



Universitat
de les Illes Balears



UNIVERSITAT
ROVIRA I VIRGILI

TESIS DOCTORAL
2017

**Enseñanza de los sistemas lineales en
Secundaria: Una propuesta de mejora a través de
la integración de tecnologías.**

María Carrillo García



Universitat
de les Illes Balears



UNIVERSITAT
ROVIRA I VIRGILI

TESIS DOCTORAL
2017

**Programa de Doctorado en Tecnología Educativa:
Aprendizaje virtual y Gestión del Conocimiento**

**Enseñanza de los sistemas lineales en Secundaria:
Una propuesta de mejora a través de la integración
de tecnologías.**

María Carrillo García

Directora: M^a Paz Prendes Espinosa
Director: Francisco Esquembre Martínez
Ponente: Bárbara de Benito Crosetti

Doctora por la Universitat de les Illes Balears

Quisiera hacer patente mi gratitud, en sentido afectivo, a Tony, mi marido, sin su ayuda, ánimo y cariño este trabajo no habría sido una realidad. A mi hija, por ser el gran motor de mi vida. A mis padres, por brindarme toda mi formación y llenarme de amor, a ellos les debo todo lo que hoy en día soy. A mis hermanas y hermanos por apoyarme. A mis sobrinos, por las horas que no he podido compartir con ellos, con la familia.

A todos, mi eterno agradecimiento.

A María

ÍNDICE

ÍNDICE DE CONTENIDOS	7
AGRADECIMIENTOS.....	15
RESUMEN	19
ABSTRACT	21
RESUM	23
CAPÍTULO INTRODUCTORIO.....	25
1. Relevancia, justificación e interés de la investigación.....	27
2. La experiencia.....	32
BLOQUE I: Marco Teórico	45
<hr/>	
CAPÍTULO 1: LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS	47
3. Periodos en la enseñanza de las matemáticas	51
4. La enseñanza de las matemáticas en la actualidad.....	55
5. El apoyo visual para algunos bloques de las matemáticas	62
6. Los errores en los procesos matemáticos	68
CAPÍTULO 2: TEORÍA SOBRE APRENDIZAJES: ENFOQUES ÚTILES PARA EL AMBIENTE ENRIQUECIDO CON TIC	73
1. Introducción	77
2. Aprendizaje cognitivo, capacidades cognitivas.....	79
3. Aprendizaje constructivista y significativo	85
4. Aprendizaje colaborativo	90
CAPÍTULO 3: LAS TIC COMO RECURSO PARA ENSEÑAR	95
1. Justificación del uso de las TIC en la enseñanza	99
2. Enseñanza flexible con TIC.....	104
3. Las TIC en la enseñanza de las matemáticas.....	112
4. Como diseñar y desarrollar experiencias educativas exitosas apoyadas en TIC en el aula de matemáticas	119
BLOQUE II: Mi investigación.....	119
<hr/>	
CAPÍTULO 4: MÉTODO DE LA INVESTIGACIÓN	121
1. Justificación.....	125

2. Problema y objetivos	130
3. Paradigma, enfoque y diseño de la investigación	133
4. Contexto	139
5. Participantes	140
6. Instrumentos	142
6.1. Cuestionarios	142
6.2. Grupos de discusión	152
6.3. Diario del investigador	156
6.4. Otros	160
7. Fases	162
7.1. Cronograma de la investigación	162
7.2. Desarrollo de las fases	170
8. Nuestra propuesta didáctica	190
8.1. Diseño de la propuesta didáctica	190
8.2. Concreción de la propuesta	193
8.3. Exposición de la propuesta didáctica	203
CAPÍTULO 5: RESULTADOS	207
1. Resultados de las fases de análisis	211
2. Resultados de los grupos de discusión	216
3. Resultados de los diarios	219
4. Resultados de los cuestionarios	225
CAPÍTULO 6: CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS	251
1. Consecución de los objetivos	255
2. Análisis global de la experiencia	257
2.1. Estudio de la propuesta didáctica	259
2.2. Estudio de la eficiencia de las TIC en la enseñanza de los sistemas lineales	259
3. Discusión de los resultados	261
4. Limitaciones de la investigación	266
5. Futuras líneas de investigación	267
6. Reflexiones personales	268
BIBLIOGRAFÍA	269
ANEXOS	287
Anexo I. Los sistemas de ecuaciones lineales en las leyes de educación.....	287
Anexo II. Las matemáticas en la legislación.....	289
Anexo III. La competencia digital	297
Anexo IV. Ilustraciones de los errores cometidos con frecuencia por parte de los discentes	301
Anexo V. Búsqueda de recursos TIC para el aprendizaje de los sistemas lineales.....	303
Anexo VI. Búsqueda de experiencias en revistas educativas para la enseñanza del álgebra, geometría y funciones.....	307
Anexo VII. Contenidos y objetivos de nuestra unidad didáctica	309

Anexo VIII.	Estudio de la unidad didáctica/formativa presente en el libro de texto Oxford, proyecto Adarve, Serie Trama	311
Anexo IX.	Exposición de la propuesta didáctica realizada para la Investigación	335
Anexo X.	Comparativa del primer programa y del segundo	343
Anexo XI.	Cuestionario inicial de los sistemas	347
Anexo XII.	Cuestionario sobre las matemáticas en la enseñanza	349
Anexo XIII.	Cuestionario sobre rectas y sistemas	351
Anexo XIV.	Cuestionario sobre trabajo colaborativo	353
Anexo XV.	Cuestionario EFAI	355
Anexo XVI.	Primera versión cuestionario disponibilidad tecnológica	357
Anexo XVII.	Versión final cuestionario disponibilidad tecnológica	359
Anexo XVIII.	Validación cuestionario disponibilidad tecnológica.....	363
Anexo XIX.	Hoja de ejercicios.....	371
Anexo XX.	Examen.....	373
Anexo XXI.	Ejemplo informe registro de la plataforma.....	375
Anexo XXII.	Ejemplo del diario de clase llevado a cabo en para la propuesta de didáctica	377
Anexo XXIII.	Consecución de los objetivos/contenidos del currículo	383
Anexo XXIV.	Certificado curso Moodle	387
Anexo XXV.	Certificado curso Geogebra	389

ÍNDICE DE FIGURAS.

Figura 1: Relevancia de la investigación. Fuente: elaboración propia	27
Figura 2: Justificación de la investigación. Fuente: elaboración propia.....	29
Figura 3: Interés de la investigación. Fuente: elaboración propia.	30
Figura 4: Desarrollo de la investigación. Fuente: elaboración propia.....	32
Figura 5: Objetivos de la investigación. Fuente: elaboración propia	33
Figura 6: Justificación del interés de la investigación. Fuente: elaboración propia.....	35
Figura 7: Fases de la investigación. Fuente: elaboración propia.	37
Figura 8: Ventajas B-Learning. Fuente: elaboración propia	39
Figura 9: Problemas y método de la investigación. Fuente: elaboración propia.....	42
Figura 10: Instrumentos de la investigación. Fuente: elaboración propia.....	42
Figura 11: La propuesta didáctica para nuestra investigación. Fuente: elaboración propia.....	43
Figura 12: Mapa conceptual capítulo 1. Fuente: elaboración propia	49
Figura 13: Ejes cartesianos. Fuente: elaboración propia	63
Figura 14: Cerebro. Fuente: Boaler, s.f.....	65
Figura 15: Mapa conceptual capítulo 2. Fuente: elaboración propia.....	75
Figura 16: Modelos de aprendizajes. Fuente: elaboración propia.....	78
Figura 17: Enfoques constructivistas en educación. Fuente: Coloma y Tafur, 1999.....	85
Figura 18: Tipos de aprendizajes. Fuente: Díaz y Hernández, 2002	88
Figura 19. Mapa conceptual capítulo 3. Fuente: elaboración propia.....	97
Figura 20: Ventajas e-learning y b-learning. Fuente: elaboración propia	106
Figura 21: Inconvenientes e-learning y b-learnig. Fuente: elaboración propia.	106

Figura 22: Características técnicas fundamentales EVEA. Fuente: Elaboración propia	109
Figura 23: Características educativas fundamentales EVEA. Fuente: Elaboración propia	110
Figura 24: Mapa conceptual capítulo 4. Fuente: elaboración propia	123
Figura 25: Ciclo del análisis didáctico. Fuente: Gómez, 2002.....	133
Figura 26: Esquema del modelo ADDIE. Fuente: elaboración propia	136
Figura 27: Esquema de acciones de la investigación. Fuente: elaboración propia.....	137
Figura 28: Desarrollo del modelo CIPP. Fuente: elaboración propia	180
Figura 29: Trabajo presencial y no presencial. Fuente: elaboración propia.....	186
Figura 30: Aula de informática. Fuente: www.colegiohispania.es	192
Figura 31: Aula de informática. Fuente: www.colegiohispania.es	193
Figura 32: Sesión primera. Fuente: Elaboración propia	196
Figura 33. Sesión segunda. Fuente: elaboración propia.....	197
Figura 34. Sesión tercera. Fuente: elaboración propia.....	198
Figura 35. Sesión cuarta. Fuente: elaboración propia.....	199
Figura 36. Sesión quinta. Fuente: elaboración propia	200
Figura 37. Sesión sexta. Fuente: elaboración propia	201
Figura 38. Sesión séptima. Fuente: elaboración propia	202
Figura 39. Mapa conceptual capítulo 5. Fuente: elaboración propia.....	209
Figura 40. Mapa conceptual capítulo 6. Fuente: elaboración propia.....	253

ÍNDICE DE TABLAS.

Tabla 1: Etapas de la primera fase de la investigación. Fuente: elaboración propia.....	38
Tabla 2: Etapas de la segunda fase de la investigación. Fuente: elaboración propia.....	40
Tabla 3: Dificultades en las matemáticas. Fuente: Romero y Lavigne, 2005	60
Tabla 4: Tipo de errores. Fuente: Abrate, Pochulu y Vargas, 2006	71
Tabla 5: E-learning y b-learning. Fuente: elaboración propia.....	105
Tabla 6: Objetivos generales y específicos. Fuente: elaboración propia.....	133
Tabla 7: Tamaño muestral. Fuente: elaboración propia	141
Tabla 8: Ventajas y limitaciones del diario. Fuente: Barroso y Almenara, 2010.....	157
Tabla 9: Fases de la investigación. Fuente: elaboración propia.....	162
Tabla 10: Metodologías de la investigación. Fuente: elaboración propia	164
Tabla 11: Participantes en cada fase. Fuente: elaboración propia.....	165
Tabla 12: Cronograma del proyecto. Fuente: elaboración propia	166
Tabla 13: Características investigación-innovación Fuente: elaboración propia.....	174
Tabla 14: Análisis de la situación. Etapa de planificación. Fuente: elaboración propia.....	176
Tabla 15: Diseño del ambiente enriquecido. Etapa de planificación. Fuente: elaboración propia	182
Tabla 16: Revisión de los instrumentos de evaluación. Etapa de planificación. Fuente: elaboración propia.....	185

Tabla 17: Etapa de reflexión. Fuente: elaboración propia.....	188
Tabla 18: Concreción de la temporización de la propuesta didáctica. Fuente: elaboración propia.....	195
Tabla 19. Comparativa ventajas EVEAS. Fuente: Prendes M.P. (2009).....	213
Tabla 20. Comparativa técnica EVEAS. Fuente: Prendes M.P. (2009).....	215
Tabla 21: Respuestas al diario personal cursos 2012/13 y 2013/14. Fuente: elaboración propia.....	219
Tabla 22: Respuestas al diario personal cursos 2014/15 y 2016/17. Fuente: elaboración propia.....	221
Tabla 23: Apuntes al diario personal cursos 2014/15 y 2016/17. Fuente: elaboración propia.....	222
Tabla 24: Apuntes diario personal en referencia al aprendizaje colaborativo. Fuente: elaboración propia.....	223
Tabla 25. Comparativa resultados de los ejercicios. Fuente: elaboración propia.....	224

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 1. Respuestas sobre la pertinencia de las preguntas. Fuente: elaboración propia.....	147
Gráfico 2. Respuestas sobre la adecuación de las preguntas. Fuente: elaboración propia.....	147
Gráfico 3. Respuestas sobre el orden y la presentación de las preguntas. Fuente: elaboración propia.....	148
Gráfico 4. Respuestas sobre el estilo de las preguntas. Fuente: elaboración propia.....	148
Gráfico 5. Respuestas sobre la redacción de las preguntas. Fuente: elaboración propia.....	149
Gráfico 6. Resultado pregunta sobre la edad en el cuestionario equipación tecnológica curso 2014/2015. Fuente: elaboración propia.....	225
Gráfico 7. Resultado pregunta sobre el sexo en el cuestionario equipación tecnológica curso 2014/2015. Fuente: elaboración propia.....	226
Gráfico 8. Resultado pregunta sobre el acceso a internet en el cuestionario equipación tecnológica curso 2014/2015. Fuente: elaboración propia.....	226
Gráfico 9. Resultado pregunta sobre la conexión a internet en el cuestionario equipación tecnológica curso 2014/2015. Fuente: elaboración propia.....	227
Gráfico 10. Resultado pregunta disponibilidad otra conexión a internet en el cuestionario equipación tecnológica curso 2014/2015. Fuente: elaboración propia.....	228
Gráfico 11. Resultado pregunta uso de dispositivos en el cuestionario equipación tecnológica. Curso 2014/2015. Fuente: elaboración propia.....	228
Gráfico 12. Resultado pregunta uso de internet en el cuestionario equipación tecnológica curso 2014/2015. Fuente: elaboración propia.....	229

Gráfico 13. Resultado preguntas uso de internet en el cuestionario equipación tecnológica curso 2014/2015. Fuente: elaboración propia.....	229
Gráfico 14. Resultado pregunta utilidad internet en el cuestionario equipación tecnológica curso 2014/2015. Fuente: elaboración propia.....	230
Gráfico 15. Resultado pregunta uso internet afianzar conceptos en el cuestionario equipación tecnológica curso 2014/2015. Fuente: elaboración propia.....	231
Gráfico 16. Resultado pregunta sobre la edad en el cuestionario equipación tecnológica curso 2016/2017. Fuente: elaboración propia.....	231
Gráfico 17. Resultado pregunta sobre el sexo en el cuestionario equipación tecnológica curso 2016/2017. Fuente: elaboración propia.....	232
Gráfico 18. Resultado pregunta sobre el acceso a internet en el cuestionario equipación tecnológica curso 2016/2017. Fuente: elaboración propia.....	232
Gráfico 19. Resultado pregunta sobre la conexión a internet en el cuestionario equipación tecnológica curso 2016/2017. Fuente: elaboración propia.....	233
Gráfico 20. Resultado pregunta disponibilidad otra conexión a internet en el cuestionario equipación tecnológica curso 2016/2017. Fuente: elaboración propia.....	234
Gráfico 21. Resultado pregunta uso de dispositivos en el cuestionario equipación tecnológica curso 2016/2017. Fuente: elaboración propia.....	234
Gráfico 22. Resultado pregunta uso de internet en el cuestionario equipación tecnológica curso 2016/2017. Fuente: elaboración propia.....	235
Gráfico 23. Resultado preguntas uso de internet en el cuestionario equipación tecnológica curso 2016/2017. Fuente: elaboración propia.....	235
Gráfico 24. Resultado pregunta utilidad internet en el cuestionario equipación tecnológica curso 2016/2017. Fuente: elaboración propia.....	236
Gráfico 25. Resultado pregunta uso internet afianzar conceptos en el cuestionario equipación tecnológica curso 2016/2017. Fuente: elaboración propia.....	237
Gráfico 26. Aciertos pregunta primera cuestionario rectas y sistemas. Fuente: elaboración propia.....	238
Gráfico 27. Aciertos pregunta segunda cuestionario rectas y sistemas. Fuente: elaboración propia.....	238
Gráfico 28. Aciertos pregunta tercera cuestionario rectas y sistemas. Fuente: elaboración propia.....	239
Gráfico 29. Comparativa respuestas de la primera pregunta del Cuestionario rectas y sistemas. Fuente: elaboración propia	240
Gráfico 30. Comparativa respuestas de la segunda pregunta del cuestionario rectas y sistemas. Fuente: elaboración propia	240
Gráfico 31. Comparativa respuestas de la segunda pregunta del	

cuestionario rectas y sistemas. Fuente: elaboración propia	241
Gráfico 32. Aciertos pregunta cuarta del cuestionario: rectas y sistemas. Fuente: elaboración propia	241
Gráfico 33. Aciertos pregunta séptima del cuestionario: rectas y sistemas. Fuente: elaboración propia	242
Gráfico 34. Aciertos pregunta quinta del cuestionario: rectas y sistemas. Fuente: elaboración propia	242
Gráfico 35. Aciertos pregunta sexta del cuestionario: rectas y sistemas. Fuente: elaboración propia	243
Gráfico 36. Aciertos pregunta octava del cuestionario: rectas y sistemas. Fuente: elaboración propia	243
Gráfico 37. Aciertos pregunta novena del cuestionario: rectas y sistemas. Fuente: elaboración propia	244
Gráfico 38. Aciertos pregunta décima del cuestionario: rectas y sistemas. Fuente: elaboración propia	244
Gráfico 39. Comparativa respuestas de la cuarta y octava pregunta del cuestionario: rectas y sistemas. Fuente: elaboración propia	245
Gráfico 40. Comparativa respuestas de la quinta y décima pregunta del cuestionario: rectas y sistemas. Fuente: elaboración propia	245
Gráfico 41. Comparativa respuestas de la sexta y novena pregunta del cuestionario: rectas y sistemas. Fuente: elaboración propia	246
Gráfico 42. Cuestionario aprendizaje colaborativo 1. Fuente: elaboración propia	247
Gráfico 43. Cuestionario aprendizaje colaborativo 2. Fuente: elaboración propia	247
Gráfico 44. Cuestionario aprendizaje colaborativo 3. Fuente: elaboración propia	248

AGRADECIMIENTOS

Comenzar pidiéndole disculpas al lector pues es en el presente apartado donde mis palabras toman un tomo más informal y personal pero hay sentimientos y vivencias que no se pueden relatar de otra forma.

Una vez finalizado el trabajo no puedo evitar tener una mirada retrospectiva y recordar muchos de los momentos por lo que he pasado. Debo reconocer que cuando me adentré en el camino de mi tesis no sabía cuándo terminaría de andar toda la senda. Lo hacía llena de ideas, de proyectos y motivada no por un reconocimiento académico, sino porque quería involucrarme en el mundo de la investigación, estudiar la rama de la educación dentro de los procesos de enseñanza-aprendizaje, facilitar escenarios modernos para que los alumnos pudiesen razonar las ideas matemáticas, intentando alejarlos de la mera mecanización y dando nuevas herramientas para el aprendizaje. He de destacar que durante mi etapa estudiantil, que versaba en mi licenciatura de matemáticas, nunca me planteé unos estudios como estos, y que fue cuando termine esta, y tras dar inicio a mi andadura sobre mi ejercicio profesional, cuando tuve claro los pasos que quería seguir, sin desear continuar unos estudios puros en esta ciencia y anhelando encontrar el hueco para que las matemáticas pudiesen estudiarse, buscando que fuesen cercanas y que este estudio le reportase beneficios a mis alumnos, a mi práctica educativa.

En mis inicios no sabía dónde podría desarrollar estos trabajos, como podía continuar formándome, por parte de profesionales, para que mi ejercicio docente fuese cada vez más completo. Fue en estos momentos cuando “Esquembre” supo encauzar mis deseos poniéndome en contacto con Mari Paz, quien de buen agrado me indicó el máster más adecuado que se ajustaba al perfil que yo deseaba. Sin conocerme me acogió, me guio y me ayudó, y quiso, de forma totalmente desinteresada, auparme en mis primeros pasos, dirigiendo mi TFM del máster interuniversitario de nuevas tecnologías aplicadas a la educación: e-learning y gestión del conocimiento, que estaba cursando en la Universidad de las Islas Baleares.

Mis labores docentes (impartiendo clase en distintas etapas, comprendidas desde la secundaria hasta los niveles universitarios, incluidos) e investigadoras han sido complementarias pues gracias a la primera de ellas y, a

la experiencia en el aula a nivel de instituto, tenía gran ayuda en la preparación de mis clases para mis otros alumnos del grado de Educación Primaria, a la vez que las horas teóricas dedicadas a éstas me servían de gran apoyo y avance para mi trabajo de investigación, cerrando de esta forma el círculo, al ser mi tarea docente con mis discentes adolescentes retroalimentada con todas las acciones anteriores.

Gracias, Paco, por darme la mano cuando recién licenciada buscaba un camino que no siempre es el más deseado en nuestra facultad. Por confiar en mí, por el trato recibido, no solo en estos últimos años, también desde que tuve el privilegio de ser alumna tuya. Sospecho que influirías de algún modo, y aún no consciente, en que trabajase con los ordenadores. Fue cuando lograste que la programación que hacíamos en clase me gustase y viese muy interesante que con un buen programa la maquina podría hacer lo que tanto se tardaba si lo hacíamos “a mano”. Gracias por querer acompañarme en este camino que no era el tuyo y que, sin dudarlo, te adentraste en él. Gracias por dirigirme recordándome las relaciones causa-efecto, la sobriedad presente en nuestra rama... En definitiva, gracias Paco por introducirme y acompañarme en el mundo de los estudios de posgrado tras haberme guiado en mi época universitaria.

Un reconocimiento especial merece Mari Paz, por muchos aspectos. No solo has sido mi directora de este trabajo, revisando la parte teórica, guiándome las distintas fases... Has sabido “llevarme” en todas mis etapas, siempre has tenido las palabras más apropiadas, a la vez que realistas. En los momentos donde yo he expresado mis quejas has sabido reconducirme sin perder la paz, sin reprocharme en ningún momento algunas de mis palabras. Has sabido enseñarme que el camino por el que tiene que pasar un doctorando era justamente en el que estaba y que las sensaciones, a veces encontradas, que sentía eran las propias de este proceso (eso me hizo no abandonar y continuar con más energía). Gracias porque nunca has criticado mis ritmos de trabajo y has seguido los que yo he marcado. En una de las ocasiones, cuando vimos que los tiempos con los que contábamos eran algo justos me dijiste que “tu corrías conmigo”, no sabes que bien me hicieron esas palabras, quizá sin ellas hoy este trabajo no estaría finalizado. Gracias porque me has logrado transmitir no sólo conocimientos pedagógicos y estructurales de mi trabajo, sino que ha sabido respetar a la vez que intentar enriquecer mi estilo concreto y conciso derivado de mi formación académica matemática. Gracias por tu dulzura, por depositar tu confianza en mí, por apostar por este trabajo en una rama científica que no era la más trabajada por ti. Gracias, en resumen, por tu labor abnegada tanto en el terreno laboral como personal.

Gracias directores por hacer que la redacción de este proyecto fuese coherente, por matizar o resaltar aquellos puntos que eran necesarios, por lograr un nivel de concordancia con las exigencias propias de esta etapa y que se

presuponen deben tener este tipo de trabajos. Gracias por vuestra colaboración y ayuda.

No podría no mencionar el agradecimiento hacia mi familia. Gracias por vuestro ánimo y muestras de cariño. Hemos sabido disfrutar de cada instante de nuestro presente manteniendo una alegría patente en nuestro quehacer diario. Gracias a la vida hemos aprendido, unidos, a enfrentarnos a las adversidades, sin quejarnos ni rendirnos. Gracias a mis padres por encender desde muy pequeña mis motores del conocimiento, por estar en cada una de mis etapas educativas, por brindarme el apoyo cuando he flaqueado en alguna de ellas, por el respaldo que he encontrado en vosotros durante todos mis estudios. Gracias por moldearme como persona y estar siempre atentos de trasmitirme una formación integral, no solo basada en títulos, sino también en valores... Gracias por haber forjado esas alas que han hecho que pudiese volar sola y perseguir mis sueños. Gracias mamá, sin ti no habría superado ningún principio de curso desde mi más tierna infancia. Gracias papá por trasmitirme, sin querer, la belleza de las matemáticas, por no querer influir en mí cuando era el momento de la elección de mi carrera... Gracias a los dos por respetarme en cada una de las decisiones de mi vida, por los consejos que siempre me habéis dado desde el respeto y la tolerancia. Gracias por tantas y tantas cosas que desde el terreno personal os debo y que es imposible dejar plasmado en un espacio físico reducido como este. Gracias a mis hermanas y hermanos por estar siempre cuando os he necesitado y que en ocasiones, aún sin preguntar, habéis prestado vuestra ayuda. Gracias por compartir una vida entera y por haber tejido los lazos necesarios para que siempre nos tengamos, para todo lo que necesitemos, junto a los mejores cinco regalos que vosotras, como hermanas, me podías dar, mis sobrinos. Un reconocimiento especial se merece mi marido, Tony. Gracias Tony por respetar las ausencias personales que han conllevado el desarrollo de este proyecto, por siempre animarme, por transmitirme el orgullo que has sentido en distintos momentos. Era una inyección de energía para continuar trabajando. Sabes que sin tu ayuda no habría logrado terminar mi tesis, pues en la última etapa de ésta, hemos tenido nuestro mayor tesoro, nuestra hija María y compatibilizar todas las obligaciones no siempre ha sido fácil. Gracias María, mi hija, por conllevar que tuviese que trabajar tantas horas de nuestro tiempo familiar, por decir “quiero trabajar como mamá” y tratar con total normalidad el que pasase muchas horas delante del ordenador, gracias por traerme las hojas que salían de la impresora, decías que “era tu trabajo” y ha sido tu manera de colaborar en esta aspiración. Quizá seas muy pequeña para que en un futuro puedas recordar todo lo vivido en este proceso pero tus padres siempre te podremos decir que con constancia y esfuerzo se puede conseguir todos los proyectos que uno se proponga.

Gracias a toda “mi gente” (familiares y amigos) por comprender que éste propósito para mí era importante.

Terminar dándoles las gracias a todos los participantes, directos o no, de esta investigación, destacando de manera especial a mis discentes. Mil gracias a todos mis alumnos con lo que he tenido la fortuna de poder trabajar. Gracias a todos y cada uno de ellos, a los que he tenido y a los que quedáis por venir, sois el motor de mis trabajos.

Una vez finalizada mi tesis he de dejar constancia que el balance de la experiencia ha sido muy gratificante y que no ha mermado mis deseos del principio, todo lo contrario, mantengo la ilusión de poder continuar desarrollando mi labor investigadora con nuevos retos.

Gracias a Dios pues sin su protección no sería posible el desarrollo de nuestras vidas.

A todos los que habéis tenido “algo que ver”, gracias.

GRACIAS

La investigadora

María Carrillo García

Febrero de 2017.

