencia de los candidatos obtenidos mediante el método de Hough respecto a la frecuencia de la inyección. En color azul se representan los candidatos obtenidos mediante la prescripción geodésica; en color amarillo se representan los candidatos obtenidos mediante la prescripción proyectada.

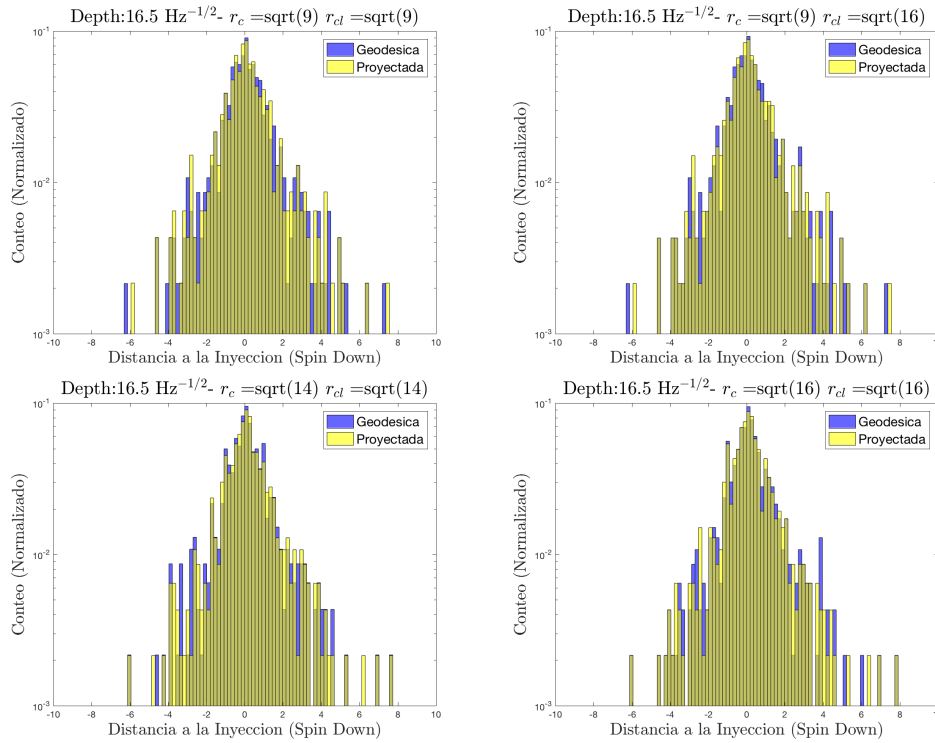


Figura 11: Diferencia (en bins) del spindown de los candidatos obtenidos mediante el método de Hough respecto a la frecuencia de la inyección. En color azul se representan los candidatos obtenidos mediante la prescripción geodésica; en color amarillo se representan los candidatos obtenidos mediante la prescripción proyectada.