RESUMEN

Esta investigación tiene como finalidad diseñar e implementar un ambiente enriquecido con TIC para la mejora de las matemáticas, en particular de los sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas e igualdades (sistemas de ecuaciones lineales, lenguaje algebraico y representación de los mismos) en 3º de la ESO. Con este proyecto queremos conseguir un aprendizaje mayor, por parte de los estudiantes, en la comprensión de las soluciones de los sistemas lineales de dos variables, esperando que los discentes entiendan las relaciones entre los distintos coeficientes, ya sean naturales, enteros o racionales, que intervienen en las ecuaciones de las rectas y la representación gráfica de éstas, basándonos en los tres pilares básicos de este tema: las rectas, los sistemas y la clasificación de los mismos.

La investigación tiene un enfoque socio-crítico, una metodología de investigación-acción y de diseño y desarrollo, con un modelo ADDIE, basado en el método denominado "Análisis didácticos". Es un estudio de casos en la que se ha desarrollado un uso combinado de instrumentos cuantitativos y cualitativos. Los instrumentos de evaluación en los que se ha basado la investigación han sido los cuestionarios, el diario personal del docente-investigador y los grupos de discusión. También se recurrió a los exámenes tradicionales. El contexto de estudio ha sido un colegio de la Región de Murcia (Cartagena, España), en sus niveles de segundo, tercer y cuarto curso de la Educación Secundaria Obligatoria, desde el curso escolar 2009/2010 hasta el 2016/2017.

Por medio de los recursos tecnológicos se trabaja un aumento de la motivación de los discentes, hacia el área de las matemáticas.

Redefiniremos, si fuese preciso, los roles de los integrantes de la comunidad educativa, apoyándonos en las imágenes para que el aprendizaje sea más completo, esperando desarrollar un aprendizaje significativo y trabajando de manera grupal e individual.

El trabajo se ha sustentado en el diseño de una propuesta didáctica en la que tiene especial relevancia el uso de distintas aplicaciones de Geogebra (creadas en exclusiva para este fin), que proporcionan un apoyo visual y manipulativo (de manera electrónica), así como otro material interactivo y

tecnológico que se les presenta a los alumnos. También resaltar una serie de ejercicios diseñados para que los alumnos puedan trabajar el razonamiento de esta parte de la materia. Y, por supuesto, el soporte por el que todo es transmitido, el aula virtual, por medio de Moodle. Con todos estos recursos y las metodologías constructivistas y colaborativas que forman la propuesta diseñada, se ha pretendido suplir las deficiencias respecto al desarrollo imaginativo, abstracto y de razonamiento detectadas. Se desarrollaron nuevos escenarios y métodos de aprendizaje, pudiendo alcanzar el aprendizaje significativo necesario para esta rama del saber.

El presente trabajo ha obtenido como resultados, en primer lugar, la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje al integrar las TIC en el mismo, obteniendo una evaluación positiva en cuanto a consecución de los contenidos/estándares/objetivos propios del currículo, y al aprendizaje significativo. De igual modo, la valoración positiva de la motivación y de las metodologías diseñadas ha sido favorable.

Este trabajo abre líneas de investigación en las que se puede profundizar, como pueden ser: una propuesta de mayor duración en el tiempo, con un mismo grupo de estudiantes, un estudio que abarque más contenidos y que sustentado en el juego, por medio de las TIC, trabaje esta materia, una investigación que verse sobre la relación de las capacidades cognitivas y las destrezas matemáticas. El mayor aporte de esta tesis a la comunidad educativa y en concreto a la investigadora es la propuesta didáctica diseñada que mejora la acción docente.

ABSTRACT

In this research in educational technology, we enter into educational innovation through new scenarios that integrate ICT. The school stage where we will work is compulsory secondary education and the concrete theme: systems of linear equations in mathematics.

We undertake a research work in which we will develop all the necessary proposals for students to fully develop their possibilities, with a central place in understanding and reasoning. Hoping that the knowledge to acquire the students are constructed, so that they become real, operative and permanent. All this will be based on the use of ICT. We will redefine, if necessary, the roles of the members of the educational community, relying on images to make learning more complete, hoping to develop meaningful learning and working in a group and individual way.

For all this, a didactic proposal will be designed in a scenario based on a technology that integrates both the transmission channel and the computer resources necessary for the development of the teaching work.

The main objective of this research is to allow students to differentiate and understand how the coefficients of variables, as well as the independent term, affect the solutions of linear equation systems by means of new technologies.

RESUM

Aquesta investigació té com a finalitat dissenyar i implementar un ambient enriquit amb TIC per a la millora de les matemàtiques, en particular dels sistemes d'equacions lineals de dos incògnites i igualtats (sistemes d'equacions lineals, llenguatge algebraic i representació dels mateixos) en 3r de l'ESO. Amb aquest projecte volem aconseguir un aprenentatge major, per part dels estudiants, en la comprensió de les solucions dels sistemes lineals de dos variables, esperant que els discents entenguin les relacions entre els distints coeficients, ja siguin naturals, sencers o racionals, que intervenen en les equacions de les rectes i la representació gràfica d'aquestes, basant-nos en els tres pilars bàsics d'aquest tema: les rectes, els sistemes i la classificació dels mateixos.

La investigació té un enfocament soci-crític, una metodologia d'investigació-acció i de disseny i desenvolupament, amb un model ADDIE, basat en el mètode denominat "Anàlisi didàctics". És un estudi de casos en què s'ha desenvolupat un ús combinat d'instruments quantitatius i qualitius. Els instruments d'avaluació en què s'ha basat la investigació han sigut els qüestionaris, el diari personal del docent-investigador i els grups de discussió. També es va recórrer als exàmens tradicionals. El context d'estudi ha sigut un col·legi de la Regió de Murcia (Cartagena, Espanya), en els seus nivells de segon, tercer i quart curs de l'Educació Secundària Obligatòria, des del curs escolar 2009/2010 fins al 2016/2017.

Per mitjà dels recursos tecnològics es treballa un augment de la motivació dels discents, cap a l'àrea de les matemàtiques.

Redefinirem, si fóra necessari, els rols dels integrants de la comunitat educativa, recolzant-nos en les imatges perquè l'aprenentatge sigui més complet, esperant desenvolupar un aprenentatge significatiu i treballant de manera grupal i individual.

El treball s'ha sustentat en el disseny d'una proposta didàctica en què té especial rellevància l'ús de distintes aplicacions de Geogebra (creades en exclusiva per a aquest fi), que proporcionen un suport visual i manipulatiu (de

manera electrònica), així com un altre material interactiu i tecnològic que se'ls presenta als alumnes. També ressaltar una sèrie d'exercicis dissenyats perquè els alumnes puguin treballar el raonament d'aquesta part de la matèria. I, per descomptat, el suport pel qual tot és transmès, l'aula virtual, per mitjà de Moodle. Amb tots estos recursos i les metodologies constructivistes i col·laboratives que formes la proposta dissenyada, s'ha pretès suplir les deficiències respecte al desenvolupament imaginatiu, abstracte i de raonament detectades. Es van desenvolupar nous escenaris i mètodes d'aprenentatge, podent aconseguir l'aprenentatge significatiu necessari per a aquesta branca del saber.

El present treball ha obtingut com resultats, en primer lloc, la millora del procés d'ensenyança-aprenentatge a l'integrar les TIC en el mateix, obtenint una avaluació positiva en quant a consecució dels continguts/estàndards/objectius propis del currículum, i a l'aprenentatge significatiu. De la mateixa manera, la valoració positiva de la motivació i de les metodologies dissenyades ha sigut favorable.

Aquest treball obri línies d'investigació en què es pot aprofundir, com poden ser: una proposta de major duració en el temps, amb un mateix grup d'estudiants, un estudi que compregui més continguts i que sustentat en el joc, per mitjà de les TIC, treballi questa matèria, una investigació que versí sobre la relació de les capacitats cognitives i les destreses matemàtiques. La major aportació d'aquesta tesi a la comunitat educativa i en concret a la investigadora és la proposta didàctica dissenyada que millora l'acció docent.

CAPÍTULO INTRODUCTORIO

“No nos atrevemos a emprender muchas cosas, porque nos parecen difíciles, pero no porque sean difíciles en sí, sino que nos parecen difíciles porque no nos atrevemos a emprenderlas”
(Séneca, citado en Bracho, 2007, p.19).

1. RELEVANCIA, JUSTIFICACIÓN E INTERÉS DE LA INVESTIGACIÓN.

Es necesario justificar los motivos que hicieron que se desarrollase la presente investigación así como su relevancia y el interés que tiene para la sociedad de la información y la comunicación.

RELEVANCIA.

La relevancia de la presente investigación se justifica por la importancia que tiene que se desarrolle una buena formación en referencia a la materia de matemáticas (Decreto 1105/2014):

Las matemáticas son imprescindibles para contribuir al desarrollo integral de las personas. El área de matemáticas capacitará a los alumnos/as para analizar la realidad, producir ideas y conocimientos nuevos, entender situaciones e informaciones y acomodarse a contextos cambiantes (Fernández, 2010, p.46).

Otra razón es el bajo rendimiento que los discentes presentan en esta asignatura, como demuestran pruebas estandarizadas externas, tales como el programa para la evaluación internacional PISA (Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo, 2005; Ministerio de educación, política social y deporte, 2016, 2008), que evidencian los malos resultados españoles al encontrarse siempre estos por debajo de los países de la Unión Europea y de los integrantes de la OCDE (Organización para la cooperación y desarrollo económico) pues se desea mejorar el aprendizaje de los estudiantes.

Igualmente podemos señalar que esta investigación es relevante porque el uso de las tecnologías de la educación y comunicación (TIC), en los procesos de enseñanza aprendizaje, aumentan la motivación, como demuestran los estudios de Antoraz (2015), Peinado y Navarro (2014) y Ballestas y Monsalve (2014), entre otros. Además, encontramos trabajos que abogan por las TIC como medio para el cambio conceptual que es necesario que se dé en las escuelas (Temporelli, 2012) y otros que relacionan éstas con las habilidades para la resolución de problemas (Rios y Yañez, 2016) (capítulos dos y tres). En la figura 1, se observan los motivos que justifican la relevancia de nuestra investigación.



Figura 1. Relevancia de la investigación. Fuente: Elaboración propia.

Los aspectos relevantes señalados se han constatado a lo largo de nuestra investigación que se ha desarrollado en varias fases a lo largo de ocho años, abordando en una fase inicial un estudio exploratorio en el cual los alumnos aprendían usando una herramienta informática (Geogebra, aplicaciones interactivas, enlaces web...Anexo VIII).

- En referencia al rendimiento de los discentes, se pone de manifiesto que los alumnos aprendían a resolver los sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas por medio de procedimientos algebraicos. No entendían las relaciones que se daban entre los coeficientes de las ecuaciones algebraicas y las representaciones de las mismas, sin poder relacionar el número de soluciones de un sistema, y por tanto su clasificación, con su representación gráfica, basándose en procesos lógicos, de razonamiento y deductivos. Estos resultados se obtuvieron en el estudio exploratorio previo. Los contenidos vienen referidos en los reales decretos educativos (Anexo I) y recogidos en el capítulo tres del presente estudio.
- La necesidad de la utilización de las TIC está justificado (capítulo tercero), de igual modo, en la legislación (Anexo III), en donde se concreta la competencia digital y el uso de recursos informáticos (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2017; Real, 2010). Además, los beneficios del uso de las TIC en la clase de matemáticas vienen determinado por diversos trabajos (Fornons y Palau, 2016; Jubany, 2010; Peña, 2012; Villarreal, 2005). Las TIC nos ofrecen nuevas posibilidades de comunicación y de acceso a la información, creando nuevas relaciones entre los alumnos y entre estos y el profesor (Meneses, 2017). Se puede implementar la metodología por descubrimiento por medio de las TIC (aunque no es exclusiva a este tipo de herramientas). De igual modo ocurre con el desarrollo de la autonomía del alumnado (Barroso, 2009), que junto con otros aspectos, son expuesto en el tercer capítulo de esta investigación. En ese mismo apartado se justifican las TIC al crear entornos flexibles. Martínez y Prendes (2008) indican que las comunidades virtuales y las estrategias colaborativas pueden contribuir en la formación, promoviendo los recursos abiertos (Chiarani, 2016) como un bien común. Llegamos de este modo a trabajar con herramientas telemáticas para la colaboración señalando que no solo nos tendremos que fijar en las herramientas, sino también en el método, siendo el método el elemento clave de la innovación educativa, no las herramientas tecnológicas. (Prendes, 2006).

JUSTIFICACIÓN.

La justificación de esta investigación está dividida en varios factores. El primer de ellos está sustentando en un estudio exploratorio previo que evidenciaba que se debía de mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje.

El segundo hace referencia a la legislación, tanto en referencia al uso de las TIC como de los sistemas estudiados.

Por último, el que destaca los beneficios de las TIC para el aprendizaje de los alumnos.

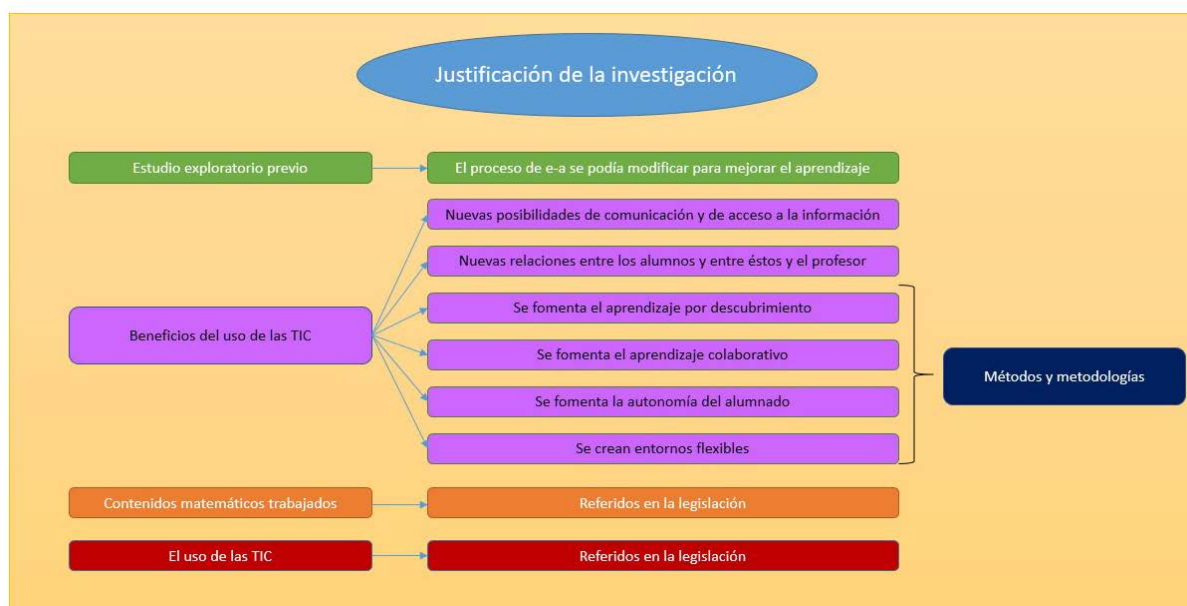


Figura 2. Justificación de la investigación. Fuente: Elaboración propia.

Estas últimas afirmaciones referentes las TIC y el aprendizaje, hacen que nos tengamos que replantear las metodologías implementadas en las clases, en donde deberemos potenciar al papel de las matemáticas y sus beneficios (Anexo II) por medio de distintos métodos de enseñanza centrados en aspectos colaborativos y constructivistas, a través de ambientes participativos (capítulo dos). Se debe potenciar el aprendizaje significativo para no trabajar en la simple tautología en procesos vacíos de razonamiento:

Ausubel, Novak y Hanesian (1989) exponen sobre la importancia de la significatividad del aprendizaje que se logra cuando la nueva información pone en movimiento y relación conceptos ya existentes en la mente del que aprende, es decir, conceptos inclusivos o inclusores. Para este tipo de aprendizaje, Ausubel menciona que debe existir lo que denomina “actitud para el aprendizaje significativo”, que se trata de una disposición por parte del aprendiz para relacionar una tarea de aprendizaje sustancial y no arbitraria, con los aspectos relevantes de su propia estructura cognitiva. (Massachs, Camrubi y Naudi, 2005, p.1).

Mora (2003) indica que el proceso que sustenta el aprendizaje de las matemáticas está formado por varias etapas, siendo una de ellas la eliminación de errores y las concepciones erróneas. Esta investigación estudia el motivo de los errores (capítulo primero) y la clasificación de los mismos, señalando más adelante los propios de nuestra temática.

Martín (2012) indica que los escenarios educativos deberán estar apoyados en materiales manipulativos (en este caso, electrónicos y

visuales) fomentando, de este modo, una educación completa: “Las TIC no deben considerarse como una opción más, sino como una importante necesidad para lograr un aprendizaje más propio en el estudiante, siendo este el constructor de su conocimiento” (Arias, 2013, p.1). No se podrá obviar el hecho de que las habilidades cognitivas favorecen el aprendizaje de las matemáticas (Amazings, 2017) por lo que siempre se deberá tener este aspecto presente (segundo capítulo de la tesis).

INTERÉS.

Una vez expuestos los aspectos que justifican nuestra investigación así como nuestro marco teórico, pasamos a centrarnos en el interés de la misma, véase figura 3. La investigación es una innovación por medio de las TIC que aboga por intentar que el aprendizaje del alumnado sea más completo y adecuado.



Figura 3. Interés de la investigación. Fuente: Elaboración propia.

El interés de este trabajo está sustentado en las líneas de investigación abiertas en los procesos de I+D, existiendo grupos específicos en Europa (Grupo Becta, organismo británico para las comunicaciones y la tecnología en la educación; European Schoolnet, red de treinta ministerios europeos de educación, con sede en Bruselas), así como españoles: Grupo de Investigación en Didáctica de las Ciencias Experimentales y las Matemáticas (universidad autónoma de Madrid), Grupo de Investigación Didáctica de la Matemática (del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación, PAIDI), Grupo de Investigación en Educación Matemática (Universidad de Sevilla)...Y grupos de investigación centrados en el estudio de la enseñanza apoyada en TIC, tales como los grupos que participan en este programa de Doctorado: el Grupo de Investigación de Tecnología Educativa de la Universidad de Murcia o el Grupo de Tecnología Educativa de la Universidad de Islas Baleares.

Existen distintas asociaciones que tienen como objetivo el cambio en la enseñanza para la mejora de los resultados como la NCTM (Asociación Americana Nacional de profesores de matemáticas) y en España encontramos también: El Grupo Cero en la Comunidad Valenciana (1975), el grupo Zero en Cataluña (1975) y las asociaciones de profesores Newton en Canarias (1978) o Thales en Andalucía (1981) que se marcaron como objetivos el cambio en la enseñanza para la mejora de resultados).

Existen otras investigaciones que comparten la línea de la preocupación de mejora de la enseñanza de las matemáticas o la importancia de las TIC en el aula de matemáticas: Sarmiento (2004), Oller (2012), Reverte (2014), Gómez (2002). En cuanto a investigaciones referentes a los factores cognitivos, la enseñanza colaborativa por medio de las TIC, la formación del profesorado, la enseñanza por medio de recursos tecnológicos,... aspectos que influyen en nuestro trabajo, destacamos los de Serrano (2013), Pina (2015), Gómez (2002), Bedoya (2002). Tanto en esta exposición, como en el capítulo cuarto, se destacan más ejemplos.

Señalamos, de manera especial, la investigación de Sarmiento en su tesis doctoral titulada “La enseñanza de las matemáticas y las NTIC” que por considerarse de gran ayuda se le pidió a la Universidad Rovira i Virgili (URV) al no encontrarse entera su versión digital. Interesante también la tesis de Reverte “Diseño, implementación y validación de un ambiente enriquecido con TIC para el aprendizaje del álgebra en 3º de ESO”. De igual modo “Proporcionalidad aritmética: una propuesta didáctica para alumnos de secundaria” de Oller. Destacar el interés de la tesis de doctorado titulada “Herramientas telemáticas en aulas hospitalarias: una experiencia educativa en la región de Murcia”, de Serrano.

La presente investigación tiene interés también, en el marco de la sociedad de la información y el conocimiento por la importancia que se ha mostrado que tiene la tecnología en la enseñanza, al presentar una nueva experiencia exitosa en el proceso de e-a. Dota a nuestros jóvenes de herramientas que permiten obtener el máximo rendimiento de sus capacidades y les muestra un nuevo patrón para el aprendizaje (que podrá usar en un futuro). Igualmente es importante pues los recursos utilizados, al ser tecnológicos son los que ellos suelen implementar su vida (como por ejemplo en las relaciones sociales, comunicación...), y porque se les debe preparar para la vida adulta y en ellas las nuevas tecnologías estarán presentes.

Se ha de destacar que la investigación se mantiene a lo largo de un gran periodo, al haberse tratado durante los cursos escolares 2009/2010, 2010/2011, 2011/2012, 2012/2013, 2013/2014, 2014/2015, 2015/2016 y 2016/2017. Se trata de una investigación cíclica e interactiva.

2. LA EXPERIENCIA.

Este proyecto de investigación se ha realizado en el marco del “Doctorado en Tecnología Educativa: Aprendizaje Virtual y Gestión del conocimiento” de la Universitat de les Illes Balears.

Presentamos en la figura 4 el esquema de nuestra investigación:

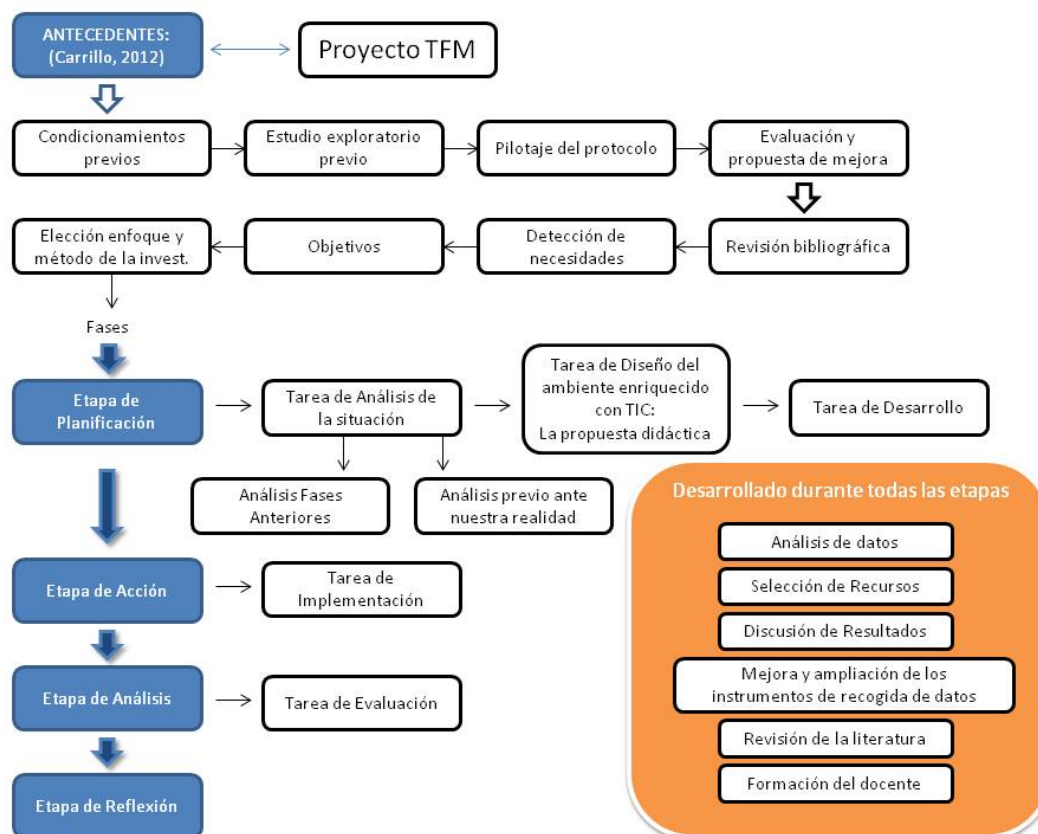


Figura 4. Desarrollo de la investigación. Fuente: Elaboración propia

Asimismo, no quisiéramos dejar de comentar, algunos aspectos relevantes de este trabajo empírico. Además de poder ser un estudio de interés para otros profesores de matemáticas en Secundaria, gracias a él la investigadora ha podido descubrir el interés práctico que supone la utilización de herramientas tecnológicas en la docencia. Esta investigación invita a la realización de otras más amplias que ahonden en el estudio de tipo práctico de experiencias con TIC en el aula, para ayudar a los profesores a que puedan encontrar soluciones a algunos problemas del aula y pudiendo ser esta vía de investigación interesante en cuanto a los procesos de enseñanza-aprendizaje se refiere.

OBJETIVOS Y JUSTIFICACIÓN.

La idea subyacente de esta investigación es que los alumnos sepan diferenciar y apreciar cómo afectan los coeficientes de las variables, así como el término independiente, en el estudio de las soluciones de los sistemas, por

medio de las nuevas tecnologías. Señalamos como objetivos de la investigación:

- Diseñar un ambiente enriquecido con TIC que integre una propuesta didáctica para mejorar la enseñanza de los sistemas lineales de dos ecuaciones y de dos incógnitas (sistemas de ecuaciones lineales, lenguaje algebraico y representación de los mismos) en 3º de la ESO.
- Evaluar la implementación de la propuesta didáctica.

Es decir, este trabajo tiene como finalidad el uso de las TIC para la mejora de la enseñanza de las matemáticas, en concreto de los sistemas lineales, por medio de una propuesta didáctica. Señalamos como característica fundamental de nuestra investigación el uso de los recursos tecnológicos. Con este proyecto queremos conseguir una mejora en la comprensión de las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales de dos variables, contenido propio del currículo de 3ºESO, pues, aunque los discentes aprenden a resolverlos de manera analítica, no adquieren las competencias propias de la visualización de los mismos, sin aprender qué significa que un sistema sea Compatible (Determinado o Indeterminado) o Incompatible.

En la siguiente figura 5 se pueden observar tanto los objetivos generales de la investigación como los específicos.