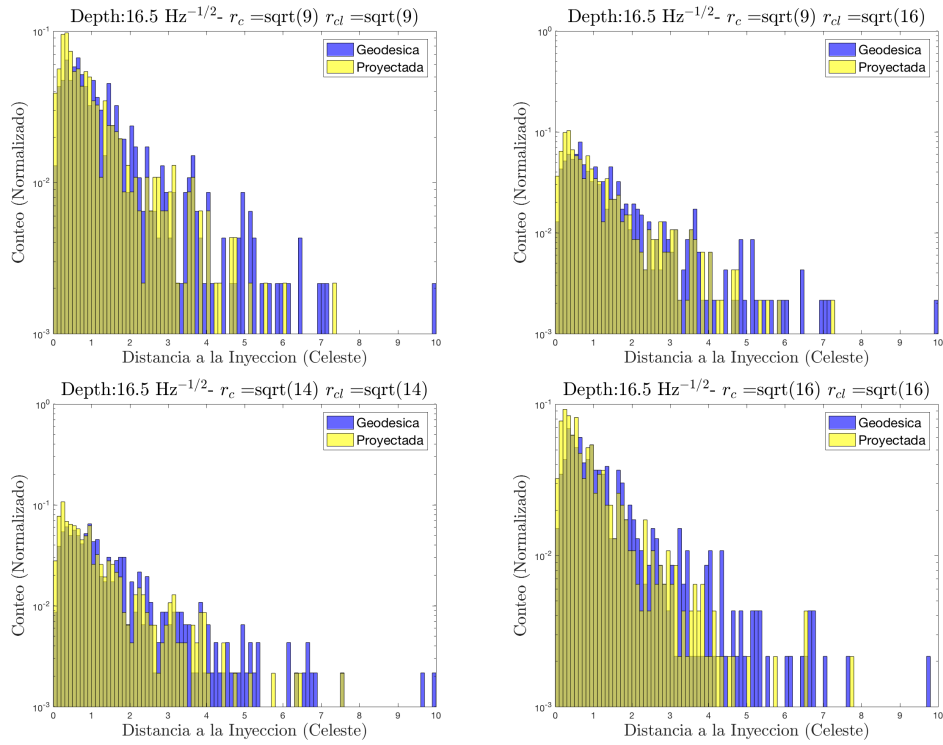


Figura 12: Distancia celeste (en bins) de los candidatos obtenidos mediante el método de Hough respecto a la inyección. En color azul se representan los candidatos obtenidos mediante la prescripción geodésica; en color amarillo se representan los candidatos obtenidos mediante la prescripción proyectada.

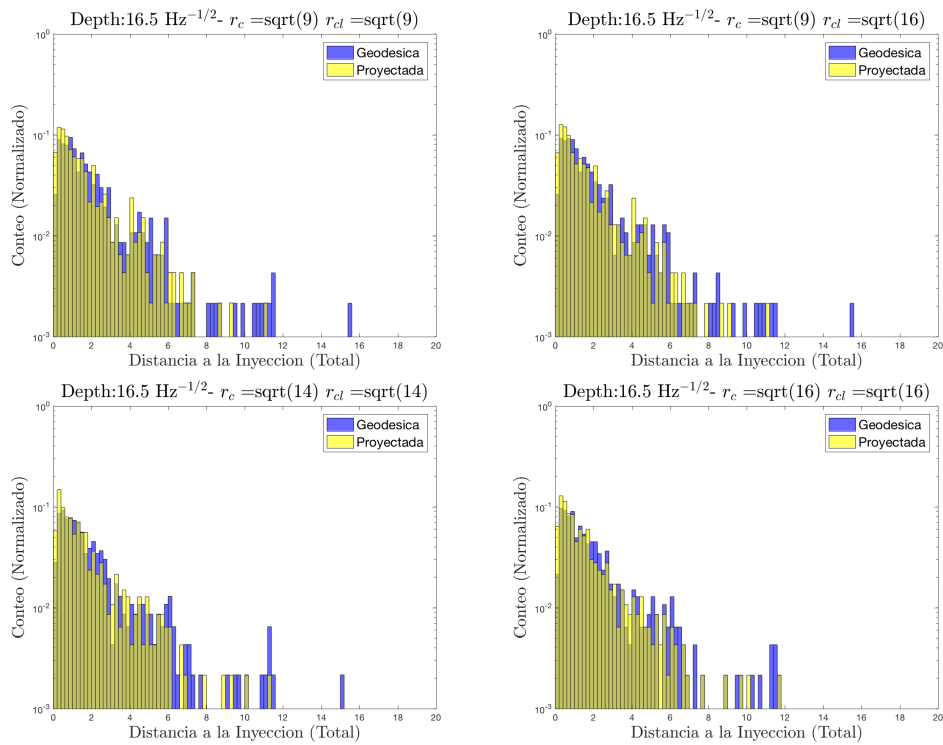


Figura 13: Distancia total en el espacio de parámetros (en bins) de los candidatos obtenidos mediante el método de Hough respecto a la inyección. En color azul se representan los candidatos obtenidos mediante la prescripción geodésica; en color amarillo se representan los candidatos obtenidos mediante la prescripción proyectada.

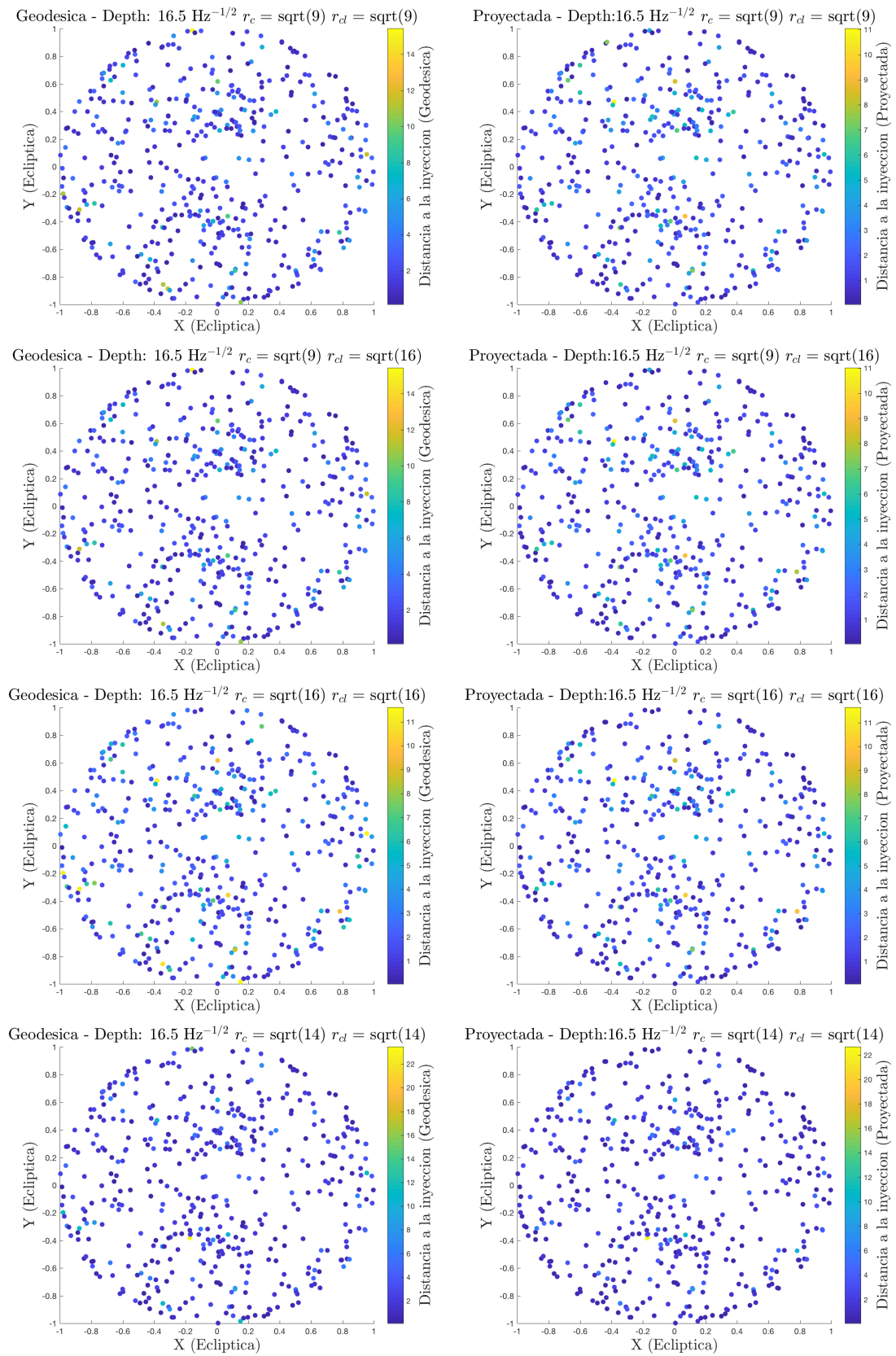


Figura 14: Posición celeste de los centros de los clústeres formados por los post processing realizados mediante prescripción geodésica (izquierda) y proyectada (derecha) a diferentes radios de coincidencia y clústering. El color representa la distancia del centro de cada clúster al punto de inyección.