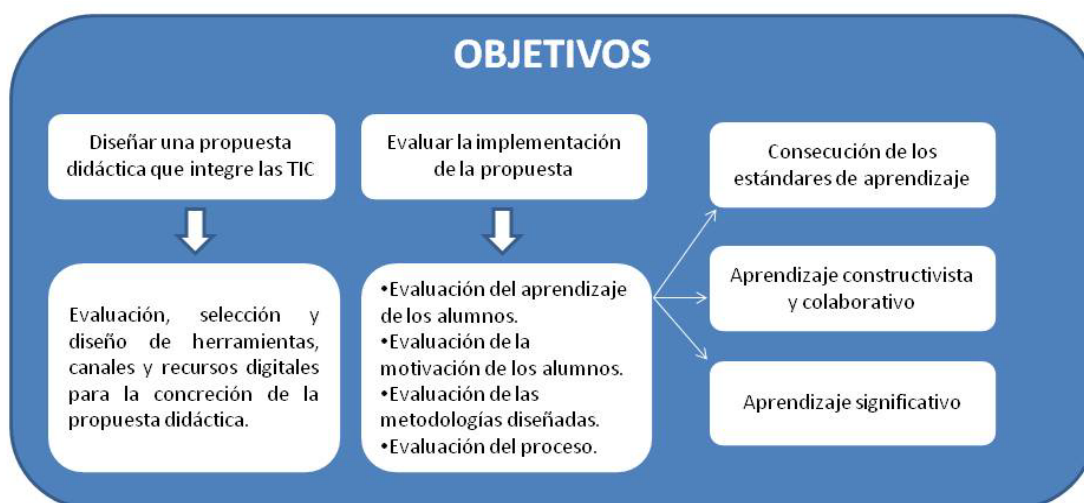


Figura 5. Objetivos de la investigación. Fuente: Elaboración propia

Nuestra investigación está justificada por distintos aspectos que se pueden dividir en dos bloques. Uno de ellos hace referencia a la legislación y el otro a la observación de la investigadora. Pasamos a exponerlos (figura 6):

- ❖ La enseñanza de las matemáticas y la competencia digital, contemplando la perspectiva legislativa (Anexo II y III).

El enfoque general que se le da a la enseñanza de las matemáticas, en ocasiones, no se sustenta en los razonamientos lógicos, quedándose sin desarrollar su función formativa (las capacidades de razonamientos y abstracción), la función instrumental ni la funcional. El docente debe recurrir a la legislación para estudiar los escenarios y beneficios que se

deben trabajar (desarrollo cognitivo, formación del intelecto...) y no solo para consultar los contenidos, estándares... Se ha de tener presente que la legislación incluye la competencia digital de manera interdisciplinar así como la inserción de las TIC.

- ❖ Los sistemas como contenido según la legislación.

La ley educativa señala que este contenido/estándar se ha de trabajar en la etapa de la Educación Secundaria Obligatoria.

- ❖ *Los beneficios del uso de las TIC en la enseñanza (capítulo tres).*

Las TIC nos ofrecen nuevas posibilidades en relación a los aprendizajes constructivistas, individuales y grupales, aumento de la motivación, de comunicación y de acceso a la información, creación de nuevas relaciones entre los alumnos y entre estos y el profesor.

- ❖ *Análisis de las deficiencias de la práctica educativa actual (capítulo cuatro).*

El actual sistema y práctica educativa no logran entrelazar la relación de los coeficientes con las soluciones, en los sistemas lineales.

Se debe conjugar la transmisión del saber con nuevos enfoques para trabajar las estructuras mentales y obtener un aprendizaje significativo y por tanto, más completo.

- ❖ *Falta de desarrollo imaginativo de las soluciones de los sistemas algebraicos, implicación del estudio de las rectas en los mismos (capítulo cuatro).*

Los alumnos presentan una carencia en relación al pensamiento abstracto, lo que dificulta las concepciones visuales de las características de las rectas. La práctica educativa pone de manifiesto que los discentes en el estudio de las matemáticas se limitan en muchas situaciones a la búsqueda de una "receta" sin entender que están trabajando, al limitarse el proceso de enseñanza aprendizaje a la práctica calculista.

- ❖ *Falta de uso de las nuevas tecnologías en el proceso de E/A (capítulo cuatro).*

Los colegios no deben limitarse sólo a la enseñanza de las materias sino a la formación de los niños para la vida que les espera. En vista de la revolución tecnológica actual y el papel relevante de las TIC, éstas deben tener también un papel destacado en la enseñanza.

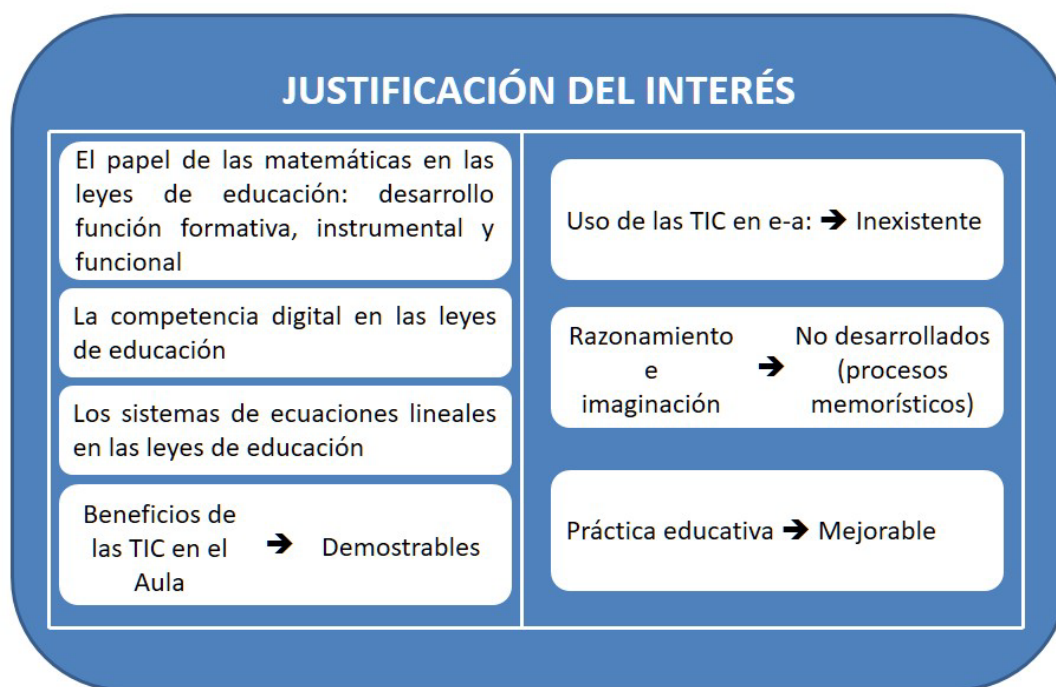


Figura 6. Justificación del interés de la investigación.

Fuente: Elaboración propia.

Contemplamos, así, los recursos TIC y los entornos virtuales como una solución al problema real que se encuentra en el aula, en referencia a esta temática. Basándonos en aprendizajes constructivistas e intentando obtener, al mismo tiempo, una mayor motivación de los discentes al invitarlos a ser protagonistas destacados de su aprendizaje, apoyado por las TIC en la enseñanza, en general, y en especial en el área de matemáticas.

Nuestro trabajo se basa en el convencimiento de que cuando los estudiantes pueden usar herramientas tecnológicas, en este caso un software, que les resuelvan el sistema, ellos se concentrarán en tomar decisiones, razonar. No habiendo estudios anteriores que puedan o no afirmarlo, por lo que nuestro trabajo será nuevo así como su evaluación. Creemos que, de este modo, se podrá converger hacia la comprensión, enfocando a los discentes a la adquisición de estrategias. Intentaremos, de igual modo, basarnos en un aprendizaje entre iguales en donde el trabajo colaborativo alcance mayor relevancia; esperando que, así, se adquiera mayor confianza, estimulando la participación e interacción entre los discentes para lograr mejoras en el aprendizaje significativo, quedando el marco teórico que justifica lo expuesto en el capítulo dos. Para ello, nos apoyaremos en materiales visuales y manipulativos, en recursos tecnológicos.

CONTEXTO, DESARROLLO TEMPORAL Y FASES.

El presente proyecto se desarrolla en un colegio concertado y católico de Cartagena, Murcia, centrando el estudio en la etapa secundaria de educación obligatoria (ESO). Participan En el estudio un total de 500 discentes,

aproximadamente Se ha de destacar que 150 alumnos de dicha muestra participan tanto en la implementación de tercero de la ESO como en la medición del aprendizaje significativo durante el curso siguiente.

Durante el curso 2009/2010 y 2010/2011, se obtuvieron datos que dejaban en evidencia el fallo del actual sistema educativo, en cuanto a la comprensión de los sistemas de ecuaciones y a la relación existente entre los coeficientes de las mismas y sus soluciones. Los estudiantes mostraron por medio de exámenes y cuestionarios, bajos resultados en los conocimientos que poseían, tras el estudio de esta temática. La siguiente tarea se centró en la elección y el desarrollo de una aplicación de Geogebra, con la que trabajarían los alumnos y para entender mejor los aspectos de los sistemas, reseñados con anterioridad. Durante el curso 2011/2012, se llevó a cabo la implementación del programa. En esta fase del estudio ya se obtuvieron resultados que mostraron como conclusión la mejora en el rendimiento y una mayor motivación de los discentes. Durante los cursos posteriores, 2012/2013, 2013/2014, tras estudiar la fase mencionada y mejorar la aplicación de Geogebra utilizada, se continuó trabajando con los alumnos, por medio de las TIC, obteniendo recursos educativos que ayudasen a transmitir mejor los conocimientos. Concluyendo en el curso 2014/2015, con una propuesta didáctica más amplia, que también integra el uso de Moodle, donde los estudiantes trabajan mayor tiempo con los ordenadores, de manera individual y grupal. Durante todo el proceso, se apostó por la reflexión para lograr un aprendizaje significativo y que se aprendiesen las nociones básicas, no solo en cuanto a los contenidos de esta temática, sino, de igual modo, a los pilares en los que se debe sustentar la enseñanza de las matemáticas en la etapa obligatoria (indicados en las legislaciones). Todo ello basado en el trabajo colaborativo, y sustentando la enseñanza en teorías más constructivistas, y usando materiales visuales y manipulativos. En el curso 2015/2016 se mantuvieron las metodologías reseñadas, pero no se implementaron los recursos TIC para así poder tener datos objetivos en el estudio que hiciesen referencia tanto a los cambios metodológicos como de recursos y materiales variados. Se trabajó la implementación completa en el presente curso escolar 2016/2017.

Se ha obtenido, de este modo, una propuesta didáctica, que puede ser adoptada por el profesorado que imparte los sistemas de ecuaciones lineales (de dos ecuaciones y dos incógnitas). En dicha propuesta tiene especial relevancia el uso de distintas aplicaciones de Geogebra (creadas en exclusiva para este fin) así como diverso material interactivo y tecnológico que se les presenta a los alumnos y unos ejercicios diseñados para trabajarlos con la aplicación. Debe resaltarse el papel destacado del soporte en el que todo es transmitido, el aula virtual (Moodle). Dependiendo del curso escolar en el que se encontrasen y del desarrollo de esta investigación, los alumnos aprendieron los contenidos referentes a los sistemas lineales, utilizando los distintos recursos existentes. Para ello se llevó a los alumnos al aula de informática y éstos trabajaron de manera grupal, estudiaron en casa de manera individual y volvieron al aula trabajando de nuevo con las TIC (y sin ellas), potenciando el trabajo colaborativo. Finalmente, se analizaron los resultados y se estudió, en todos los cursos escolares, el desarrollo del aprendizaje significativo, durante el curso de la implementación y el curso siguiente al que se trabajó en los nuevos

escenarios propuestos (ya fuese con la aplicación o con la propuesta didáctica final).

En referencia a las fases, mencionar que todo el trabajo de investigación se ha desarrollado por medio de los siguientes periodos (figura 7):



Figura 7. Fases de la investigación. Fuente: Elaboración propia.

Observamos, en la siguiente figura (8) las fases en las que se ha desarrollado la primera parte empírica. Mediante ellas exponemos los métodos de la investigación, a la vez que las acciones desarrolladas en la investigación junto a la metodología y el tamaño de la muestra.

Tabla 1. Etapas de la primera fase de la investigación. Fuente: Elaboración propia

	Etapas	Investigación	Curso Escolar	Innovación	Metodologías	Tamaño Muestra
Fase Uno	Estudio exploratorio (determinación del problema)	•Grupo de discusión A: Profesores seminario	2009/2010	Compromiso de búsqueda de soluciones	Tradicionales	75
	Estudio exploratorio (obtención resultados)	•Cuestionario sobre rectas y sistemas (V1) •Grupo de discusión A: Profesores seminario	2010/2011	Búsqueda de herramientas TIC	Tradicionales	75
	Estudio Piloto	•Cuestionario sobre rectas y sistemas (V1) •Grupo de discusión A: Profesores seminario •Grupo de discusión B: Alumnos y docentes •Matemáticas en la enseñanza •Tras el término del uso de la aplicación •Tras la implementación completa •Diario del profesor/investigador, observación	2011/2012	•Elección del software: Geogebra •Diseño y desarrollo de la aplicación: Rectas V1 •Medición aprendizaje significativo •Implementación de la propuesta didáctica con Geogebra V1 y nuevas metodologías	Tradicionales. De manera puntual y para trabajar las rectas con la aplicación se utiliza una metodología constructivista.	20

Se escogieron dichas metodologías tras estudiar el marco teórico desarrollado. En él se puso de manifiesto que la enseñanza por medio de las TIC se podía sustentar en el aprendizaje colaborativo. Que se desea que los estudiantes potencien su razonamiento y estructuras lógico-matemáticas, escogiéndose la construcción frente a la memorización, intentando trabajar los procesos de aprendizaje por medio de los recursos manipulativos visuales.

Para que los alumnos trabajasen por medio de los recursos informáticos y pudiesen hacerlo desde su hogar, se decidió escoger una plataforma educativa virtual y por medio de ella poder desarrollar los beneficios del b-learning (figura 8).



Figura 8. Ventajas b-learning. Fuente: Elaboración propia.

La segunda fase fue más extensa tanto en temporalidad como en el desarrollo del trabajo. Se desarrollaron las metodologías ya descritas en la anterior. Se complementaron los instrumentos de evaluación y se amplió la propuesta didáctica incluyendo más recursos tecnológicos. Véase la figura 10 que recoge toda la información referente a esta fase.

Tabla 2. Etapas de la segunda fase de la investigación. Fuente: Elaboración propia.

	Etapas	Investigación	Curso Escolar	Innovación:	Metodologías	Tamaño Muestra		
Fase Dos	<ul style="list-style-type: none"> •Planificación •Implementación •Análisis •Reflexión 	<ul style="list-style-type: none"> •Cuestionario sobre rectas y sistemas V2 •Cuestionario EFAI •Grupo de discusión A: Profesores seminario •Grupo de discusión B: Alumnos y docentes <ul style="list-style-type: none"> •Matemáticas en la enseñanza •Tras el término del uso de la aplicación •Tras la implementación completa •Diario del profesor/investigador, observación 	2012 2013	<ul style="list-style-type: none"> •Mejora de la aplicación Geogebra Sistemas V2 •Medición aprendizaje significativo •Implementación de la propuesta didáctica con Geogebra Sistemas V2 y nuevas metodologías 	Tradicional, constructivistas y colaborativa.	20	Aprendizaje significativo	
						30	Implementación de la propuesta	
		<ul style="list-style-type: none"> •Planificación •Implementación •Análisis •Reflexión 	<ul style="list-style-type: none"> •Cuestionario sobre rectas y sistemas V2 •Cuestionario Matemáticas en la enseñanza •Grupo de discusión A: Profesores seminario •Grupo de discusión B: Alumnos y docentes <ul style="list-style-type: none"> •Matemáticas en la enseñanza •Tras el término del uso de la aplicación •Tras la implementación completa •Diario del profesor/investigador, observación 	2013 2014	<ul style="list-style-type: none"> •Aplicación Geogebra Sistemas V2 •Diseño de la hoja de ejercicios •Medición aprendizaje significativo •Implementación de la propuesta didáctica con Geogebra Sistemas V2 y nuevas metodologías •Búsqueda de herramientas TIC •Búsqueda de entornos personales de aprendizaje 	Tradicional, constructivistas y colaborativa.	30	Aprendizaje significativo
							30	Implementación de la propuesta

	Etapas	Investigación	Curso Escolar	Innovación:	Metodologías	Tamaño Muestra	
Fase Dos	<ul style="list-style-type: none"> Planificación Implementación Análisis Reflexión 	<ul style="list-style-type: none"> Cuestionario sobre rectas y sistemas V2 Cuestionario "Matemáticas en la enseñanza" Cuestionario "Disponibilidad Tecnológica" Grupo de discusión A: Profesores seminario Grupo de discusión B: Alumnos y docentes <ul style="list-style-type: none"> Matemáticas en la enseñanza Tras el término del uso de la aplicación Tras la implementación completa Encuesta final Diario del profesor/investigador, observación. Se incluye el diario de clase para todas las jornadas que dura la implementación de la propuesta. 	2014 2015	<ul style="list-style-type: none"> Diseño y Desarrollo de la propuesta Didáctica <ul style="list-style-type: none"> Diseño de Moodle Aplicaciones <ul style="list-style-type: none"> Teóricas con ejercicios: material interactivo Puntos y representación: aplicaciones interactivas Geogebra Rectas y Sistemas Hoja de ejercicios 	Tradicional, constructivistas y colaborativa. Dándole un mayor peso a las dos últimas y fomentando la construcción del conocimiento frente a la memorización del mismo.	30	Aprendizaje significativo
						30	Implementación de la propuesta
	<ul style="list-style-type: none"> Planificación Implementación Análisis Reflexión 	<ul style="list-style-type: none"> Cuestionario sobre rectas y sistemas V2 Grupo de discusión B: Alumnos y docentes <ul style="list-style-type: none"> Tras la implementación completa Diario del profesor/investigador, observación. Se incluye el diario de clase para todas las jornadas que dura la implementación de la propuesta. 	2015 2016	<ul style="list-style-type: none"> Hoja de ejercicios Medición aprendizaje significativo Implementación de la propuesta didáctica con Geogebra Sistemas V2 y nuevas metodologías 	Tradicional, constructivistas y colaborativa. Dándole un mayor peso a las dos últimas y fomentando la construcción del conocimiento frente a la memorización del mismo.	30	Aprendizaje significativo
						30	Implementación de la propuesta
	<ul style="list-style-type: none"> Planificación Implementación Análisis Reflexión 	<ul style="list-style-type: none"> Cuestionario sobre rectas y sistemas V2 Cuestionario EFAI Cuestionario "Matemáticas en la enseñanza" Cuestionario "Disponibilidad Tecnológica" Grupo de discusión A: Profesores seminario Grupo de discusión B: Alumnos y docentes <ul style="list-style-type: none"> Matemáticas en la enseñanza Tras el término del uso de la aplicación Tras la implementación completa Encuesta final Diario del profesor/investigador, observación. Se incluye el diario de clase para todas las jornadas que dura la implementación de la propuesta. 	2016 2017	<ul style="list-style-type: none"> Diseño y Desarrollo de la propuesta Didáctica <ul style="list-style-type: none"> Diseño de Moodle Aplicaciones <ul style="list-style-type: none"> Teóricas con ejercicios: material interactivo Puntos y representación: aplicaciones interactivas Geogebra Rectas y Sistemas Hoja de ejercicios 	Tradicional, constructivistas y colaborativa. Dándole un mayor peso a las dos últimas y fomentando la construcción del conocimiento frente a la memorización del mismo.	30	Aprendizaje significativo
						30	Implementación de la propuesta

PARADIGMA, ENFOQUE, MÉTODO E INSTRUMENTOS.

Pasamos a exponer, mediante la figura 9, el problema detectado que motivó nuestra investigación, el paradigma, enfoque y la metodología de este estudio:

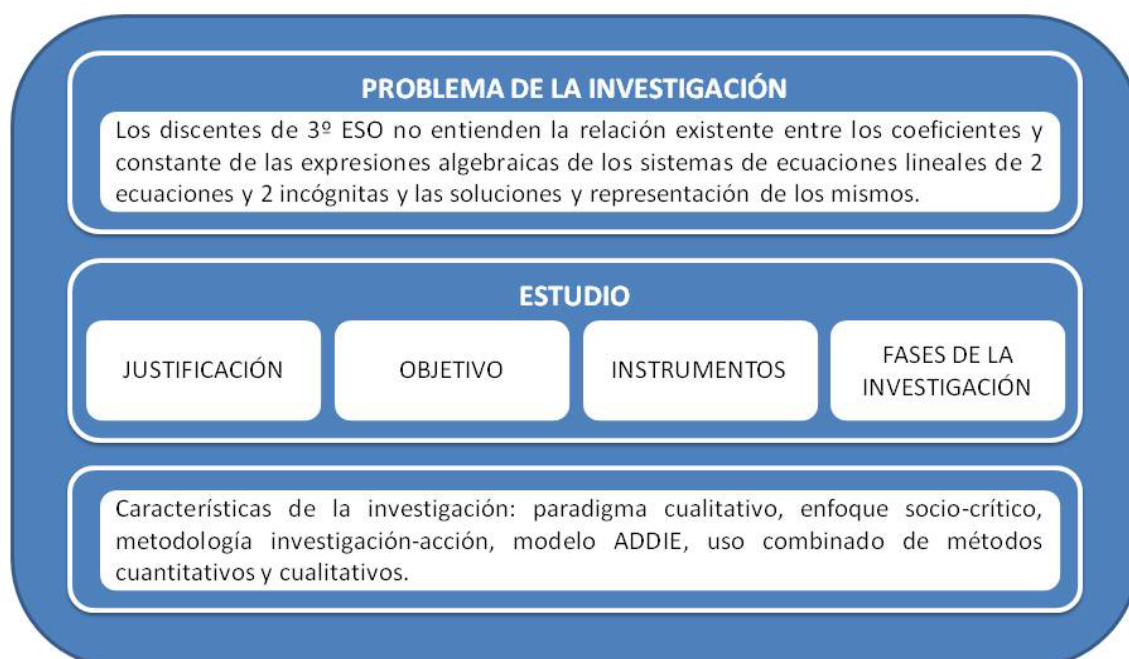


Figura 9. Problema y método de la investigación. Fuente: Elaboración propia.

Los instrumentos para la recogida de la información, de carácter cualitativo y cuantitativo, que se han utilizado son los siguientes (figura 10):

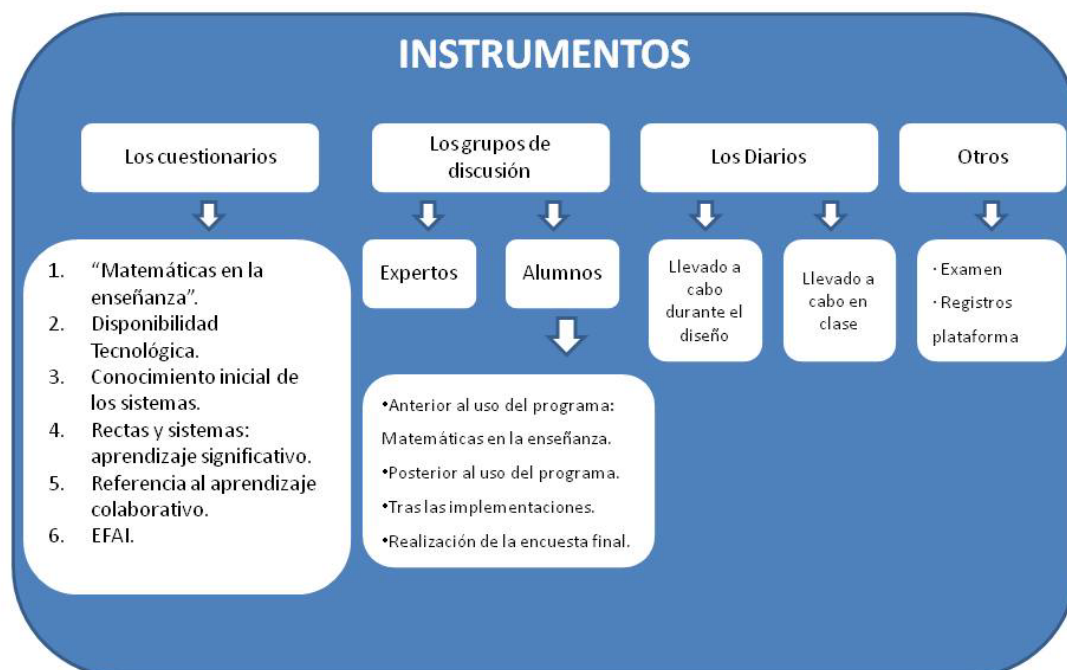


Figura 10. Instrumentos de la investigación. Fuente: Elaboración propia.

LA PROPUESTA DIDÁCTICA.

La propuesta didáctica que este estudio aporta a la comunidad educativa se diseñó tras el siguiente esquema de trabajo, figura 11, y que se puede consultar en el Anexo IX.

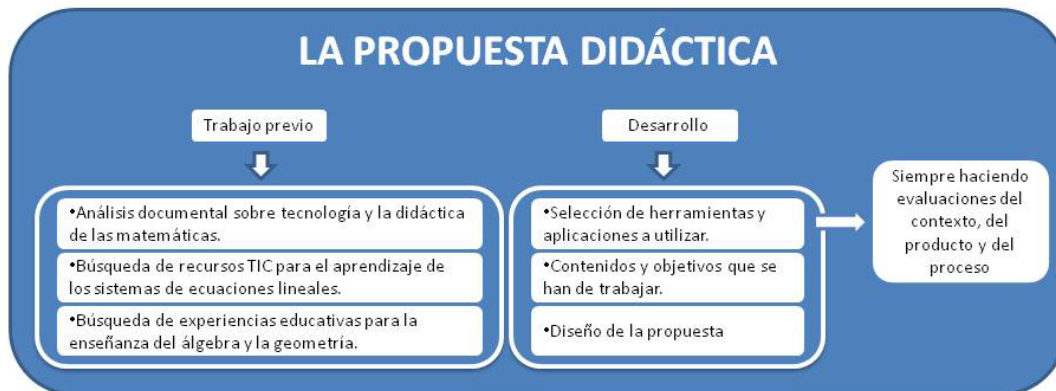


Figura 11. La propuesta didáctica para nuestra investigación.

Fuente: Elaboración propia.

BLOQUE I

CAPÍTULO 1: LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS.

- 1. Periodos en la enseñanza de las matemáticas.**
- 2. La enseñanza de las matemáticas en la actualidad.**
- 3. El apoyo visual para algunos bloques de las matemáticas.**
- 4. Los errores en los procesos matemáticos.**

CAPÍTULO 2: TEORÍA SOBRE APRENDIZAJES: ENFOQUES ÚTILES PARA EL AMBIENTE ENRIQUECIDO CON TIC.

- 1. Introducción.**
- 2. Aprendizaje cognitivo, capacidades cognitivas.**
- 3. Aprendizaje constructivista y significativo.**
- 4. Aprendizaje colaborativo.**

CAPÍTULO 3: LAS TIC COMO RECURSO PARA ENSEÑAR.

- 1. Justificación del uso de las TIC en la enseñanza.**
- 2. Enseñanza flexible con TIC.**
- 3. Las TIC en la enseñanza de las matemáticas.**
- 4. Como diseñar y desarrollar experiencias educativas exitosas apoyadas en TIC en el aula de matemáticas.**

1

CAPÍTULO LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS.