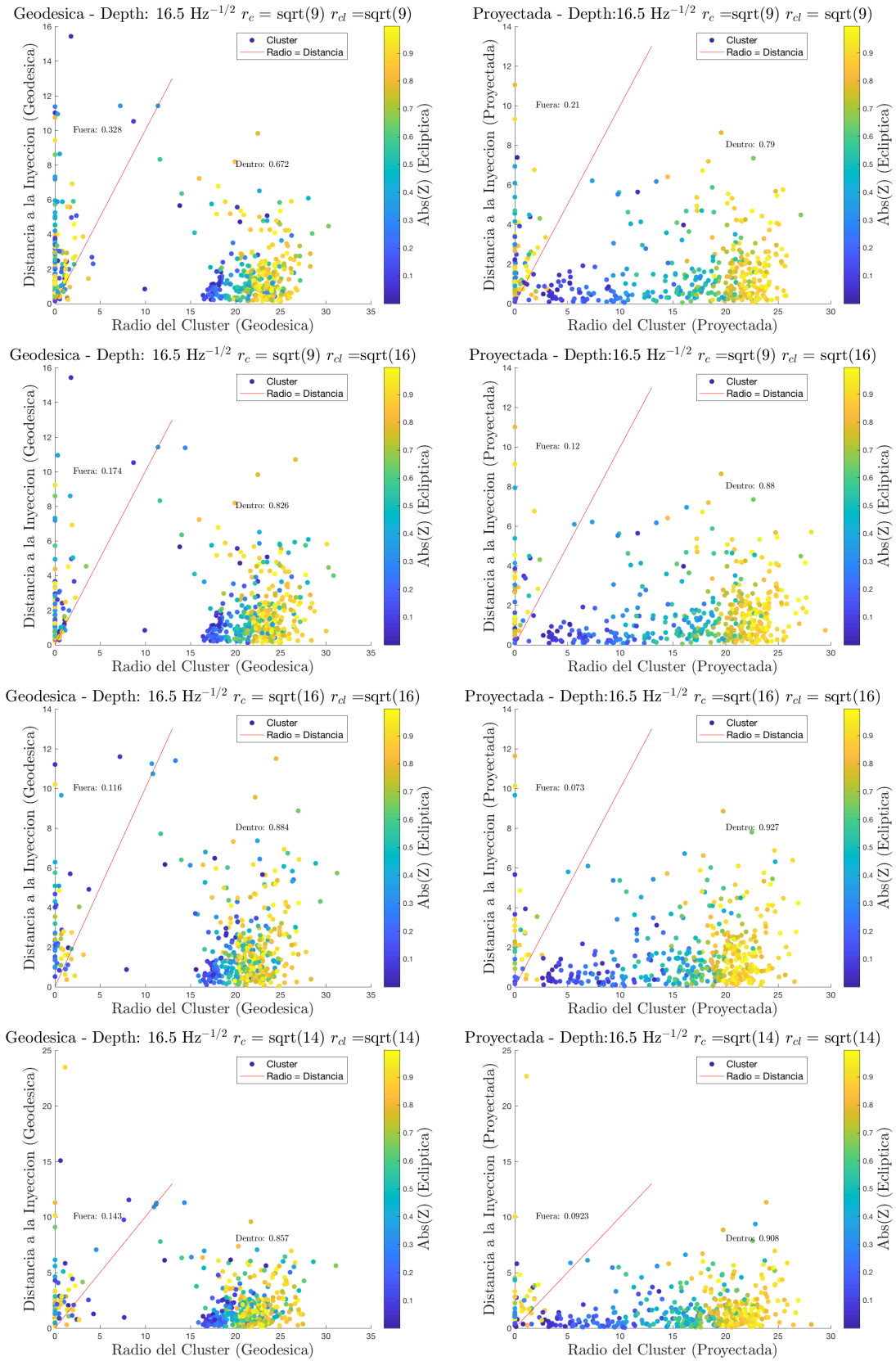


Figura 15: Relación entre el tamaño de los clústeres formados mediante el método de Hough y la distancia a la que se encuentran del punto de inyección. El color representa la distancia vertical de los clústeres al plano de la eclíptica. La línea roja separa los clústeres que incluyen en su interior el punto de inyección de los que no.

tividad de vecinos. En cuanto a la forma de agruparse, y de acuerdo con la figura 8, la prescripción geodésica tiende a generar dos poblaciones de clústeres, mientras que la proyectada extiende los clústeres a lo largo de un mayor número de radios, correspondiendo los más pequeños a clústeres situados cerca de la eclíptica. Luego la prescripción proyectada efectivamente tiende a comprimir los clústeres cercanos a la eclíptica, así como a acercarlos al punto de la inyección.

La misma figura 15 muestra la situación del punto de inyección respecto al centro del clúster. Para $\sqrt{9}$ bins de coincidencia y $\sqrt{16}$ bins de clústering utilizando la prescripción proyectada se obtiene un mayor porcentaje de inyecciones en el interior de los clústeres respecto a la prescripción geodésica; no obstante, este porcentaje es inferior al obtenido con radios de coincidencia y clústering de $\sqrt{14}$ y $\sqrt{16}$ bins. Por otro lado, la mayor parte de los clústeres se encuentran centrados a menos de 8 bins del punto de inyección, de manera que podría utilizarse este hecho como medida a la hora de ejecutar otros métodos de búsqueda.