CAPÍTULO 1: LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

*“Sabido como aprenden nuestro alumnado,
y siendo conscientes de nuestro papel como docentes
será más fácil enseñar con eficacia”*
(Ballester 2002, citado por Alonso 2011, p.14)

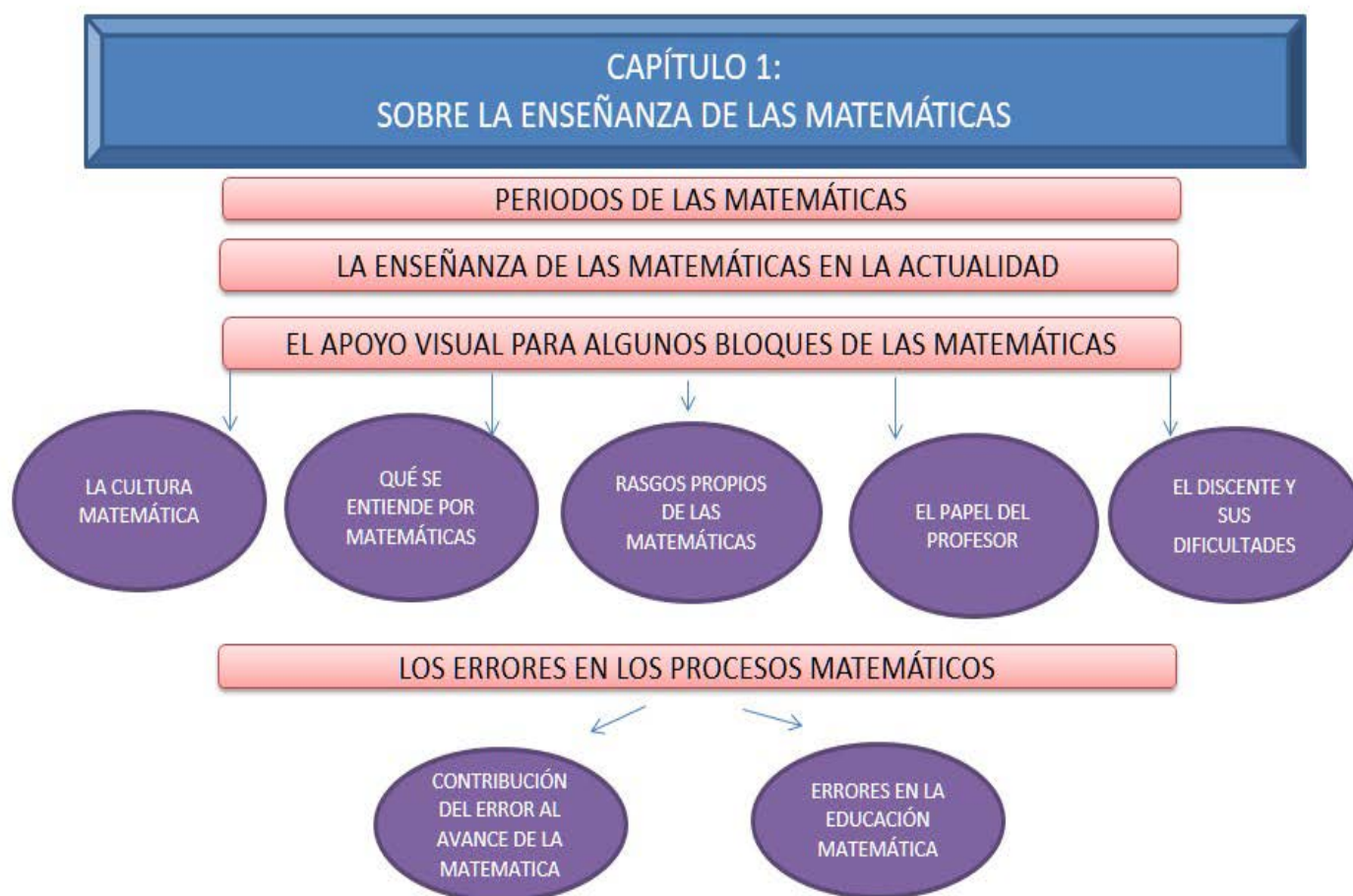


Figura 12. Mapa conceptual capítulo 1.

Fuente: Elaboración propia.

1. PERIODOS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS.

Entendemos por didáctica en cualquier área “la organización de los procesos de enseñanza y aprendizaje, relevantes para la materia” (Freudenthal, 1991, 45). Podemos afirmar (Carvajal, 2009) que las didácticas han de entenderse como meras organizadoras en el desarrollo de la educación, estructurándola entre distintos autores y libros de texto, con el fin de que los profesores, e incluso los estudiantes, puedan organizar su aprendizaje individual y grupal. De igual modo, la podríamos definir como lo hacía Brousseau (Kieran, 1998, 596): “la didáctica es la ciencia que se interesa por la producción y comunicación del conocimiento”.

Para hablar de las distintas etapas referidas a la enseñanza de las matemáticas, nos basamos en los trabajos de Guzmán (1994) y García (s.f.). Los cambios más significativos se han desarrollado durante el siglo XX, pero se ha de señalar que la educación matemática a nivel internacional apenas sufrió cambios desde principio de siglo hasta los años 1950-1960. Tan sólo, anterior a ello, es digno de comentar el movimiento de renovación que se dio a principios de siglo, gracias a la iniciativa que llevó a cabo el matemático Klein, alrededor del año 1908. Éste quería impulsar, por medio de sus trabajos, una renovación en la enseñanza media. A nuestro país no llegaron dichas ideas hasta 1927, cuando Rey Pastor, publicó en su Biblioteca Matemática la traducción de los trabajos de Klein al castellano.

A finales de los años 1950 y principios de los 60, se da un movimiento de innovación y renovación, llamado “Nueva matemática” o “Matemática moderna”. Nace como un cambio curricular en la enseñanza escolar de las matemáticas. Este movimiento se desarrolla a la par de las corrientes formalistas, muchas de cuyas ideas provenían del grupo Bourbaki. Este grupo proponía que las matemáticas debían volver a su punto de partida, es decir, a la lógica formal y a la teoría de conjuntos, obteniendo a partir de ella una estructura axiomática y sistemática.

Fue en 1959, durante el seminario de Royamount, cuando se establecieron las bases filosóficas de la “nueva matemática”. Se pueden señalar las siguientes características del movimiento:

- Se pretendió profundizar en el rigor lógico-deductivo, en contraposición a los aspectos manipulativos y operativos.
- Se otorgó un lugar preferente a las estructuras abstractas en diversas áreas, especialmente en el álgebra.
- Sufrió un grave retroceso la enseñanza de la geometría elemental y la intuición espacial, puesto que es más difícil de argumentar de manera rigurosa.
- Las actividades que más se trabajaron fueron los ejercicios basados en la tautología.

Al final de este periodo es cuando la matemática moderna fracasa, pues los alumnos no dominaban las rutinas básicas del cálculo y no aprendían los conceptos ni estructuras superiores. Al sustituir la geometría por el álgebra, la matemática elemental quedó vacía de contenidos y los alumnos carecían de la visión espacial. Se puede señalar que los inconvenientes que fueron surgiendo en la enseñanza con la “matemática moderna”, superaron a las supuestas

ventajas que se pretendía obtener, tales como el rigor en la fundamentación y la comprensión de las estructuras matemáticas. Este fracaso de la “matemática moderna” produce nuevos movimientos renovadores, en los que se discuten y se buscan nuevas tendencias. Entre estos movimientos, debemos indicar que la idea que más resaltó fue la de volver a la resolución de problemas, teniendo presente la matemática como actividad humana. Retornar a lo básico también suponía retomar la práctica de los algoritmos y procedimientos básicos de cálculo. Después de un tiempo se comprobó que no era la solución adecuada para la enseñanza de las matemáticas, pues los alumnos aprendían de memoria los procedimientos, sin comprenderlos. El hecho mencionado hizo que a finales de los años setenta se empezara a cuestionar el eslogan “retorno a lo básico”, naciendo así la “matemática actual”.

Esto hace que se abandonen los problemas basados en los fundamentos matemáticos de años anteriores, para adentrarse en el carácter cuasi empírico de esta ciencia. Se pretenden transmitir los procesos de pensamiento propios de las matemáticas, más que limitarse a transferir contenidos, centrándose en los procesos matemáticos, más que en la rutina. De este modo (enseñando procesos de pensamiento eficaces) se quiere capacitar al alumnado para que pueda mantener un diálogo inteligente con las herramientas ya existentes y venideras. Todo ello fue acompañado de una mayor motivación del alumnado. Con todas estas nuevas características, se esperaba que se involucrasen en esta rama del saber, por medio de la similitud de esta ciencia con su vida diaria, presentándoles esta rama como algo inacabado, en la que ellos pudieran investigar y de esta forma aprender. Al mismo tiempo, se potencia en los alumnos la búsqueda autónoma de conocimientos, pues será más fácil adquirirlos si ellos han participado en la construcción de los mismos. Continuando, como hasta el momento, con las ideas de Guzmán (1994) y García (s.f.) exponemos las características que se desarrollan, en los alumnos, al trabajar los procesos de pensamiento:

- se manipulan los objetos matemáticos,
- se activa su propia capacidad mental,
- se ejercita su creatividad,
- se reflexiona sobre su propio proceso de pensamiento a fin de mejorarlo conscientemente,
- se potencia las transferencias de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental,
- adquieren confianza en sí mismos,
- se divierten con su propia actividad mental,
- se preparan así para otros problemas de la ciencia y, posiblemente, de su vida cotidiana,
- se desarrollan para los nuevos retos de la tecnología y de la ciencia.

Paralelamente se opinaba que los discentes dejarían a un lado el aburrimiento y la pasividad.

Freudenthal, en 1980, en el IV Congreso Internacional de Enseñanza de la Matemática celebrado en Berkeley, recogido por García (s.f.), intervino con la ponencia “Major Problems of Mathematics Education” (Principales problemas de la educación matemática). En la cual, Freudenthal expuso los problemas que surgen en la educación matemática, subrayando no solo la investigación en la

educación, sino la componente social de dicha actividad. Durante la ponencia, solicita un compromiso de la comunidad docente con el aprendizaje de los alumnos en la adquisición y mejora de las capacidades intelectuales.

Freudenthal trata de concienciar a la comunidad docente e investigadora para registrar y transmitir estos ejemplos, para una puesta en común de los saberes y una gestión de dicho conocimiento, aplicado todo a la educación matemática de forma efectiva.

Aunque Polya no asistió a este congreso, envió un planteamiento sobre qué puede hacer el profesor para mejorar la mente de sus alumnos. Centró su ponencia en el proceso de aprendizaje, al igual que Freudenthal, pero Polya concreta y particulariza los problemas derivados de la enseñanza e investiga los aprendizajes individuales para dar posibles soluciones a los aparentes fracasos, para obtener ejemplos paradigmáticos de diagnóstico y prescripción de los mismos.

Finalmente, en dicho congreso se acordaron los siguientes pilares, aplicables desde ese momento, para la enseñanza matemática:

- Que el foco de la matemática escolar sea la resolución de problemas. Pero considerando un tipo de problemas especial: aquellos que generan teoría, que ofrecen resistencia al alumno y que fomentan su creatividad y su espíritu crítico.
- Que la facilidad en el cálculo sea incluida en la destreza básica en matemáticas.
- Que los programas de matemáticas aprovechen la potencia de las calculadoras y de las computadoras en todos los niveles.
- Que se apliquen normas rigurosas de efectividad y eficiencia en la enseñanza de la matemática.

A las ideas marcadas con anterioridad hay que sumarle otras, como las expuestas por Steiner (1985). Éste opina que la didáctica de las matemáticas debe tender hacia lo que Piaget denominó interdisciplinariedad, lo que situaría a las investigaciones e innovaciones en didáctica dentro de las interacciones entre las múltiples disciplinas (psicología, pedagogía y sociología, entre otras, sin olvidar a la propia matemática como disciplina científica) que permiten avanzar en el conocimiento de los problemas planteados.

En la actualidad hay un reconocimiento general sobre la exageración que se había llevado a cabo con la llamada matemática moderna. Se destaca que, no sólo se puede centrar la enseñanza de las matemáticas en la comprensión y la inteligencia, sino que se ha de dar un lugar destacado al carácter intuitivo de esta disciplina, dándole mayor importancia a la experiencia y manipulación.

Guzmán (1994) expone que el gran reto en la enseñanza de las matemáticas para este siglo no se debe centrar sólo en cómo enseñar. Es posible que también se tengan que repasar los contenidos propios de los libros de texto, pues la llegada de los ordenadores hace que ciertas ramas de las matemáticas puedan trabajarse por medio de estos (como por ejemplo algunos procesos de cálculo, gráficas y modelización).

Sería, de igual modo, muy ventajoso para la motivación del alumnado saber a qué se debió el nacimiento de los resultados matemáticos que estudian, pues entenderían la perspectiva que se tenía de algunos conocimientos y se mostraría a los discentes el sentido del trabajo de los matemáticos (González, 2004). Toeplitz (1963) ya señalaba que en la enseñanza de las matemáticas no se suscita la cuestión que, tiempo atrás, llevó a la búsqueda de los resultados obtenidos, opinando que si se conocieran los orígenes de estas ideas se podría entender que no es una disciplina muerta.

En el ámbito español, la llegada de la democracia trajo consigo los primeros movimientos de renovación educativa, en todos los ámbitos del sistema.

Se puede señalar la década de los setenta como el inicio de grandes investigaciones sobre la didáctica de las matemáticas que no hacen más que crecer dejando patente la preocupación por la mejora de la enseñanza de esta materia. Destacan la creación de grupos de docentes como El Grupo Cero en la Comunidad Valenciana (1975), el grupo Zero en Cataluña (1975) y las asociaciones de profesores Newton en Canarias (1978) o Thales en Andalucía (1981) que se marcaron como objetivos el cambio en la enseñanza para la mejora de resultados.

2. LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA ACTUALIDAD.

Godino, Batanero y Font (2003), destacan la realidad del hecho de que la cultura matemática es fundamental en nuestro mundo, pues estamos rodeados de matemáticas en nuestra vida, y defienden que uno de los fines de la educación debe ser preparar a los alumnos para que sean ciudadanos cultos. Dichos autores señalan que el concepto de cultura no es estático y cada vez engloba más saberes. En referencia a las matemáticas no será necesario, para que sean cultos, formarlos para que sean grandes calculistas, sino en capacitarlos para interpretar y ser críticos con las informaciones matemáticas recibidas, saber argumentar datos, ideas..., en definitiva, comunicar información matemática cuando así lo requiera la situación, ya sea en su vida diaria o en su ejercicio profesional.

Señalamos a la Unesco (2001) como precursora de las reflexiones sobre la educación científica, en el sentido de que la adquisición de las competencias científicas es fundamental para el desarrollo de los ciudadanos. De este modo, se forman personas más completas, que comprendan mejor el mundo y que puedan ser partícipes del crecimiento económico y social necesario en el mundo. En distintas ocasiones, los discentes creen que lo aprendido en clase de matemáticas no tiene validez para su vida (a excepción de los cálculos más básicos).

LOS RASGOS DE LAS MATEMÁTICAS.

Para el desarrollo de una buena enseñanza de las matemáticas, como indican muchos autores (Castro, 2001, Godino et al. 2003, Godino, 2004...), es recomendable presentar las matemáticas como un conjunto de conocimientos y procedimientos, no de hechos aislados. Dichos saberes han evolucionado con el tiempo y la disciplina continuará creciendo. Habrá que basarse en técnicas inductivas, constructivas y deductivas que, por medio de un razonamiento empírico inductivo, a la vez que con el uso del razonamiento deductivo y de la abstracción, logren relacionar todos los contenidos enseñados con la experiencia del alumnado. El punto de partida del proceso de construcción del conocimiento matemático ha de ser la experiencia práctica y cotidiana que los niños poseen.

Autores como Amos (1983), Dimova (1981) y Pribram (1991) avalan la idea de que los contenidos matemáticos no se pueden presentar como hechos aislados sin correlación. Se deben entrelazar, siendo de este modo más fáciles de asimilar, siempre que el proceso de razonamiento se desarrolle de forma correcta, de tal manera que los alumnos podrán ver la relación entre los distintos elementos, creando conexiones entre ellos. Bronowski (1990) indica que el rol del docente será decisivo para que se lleven a cabo estas conexiones.

Las matemáticas tienen unos rasgos propios que incluso en niveles inferiores a la secundaria son fáciles de reconocer. Estos son “su abstracción, su precisión, su rigor lógico, el irrefutable carácter de sus conclusiones y finalmente, el campo excepcionalmente amplio de sus aplicaciones” (Aleksandrow et al. 1973, p.17).

LAS MATEMÁTICAS EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA

La orientación de la enseñanza y del aprendizaje en las primeras etapas educativas, tiene que seguir una línea progresiva a partir de la experiencia manipulativa y práctica. Partiendo de lo concreto para poco a poco, pasar a lo simbólico, abstracto y formal. Se deben plantear los primeros contactos con esta materia mediante la intuición y centrándose en situaciones particulares. Finalmente, se tendrá que forzar el salto para poder llegar a la construcción del conocimiento matemático de manera abstracta. Los alumnos deben dominar, igualmente, las herramientas básicas de las matemáticas, tales como el cálculo mental así como la estimación de resultados y de medidas (Godino et al. 2003). En dicha obra se menciona que el aprendizaje de esta materia tiene como pilares los procedimientos ordenados, consecutivos y con un lenguaje propio, en donde el proceso seguido, si es correcto, debe ser valorado al igual que el resultado final.

Pero la enseñanza de las matemáticas no se puede centrar en procesos memorísticos vacíos de ideas propias. Los conceptos son la base de esta disciplina. El mayor ejemplo de que no siempre la enseñanza de las matemáticas llega a las raíces de los conocimientos es el hecho de que cuando todos pensamos, por ejemplo, en el número uno, en nuestro cerebro aparece la imagen de la tipografía 1, y no la imagen de “una” cantidad (una pelota, un limón...). Podemos concluir que aunque el símbolo también es un nombre, no oral sino escrito, en ocasiones se aprende la simbología pero no se la asocia de inmediato con su significado (Godino et al. 2003).

Díaz (1994) señala la existencia de una brecha encontrada por la escisión del conocimiento científico y matemático. Indica que se podría suplir por medio de enseñanzas y aprendizajes distintos a los existentes e interactuando con las TIC, respetando los pilares que acabamos de mencionar del NCTM.

En “Principios y Estándares” (2000) del NCTM, se describen los principios de la enseñanza de las matemáticas:

1. Equidad. No se podrá obtener la excelencia sino se trabaja desde esta premisa. Además siempre será un fuerte apoyo para los discentes.
2. Currículo. El plan de estudios no puede limitarse a un conjunto de actividades, debe estar bien articulado a lo largo de todo el curso y de las distintas etapas.
3. Enseñanza. Los estudiantes deben conocer qué necesitan saber y cuál es el motivo de ello, pues de esta forma encontrarán un mayor sentido que hará que los aprendan mejor.
4. Aprendizaje. El alumno debe ser protagonista de su aprendizaje y formar parte activa de él. Deberá construir de manera activa el conocimiento, partiendo de la experiencia y de lo ya aprendido. La base debe ser la comprensión.
5. Evaluación. La evaluación debe medir el aprendizaje de los aspectos de las matemáticas más relevantes a la vez que debe aportar una información que le sea útil tanto al docente como al estudiante.
6. Tecnología. Se destaca de ella el papel que tiene no sólo en cómo enseñar por medio de ella sino también en que estimula el aprendizaje de los estudiantes.

Como indican Godino et al. (2003) estos seis principios deben tenerlos en cuenta todos los docentes para sus propuestas didácticas.

Algunos de los autores antes mencionados (Castro, 2001; Godino et al. 2003; Godino, 2004) también defienden que en la enseñanza de las matemáticas se deben desempeñar las siguientes funciones:

- *Función formativa básica, de capacidades intelectuales.*
Establecimiento de destrezas cognitivas, de carácter general, susceptibles de ser utilizadas en una amplia gama de casos particulares, y que contribuyen por sí mismas, a la potenciación de las capacidades cognitivas de los alumnos.
- *Función instrumental,* en el sentido de ser el armazón de conocimientos de otras materias.
Valor instrumental, creciente a medida que el alumnado progresa hacia tramos superiores de la educación y en la medida en que las matemáticas proporcionan formalización al conocimiento humano riguroso y, en particular, al conocimiento científico.
- *Función pragmática,* en cuanto a problemas y situaciones de la vida real se refiere.
- *Aplicación funcional,* posibilitando que los alumnos valoren y apliquen sus conocimientos matemáticos fuera del ámbito escolar, en las situaciones de la vida cotidiana.

Ejemplos de estas funciones ya son marcados por Aleksandrow, Komogrovo y Laurentiev (1973) que hacen referencia a la desnaturalización en la enseñanza de las matemáticas al separar en la escuela los procesos cotidianos del aprendizaje de esta materia. Exponen que, cuando se inicia el estudio de las tablas de multiplicar, no se comienza el proceso con la pregunta ¿cuánto me costarán dos manzanas si una es 10 céntimos?, lo que se hace es transmitir un número abstracto por otro; “estas abstracciones, apoyadas unas en otras, han alcanzado tal grado de generalización que pierden aparentemente toda conexión con la vida diaria, y el hombre medio no entiende nada de ellas, salvo el simple hecho de que todo es incomprensible” (Aleksandrow et al., 1973, 18). Destacan los autores que la amplitud de sus aplicaciones es muy variada. De este modo, se ha de resaltar el constante uso que se hace de la aritmética en nuestra vida (por ejemplo al ir a comprar), o de la geometría (para saber la superficie útil de nuestra casa). Destacar también el papel fundamental que desempeña en otras ciencias como la física, química, mecánica, astronomía o la tecnología moderna, que serían imposibles sin las matemáticas, y en menor medida en la biología y sociología.

EL PAPEL DEL PROFESOR.

De nuevo, fue la UNESCO, en la 46^o Conferencia internacional, celebrada en Ginebra del 5 al 8 de septiembre de 2001, quien destacó algunos de los factores que dificultan el desarrollo de la educación científica, como se recoge en la síntesis realizada por la Oficina Internacional de Educación (2003). Las nuevas tendencias en la educación señalan que el papel del profesor de estas disciplinas ha de evolucionar, abandonando la idea de que el docente es solo responsable de transmitir el conocimiento, para ocupar un papel de

orientador, facilitador, guía. De este modo, el alumno es el verdadero protagonista de su aprendizaje. Esto hace que el docente busque nuevas pedagogías y escenarios pues, lejos de que su papel disminuya, toma una vertiente distinta y más completa que la llevada a cabo hasta el momento.

Al reflexionar sobre qué caracteriza a un buen profesor de matemáticas o sobre cómo conducir una clase de matemáticas, para poder aunar todo lo descrito con anterioridad, es útil analizar algunos documentos preparados sobre esta problemática, por asociaciones de profesores. Una de estas asociaciones, de gran prestigio, es el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM – Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas-) de los EEUU. Dicha asociación elaboró en 1991 un documento titulado “Estándares profesionales para la enseñanza de las matemáticas (NCTM, 1991) con el fin de que fuese una referencia para orientar la labor de los profesores de matemáticas en la década de los noventa. A continuación sintetizamos algunos de ellos:

1. *El fin de la enseñanza de las matemáticas es ayudar a los estudiantes a desarrollar su capacidad matemática:*

Se ha de fomentar el razonamiento matemático, la comunicación entre iguales con temática matemática, la resolución de problemas estableciendo vínculos entre los distintos bloques de esta materia y las demás disciplinas. Para llegar a desarrollar de manera eficiente estas indicaciones se propone que:

- Los docentes han de trabajar con los alumnos de forma que alcancen la comprensión conceptual y procedimental de cada parte conceptual matemático.
- Los profesores han de fomentar que los estudiantes formulen y resuelvan una amplia variedad de problemas, propongan conjeturas, argumenten, estudien si las propuestas son o no viables, obtengan soluciones correctas... Destacando que, en ocasiones, en el estudio de las matemáticas no se llega a conclusiones válidas, e intentando que sepan detectar dichas situaciones y que no pierdan la motivación ante estos hechos.
- Los maestros han de saber transmitir la belleza y utilidad de las matemáticas.

2. *El aprendizaje de los discentes está en estrecha relación a la forma en como lo aprenden.*

El docente deberá saber plantear un entorno, unas tareas y una metodología que sea activa para el discente pues si éste se siente protagonista de su aprendizaje y ve la aplicación directa con las aplicaciones, mejorará los resultados.

3. *Todos los estudiantes pueden aprender a pensar matemáticamente.*

El profesor tendrá que habilitar las estrategias para que todos sus discentes aprendan a hacer conjeturas, argumentar sobre las matemáticas, formular, resolver problemas... no reservando estas tareas para los de mayor capacidad matemática.

El aprendizaje será más completo cuando el docente sepa combinar todas estas recomendaciones en el aula.

Basándonos en las ideas de Zemelman, Harvey y Hyde (1998) consideramos que los docentes deberían tener presente las ideas sugeridas:

- Favorecer que los alumnos trabajen su capacidad matemática.
- Dotar al proceso de enseñanza-aprendizaje de vivencias enfocadas a estimular la curiosidad de los estudiantes potenciando la investigación, la resolución de problemas.
- Trabajar actividades en las que por medio de la participación activa de los alumnos y de las situaciones reales se estudien las matemáticas.
- Entender y utilizar patrones y relaciones.
- Potenciar la comunicación de los conceptos y resoluciones que abarca esta ciencia.
- Ofrecer experiencias en las que los estudiantes puedan explicar, justificar y reordenar su propio pensamiento, sin limitarse al estudio repetitivo de lo que dice un libro de texto.
- Desarrollar competencia matemática por medio de la formulación de problemas, representación (gráficas, tablas) y análisis.

Otra de las ideas que defiende la Unesco (2003) para la educación del siglo XXI es la de aprender a vivir juntos siempre desde un clima de tolerancia y respetando las diferencias individuales. Por ello, se debería evocar, según Ruiz (2008), una reducción de la ratio en las aulas pues el profesor tendrá un gran trabajo al tener que cubrir la individualización de cada estudiante sin desatender el espíritu colectivo que, en ocasiones, es positivo en la enseñanza de esta ciencia.

EL DISCENTE Y SUS DIFICULTADES.

Son varias etapas las que el alumno debe superar durante el aprendizaje de esta disciplina. En primer lugar, se ha de entender el enunciado y planificar la tarea. A continuación, se tiene que desarrollar el conocimiento sobre qué hechos numéricos, fórmulas, reglas se tienen que utilizar, haciendo un correcto uso del lenguaje matemático. Seguidamente se procederá a operar de manera correcta, finalizando con la revisión de los pasos anteriores, la comprobación de la respuesta dada y el razonamiento sobre el sentido de la misma. Esta variedad de etapas hace que las dificultades en el aprendizaje se puedan deber a muchos motivos.