De cualquier forma, el disponer de estos diagramas da una idea de la distribución de los candidatos al ser detectados por el método de Hough, permitiendo acotar las regiones de búsqueda a la hora de llevar a cabo análisis mediante otros métodos complementarios.

4. Conclusión

Se ha dado una visión general del estado actual de las ondas gravitacionales continuas, tanto en términos de modelos teóricos de emisión como de métodos de análisis de datos. Si bien aun no ha sido posible detectar una onda gravitacional continua, a medida que los detectores alcancen su sensibilidad de diseño y se obtengan periodos de observación más largos es de esperar que será posible su detección; prueba de ello es el establecimiento de cotas superiores cada vez más restrictivas, así como la superación del límite de spindown de cinco púlsares, como se ha comentado en la introducción.

En el lado computacional, se ha visto que un problema a tener en cuenta es el coste computacional de los métodos de análisis de datos, motivo por el cual se han desarrollado estructuras de análisis jerárquicas, en las cuales los métodos de análisis computacionalmente ligeros sacan a la luz los candidatos a ondas gravitacionales, acotando su espacio de parámetros y posibilitando la búsqueda de señales en entornos reducidos por medio de métodos más costosos y de mayor sensibilidad. La variedad de métodos de que se dispone y el hecho de que sigan siendo modificados continuamente facilitará una futura detección de estas ondas gravitacionales.

Es en este último lugar donde se enmarca el presente trabajo de fin de grado, en la caracterización de posibles mejoras en los métodos de análisis de datos. El análisis basado en el método de Hough, si bien muestra un comportamiento sobresaliente dentro del arsenal de algoritmos disponibles, sigue en proceso de mejora a fin de poder adaptarse a las sensibilidades a alcanzar por los detectores en los siguientes periodos de observación. Estas mejoras se basan en modificar fragmentos problemáticos del algoritmo para subsanar trabas previas y aumentar la efectividad respecto a la situación a fin de tener más libertad en la elección de los parámetros que configuran la búsqueda.

El caso que ocupa este trabajo ha consistido en una modificación del último segmento del algoritmo, en el que se utiliza el método de coincidencias para agrupar posibles candidatos y descartar resultados debidos a fluctuaciones espurias de ruido. En particular, se ha conseguido solventar la deslocalización que sufrían los candidatos alrededor de la eclíptica mediante la proyección sobre el plano de la eclíptica, eliminando las contribuciones problemáticas de la distancia y dejando prácticamente inalterados al resto de candidatos.

Por consiguiente, las ventanas de coincidencia y clústering de $\sqrt{14}$ bins en el espacio de pa-

rámetros utilizadas en los análisis del periodo de observación O1 podrán ser (y probablemente serán) modificadas de cara al análisis del periodo de observación O2 gracias a procedimientos de este tipo, permitiendo aumentar la sensibilidad del método de Hough a la par que mantener el coste computacional controlado. Como ya se ha comentado, la disminución de la distancia de coincidencia permite disminuir el número de candidatos espurios, mientras que el aumento de la distancia de clústering agrupa un mayor número de candidatos evitando que se formen múltiples clústeres alrededor de un punto de inyección. Los análisis realizados en términos de la eficiencia del post processing y el comportamiento de los clústeres resultantes permiten proponer una distancia de coincidencia de $\sqrt{9}$ bins, inferior a la elección de O1; y una distancia de clústering de $\sqrt{16}$ bins, superior a la elección de O1.

Del mismo modo, el estudio realizado a partir del tamaño de los clústeres y la distancia al punto de inyección permite establecer cercos en la distancia de seguimiento de los clústeres de cara a la aplicación de otros métodos. La mayoría de clústeres formados alojan el punto de inyección en su interior, de manera que el seguimiento de una región del tamaño del clúster sería suficiente para garantizar un análisis efectivo; no obstante, para una pequeña fracción de los clústeres el punto de inyección se encuentra fuera de los límites del mismo, si bien en la mayoría de casos no se ha encontrado a más de 8 bins en el espacio de parámetro. Será necesario establecer un método de discriminación entre ambos tipos de clústeres o extender los análisis a otras bandas de frecuencias a fin de comprobar la robustez de esta cota superior para poder utilizar efectivamente esta información.