Di Blasi Regner y otros (2003) las agrupan en los siguientes bloques:

- Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos
- Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemáticos
- Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza
- Dificultades asociadas al desarrollo cognitivo de los alumnos
- Dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales

Otra de las categorizaciones que encontramos es la aportada por Romero y Lavigne (2005), en la que habla de las dificultades del siguiente modo (tabla 3):

Tabla 3. Dificultades en las matemáticas. Fuente: Romero y Lavigne, 2005.

Dificultades en el cálculo	<ul style="list-style-type: none"> - Déficit de atención sostenida. - Déficit en el uso de la memoria de trabajo. - Déficit en la elaboración y aplicación oportuna y eficaz de algoritmos y otros procedimientos de pensamiento. - Déficit en la automatización de las operaciones básicas. - Déficit de conocimientos numéricos.
Dificultades en la solución de problemas	<ul style="list-style-type: none"> - Déficit en la comprensión del enunciado y su traducción a lenguaje matemático. - Déficit en la elaboración y aplicación de estrategias y procedimientos de pensamiento. - Déficit en la representación coherente en la memoria de trabajo de los componentes del problema. - Déficit en la representación en la memoria de trabajo de un plan sistemático de solución. - Déficit en la elaboración y aplicación de estrategias y procedimientos mentales para controlar y supervisar el proceso de realización del problema. - Déficit de conocimientos matemáticos específicos. - Déficit de metaconocimientos implicados en la solución de problemas.
Aspectos personales relacionados	<ul style="list-style-type: none"> - Estilo cognitivo (patrón de aprendizaje) irreflexivo, y frecuentemente también impulsivo. - Motivación de logro. - Pobre autoconcepto, especialmente autoconcepto académico (matemático). - Actitudes negativas hacia las matemáticas. - Atribuir los fracasos a su falta de capacidad y los éxitos a la suerte, en cualquier caso siempre a factores según ellos no controlables. - Expectativas negativas.

También encontramos más clasificaciones que hacen referencia a la misma temática. Basándonos en la de Carrillo (2009) referimos la siguiente:

(a) *Dificultades relacionadas con la propia naturaleza de las matemáticas:*

1. Complejidad de los conceptos.
2. Estructura jerárquica de los conocimientos matemáticos.
3. Carácter lógico.
4. El lenguaje matemático.

(b) Dificultades relacionadas con la organización, la enseñanza inadecuada y la metodología:

1. La enseñanza inadecuada.
2. Metodología.
3. Ritmos de trabajo.
4. Inadecuación o ausencia de los recursos de aprendizaje.

(c) Dificultades procedentes del propio alumno:

1. Creencias y aptitudes sobre las matemáticas.
2. Dificultades relacionadas con los procesos del desarrollo cognitivo.
3. Causas internas: alteraciones neurológicas.

3. EL APOYO VISUAL PARA ALGUNOS BLOQUES DE LAS MATEMÁTICAS.

Una vez realizado un recorrido teniendo presente las orientaciones para la enseñanza de las matemáticas, el trabajo del docente y la realidad del estudiante, destacamos que son varios los estudios que señalan las representaciones visuales como medio para el avance ante distintas dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Bruner (citado por Godino et al. 2003) considera que hay tres tipos de representaciones:

- *Representación enactiva*: Está basada en el que el sujeto escenifica los acontecimientos, los hechos y las experiencias a través de la acción (respuesta motriz). Este tipo de representación está pues muy relacionado con las sensaciones generales del estado del propio cuerpo y de la percepción inconsciente de los movimientos y de la posición del organismo. Son representaciones bastantes manipulativas.
- *Representación icónica*: Está basada en imágenes y esquemas espaciales de diferente complejidad que tienen como objetivo ser representaciones del entorno. Estas representaciones guardan cierto parecido con la realidad representada.
- *Representación simbólica*: Está basada en los símbolos (que no tienen que ser representaciones exactas de la realidad, pues suelen basarse en abstracciones) para escenificar el mundo.

Dichas representaciones pueden ser llevadas al aula de matemáticas, en los distintos niveles de enseñanza, para lo que se necesitará disponer de un buen material visual que ayude al entendimiento de algunas de las partes de esta ciencia.

En Alsina, Burgués y Fortuny (1988) se distinguen cuatro dimensiones generales de la educación Matemática:

- Geometría Visual.
Sustentada en el estudio de la visualización por medio de las siguientes orientaciones:
 - Geometría de las formas: se descubre a través de la observación directa de nuestro entorno (de las formas de donde vivimos, de la naturaleza que nos rodea, etc....)
 - Geometría de los reflejos: es desarrollada gracias a la observación de los escaparates, espejos...
 - Geometría de las sombras: las sombras no son siempre representaciones exactas de la realidad, de la geometría del objeto.
 - Geometría efímera: basada en figuras que solo existen durante unos instantes (ejemplos pueden ser las pompas de jabón, la papiroflexia, la globoflexia, etc...)
- Geometría Construida.
Tras la observación visual se podrá iniciar el proceso de la construcción (por ejemplo de figuras planas para llegar al entendimiento

y dominio de conceptos como los de área, perímetro, ángulo...). Destacamos como material al que se puede recurrir en esta fase los geoplanos, tangram (para la geometría plana), los cuerpos rellenables, sólidos platónicos...

- Geometría Dibujada.

El dibujo permite desarrollar croquis que después podrán dar lugar a representaciones reales (o viceversa). Es necesario para el desarrollo de esta etapa que el discente sepa desenvolverse con la regla, escuadra, cartabón, compás, papel milimetrado, etc.

- Geometría Medida

A través de la medida de los objetos podremos obtener procedimientos “exactos” que aplicaremos al estudio de la longitud, dimensión, tamaño, talla, volumen...

Boaler (s.f) opina que la visualización en clase de matemáticas es fundamental pues, cuando los alumnos aprenden por medio de aproximaciones visuales esta materia, exploran, llegando a lo profundo de esta ciencia y al entendimiento. Afirma que es imprescindible un cambio en el proceso de enseñanza-aprendizaje introduciendo la imagen en el mismo.

Prendes (1998, 4) enuncia que “entendemos imagen como representación de algo que existe previamente a ella”. En su trabajo expone que las imágenes están formadas por expresiones pequeñas, como son el punto y la línea. “Descartes introdujo en el plano las coordenadas x,y que ahora se llaman cartesianas. De este modo para cualquier par de valores x e y corresponde un punto, y recíprocamente, a cada punto corresponde un par de coordenadas, x,y .” (Aleksandrow et al. 1973, 69).

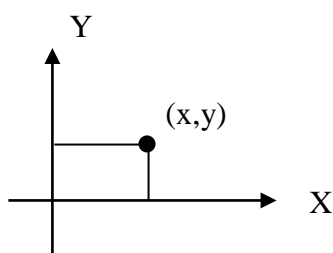


Figura 13. Ejes cartesianos. Fuente: Elaboración propia

Podemos afirmar, como ya lo hacía Prendes (1998), que cuando los puntos están tan próximos que no se pueden reconocer de manera individual, entonces percibimos una línea.

Presmeg (s.f) expone investigaciones en educación matemática centradas en la visualización, la capacidad visual y en los procesos de mediación visual, para la enseñanza de las matemáticas, en la etapa secundaria. Gracias a dichos trabajos también sabemos qué fue en la era del constructivismo donde el

papel del pensamiento visual en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas adquiere mayor protagonismo. Destacan los procesos de pensamiento inaccesibles, asociados con el uso de imagen mentales asociadas. Presmeg señala que Dreyfuss en 1991 aportó muchos ejemplos eficaces que demostraban el poder de las presentaciones visuales en el razonamiento matemático, pero que la introducción de las imágenes para el entendimiento de las matemáticas se deberá complementar con pensamientos analíticos, sin perder la rigurosidad de esta ciencia. La realidad que, en ocasiones se encuentra en el aula, de que los discentes no le den importancia a los aspectos visuales se debía, según dicho autor, a la escasa importancia que se le ha dado a este apoyo durante décadas. Otros estudios más recientes, como los de Radford, Bardini, Sabena, Diallo y Simbogoye (2005), Kanduz y Strässer (2004), Nardi y Ionnone's (2003) destacan la importancia de las imágenes en el estudio de las matemáticas.

Debemos estudiar si las representaciones visuales son un buen medio para el avance, ante las distintas dificultades, en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas. Si es algo real o, si por el contrario no existe la necesidad de tener un buen material visual para el entendimiento de algunas de las partes de esta materia. Llegados a este punto del estudio debemos basarnos también en explicaciones científicas.

Boaler (s.f) aporta información sobre los postulados de la ciencia acerca del cerebro, señalando la importancia de las representaciones visuales en la recreación de patrones en nuestros cerebros (incluso desde que contamos con los dedos). Este autor hace una exposición del proceso que nuestra mente realiza para formarse un esquema formal y visual. Nuestro cerebro se compone de redes distribuidas. Cuando manejamos conocimientos, diferentes áreas del cerebro se iluminan y se comunican unas con otras. En particular, cuando trabajamos con matemáticas, la actividad cerebral se distribuye entre varias redes diferentes, que incluyen dos vías visuales, la óptica ventral y dorsal (ver figura 14). En el área de las matemáticas, la neuroimagen ha demostrado que incluso cuando trabajamos el cálculo numérico, con representaciones simbólicas, nuestro pensamiento matemático se basa en el tratamiento visual. En dicho trabajo se explica que el área del cerebro que es parte de la vía óptica dorsal (mostrada en verde en la figura que se encuentra a continuación), está involucrada cuando se trabaja el área de las matemáticas, tanto en niños como en adultos. Ésta sección del cerebro tiene especial importancia en las representaciones visuales o espaciales de cantidad, como en el caso de la recta de números reales. La representación de cantidades numéricas, según ha quedado demostrada en estudios cognitivos, son importantes para el desarrollo del conocimiento numérico y precursores del éxito académico de los niños. Continúa con la exposición sobre un estudio de Stanford con niños de 8 a 14 años, que muestra que, a medida que los niños crecen, desarrollan parte de la vía óptica ventral, mostrada en color naranja en la figura 14. El cerebro se vuelve más sensible y especializado en la representación visual de números. El estudio también expone una importante y creciente interacción entre las dos vías visuales, ventral y dorsal. Esto indica que, conforme los niños aprenden y se desarrollan, el cerebro se vuelve más interactivo, conectando el procesamiento visual de las formas simbólicas de los números, con el conocimiento visión de

cierta cantidad, como una matriz de puntos o cualquier otra representación visual. Destaca también que diferentes áreas del cerebro están involucradas cuando pensamos matemáticamente, incluso las redes frontales (en rojo y púrpura), el lóbulo temporal medio y sobre todo el hipocampo, la zona en forma de herradura (en rojo).

Las bases neurobiológicas del proceso cognitivo matemático implican una comunicación complicada y dinámica entre el sistema cerebral de la memoria, el control y la detección y el proceso visual de las regiones del cerebro.

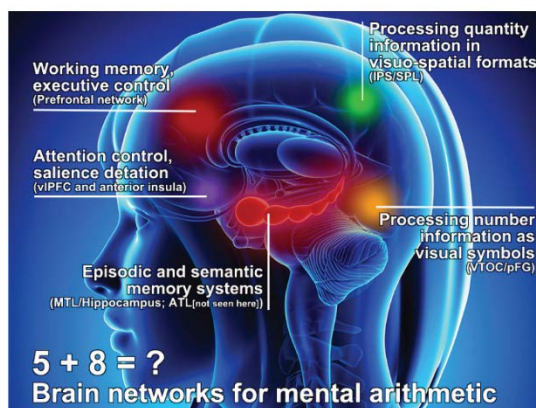


Figura 14. Cerebro. Fuente: Boaler, s.f.

El estudio, expuesto por Boaler (s.f) pone de manifiesto que se debe fomentar el aprendizaje visual de los estudiantes y sustituir la idea de que los buenos estudiantes de matemáticas son los que memorizan y calculan.

Joubert (2008) señala que las experiencias con el software de geometría dinámica ayudan a la comprensión en los razonamientos de las matemáticas y colaboran a que el aprendizaje de los mismos sea más significativo. Mediante las imágenes que nos muestra un ordenador se favorece que los alumnos puedan compartir esquemas mentales, patrones y formas de trabajo que hasta el momento estaban tan solo en la mente de cada individuo. Se podrá trabajar no solo con imágenes estáticas, como las mostradas por los libros de texto que nos proporcionan “una información elaborada por un emisor con un material [...] que se ordena según una estructura y un punto de vista, y haciendo uso de un código y unos recursos expresivos” (Hernández, 1990, 17), sino también con otras nuevas, dinámicas, que se podrán parar, volver a poner en movimiento... mejorando la capacidad de pensar de cada discente (Hernández, 1990).

El propio Arquímedes (citado por García y Bertrán, 1988, p.6), en una carta dirigida a Eratóstenes comenta:

Muchas cosas que me han resultado claras mediante la mecánica han sido más tarde demostradas por la geometría, pues el tratamiento con el método mecánico no estaba basado todavía en una demostración. Es más fácil, en efecto, determinar la demostración, cuando previamente se ha llegado con el método mecánico a una representación de los problemas en examen, que encontrarla sin tal representación preliminar.

Rosich, Nuñez y Fernández (1996) señalan que la falta de visión no hace imposible el estudio de las matemáticas, pero es claro que presenta dificultades en el ritmo de trabajo, de adquisición de los conocimientos pues ha quedado demostrado, por estudios llevados a cabo por el equipo de la profesora Hatwell (escuela piagetiana de Paris) o Rosas y Ochaíta (España), que el desarrollo psicológico del niño ciego, por ejemplo, produce un retraso en la adquisición de experiencias lógico matemáticas. Continuando con el trabajo de Rosich et al. (1996), exponemos que aunque no todos los entendidos abogan por la necesidad de introducir en la enseñanza de las matemáticas representaciones gráficas, la justificación, para aquellos que no consideran las imágenes necesarias, se basa en la existencia de los distintos campos de esta ciencia antes de las mismas (por ejemplo del análisis antes de las representaciones cartesianas, de la teoría de conjuntos sin los diagramas de Venn...). Se ha de resaltar, según dichos autores, que son cada vez más los profesores que constatan que muchas de las dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas se encuentran por carecer de representaciones graficas ejemplarizantes, claras y precisas.

En la línea de dichas investigaciones, sorprende que la representación gráfica no sea un concepto nuevo pues, ya los griegos, aún sin poder demostrar que fueran los primeros, la usaban con fines pedagógicos. Fueron los maestros helenísticos los que les dieron mayor protagonismo a la representación, fundamentalmente en la rama de la geometría, para poder enseñar las matemáticas apoyándose en la visual. Siendo ésta el soporte de razonamiento y el vehículo usado para la transmisión de conocimientos, generalizando y unificando métodos y reglas por medio de estudios como los de Thales, Pitágoras y Ptolomeo. Esta línea de representaciones no cayó muerta, sino todo lo contrario. Las ciencias han evolucionado junto a las representaciones gráficas de las mismas, destacando de manera especial el campo de la geometría. Arquímedes desarrolló la representación vectorial de fuerzas y por tanto, de los fenómenos mecánicos. En el siglo XVIII fue Fermat, a partir de las ideas de Apolonio sobre cónicas, quien logró conectar la geometría y el álgebra creando una forma de representación de relaciones abstractas por medio de una estructura visual bidimensional que luego fue mejorada por Descartes. También en ese mismo siglo Euler aportó por medio de cuerdas la representación de manera visual de conceptos del lenguaje cotidiano sobre relaciones lógicas, puntos, curvas, conjuntos... Esto hizo que Venn Pierce tuviera la base para desarrollar los razonamientos por diagramas estrechando la fina línea que hay entre matemáticas y lógica. Se podría también hablar, por señalar más ideas, del uso de las flechas para el concepto lógico de implicación. Todo lo expuesto (Rosich et al. 1996) deja patente la creación, no solo de un lenguaje gráfico matemático, sino del potencial que siempre han tenido las representaciones visuales para el entendimiento de las matemáticas.

Como indicaba Eisenberg (1994), la enseñanza de las matemáticas y las distintas tendencias educativas, pueden ser las responsables de que los alumnos vean tan alejada esta materia de las representaciones y no logren hacerse esquemas visuales de los conceptos que estudian. Siempre se deberá tener presente que "comprender algo no significa asimilarlo dentro de un esquema adecuado" (Skemp, 1980, p.50).

España ha pasado y está pasando por distintas reformas educativas pero no es hasta 1991 cuando se recoge de manera explícita, en el Diseño

Curricular Base, el papel primordial que tiene el lenguaje gráfico-geométrico. No siendo solo un medio didáctico, sino un objetivo y contenido:

Puede afirmarse sin miedo que la formulaciones *lenguaje, expresión o representación gráfica, representación funcional*, etc... son sin duda más abundantes y comunes a todos los bloques temáticos. [...] Las referencias al lenguaje gráfico las encontramos tanto al referirse a la Geometría como al Azar, a la Estadística como al Álgebra y al Análisis, también en los dominios numéricos. [...] Hay pues que estar dispuestos a enarbolar el lenguaje gráfico-geométrico como útil matemático y/o didáctico de primera magnitud. Deberíamos convencernos de que el dibujo, la presentación gráfica del tipo que sea, es, no ya uno de entre los lenguajes posibles, sino quizás el genuino de la clase Matemáticas; más claro y adecuado que la lengua natural –hablada o escrita- y la expresión simbólica-matemática, más cómodo, asequible y rápido que el de los comportamientos físicos. Sentirnos proclives al dibujo, y transmitir este hábito a nuestros alumnos. Sentirnos extraños tras una sesión de clase en la que no se hayan producido representaciones o esquemas. (Rosich et al. 1996, p.148)

4. LOS ERRORES EN LOS PROCESOS MATEMÁTICOS

LA CONTRIBUCIÓN DEL ERROR EN EL AVANCE DE LAS MATEMÁTICAS.

Hiriart-Urruty (2012, 91) defiende que “atacar la resolución de una conjetura aporta matemáticas nuevas (nociones o técnicas), estableciendo a veces conexiones inesperadas entre diferentes dominios de las matemáticas”. Cuando se intenta demostrar una teoría, conjetura... el camino que se recorre, lleno de errores, hasta su completa depuración y éxito del proceso, hace que se puedan aportar nuevos conocimientos. La aparición de estos errores, en el transcurso de las demostraciones, ha hecho que fuesen surgiendo otras, en ocasiones superiores, que han hecho que esta disciplina haya crecido.

En el trabajo desarrollado por Abrate et al. (2006) encontramos varios ejemplos que ponen de manifiesto que el error es un factor que ha contribuido al desarrollo de las matemáticas:

- El matemático Pierre de Fermat (1601-1665) enunció que todos los números de la forma $2^{2^n} - 1$ (números de Fermat), eran primos. Dicha afirmación fue, por medio de un contraejemplo, refutada por Euler (1707-1783). Esta acción condujo a Euler a sospechar el hecho de que existiesen infinitos números primos.
- La condición impuesta por los griegos (el uso exclusivo de la regla y compás) para la demostración de tres problemas como son “la cuadratura del círculo”, “la trisección del ángulo” y la “duplicación del cubo”, hicieron que al no encontrar forma alguna de hacerlo a lo largo de varias generaciones se investigasen otros campos dentro de la disciplina para poder llevarlo a cabo o para explicar su imposibilidad.
- Otro problema, también muy conocido en la comunidad matemática, es la afirmación de que bastan cuatro colores para dar coloración a cualquier mapa y que demostrado en la actualidad tanto por vía computacional (Appel Haken en el año 1976) como por procedimientos matemáticos (en 1996 por Robertson, Sanders, Seymour y Thomas) no ha tenido falta de trabajo y debate a lo largo de los años. Algunas de las demostraciones han tenido errores, estas han dado lugar a poder acercarse a la veracidad del enunciado. Así, primero se logró demostrar que tres colores eran insuficientes para más adelante también hacerlo con que cinco sobaban por lo que cuatro era el candidato ideal, lo que más tarde de demostró.

LOS ERRORES EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

Los errores en matemáticas tienen un papel muy destacado en el proceso de enseñanza-aprendizaje. En él se pone de relieve unas conclusiones finales, tras un largo proceso en el que son muchos los factores que intervienen: profesor, alumno, currículo, metodologías, tipo de tareas, contexto sociocultural (en muchas ocasiones no todos los discentes disponen de las mismas oportunidades), implicación... (Socas, 2007).

Se deberá tener presente, en el estudio del error, que éste, no es sólo la concreción de la ignorancia, de respuestas aleatorias, puede deberse también a

un proceso no correcto, presente o pasado, no acabado o inadecuado (Brousseau, 1998).

Los errores en la educación matemática nos dan la oportunidad, como indicaban Engler, Gregorini, Müller, Vrancken y Hecklein (s.f) de explorar el razonamiento matemático. Dichos autores señalan que es importante partir de los errores del alumno para planificar la enseñanza de las matemáticas.

Rico (1998) destacaba que el estudio de los errores es un objeto, a la vez, de estudio para la educación matemática.

Chamorro (2011) indica tres posibles obstáculos, de distintos orígenes, para los errores en las matemáticas:

- De origen epistemológico: debidos al propio saber matemático
- De origen ontogenético: debidos al desarrollo neurofisiológicos de los discentes.
- De origen didáctico: debidos al sistema educativo y al propio profesor.

Son muchos los estudios (como por ejemplo los de Astolfi, 1999, Abrate et al. 2006, Guerra, Castillo, Chamorro y de Gil, 2013) que recomiendan que para que el alumno complete de forma adecuada sus conocimientos es fundamental que el discente identifique el error, lo señale, determine las causas que le han llevado a él y sea desterrado para que el concepto sea adquirido ahora de manera correcta, entendiendo aquello que estaba mal. Para este proceso el papel del profesor es indispensable y siempre debe partir de las ideas de los alumnos. De este modo se podrá construir la enseñanza de las matemáticas de una forma correcta. Brousseau, Davis y Werner (citado por Del Puerto y Lilia, 2004) abren el interrogante sobre qué es lo que deben aprender los docentes para poder mejorar cuando observan el proceso de aprendizaje de sus alumnos. Señalan que, en primer lugar, se les ha de dar la oportunidad de comprobar lo que saben, para más adelante, durante el proceso de enseñanza, conocer, mediante un trato directo, las representaciones mentales construidas por ellos, no dejando la creación de las mismas a la casualidad, y proporcionando experiencias fructíferas en esta rama.

Tradicionalmente, en las obras de los autores antes mencionados, el concepto de error ha sido criticado por el hecho de que era éste el que hacía que los alumnos pudiesen no superar la asignatura de matemáticas, al cometerlos en exceso en las pruebas estandarizadas. Hay que señalar que en esta disciplina los errores brindan la oportunidad de adquirir y consolidar los conocimientos (desprendiéndose de “lo malo” para dejar espacio “para lo bueno”). La problemática radica en que en muchas ocasiones el proceso no se ha realizado de manera correcta, en tiempo o forma adecuada, haciendo que los errores sean persistentes o aparezcan en momentos no adecuados.

Sánchez y Sarmiento (2004, p.2) exponen sobre esta temática en la rama de las matemáticas que:

La investigación en torno a los errores en el proceso de aprendizaje es un tema clave de la Educación Matemática. Brousseau [1998] en su Teoría de las Situaciones Didácticas incluye los errores dentro de la noción de “obstáculos en el aprendizaje” (proponiendo una clasificación de los mismos) y señala la necesidad de un “conflicto cognitivo” para superar las dificultades en el aprendizaje. Bell [1976] propone una Enseñanza por Diagnóstico en la que se detectan los errores que se producen en el

aprendizaje, tipificando y analizando sus causas. Hecho el diagnóstico se puede atender a la superación del error mediante técnicas correctoras adecuadas.

Rico (1997) propone cuatro líneas de investigación referidas al estudio de los errores:

- Análisis, causas, elementos, taxonomía de la clasificación de los errores. Cada uno de estos estudios responde a una determinada teoría psicopedagógica y a un planteamiento epistemológico particular del conocimiento y de la matemática.
- Estudios relativos a la formación de los docentes en cuanto a su capacidad para detectar, analizar, interpretar y tratar los errores de sus alumnos.
- Investigaciones psicométricas que utilizan técnicas estadísticas como, por ejemplo, el contraste de hipótesis para analizar los errores.
- Trabajos acerca del tratamiento curricular de los errores. Ejemplos de esta línea de actuación son las propuestas didácticas que parten de los errores para la construcción de los conocimientos matemáticos correctos.

Son varias las clasificaciones de errores realizadas en matemáticas. Pasamos a recoger alguna de ellas:

➤ Mavshovitz–Hadar, Zaslavksy e Invar (citados en Rico, 1995, p.14) hacen una clasificación empírica de los errores. Determinan 6 categorías descriptivas:

1. “Datos mal utilizados. Se incluyen aquí aquellos errores que se han producido por alguna discrepancia entre los datos que aparecen en una cuestión y el tratamiento que le ha dado el alumno. Dentro de este apartado se encuentran los casos en los que se añaden datos extraños, se olvida algún dato necesario para la solución, se contesta a algo que no es necesario, se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado, se utilizan los valores numéricos de una variable para otra distinta, o bien, se hace una lectura incorrecta del enunciado.
2. Interpretación incorrecta del lenguaje. Se incluyen en este caso los errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto. Esto ocurre al poner un problema en ecuaciones expresando una relación diferente de la enunciada, también cuando se designa un concepto matemático mediante un símbolo distinto del usual y operando con él según las reglas usuales; a veces se produce también una interpretación incorrecta de símbolos gráficos como términos matemáticos y viceversa.
3. Inferencias no válidas lógicamente. Esta categoría incluye aquellos errores que se producen por falacias de razonamiento, y no se deben al contenido específico. Encontramos dentro de esta categoría aquellos errores producidos por derivar de un enunciado

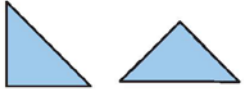
condicional su recíproco o su contrario, derivar de un enunciado condicional y de su consecuente, el antecedente, concluir un enunciado en el que el consecuente no se deriva del antecedente, necesariamente; utilizar incorrectamente los cuantificadores, o también, realizar saltos injustificados en una inferencia lógica.

4. Teoremas o definiciones deformados. Se incluyen aquí aquellos errores que se producen por deformación de un principio, regla o definición identificable. Tenemos en este caso la aplicación de un teorema sin las condiciones necesarias, aplicar la propiedad distributiva a una función no lineal, realizar una valoración o desarrollo inadecuado de una definición, teorema o fórmula reconocibles.
5. Falta de verificación en la solución. Se incluyen aquí los errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada; si el resolutor hubiese contrastado la solución con el enunciado el error habría podido evitarse.
6. Errores técnicos. Se incluyen en esta categoría los errores de cálculo, errores al tomar datos de una tabla, errores en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos básicos”.

- Reseñaremos, a continuación, una categorización general de los errores propuesta por Radatz (1980), tomada del trabajo Abrate et al. (2006) que completaron con ejemplos:

Tabla 4. Tipo de errores. Fuente: Abrate et al. 2006.

4.2. <i>De asociación</i>	Razonamientos o asociaciones incorrectas entre elementos singulares.	Usar por ejemplo: $\sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$
4.3. <i>De interferencia</i>	Cuando los conceptos u operaciones interfieren unos con otros.	La multiplicación de dos números negativos ($- * - = +$) interfiere en la resolución de una resta: $- 3 - 5 = 8$
4.4. <i>De asimilación</i>	Cuando la información es mal procesada debido a fallas de percepción.	$2x - x = 2$
5. <i>Aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.</i>	Errores producidos cuando se aplican reglas o estrategias similares en contenidos diferentes. El razonamiento por analogía sabemos que no siempre funciona en Matemática.	El cálculo de las raíces de $x^2 + x - 6 = 0$ arroja por resultados correctos a $x_1 = 2$ y $x_2 = -3$; en tanto que el cálculo de las raíces de $x^2 + x - 6 = -4$ suele conducir erróneamente al mismo resultado, siendo que corresponden a $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$.

<i>Tipo de error Según la causa</i>	<i>Descripción</i>	<i>Ejemplo ilustrativo</i>
1. <i>Dificultades del lenguaje</i>	Errores derivados del mal uso de los símbolos y términos matemáticos, debido a una falta de comprensión semántica del lenguaje matemático.	Si x denota la edad de María e y la edad de Juan, la expresión que traduce al lenguaje simbólico la frase: "María tiene el doble de la edad de Juan" suele ser identificada con $2x = y$.
2. <i>Dificultades para obtener información espacial</i>	Errores provenientes de la producción de representaciones icónicas (imágenes espaciales) inadecuadas de situaciones matemáticas.	 El triángulo de la izquierda es identificado por los alumnos como un triángulo rectángulo, sin embargo, una rotación del mismo, como en el ejemplo de la derecha, lleva a que no sea identificado como tal.
3. <i>Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos</i>	Errores originados por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos para la realización de una tarea matemática. Estas deficiencias incluyen la ignorancia de los algoritmos, conocimiento inadecuado de hechos básicos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios.	Identificación del intervalo continuo de números reales $[-2, 3]$ con el conjunto discreto $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
4. <i>Asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento</i>	Son errores que en general son causados por la incapacidad del pensamiento para ser flexible, es decir, para adaptarse a situaciones nuevas. Dentro de esta clase de errores se tienen:	
4.1. <i>Por perseveración</i>	Predominan los elementos singulares de un problema.	Demostrar una propiedad sobre triángulos en general, usando un triángulo rectángulo (un caso particular).

Concluimos con las reflexiones de Rico (s.f.a) que destaca sobre los errores:

- Suelen ayudar en la evolución de la enseñanza-aprendizaje
- Son el fruto de un proceso conceptual basado en conocimientos previos.
- Todo proceso de formación hace que durante el mismo se generen errores.
- Destaca el hecho de la necesidad de existencia de dinámicas que no culpabilicen al estudiante de los errores.

Como mencionan Broitman y Itzcovich (2001), la enseñanza no solo debe tratar cómo corregir los errores, también, ha de considerarlos como motor de debate y avance para todos y aprender de los mismos para poder diseñar nuevas metodologías y escenarios de aprendizaje.

2

CAPÍTULO TEORÍA SOBRE APRENDIZAJES: ENFOQUES ÚTILES PARA EL AMBIENTE ENRIQUECIDO CON TIC.

CAPÍTULO: 2

Teoría sobre aprendizajes: enfoques útiles para el ambiente enriquecido con TIC.

*“Los niños tienen que ser enseñados,
sobre cómo pensar
no qué pensar.”*
(Mead, citado por Pachón, 2009)

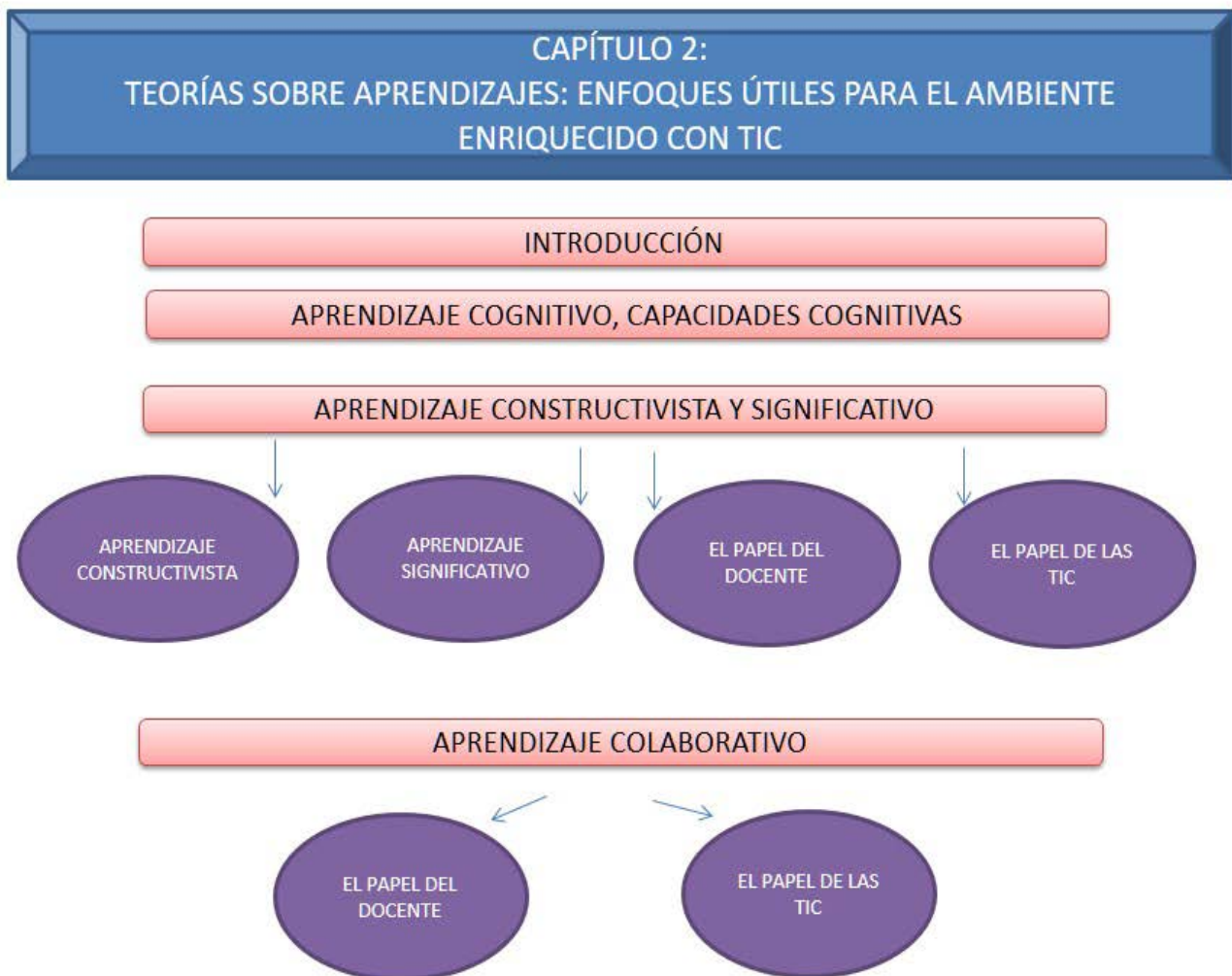


Figura 15. Mapa conceptual capítulo 2.

Fuente: Elaboración propia.

1. INTRODUCCIÓN.

En los procesos de enseñanza-aprendizaje intervienen distintos componentes (Meneses, 2007):

- El profesor. Éste tendrá como tarea, entre otras, dirigir a los estudiantes para lograr adquirir los conocimientos previstos con los recursos planificados. Deberá, en todo momento, dirigir y orientar a los discentes.
- Los estudiantes. Que deberán completar de manera exitosa los procesos de aprendizaje.
- Los objetivos educativos. Son los contenidos propios de la materia, así como los valores y actitudes asociados a los mismos y al propio proceso.
- Los recursos didácticos. Serán aquellas actividades, materiales, que ayuden al buen desarrollo de los procesos de aprendizaje.
- La estrategia didáctica. Serán las metodologías y recursos del profesor por medio de las cuales se intentará proporcionar a los estudiantes de motivación, información y orientación para desarrollar sus aprendizajes.
- El contexto en el que se realiza el acto didáctico.

Nos centramos en este capítulo en el estudiante y en el aprendizaje que éste desarrolla.

Pozo (2006) señala los rasgos de un buen aprendizaje:

- Un cambio duradero
- Lo que se aprende debe poder utilizarse en otras situaciones
- La práctica debe adecuarse a lo que se tiene que aprender.

Dicho autor indica dos tipos de aprendizaje: implícito o incidental y explícito. El primero de ellos es aquel en el que no hay una intención deliberada de aprender y que incluso en ocasiones no se tiene conciencia de que se está aprendiendo; el otro, por el contrario, va acompañado de una estructura compleja y de esfuerzo. Este último se puede dar por medio de varios escenarios, siendo uno de ellos las instituciones educativas. El problema es que, incluso teniendo gran interés por aprender y habiendo una enseñanza explícita, en ocasiones no se da un correcto aprendizaje.

Pero éstos, no son los únicos tipos de aprendizaje que se pueden dar. Prendes (2004) señala el aprendizaje colaborativo como aquel en el que el alumno aprende, pero no solo, sino junto a sus compañeros, teniendo alto grado de libertad para que los grupos trabajen y siendo el papel profesor el de tutor y guía.

Son muchos los tipos de aprendizaje. Tarpay (2000), García (1992), Aragón (2011), Relloso (2000) exponen (figura 16):

- Aprendizaje receptivo: se le presenta al sujeto el contenido en su forma final.
- Aprendizaje por descubrimiento: en él se hace referencia al aprendizaje activo. El discente tiene que investigar, relacionar, descubrir por sí mismo, no aprendiendo de forma pasiva y reordenando las ideas para adaptarlas a sus esquemas cognitivos.

- Aprendizaje por repetición o memorístico: el alumno recibe todo el contenido, solo tiene que estudiarlo para reproducirlo de forma que no es necesario entenderlo ni relacionarlo con otras estructuras cognitivas que ya haya construido.
- Aprendizaje por observación o modelado: en este aprendizaje intervienen por lo menos dos sujetos: el modelo (persona de la que se aprende) o el individuo que observa la acción del primero y la aprende.
- Aprendizaje significativo: se da cuando el individuo relaciona la información nueva con la que ya posee y con su experiencia.
- Aprendizaje experimental: es el que se da como consecuencia de las experiencias, como su nombre indica, está relacionado con los propios errores de los alumnos y con la autorreflexión.



Figura 16. Modelos de aprendizajes. Fuente: Elaboración propia.

También se pueden mencionar, como lo hacían los autores antes reseñados, junto con Ferrer (s.f.), la existencia de las distintas teorías de aprendizaje, pudiendo destacar las teorías conductivista, cognitivista, constructivista, sistemática, la teoría sociocultural, entre otras.

Dado que en las nuevas leyes educativas, desde la ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE, 1990, Real Decreto 1007/1991) se muestra la necesidad de un modelo pedagógico basado en el constructivismo, procedente del paradigma cognitivo y relacionado con los saberes del discente (aprendizaje significativo), nos centramos en estos términos para el presente estudio teórico. Enfatizando que la enseñanza por medio de herramientas tecnológicas está sustentada en modelos de aprendizajes por descubrimiento, experimentales y colaborativos (Romero, 2014).

2. APRENDIZAJE COGNITIVO, CAPACIDADES COGNITIVAS.

Para sustentar esta parte teórica hemos consultado las obras de James, Alcott y Ruiz (2015), Olivares (2011), Elber (2010) y Pozo (2009) en las que se exponen las ideas con las que vamos a trabajar en la primera parte de esta sección.

En primer lugar debemos aclarar qué se entiende por cognición, y por tanto, por capacidad cognitiva. La cognición es la capacidad, consciente o no, de tomar la información que se recibe y procesarla en basándose en conocimientos previos adquiridos.

La psicología cognitiva estudia los procesos mentales implicados en el conocimiento, reflexionando sobre los mecanismos básicos y profundos por lo que se elabora el saber. Como enfoque motivacional, la cognición es un trampolín a la acción.

En el proceso de la cognición intervienen en conjunto las llamadas capacidades cognitivas (atención, percepción, memoria, comprensión, resolución de problemas, establecimientos de analogías...), no habiendo una capacidad única, sino muchas capacidades cognitivas que intervienen en dicho procedimiento. De igual modo, participan factores y conceptos como la mente, el aprendizaje, la toma de decisiones, la adquisición lingüística y matemática, entre otras.

La capacidad cognitiva engloba la potencialidad que tiene un sujeto para poder adquirir conocimiento y desarrollarlo en base a experiencias previas.

Las habilidades cognitivas representan en este contexto uno de los recursos privilegiados para permitir, al sujeto, ser competente en el amplio sentido de la palabra, es decir, tener la capacidad para desarrollarse en forma plena. Su capacidad de hacer, de ser independiente y relacionarse con otros, incluso de aprender, se ven favorecidas por las mismas y su adquisición tiene que llevarse de forma progresiva, a la vez que constantemente, desarrollándose en el largo plazo...

Pasamos a comentar algunas de nuestras capacidades cognitivas, continuando con las obras de los autores antes mencionados dando una breve explicación en algunos de los casos:

- *La percepción*: es el proceso en el que se transforman los estímulos físicos, iniciándose con la activación de los receptores sensoriales, en información psicológica, por medio de la transmisión de la información por las vías sensoriales hasta los niveles superiores del Sistema Nervioso Central. Por medio de este proceso mental los estímulos sensoriales pasan a la conciencia. Gracias a esta capacidad podemos reconocer objetos, personas, comparar elementos...
- *La atención*: es la cantidad de esfuerzo que se desarrolla para centrarse en una acción concreta, expresado de otro modo, es la habilidad para concentrarse. Esta capacidad es fundamental para el desarrollo de las otras funciones cognitivas y puede tener más de un foco a la vez. Puede ser de distinto origen:
 - Involuntaria (por deslumbramiento)
 - Voluntaria (basada en las motivaciones)
 - Habitual (según los hábitos del sujeto y su profesión)
- *La motivación*: gracias a ella se activan procesos cognitivos, afectivos y emocionales y pueden tener un origen deliberado o intencional. Guarda

una relación directa con el aprendizaje y puede ser intrínseca (cuando se da en ausencia de recursos externos) o extrínseca.

- *La memoria:* esta función nos permite almacenar información en el cerebro para más tarde retraerla a la conciencia. En educación hay veces que se confunde esta capacidad con el conocimiento, olvidando que un concepto no puede pasar a pertenecer al sujeto en caso de no ser recordada. Existen diferentes tipos de memoria: sensorial (icónica-visual y auditiva), a corto plazo y a largo plazo.
- *El razonamiento:* el razonamiento es un proceso mediante el cual se obtienen conclusiones a partir de hechos, creencias y normas, es la capacidad de establecer relaciones entre conceptos, hacer deducciones lógicas... Existen diferentes tipos de razonamientos: lógico, razonamiento no-lógico o informal, razonamiento por analogía, verbal... Destacamos, debido a la investigación en la que nos encontramos, de manera más minuciosa uno de ellos:
 - Razonamiento lógico o causal: Es un modo de pensar y de actuar con sensatez, mediante la cual, partiendo de uno o más juicios, se concluye la posibilidad o la falsedad de la idea propuesta. Los razonamientos pueden ser válidos (correctos) o no válidos (incorrectos). Los razonamientos no válidos que, sin embargo, parecen serlo, se denominan falacias. Para realizar un razonamiento el sujeto se basa en conocimientos que posee. Es posible distinguir entre varios tipos de razonamiento lógico: razonamiento deductivo (estrictamente lógico) y el razonamiento inductivo (donde interviene la probabilidad y la formulación de conjeturas).
- *Las funciones ejecutivas: capacidad de planificar, organizar...*
- *El lenguaje: es la capacidad para poder comunicarnos utilizando las palabras y estructuras correctas. Es una estructura muy compleja que evoluciona conforme el niño crece resaltando el hecho de que incluso de bebé el niño establece una verdadera comunicación con el adulto por medio del lenguaje postural, los gestos o la mímica. Se considera por tanto también lenguaje la comunicación no verbal, emocional.*
- *Orientaciones espacio-temporal/orientación y esquema personal: se refiere a la capacidad de situarse en un espacio y de recurrir a la información que poseemos en el momento preciso, respectivamente.*
- *Praxias: capacidad para poner en marcha movimientos, muchos de ellos aprendidos, intencionales y organizados.*

Coll, Marchesi y Palacios (1992), Piaget (1969) entre otros exponen que las funciones cognitivas, capacidades cuyo desenvolvimiento nos permiten adquirir lenguajes, sociabilizarnos, aprender... se pueden clasificar en dos grupos:

- Funciones cognitivas dispersas:
 - Percepción
 - Atención
 - Motivación
 - Memoria
- Funciones cognitivas localizadas:
 - Lenguaje

- Cálculo
- Praxis
- Atención dirigida espacialmente
- Habilidad construccional
- Componentes prosódicos del lenguaje:
 - Tono
 - Melodía
 - Entonación...

Peijnenborght, Hurks, Aldenkamp, Vles y Hendriksen (2015), por medio de distintos estudios, han demostrado que el entrenamiento de alguna de las capacidades cognitivas (como la memoria, la visión espacial y el trabajo verbal) mejoraban tras un tiempo de trabajo y trabajo, manteniéndose dichas mejoras en un periodo de varios meses, quedando así probado que se pueden mejorar y/o mantenerse a través de la práctica, la ejercitación y el aprendizaje. Castroviejo (s.f.) señala que el sistema nervioso puede dar respuesta a lo que acontece en el entorno del individuo, existiendo la plasticidad neuronal.

Antes de adentrarnos en las etapas concretas del desarrollo cognitivo, reseñamos las diferentes concepciones sobre el desarrollo de las mismas (Mañas, s.f.; Marín y Benarrocho, 2000; Pozo, 1989; Rocha, 2004; Sánchez, 1996 y Skinner 1957):

- *Concepción mecanicista*: engloba las distintas corrientes conductistas, Watson, Skinner, Gagné, Bijou, Baer, Bandura y Walters, Hull... Basadas en el estímulo-respuesta, defienden que:
 - Sin agentes externos no puede existir evolución.
 - El cambio es necesario e inevitable.
 - Reducción de lo complejo a lo simple.
 - Los cambios evolutivos se producen en dependencia directa de las condiciones estimulantes, del ambiente.
 - Los estudios no siempre son bien almacenados en la memoria a largo plazo.
 - El papel del aprendiz es bastante pasivo.
- *Concepción organicista*: en la que podemos englobar a Piaget, la escuela psicogenética, Freud y la escuela psicoanalítica, Rousseau, Leibniz, Kant, Hunt... teniendo como pilares:
 - El ser humano es activo y un todo, aunque está formado por partes que no tienen sentido si no se ven como conjunto.
 - Los comportamientos no solo dependen del ambiente, también de la intención del individuo.
 - El ser humano tiene un papel destacado en los cambios evolutivos y no sólo el ambiente o la naturaleza.
 - Los cambios estructurales son unidireccionales e irreversibles, por lo que se requiere un aprendizaje comprensivo.
 - El desarrollo está basado en estadios cualitativamente distintos que tienen estructuras específicas y diferentes.
- *Modelo contextual-dialectico*: dentro de un modelo evolucionista y con autores como Wallon, Vigotsky y la escuela rusa, se basa en:
 - La evolución se extiende durante toda la vida del individuo.

- Todos los factores del desarrollo (biológico, sociocultural e histórico) afectan al desarrollo evolutivo, siendo éste multidireccional.
- La interrelación social tiene un papel destacado en la evolución humana.

Probablemente, la teoría más citada y conocida sobre el desarrollo cognitivo en los niños es la de Jean Piaget (1896-1980), (Ginsburg y Opper, 1982) que defiende que los niños pasan por distintas etapas relacionadas con su intelecto y capacidad para percibir el mundo que les rodea. Las explicamos, basándonos en la obra de Ginsburg y Opper (1982), sabiendo que las edades en cada etapa pueden variar, pero que se desarrollan en este orden:

- *Etapas sensorio-motora.*

La primera de las etapas descritas por Piaget comprende el período desde el nacimiento hasta los dos años de edad aproximadamente. El niño se relaciona con el mundo a través de los sentidos y la acción.

En esta primera etapa, el niño descubre sus propios sentidos y aprende a realizar acciones y movimientos de forma voluntaria. Finalizando esta fase, debe ser capaz de conocer que un objeto no desaparece por el hecho de que él no pueda verlo.

- *Etapas preoperacional.*

La segunda etapa descrita por Piaget abarca el período desde los dos a los seis/siete años. Se desarrolla el lenguaje como medio de comunicación. Esta etapa está caracterizada por el egocentrismo, el niño es incapaz de ponerse en el lugar de otras personas y cree que todas perciben el mundo igual que él (incluyendo los objetos inanimados). No entiende el principio de conservación (la cantidad no cambia cuando cambia la forma), Se produce un progreso en la forma de pensar. Hay un gran avance en la función simbólica, al igual que en la de representación. Se inicia con un pensamiento pre-lógico muy intuitivo y a partir de este momento se produce un cambio madurativo, llegando a un cerebro más completo, en donde aparecen los mecanicismos que intervienen en las capacidades cognitivas. Se consolida el lenguaje y hay progresos en el lenguaje social y emocional.

- *Etapas de las operaciones concretas.*

Esta etapa comprende desde el final de la anterior a los doce años. El niño es capaz de prestar atención a más de una característica, puede agrupar y revertir un pensamiento, siendo más flexible y complejo. Disminuye su egocentrismo, volviéndose más socio céntrico y teniendo la capacidad de adoptar el papel de los demás. Al principio de esta etapa desarrolla la capacidad de hacer clasificaciones y seriaciones más complejas de forma correcta. En esta fase comienza el razonamiento, se aplica la lógica y comienza a pensar en lo posible... Es capaz de entender nociones que no tienen representaciones simbólicas.

- *Etapas de las operaciones formales.*

A partir de los doce años se desarrolla el pensamiento abstracto lo cual permite emplear el razonamiento lógico inductivo y deductivo. Utiliza lógica formal para formular hipótesis, pudiéndolas poner a prueba para dar solución a un problema.

Señalamos otras de las aportaciones más importantes que Piaget hizo a la psicología: su teoría sobre los tipos de conocimiento (Kitchener, 1986). En ella destacaba tres tipos: el conocimiento físico, el social y el lógico matemático. El conocimiento lógico matemático es posible comenzar a desarrollarlo a partir de que se inicie el pensamiento crítico. No se adquiere por medio de la observación, sino a través del procesamiento mental de la información recibida. El pilar básico del mismo es el propio sujeto, que debe desarrollar la abstracción, relacionando las experiencias y los resultados finales teniendo en cuenta que los conocimientos adquiridos, una vez procesados no se olvidan ya que la experiencia no proviene de los objetos, sino de una acción sobre los mismos. Para poder llegar a desarrollarla con éxito es necesario empezar a trabajarla en las etapas más bajas de la educación, aunque no sea de manera directa.

Hemos de resaltar, como herramienta indispensable para la vida, el pensamiento lógico matemático. Es decir, el conjunto de habilidades con las que se puede lograr resolver operaciones básicas, analizar información, hacer uso del pensamiento reflexivo y del conocimiento del mundo que nos rodea y aplicarlo a la vida cotidiana. Su desarrollo va ligado a que desde la infancia se proporcionen al discente una serie de estrategias que permitan el desarrollo de cada uno de los pre-requisitos necesarios para entender y practicar procesos de pensamiento lógico matemático (Kitchener, 1986).

Existen diversos trabajos (Ospina, s.f., Rivière, 1990, Romero y Lavigne, 2005, entre otros) que avalan la relación entre las deficiencias de las capacidades cognitivas y las dificultades en el área de matemáticas. Según Rivière (1990) podemos señalar los relacionados, por ejemplo, con la memoria, la atención, la abstracción y el lenguaje:

- *Lenguaje*: Aquí existe una doble problemática pues, en primer lugar, podemos señalar los causados por la no asimilación de los símbolos matemáticos en muchos apartados de la misma (suma, resta, cantidad, multiplicación, fracciones...) Trabajos como los de Sastre y Moreno 1976, 1977, 1980, Gómez 1982 certifican estas teorías. La otra problemática es debida a la traducción incorrecta entre el lenguaje verbal y el matemático, lo cual es patente en cualquier clase habitual de matemáticas.
- *Abstracción*: Como bien señala Nelson en 1977, la capacidad de abstracción suele ser tardía. El discente tiene que abandonar los conceptos perceptivos, prácticos y los materiales tangibles para poder llegar a los conceptos más complejos en esta asignatura. Ya desde las primeras etapas, las matemáticas están impregnadas por componentes abstractos. Por ejemplo, como indican Gelman y Gallistel en 1978, la acción de contar lleva consigo una correspondencia uno a uno, que no siempre es entendida así. La exigencia de abstracción de esta disciplina resulta excesiva para algunos alumnos, lo que finalmente lleva a una mala asimilación de contenidos, al no poder generalizar los esquemas y estrategias de tareas hechas a otras nuevas.
- *Atención*: Suele existir una correlación entre los discentes que presentan dificultades relacionadas con la atención y los que tienen problemas con la materia de las matemáticas. Esto es debido, en muchos casos, a los conflictos que no logran superar para organizar estructuras jerárquicas de

procesos mentales. De nuevo varios trabajos avalan estas teorías (Fernández, Llopis, y Pablo 1979, Siegel y Heaven, 1986).

- *Memoria*: Son muchos los psicólogos cognitivos que opinan que el funcionamiento de la memoria depende del tipo de información que debe almacenar. Los alumnos sin problemática en la recepción y almacenamiento de recursos verbales y visuales también pueden presentar dificultades para recordar conocimientos referentes a números, hecho que avalan trabajos como lo de Siegel y Ryan, 1989, y Rusell y Ginsburg, 1984.

3. APRENDIZAJE CONSTRUCTIVISTA Y SIGNIFICATIVO.

Chamorro (1992) indica que entre los objetivos de la educación, destaca la preparación del alumno para la realidad diaria de la vida. Esto es, enseñarle a pensar, que sepa valorar lo que significa el conocimiento, abordar procesos de aprendizaje para crecer en madurez e independencia... “al desarrollo de capacidades y a la generación de actitudes” (Chamorro, 1992, 11).

APRENDIZAJE CONSTRUCTIVISTA.