La optimización de los métodos de análisis de datos avanza a la par con el aumento de duración y sensibilidad de los periodos de observación de los detectores interferométricos, prosperando la detección de ondas gravitacionales continuas y abriendo definitivamente un nuevo canal de medida del Universo.

5. Referencias

- [1] Misner, Thorne, and Wheeler, *Gravitation*, 1st ed. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1973.
- [2] Maggiore, *Gravitational waves. Volume 1: theory and experiments*, 1st ed. New York: Oxford University Press Inc., 2008, vol. 1.
- [3] Saulson, “If light waves are stretched by gravitational waves, how can we use light as a ruler to detect gravitational waves?” *Am. J. Phys.*, vol. 65, no. 6, pp. 501–505, 1997.
- [4] Shannon, “Communication In The Presence Of Noise,” *Proc. IRE*, vol. 37, no. 1, pp. 10–21, 1949.
- [5] The LIGO Scientific Collaboration, “Advanced LIGO,” *Class. Quantum Gravity*, vol. 32, no. 7, p. 074001, 2015.
- [6] Manchester, Hobbs, Teoh, and Hobbs, “The Australia Telescope National Facility Pulsar Catalogue,” *Astron. J.*, vol. 129, no. 4, pp. 1993–2006, 2005. [Online]. Available: <http://www.atnf.csiro.au/research/pulsar/psrcat>
- [7] “National Radio Astronomy Observatory.” [Online]. Available: <https://public.nrao.edu/gallery/parts-of-a-pulsar/>
- [8] NASA-HESARC, “Internal structure of a neutron star.” [Online]. Available: https://heasarc.gsfc.nasa.gov/docs/objects/binaries/neutron_star_structure.html

-
- [9] Baade and Zwicky, “Cosmic Rays from Super-Novae,” *Proc. Natl. Acad. Sci.*, vol. 20, no. 5, pp. 259–263, 1934.
- [10] Hewsih, Bell, Pilkington, Scott, and Collins, “Observation of Rapidly Pulsating Radio Source,” *Nature*, vol. 217, pp. 709–713, 1968.
- [11] Lattimer, “The Nuclear Equation of State and Neutron Star Masses,” *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.*, vol. 62, pp. 458–515, 2012.
- [12] Lorimer, “Binary and Millisecond Pulsars Imprint,” *Living Rev. Relativ.*, vol. 8, no. 11, 2008. [Online]. Available: <http://www.livingreviews.org/lrr-2008-8>
- [13] Bisnovatyi-Kogan, “The Neutron Star Population in the Galaxy,” in *Proc. 149th Symp. Int. Astron. Union*, Barbuy and Renzini, Eds., no. December. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992, p. 379.
- [14] Horowitz and Kadau, “Breaking strain of neutron star crust and gravitational waves,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 102, no. 19, pp. 1–4, 2009.
- [15] Riles, “Recent searches for continuous gravitational waves,” *Mod. Phys. Lett. A*, vol. 32, no. 39, 2017.
- [16] Mahmoodifar and Strohmayer, “Upper bounds on r -mode amplitudes from observations of low-mass x-ray binary neutron stars,” *Astrophys. J.*, vol. 773, no. 2, p. 140, 2013.
- [17] Jones and Andersson, “Gravitational waves from neutron stars,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, no. 331, pp. 103–2002, 2002.
- [18] The LIGO Scientific Collaboration *et al.*, “First search for gravitational waves from known pulsars with Advanced LIGO,” *Astrophys. J.*, vol. 839, no. 12, 2017.
- [19] Ashton, “Neutron stars as continuous gravitational wave emitters,” in *LIGO P1700388-v3 Neutron Stars Futur. Res.*, Bonn, 2017.
- [20] Williams, “Earth Fact Sheet,” 2017. [Online]. Available: <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html>
- [21] Shapiro, “Fourth Test of General Relativity,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 13, no. 26, p. 789, 1964.
- [22] Jaranowski, Królak, and Schutz, “Data analysis of gravitational-wave signals from spinning neutron stars: The signal and its detection,” *Phys. Rev. D*, vol. 58, no. 6, p. 063001, 1998.
- [23] Abbott *et al.*, “Full band all-sky search for periodic gravitational waves in the O1 LIGO data,” *Phys. Rev. D*, vol. 97, no. 10, p. 102003, may 2018.
- [24] Abbott *et al.*, “All-sky search for periodic gravitational waves in the O1 LIGO data,” *Phys. Rev. D*, vol. 96, no. 6, pp. 1–35, 2017.
- [25] Abbott *et al.*, “First all-sky upper limits from LIGO on the strength of periodic gravitational waves using the Hough transform,” *Phys. Rev. D*, vol. 72, no. 10, pp. 1–22, 2005.
- [26] The LIGO Scientific and the Virgo Collaboration, “All-sky search for periodic gravitational waves in LIGO S4 data,” *Phys. Rev. D*, vol. 77, pp. 1–38, 2009.
- [27] Aasi *et al.*, “Application of a Hough search for continuous gravitational waves on data from the fifth LIGO science run,” *Class. Quantum Gravity*, vol. 31, no. 8, 2014.
- [28] Abbott *et al.*, “First narrow-band search for continuous gravitational waves from known pulsars in advanced detector data,” *Phys. Rev. D*, vol. 96, no. 12, pp. 1–20, 2017.