Coloma y Tafur (1999) exponen que existen estudios que afirman que la adquisición de conocimiento no es un proceso estático, y que está en relación con la información externa que es interpretada por la mente. Define el aprendizaje constructivista como aquel que se opone a ser pasivo y receptivo. Lo considera como una construcción del conocimiento a partir de la revisión, selección y transformación de los conocimientos que posee. El enfoque constructivista (ver figura 17) defiende que el sujeto no es un producto del ambiente ni de sus aspectos personales, sino que es una construcción propia, resultado de la interacción, entre otros aspectos, de esos dos factores. Es decir, es la conjunción de la herencia, el ambiente, las experiencias, el lenguaje y sus capacidades, entre otras características. Dicho conocimiento no es una copia de algo ya existente y se basa en los esquemas que ya posee.

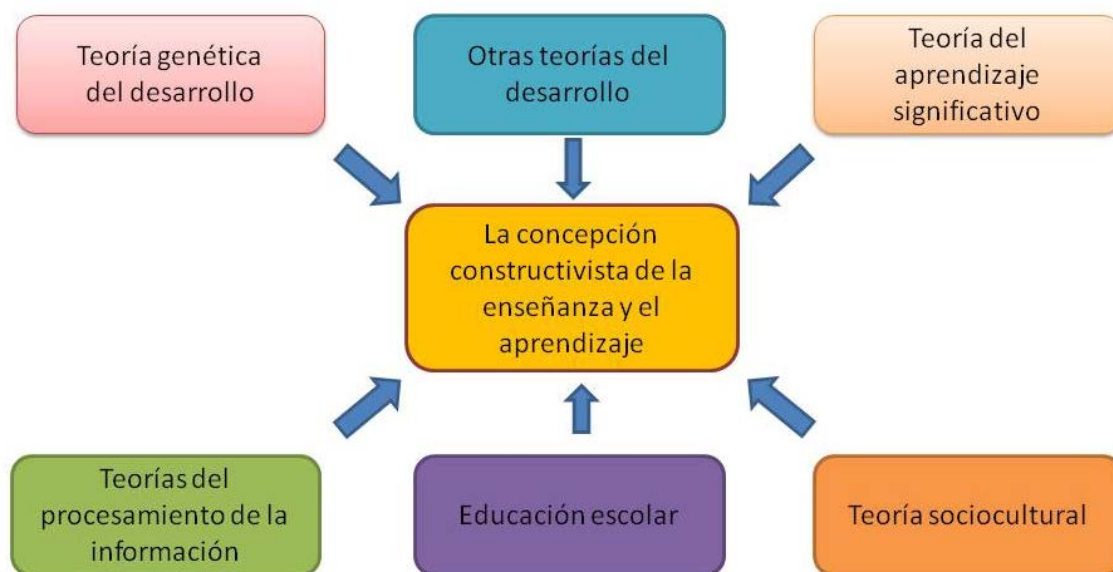


Figura 17. Enfoques constructivistas en educación.

Fuente: Coloma y Tafur, 1999.

Se expone, en esta teoría, que se combinan ambos aprendizajes, el constructivista y el significativo, y que al desarrollarse dicha relación, intervienen también las capacidades cognitivas.

APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO.

Se entiende por aprendizaje significativo (Chamorro, 1992) aquel que se logra cuando el estudiante es capaz de relacionar los nuevos contenidos con lo ya aprendidos por medio de las actividades cognitivas, se considera a Ausbel (1918-2008) como el padre de este tipo de aprendizaje.

Las matemáticas no solo tienen valor por sí mismas y de manera aislada para su rama, es fundamental en la rama de las ciencias y del progreso humano: Las matemáticas, como ya dijimos, sirven para entender la naturaleza. Las leyes físicas se expresan mediante fórmulas matemáticas y a través del razonamiento deductivo. Se pueden comprender y predecir fenómenos naturales, principalmente de la física (gravedad, magnetismo, fluidos), pero también de la biología (crecimiento de poblaciones, herencia). Se pueden predecir también ciertos comportamientos de la sociedad en su conjunto (sondajes de opinión, análisis de mercados, ciclos económicos). Pero hay también otros aspectos matemáticos, menos visibles, pero no menos importantes en las relaciones del individuo con la sociedad. Por ejemplo, hay que educar la observación, haciendo ver posibles soluciones no triviales de los problemas, y la reflexividad que deben poseer las relaciones entre individuos de una misma sociedad. (Santaló, 1975, p.86-87)

Para que se dé este tipo de aprendizaje, es necesario que la construcción del mismo sea interna y que los procedimientos generales nos lleven a la resolución de problemas de la vida cotidiana (Chamorro, 1992).

De acuerdo con la visión constructivista, los individuos aprenden significativamente cuando son capaces de encontrarle sentido al nuevo conocimiento al conectarlo con lo que ya saben, o integrarlo dentro de sus propios esquemas cognitivos. (Romero y Quesada 2014, p.102)

Dicho de distinto modo, se entiende que hay aprendizaje significativo si la tarea de aprendizaje puede relacionarse, de modo no arbitrario y sustancial, con lo que el alumno ya sabe y si éste adopta la actitud de aprendizaje correspondiente para hacerlo así (Ausbel, Novak y Hanesian, 1983).

Si el aprendizaje significativo (Chamorro, 1992, p.38) “implica una modificación de los esquemas de conocimiento del alumno, tal modificación requiere que el maestro conozca el contenido de los esquemas que el alumno posee”. El profesor tiene un papel muy activo en este tipo de enseñanza pues podrá crear los equilibrios y desequilibrios necesarios para que el alumno aprenda a reflejar los procesos del conocimiento, no siendo estos procesos cerrados.

El aprendizaje puede darse por medio de varias vertientes: por repetición, por descubrimiento guiado y por descubrimiento autónomo (sin ser excluyentes ni dicotómicos) pero destacando el papel fundamental de la motivación para que el aprendizaje sea permanente y significativo.

EL PAPEL DEL DOCENTE.

Chamorro (1992) indica que la enseñanza de las matemáticas no puede relegarse a la imitación en la resolución de ejercicios pues, de esta forma, no se

podrán adquirir las capacidades cognitivas tales como el análisis, generalización, validación... propias de esta disciplina. El aprendizaje guiado tendrá que sustentarse en la escucha activa, crítica atenta y reflexiva. El aprendizaje individual hará que el alumno, en ocasiones, tenga que abandonar el aprendizaje colectivo para centrarse en sus propios procesos, pudiendo por medio de todo lo expuesto alcanzar un aprendizaje significativo. En muchos escenarios de enseñanza no se respeta el aprendizaje natural que un niño o adolescente presenta ante las matemáticas, lo que hace que dicho aprendizaje no sea significativo.

A continuación se exponen algunas directrices generales para que se dé un aprendizaje significativo en clase de matemáticas (Baroody, 1997):

1. Concentrarse en estimular el aprendizaje de relaciones.
2. Concentrarse en ayudar a los niños a ver conexiones y a modificar puntos de vista.
3. Planificar, teniendo en cuenta que el aprendizaje significativo requiere mucho tiempo (más que el memorístico).
4. Aprovechar e invitar a las matemáticas inventadas por los propios niños.
5. Tener en cuenta la preparación individual.
6. Explotar el interés natural de los niños en el juego.

Recogemos, también, la síntesis que Cobo y Molina (2014, p.50) señalan sobre el tipo de trabajo que han de desarrollar los docentes, para que los alumnos puedan construir conocimientos matemáticos, de manera correcta y duradera:

- Para nosotros, el buen profesor no actúa, hace actuar a los estudiantes. Es decir, la intervención del profesor se ha de optimizar. Entendemos que su labor no ha de ser la de explicar cosas y más cosas, dar clases magistrales, convertirse en el centro de la enseñanza, sino que ha de ceder el protagonismo a sus estudiantes, intentando conseguir que sean ellos los que generen la actividad en el aula. Esta idea está en la línea de las teorías del constructivismo social, que preconizan que los estudiantes han de ser los protagonistas principales de su aprendizaje y, por tanto, los que construyan su propio conocimiento, que ha de ser socialmente compartido.
- Las tareas han de ser ricas, en el sentido de: presentar situaciones contextualizadas próximas al alumno, generar actitudes de curiosidad y de interés para su resolución, ser abiertas para permitir que se aborden de diferentes maneras y, con ello, facilitar una mejor atención a la diversidad, presentar la información inicial usando diferentes representaciones, permitir establecer conexiones entre diferentes contenidos matemáticos y con otras materias, etc.

Como indican Díaz y Hernández (2002) se pueden dar distintas situaciones en el aprendizaje escolar, como se observa en la siguiente figura 18:

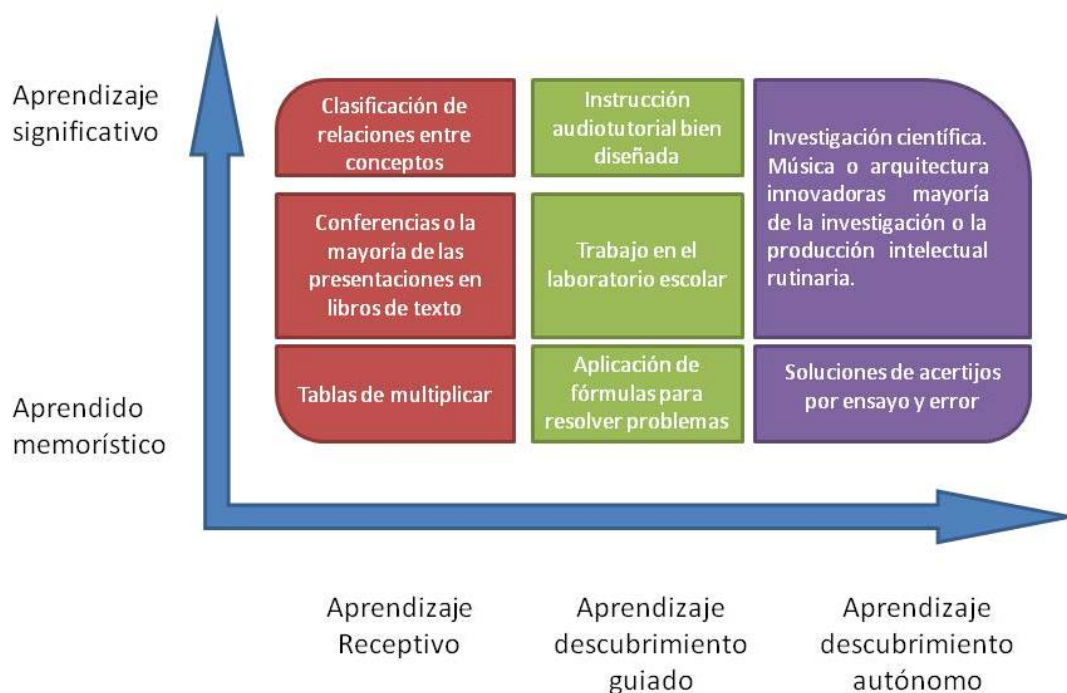


Figura 18. Tipos de aprendizajes. Fuente: Díaz y Hernández, 2002.

Estos mismos autores señalan que para que se dé un correcto procesamiento para el desarrollo del aprendizaje significativo, el sujeto tiene que desarrollar la competencia de aprender a aprender, procediendo del siguiente modo (Hernández, 2002, p.28):

1. El alumno deberá establecer un juicio y determinar qué ideas ya tiene en su estructura cognitiva y cuáles son nuevas y debe aprender.
2. Establecerá semejanzas, diferencias y contradicciones entre las ideas que ya tenía y las nuevas.
3. En base a lo anterior, reformula las aportaciones nuevas para así poder incluirlas en su estructura cognitiva.
4. Cuando la fase anterior no es viable, el alumno deberá analizar y sintetizar la información, para reorganizar las ideas, basándose en principios inclusivos y amplios.

Rodríguez (2013) reflexiona sobre el papel fundamental que tienen las matemáticas en la formación de individuos completos para el mañana, que sepan relacionar sus experiencias y conocimientos con las nuevas pericias que le presente la vida, por lo que haber desarrollado un aprendizaje significativo será fundamental para sus futuras vidas.

EL PAPEL DE LAS TIC.

La integración de las TIC está estrechamente relacionada con el interés en su utilización por parte del docente. Para que este aprendizaje tenga mayor éxito el profesor tendrá que ser el promotor del uso de las TIC. Por este medio se pueden desarrollar todas las características enunciadas para el desarrollo del aprendizaje constructivista-significativo, sabiendo que el uso de estas

herramientas forma parte de una metodología en la que intervienen más factores (Vaillant, 2013).

Los estudios realizados ponen de manifiesto que los laboratorios virtuales, Romero (2014), potencian la formulación de conjeturas e hipótesis por parte del alumnado y que a través de las simulaciones y visualizaciones, entre otros recursos digitales, los resultados en las evaluaciones llevadas a cabo tras estas experiencias dejan patente un mayor nivel de comprensión en ideas y conceptos.

Valverde, Garrido y Sosa (2010) señalan que el uso de las TIC hace que el aprendizaje sea más significativo al experimentar, los alumnos, directamente por medio de la manipulación, no solo estudiando lo explicado con palabras. Es decir, al construirlo a partir de sus experiencias.

4. APRENDIZAJE COLABORATIVO.

Gallego y Peña (2001) indican que se entiende por trabajo colaborativo aquel que se desempeña en grupos por medio de la formación de equipos, que trabajarán juntos tras las instrucciones del profesor para resolver un problema, darle respuesta a una actividad, realizar un trabajo... Es una forma de trabajar que fomenta las relaciones interpersonales, fomentando la cooperación, la solidaridad, la empatía y la intervención autónoma de los integrantes del grupo. Cada individuo del mismo, aportará ideas que enriquezcan los conceptos del grupo. Destaca que el profesor estará presente, aunque no sea de manera física, en el proceso y no se limitará su trabajo a una simple calificación para sus alumnos. Los grupos pequeños son más beneficiosos para crear un ambiente en el que los alumnos se sientan desinhibidos favoreciendo la participación activa, incluso, para discentes más tímidos (Gallego y Peña, 2011).

Serrano y otros (1997) señalan en su obra que únicamente habrá trabajo colaborativo si los objetivos del trabajo sólo son alcanzables por medio de la consecución de todas las tareas de los demás miembros del grupo. Hemos de destacar que los estudiantes no están acostumbrados a estos métodos de trabajo pues, hasta el momento, en las escuelas ha prevalecido el trabajo individual y competitivo, por lo que es posible que no sepan aplicarse en equipo.

García y Puig (1997) destacan que es un tipo de proceso lento y complejo pero que constituye un modelo de enseñanza muy útil. Millis (1996) señala que, por medio del aprendizaje colaborativo, el discente desarrolla habilidades de razonamiento superior y de pensamiento crítico perdurando por mayor tiempo el contenido aprendido. En la educación tradicional el profesor es el único foco para el aprendizaje. Hoy día, son muchas las corrientes pedagógicas que defienden la metodología que no centra la transmisión de conocimiento en el docente y se plantean modelos más colaborativos para el alumnado, sintiéndose protagonista tanto de su aprendizaje como del de sus iguales y haciendo que los resultados del proceso de E-A puedan, incluso, ser mejores. En este tipo de enseñanza el profesor comparte autoridad con los discentes, como indica Collazos, Guerrero y Vergara (s.f) y señala, como ya lo hacía Johnson (1993 y 1998), que el aprendizaje colaborativo ayuda a los estudiantes a escuchar, aceptar las críticas, invitarles al pensamiento y al diálogo, maximizando de esta forma, su aprendizaje y el de los demás. En la actualidad se está intentado potenciar la inteligencia social, dándole mayor atención al papel de los sentimientos y afectividad en el desarrollo de la actividad mental, destacando que la capacidad de entender los pensamientos ajenos nos brinda el poder entender, de mejor modo, los nuestros.

El aprendizaje colaborativo no es un mecanismo simple: Si uno habla acerca de “aprender de la colaboración”, uno debería también hablar de “aprender por el hecho de estar solo”. Los sistemas cognitivos de los individuos no aprenden porque ellos sean individuales, sino porque ejecutan algunas actividades (leer, predecir, etc.) que conlleva con algunos mecanismos de aprendizaje (inducción, predicción, compilación, etc). Similarmente, los pares no aprenden porque sean dos, sino porque ellos ejecutan algunas actividades que conllevan mecanismos de aprendizaje específicos. Esto incluye las actividades y/o mecanismos ejecutadas individualmente, pero además, la interacción entre sujetos

genera actividades adicionales (explicación, regulaciones mutuas, etc.). [...] No hay garantía de que estos mecanismos ocurran en cualquier interacción colaborativa (Collazos et al. s.f., p.2).

López (2015) señala que la filosofía en la que se basa el trabajo colaborativo tiene cinco principios:

- La interdependencia positiva de los miembros del grupo: todos los miembros del grupo han de colaborar, pues el éxito o fracaso será grupal, dejando los individualismos apartados.
- La responsabilidad grupal e individual: con objetivos comunes el grupo trabajará aunque a medio o corto plazo cada individuo tenga un papel dentro del grupo.
- La interacción estimuladora: potenciando la relación alumno-alumno y siendo el profesor un asesor, disminuye la interacción alumno-profesor lo que puede ser positivo al pasar a trabajar entre iguales.
- El desarrollo de actitudes, valores y habilidades individuales y grupales: valores como la gestión de recursos, la resolución de conflictos, el apoyo, la superación de prejuicios y complejos... son trabajados durante todo el proceso.
- La evaluación grupal: se intenta que la evaluación sea colectiva intentado lograr el compromiso de todos.

Destacamos los elementos presentes en el proceso del aprendizaje colaborativo (Johnson y Johnson 1997):

- Cooperación
- Responsabilidad
- Comunicación
- Trabajo en equipo
- Autoevaluación

Son muchos los docentes que no se muestran entusiasmados por este tipo de aprendizaje pues como exponen dichos autores, hay ciertos temores ante la práctica de este método en el proceso de e-a:

- Pérdida de control en la clase.
- Falta de preparación por parte de los profesores.
- Miedo a no completar el contenido de la programación.
- Falta de materiales preparados para usar en la clase.
- Ego de los profesores.
- Resistencia de los alumnos al trabajo colaborativo.
- Falta de familiaridad con algunas técnicas del proceso colaborativo y la administración de las clases.

Para saber si tienen base estas dudas deberemos acudir a otras obras que hablan sobre estas creencias equívocas acerca de la metodología expuesta.

El vicerrectoría académica, instituto tecnológico y de estudios superiores de la universidad de Monterrey, México) indica, (Ánonimo, s.f.) por ejemplo, que aunque en un principio se tenga que emplear más tiempo en las actividades planteadas de este modo, cuando los alumnos aprendan a desenvolverse no tendrán por qué

tardar más tiempo en la realización. Si algún alumno ha trabajado menos en la tarea quedará patente en la exposición de la misma o en las pruebas individuales. El papel del profesor es tan destacado como antes (simplemente cambia de rol al ser guía). La autoridad del docente no tiene que cambiar al tomar nuevos escenarios de enseñanza con un ambiente adecuado para cada momento.

EL PAPEL DEL DOCENTE.

Sí que se destaca que el docente tendrá que adquirir nuevos roles pues deberá ser el diseñador de la propuesta (definiendo los objetivos, las unidades, conocimientos, tamaño y organización de los grupos, distribución del material...), y tendrá que actuar de mediador cognitivo (ayudando a desarrollar su pensamiento y habilidades de razonamiento, formando de este modo a individuos más independientes y autocríticos). Todo ello sin olvidar el papel instructor que seguirá ocupando (explicación de la tarea, monitorizar la experiencia, evaluar...). El profesor Hills e investigadores como Prescott (1996) son citados en distintos trabajos de la universidad de Monterrey, México, para destacar el papel del profesor es este trabajo:

- Motivar a los estudiantes, despertando su atención e interés antes de introducir un nuevo concepto o habilidad. Algunas estrategias de motivación pueden ser: pedir a los estudiantes que expliquen un crucigrama, compartir las respuestas personales relacionadas con el tema, utilizar un estímulo visual o auditivo, adivinar las respuestas a preguntas que serán nuevamente formuladas al final de la sesión.
- Proporcionar a los estudiantes una experiencia concreta antes de iniciar la explicación de una idea abstracta o procedimiento, se puede hacer una demostración, exhibir un vídeo o cinta de audio, se pueden traer materiales y objetos físicos a la clase, analizar datos, registrar observaciones, inferir las diferencias críticas entre los datos de la columna “eficaz vs. ineficaz” o “correcto vs. incorrecto”, etc.
- Verificar que se haya entendido y que se escuche activamente durante las explicaciones y demostraciones. Pida a los estudiantes que demuestren, hablen o pregunten acerca de lo que entendieron. Las estrategias de escucha activa en una presentación son: completar una frase, encontrar un error interno, pensar una pregunta, generar un ejemplo y buscar notas con evidencias que respalden o contradigan lo que se presenta en clase.
- Ofrecer a los estudiantes la oportunidad de reflexionar o practicar la nueva información, conceptos o habilidades. Estas sesiones pueden incluir la construcción de argumentos a favor o en contra, escribir resúmenes, analizar datos, escribir una crítica, explicar eventos, denotar acuerdo o desacuerdo con los argumentos presentados o resolver problemas.
- Revisar el material antes del examen. Ceda esta responsabilidad a los estudiantes pidiéndoles que hagan preguntas de examen, se especialicen en el tema y se pregunten mutuamente. Pueden también diseñar un repaso en clase o elaborar resúmenes de información importantes para usarse durante el examen.
- Cubrir eficientemente información textual de manera extensa. Los estudiantes pueden ayudarse mutuamente mediante lecturas presentando resúmenes que contengan respuestas que los demás compañeros puedan completar.

- Pedir un resumen: después del examen, asegurando que los estudiantes han aprendido de su examen o proyecto. Dirija sesiones de repaso para después del examen y pida a los alumnos que se ayuden mutuamente en la comprensión de respuestas alternativas. La principal responsabilidad de cada estudiante es ayudar a sus compañeros a aprender (Anónimo s.f., 9 - vicerrectoría académica, instituto tecnológico y de estudios superiores de la universidad de Monterrey, México-).

Destacamos los motivos que hacen que las TIC potencien el trabajo colaborativo. Sáez y Ruiz (2012) señalan: el intercambio de información con herramientas síncronas y asíncronas, el uso de las wikis, los entornos virtuales de aprendizaje... como medios o actuaciones que desarrollan este tipo de aprendizaje.

Si centramos nuestra atención en la materia de matemáticas y estudiamos la viabilidad del trabajo colaborativo, nos encontramos con obras que avalan su manejo. Serrano y otros (1997), por ejemplo, comentan un caso concreto donde es totalmente clara su implantación. En los trabajos de campo de estadística se presenta un exhaustivo método de trabajo cooperativo: laboratorio, recopilación de datos, instrucción asistida por ordenador en grupo... García (2013) menciona las investigaciones que confirman los efectos positivos y productivos de este tipo de trabajo, destacando que son mayores cuando se trata de la asignatura de matemáticas, al encontrarse ante ideas estimulantes pudiendo plantear desafíos. La clase de matemáticas, donde queremos fomentar el razonamiento, las estrategias lógico-deductivas... parece un escenario inmejorable para trabajar de manera colaborativa pues los alumnos tendrán que compartir objetivos, estrategias, conjeturas... características propias del saber científico y más concretamente matemático.

EL PAPEL DE LAS TIC.

La utilización de grupos colaborativos en clase, especialmente si los grupos son heterogéneos, es un mecanismo ideal para aprovechar el potencial del aprendizaje entre compañeros si se complementa convenientemente con la utilización de la tecnología informática. Además se ha comprobado que el uso de grupos en clase aumenta la probabilidad de que los estudiantes se reúnan fuera de clase para continuar estudiando juntos (Osalde, 2015, p.6).

La metodología basada en el aprendizaje colaborativo y apoyada en las TIC se ha desarrollado de manera exponencial en los últimos años, descubriéndose un nuevo paradigma que entrelaza las teorías del aprendizaje y los recursos tecnológicos, creando espacios que dan lugar al desarrollo de los procesos de interrelación entre distintos alumnos (Cabezas, Casillas y Hernández, 2016)

3

CAPÍTULO LAS TIC COMO RECURSO PARA ENSEÑAR

CAPÍTULO 3: LAS TIC COMO RECURSO PARA ENSEÑAR

*“Las personas que se aferran a tecnologías pasadas,
sucumben en el campo de la ignorancia y
se entierran en sus ideales”*

(Wiily Fiallos, citado por Bracho, 2007, p.1)

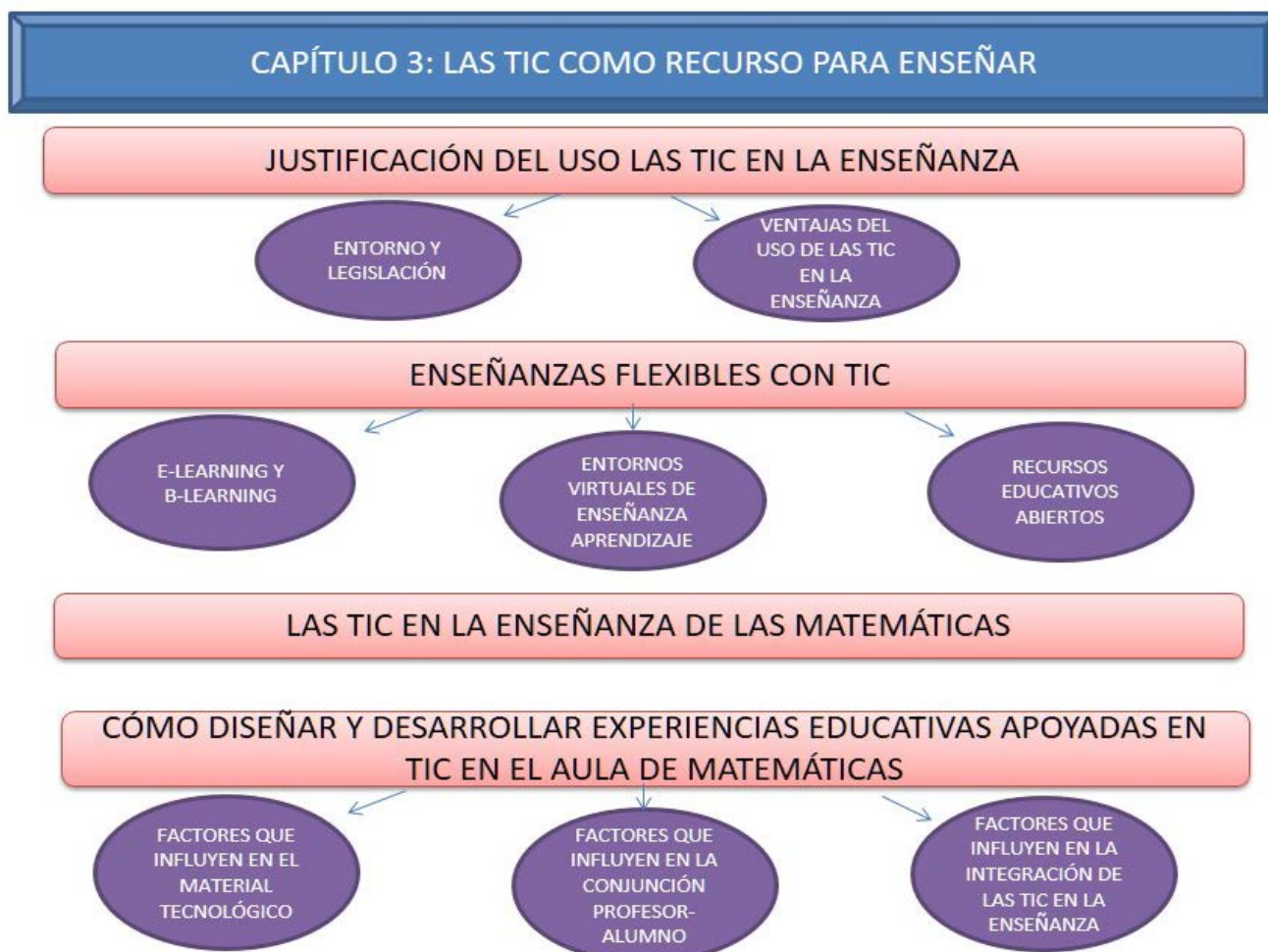


Figura 19. Mapa conceptual capítulo 3

Fuente: Elaboración propia.