-
- [29] Hough, “Method and means for recognizing complex patterns,” *US Pat. 3,069,654*, vol. 21, pp. 225–231, 1962.
- [30] Duda and Hart, “Use of the Hough transformation to detect lines and curves in pictures,” *Commun. ACM*, vol. 15, no. 1, pp. 11–15, 1972.
- [31] Wikipedia contributors, “Hough transform — Wikipedia, the free encyclopedia,” https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Hough_transform&oldid=841468374, 2018, [Online; accessed 22-May-2018].
- [32] Krishnan *et al.*, “Hough transform search for continuous gravitational waves,” *Phys. Rev. D*, vol. 70, no. 8, pp. 1–23, 2004.
- [33] Astone, D’Antonio, Frasca, and Palomba, “A method for detection of known sources of continuous gravitational wave signals in non-stationary data,” *Class. Quantum Gravity*, vol. 27, no. 19, 2010.
- [34] The LIGO Scientific Collaboration, “LSC Algorithm Library - LALSuite.” [Online]. Available: <https://github.com/lscsoft/lalsuite>
- [35] Covas *et al.*, “Identification and mitigation of narrow spectral artifacts that degrade searches for persistent gravitational waves in the first two observing runs of Advanced LIGO,” *Phys. Rev. D*, vol. 97, no. 8, pp. 1–21, 2018.
- [36] Saulson, *Fundamentals of interferometric gravitational wave detectors*, 1st ed. River Edge, NJ: World Scientific, 1994.
- [37] Meeus, *Astronomical Algorithm*, 2nd ed. Willmann-Bell, Inc, 1998.
- [38] Laskar, “Secular Terms of Classical Planetary Theories Using the Results of General Theory,” *Astron. Astrophys.*, vol. 164, no. 2, p. 437, 1986.
- [39] Escapa, Getino, Ferrándiz, and Baenas, “Dynamical adjustments in IAU 2000A nutation series arising from IAU 2006 precession,” *Astron. Astrophys.*, vol. 604, p. A92, 2017.
- [40] Walsh *et al.*, “Comparison of methods for the detection of gravitational waves from unknown neutron stars,” *Phys. Rev. D*, vol. 94, no. 12, pp. 1–17, 2016.
- [41] Prix, “Continuous Gravitational Waves from Spinning Neutron Stars,” in *LIGO G1702407-v3 DPG-Frühjahrstagung*, 2018.
- [42] Vallisneri, Kanner, Williams, Weinstein, and Stephens, “The LIGO Open Science Center,” 2015. [Online]. Available: <https://losc.ligo.org/about/>
- [43] Bruce, Papa, and Schutz, “Optimal strategies for sinusoidal signal detection,” *Phys. Rev. D*, vol. 66, no. 10, pp. 1–18, 2002.
- [44] McCarthy and Luzum, “An Abridged Model of the Precession–Nutation of the Celestial Pole,” *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, no. April 2002, pp. 37–49, 2003.
- [45] Brady, Creighton, Cutler, and Schutz, “Searching for periodic sources with LIGO,” *Phys. Rev. D*, vol. 57, no. 4, pp. 2101–2116, 1998.
- [46] Prix, “Gravitational waves from neutron stars,” in *Neutron Stars Pulsars*, Becjker, Ed. Springer-Verlag, 2009, pp. 137–140. [Online]. Available: http://www.journals.cambridge.org/abstract_S1743921310008525