1. JUSTIFICACIÓN DEL USO DE LAS TIC EN LA ENSEÑANZA.

Para documentar esta sección vamos a trabajar desde distintas perspectivas. La primera se corresponde con la del alumnado, en cuanto a su entorno y costumbres actuales. La segunda está en relación al reflejo que la legislación hace en referencia a esta temática puesto que, en las últimas leyes educativas, se recoge la incursión de las tecnologías de la información y comunicación (TIC) en los procesos de enseñanza aprendizaje (Gutiérrez, Beltramino y Viano, 2015).

ENTORNO Y LEGISLACIÓN

Para el primer argumento, el del entorno del alumnado, hemos de resaltar que la era actual, basada en la información, no está siendo distinta a otras en donde la humanidad se ha tenido que adaptar a los nuevos progresos. Así se vivieron otros hechos sociales como “el paso de la oralidad a la escritura, la aparición de la imprenta y la revolución industrial. Esta revolución tecnológica se caracteriza por su capacidad de penetración en todos los ámbitos de la actividad humana y por el procesamiento del conocimiento, de la información y la comunicación” (Domínguez, Jaén y Ceballos, 2017, p.187).

Los discentes, hoy día, se están desarrollando en un mundo globalizado, basado en las tecnologías de la comunicación e información, recibiendo información de manera constante y rápida, desarrollando variadas tareas coincidiendo en tiempo. Prefieren la información en gráficos antes que en textos escritos (Bossolasco y Storni, 2012). Estos mismos autores defienden la idea de que las TIC han producido cambios en los patrones del pensamiento:

Estos nuevos usuarios enfocan su trabajo, el aprendizaje y los juegos de nuevas formas: absorben rápidamente la información multimedia de imágenes y vídeos, igual o mejor que si fuera texto; consumen datos simultáneamente de múltiples fuentes; esperan respuestas instantáneas; permanecen comunicados permanentemente y crean también sus propios contenidos. Forman parte de una generación que ha crecido inmersa en las Nuevas Tecnologías, desarrollándose entre equipos informáticos, videoconsolas y todo tipo de artilugios digitales, convirtiéndose los teléfonos móviles, los videojuegos, Internet, el email y la mensajería instantánea en parte integral de sus vidas y en su realidad tecnológica. Navegan con fluidez, tienen habilidad en el uso del ratón, utilizan reproductores de audio y video digitales a diario, toman fotos digitales que manipulan y envían, y usan, además, sus ordenadores para crear vídeos, presentaciones multimedia, música, blogs, etc. (García, Portillo, Romo y Benito, s.f., 2).

Murcia, Tejedor y Lancheros (2017) señalan que en la enseñanza se han de tener presentes las circunstancias sociales y culturales del alumnado, indicando que las TIC están en ellas. Martínez y Torres (2017) subrayan que aquellos que no se adaptan al entorno, no integrando las TIC, quedarán excluidos en la educación, manteniendo recursos no actuales. El docente tendrá que adaptarse a las exigencias del entorno, disminuyendo la brecha digital que todavía existe entre él y su alumnado.

Por otra parte, un segundo argumento es el legislativo. Adentrándonos en él, hacemos un recorrido para estudiar la realidad de las TIC en las leyes de educación (Anexo III). En el Diseño Curricular Base (MEC, 1989, citado por Godino et al. 2003), se señala que la aplicación de nuevos medios tecnológicos hará que se tengan nuevos planteamientos en la enseñanza. En la “*ley general del sistema educativo*” (LOGSE), en 1990, aun no existiendo un currículo propio para las “nuevas tecnologías, se hacía referencia a la formación en el ámbito del lenguaje audiovisual. Es en la “*ley orgánica de calidad en la educación*” (LOCE), donde se hace mención expresa a las Tecnologías de la Información y Comunicación. Dado el poco tiempo que estuvo en vigencia, debido a que en el año 2006 aparece la “*ley orgánica de educación*” (LOE), no hacemos un gran estudio sobre ella. En la última legislación referida (LOE) se le da un papel destacado a las TIC, exponiendo que se ha de aportar para una mejora en la educación y que esta puede estar asociada, entre otros factores, al acceso a las tecnologías de la información y comunicación. Respecto a los niveles de Secundaria hace mención expresa a que las tecnologías de la información y comunicación han de ser trabajadas desde las distintas áreas del currículo y que por medio de éstas se deberán desarrollar nuevos conocimientos. Quedan señaladas en el Real Decreto 1631/2006 las competencias básicas que se deben fomentar, siendo una de ellas la “competencia digital”, relacionada con las TIC pero desde un enfoque distinto. Las TIC han de ser el instrumento utilizado para trabajar ciertas habilidades, con el objetivo de que el alumno aprenda a obtener, buscar, procesar y transmitir información, logrando que gracias a éstas, el estudiante genere conocimientos. Y que las utilice de manera habitual, por ejemplo, para la resolución de problemas. La ley engloba el uso de las TIC para la formación de personas autónomas, eficaces, críticas y reflexivas, al saber seleccionar las fuentes, la información aportada por las mismas...

Centrándonos en la última ley educativa (LOMCE) la competencia referida también se halla en ella, Real Decreto 220/2015 del 2 de septiembre de 2015, 30732. Se halla en el anexo I de la orden ECD/65/2015 la explicación de la misma, y por medio de ésta se pretende trabajar el desarrollo de las destrezas necesarias para ser capaces de manipular herramientas y máquinas tecnológicas. Además, nos encontramos con los estándares evaluables, referidos a la asignatura de matemáticas y, de nuevo según el Real Decreto 220/2015 (2015, 30963-31044), tenemos:

- Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos y estadísticos cuando la dificultad de los mismos le impida o no aconseje hacerlos manualmente.
- Emplea la calculadora y herramientas tecnológicas para organizar datos...
- Utiliza las tecnologías de la información y de la comunicación para comunicar información...
- Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones...
- Utiliza recursos creados para apoyar la exposición...
- Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje...
- Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, vídeo, sonido, etc...) como resultado del proceso de búsqueda, análisis y

selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para la discusión o difusión.

- Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas.
- Construye, con la ayuda de herramientas tecnológicas, si fuese necesario, gráficos estadísticos...

Debemos tener presente (Domínguez et al. 2017) que el docente no deberá solo implementar la competencia del tratamiento de la información y la competencia digital sino procurar que su propuesta educativa active cada una de las competencias legisladas.

VENTAJAS DEL USO DE LAS TIC EN LA ENSEÑANZA

Para concluir este apartado no queremos dejar de aludir a un tercer argumento relacionado con las nuevas posibilidades que las TIC le aporta al contexto educativo.

Las TIC presentan numerosas ventajas para la enseñanza y aprendizaje. Basándonos en las ideas expuestas por Escobar (2016), Cuesta, Aguiar y Marchena (2015), Morales, Trujillo y Raso (2015) y López (2003) podemos enumerar las siguientes:

- Crean escenarios de aprendizaje al presentar nuevos canales para la información y de comunicación.
- Se produce una ruptura de las barreras espacio-temporales en las actividades de enseñanza y aprendizaje.
- Incrementan y mejoran la comunicación entre los distintos agentes del proceso enseñanza aprendizaje.
- Fomentan la interactividad. Las relaciones de los alumnos y de los profesores con otros maestros y compañeros pueden verse ampliadas con el uso del ordenador, pues pueden estar en contacto con otras clases, otras escuelas, otros centros de trabajo, otros grupos innovadores que compartan objetivos.
- Ofrecen nuevas posibilidades para la orientación y tutorización.
- Los programas informáticos pueden transformar nociones abstractas en modelos figurativos, facilitando su aprendizaje y comprensión.
- El uso de ordenadores en la escuela aproxima el entorno escolar a otros entornos del alumno, facilitando la transferencia de aprendizajes de unos contextos a otros.
- Ofrecen la posibilidad de diseñar con facilidad actividades complementarias de apoyo al aprendizaje que pueden concretar una idea que en conceptos no se había entendido.
- Los procesos formativos se hacen más abiertos y flexibles pudiéndose recapacitar más sobre las ideas trabajadas.
- El proceso de enseñanza-aprendizaje es más personalizado.
- El acceso a la información es más ágil y rápido pudiéndose interactuar con repositorios de conocimientos.

- Existe la posibilidad de interactuar con la información.
- Facilitan la formación permanente ya sea síncrona o asíncrona.
- En general, eleva el interés y la motivación de los alumnos siendo una gran ventaja ante asignaturas que no suelen gozar del favor de los discentes.

Destacamos tres características que se trabajan cuando en la docencia se integran las TIC, al tener gran relevancia en cuanto a las metodologías: (Barroso, 2009):

- *Aprendizaje por descubrimiento*: Los alumnos aprenden por descubrimiento fundamentalmente en las primeras etapas de la escuela. Por medio del TIC se quiere retomar este aprendizaje, pues los alumnos están dispuestos a “probar”.
- *Autonomía del alumnado*: Se pretende que los alumnos desarrollen su autonomía de manera progresiva ante el programa, aprendiendo al mismo tiempo una breve manipulación del software, sin que este aprendizaje sea el centro de la actividad.
- *Enfoque globalizado*: Este enfoque es el más adecuado para desarrollar el aprendizaje significativo. Se deberá integrar el ordenador en la enseñanza como un recurso más y no como una herramienta aislada.

Tanto el aprendizaje por descubrimiento como la autonomía del alumnado harán que el estudiante sea el protagonista de su aprendizaje, por medio de un contexto informático, dinámico, interactivo, permitiendo un enfoque exploratorio y no una simple respuesta procedimental (Threlfall y Poll, 2007). De este modo desarrollará sus propias estrategias mentales, Barroso (2009), al mismo tiempo que resuelve situaciones por medio de software, diseñado para tal fin, fomentado de este modo el aprendizaje significativo.

Podemos señalar, de entre todas las funciones que puede tener el software en la educación, algunas de las ya señaladas por Marquès (s.f.,b):

- *Función instructiva*: A través de ellos, ya sea de manera explícita o implícita se promueve el aprendizaje y se alcanzan objetivos propios del currículum. Además, los estudiantes, también aprenderán a ser sus propios motores del conocimiento, participando de manera activa en su propio aprendizaje.
- *Función investigadora*: Los discentes dispondrán de un entorno donde podrán investigar mediante cambios de parámetros, representaciones gráficas... Esto hará que puedan descubrir su espíritu investigador que más adelante podrán extrapolar a su vida cotidiana, convirtiéndose así en exploradores escolares.
- *Función motivadora*: Los alumnos de estas edades sienten una gran atracción hacia los juegos presentados por medio de los ordenadores. Esta característica hace que puedan estar más interesados hacia una actividad planteada a través de ellos que a la misma actividad presentada en un formato clásico. Se desarrolla más el proceso de enseñanza a través de simulaciones manipulativas, pues a través de software el alumno podrá comprobar el porqué de aquellos conceptos que estudia, dándole así mayor peso al razonamiento y al poder deductivo.

- *Función lúdica:* Los discentes aprenderán por medio del juego.
- *Función evaluadora:* Se podrá diseñar el material de forma que sea el propio programa el que, al detectar los fallos, se los señale al estudiante de manera directa. Al mismo tiempo que genera un informe que pueda servir al profesor para su evaluación final.
- *Función diversificadora:* Cada alumno podrá tener su propio ritmo de aprendizaje. Él se podrá marcar distintos tiempos de trabajo, pudiendo así atender a la diversidad actual que se encuentran en las aulas.

2. ENSEÑANZA FLEXIBLE CON TIC.

En relación con la incorporación de las TIC en la enseñanza, un concepto relevante es el de "enseñanza flexible por medio de las TIC". Para justificar dicho concepto, trabajando con lo expuesto en Salinas (2003; 2005), sabemos que la experiencia está demostrando la necesaria flexibilización de las estructuras docentes. Son muchas las razones que justifican esta afirmación, como que en un futuro, en la vida laboral de los actuales adolescentes, el mundo les demandará una formación continua, por lo que las situaciones educativas han de estar en continuo cambio para adaptarse a la formación que necesitan. Otra característica son los distintos ritmos de aprendizaje y los apoyos que se dan en los procesos de enseñanza-aprendizaje actuales. Salinas, en dichos artículos señala que, dicha flexibilidad también influirá en los materiales didácticos, que podrán estar formados por distintas herramientas que integren audios, videos, textos, software, pudiendo llegar, de este modo, a un mayor número de alumnos.

En la aproximación que Race (1994) hace a la enseñanza flexible señala que es aquella que se basa en materiales de aprendizaje centrados en el alumno, intentando que el discente se atribuya el éxito de su aprendizaje. Estas ideas están en concordancia con las teorías expuestas en el capítulo anterior.

Diversos autores (Belloch, s.f.; Salinas, 2003, 2005.) señalan que el ideario del aprendizaje flexible, tras centrar el enfoque de la enseñanza en el alumno, considera oportuno utilizar las TIC en un entorno apropiado, haciendo la educación virtual y la flexible un binomio para la enseñanza actual.

Unigarro y Rondón (2005) señalan a las redes como elemento indispensable en la enseñanza flexible. Por medio de las mismas el usuario adquiere poder de elección, libertad de maniobra y control sobre la forma en la que está aprendiendo. Destaca que los ordenadores pueden crear nuevos escenarios donde poder conjugar todo lo expuesto junto a la interactividad entre el profesor y el alumno.

Sabiendo que en la implementación de la enseñanza flexible destaca el papel del material educativo, de las redes (como por ejemplo los entornos personales de aprendizaje) y de las enseñanzas no coincidentes en tiempo o espacios pasamos a exponer estos tres escenarios.

E-LEARNING Y B-LEARNING.

Debemos saber qué entendemos por dichos términos así como sus características. Según González (2015), Area y Adell (2009), González (2011) y Belloch (s.f.), destacamos, en la tabla 5, la definición y características de ambos:

Tabla 5. E-learning y b-learning. Fuente: Elaboración propia.

E-Learning		B-Learning
Educación o formación a distancia que emplea los recursos informáticos a través de un canal informático	Definición	Modalidad de estudios semipresencial que combina la formación virtual y tecnológica, no presencial con la enseñanza presencial.
<ul style="list-style-type: none"> •Aprendizaje por medio del ordenador •Acceso a la información mediante navegadores web. •Conexión entre profesor y alumno separados por espacio y tiempo. •Multimedia •Flexible •Interactivo 	Características	<ul style="list-style-type: none"> •Enseñanza a distancia y presencial. •Flexible, interactivo, síncrono y asíncrono. •Reemplaza las necesidades en cuanto a los espacios físicos. •Retroalimentación.

Gómez, García, Masa y Villar (s.f) indican que no se debe entender el e-learning como la única forma de enseñanza que se dará en un futuro en la educación, eliminado la enseñanza presencial.

Es más Young (2002, citado por Bartolomé, 2004, p.14) expone: “Los modelos híbridos parecen generar menos controversia entre el profesorado que los cursos totalmente en línea [...] algunos profesores disienten de cualquier cambio de un sistema educativo que ha funcionado durante siglos”.

Pincas (2003, citado por Bartolomé, 2004, p.14) hace una justificación del b-learning al ser una opción que facilita la introducción de las tecnologías de la información entre el colectivo del profesorado aún reacio:

Las Tecnologías, y especialmente las Tecnologías de la Información y la Comunicación, han sido a menudo aclamadas como un catalizador para el cambio, pero este cambio necesita no ser radical. Se pueden incorporar algunas útiles TIC mediante formas fáciles bien planeadas [...]. Sugiero utilizar tecnologías ampliamente disponibles combinadas con planteamientos más familiares de enseñanza y aprendizaje.

Martinelli (2016) expone que los modelos semipresenciales que utilizan las TIC han de vencer las costumbres impuestas por modelos ya presentes en la educación.

Esta modalidad (tecnología y semipresencialidad), bien tratada, puede hacer que la docencia sea más atractiva y efectiva para los estudiantes, como señalan González (2015) y Salinas (1994) entre otros.

Para hablar de las ventajas y de los inconvenientes del e-learning y del b-learning nos apoyamos en los trabajos de Juárez, Mengual, Vercher y Peydró (2013), Navarro (2004) y Belloch (s.f.), como reflejan las figuras 20 y 21

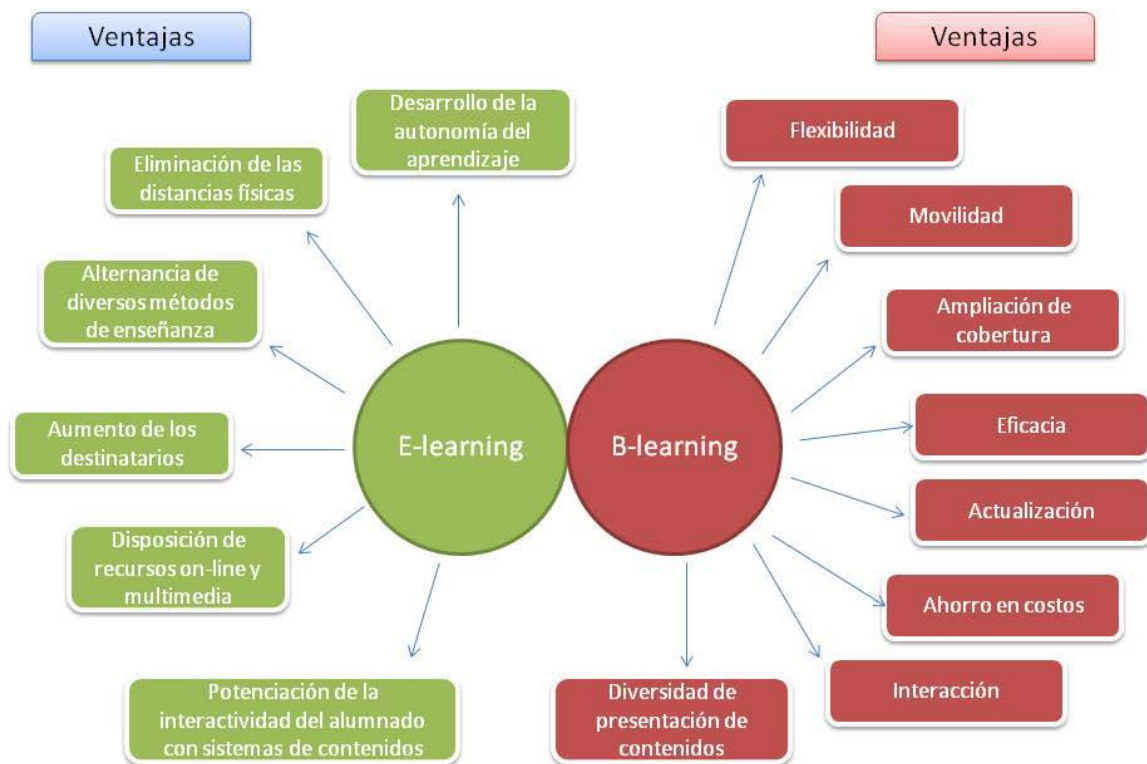


Figura 20. Ventajas e-learning y b-learning.

Fuente: Elaboración propia.

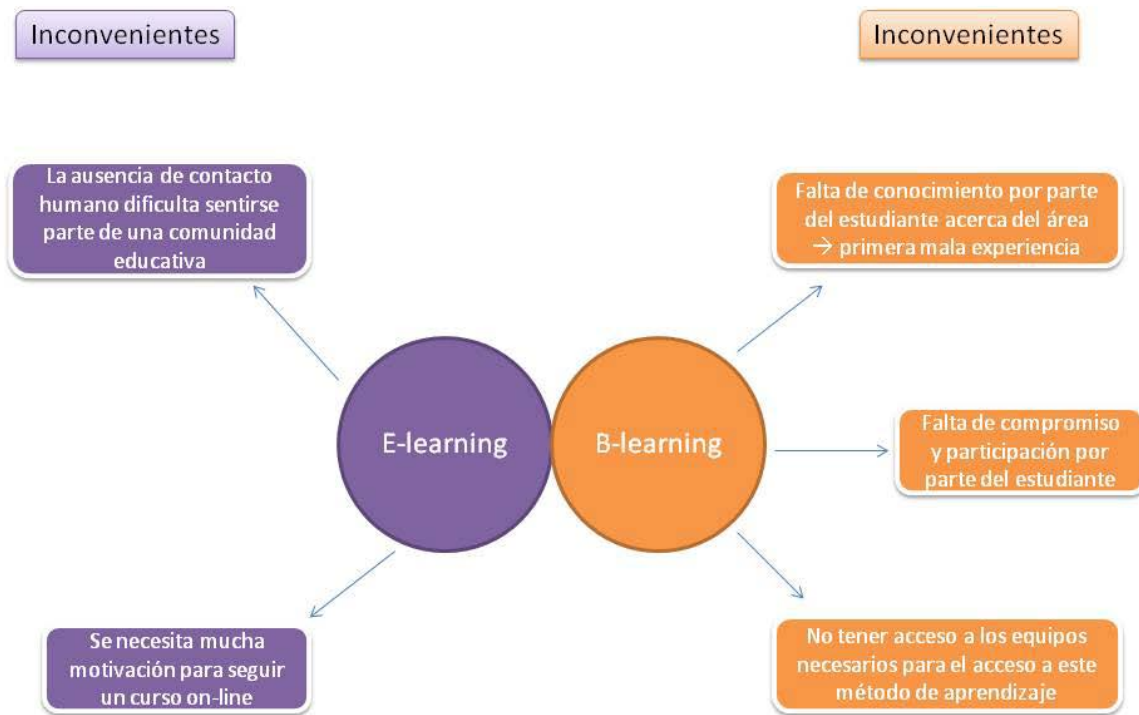


Figura 21. Inconvenientes e-learning y b-learning.

Fuente: Elaboración propia.

Por último queremos exponer que Feliz (2012) señala el hecho de que otros estudios, en los que se han utilizado los recursos virtuales englobados en la enseñanza b-learning, no han tenido la divulgación necesaria para facilitar la transferencia a nuevas experiencias al encontrarse en paradigmas emergentes. Aun así, existen interesantes artículos sobre estos conceptos y prácticas.

ENTORNOS VIRTUALES DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE.

“El aprendizaje abierto es una educación cuyo objetivo es eliminar todas las barreras superfluas al aprendizaje y, al mismo tiempo, proporcionar a los estudiantes una posibilidad razonable de éxito dentro de un entrenamiento centrado en sus necesidades específicas y localizado en múltiples áreas del conocimiento” (Unesco, 2005, p.6)

Castañeda y López (2007, p.1) recogen en su trabajo la definición de entorno virtual de aprendizaje:

Denominamos Entorno Virtual de Enseñanza Aprendizaje (en adelante EVEA) al espacio (espacio virtual) en el que se agrupan las distintas herramientas y servicios para el aprendizaje y donde interaccionan el personal de gestión institucional, el profesorado y los estudiantes.

El concepto de EVEA, aparece como evolución del concepto de Plataforma de Teleformación, el cual denomina precisamente los entornos de hardware y software diseñados para automatizar y gestionar el desarrollo de actividades formativas, también conocidos como Learning Management Systems (LMS)

Con la evolución de la investigación en la teleenseñanza y la cada vez mayor preocupación por dar un mayor énfasis a los procesos comunicativos que a los meramente telemáticos o tecnológicos, apareció también la necesidad de nombrar dichos entornos poniendo un mayor énfasis en sus posibilidades educativas y su relación con los procesos de enseñanza.

Córdoba, René y Cortez (2015) destacan como elemento fundamental para una buena educación a distancia el uso de las plataformas virtuales. Al ser el espacio en el que se comparten los recursos y en que se desarrolla, si se desea, parte de trabajo, al proporcionar a estudiantes y profesores los servicios necesarios. En esta misma línea, García (2012), destaca:

Capacitación no presencial que, a través de plataformas tecnológicas, posibilita y flexibiliza el acceso y el tiempo en el proceso de enseñanza-aprendizaje, adecuándolos a las habilidades, necesidades y disponibilidades de cada discente, además de garantizar ambientes de aprendizaje colaborativos mediante el uso de herramientas de comunicación síncrona y asíncrona potenciando en suma el proceso de gestión basado en competencias (García, 2012, p.2).

Fue en los ambientes de estudios superiores donde se empezaron a desarrollar estos entornos. Alonso, Gutiérrez, Yuste, Arias. Cubo y Diogo (2014) lo reflejan en su trabajo, resaltando que los entornos virtuales de aprendizaje (Learning Management Systems LMS) permiten desarrollar asignaturas e incluso cursos en línea y que a dichos ambientes se les puede integrar distintas herramientas de interacción entre los participantes.

Una vez avanzados los estudios en niveles superiores, llegaron las experiencias desarrolladas en aulas de secundaria por medio de distintos trabajos llevados a cabo por profesores de estos niveles (García 2013, Palmer y Cebreian, 2008, experiencias de distintos centros de la Región de Murcia) en el que lo destacado no es el desarrollo del propio proyecto informático, sino la resistencia que mostraban los alumnos a la reflexión y a la asimilación de las nuevas formas en las que se le estaba presentando el proceso de enseñanza aprendizaje. Las experiencias educativas reseñadas han tenido resultados muy favorables cuando la propuesta fue mantenida en el tiempo pues los discentes terminaron usando herramientas nuevas para su estudio. Otra experiencia educativa en este mismo nivel es la llevada a cabo por López y Prendes (2013). Evalúan un nuevo espacio virtual para la enseñanza en secundaria, destacando que este desarrollo está basado en la evolución de la web 2.0. Para ello, dota a las plataformas virtuales educativas de la posibilidad de englobar distintas herramientas compartiendo interfaz. Según dichas autoras, todas las actividades que se integren en estos entornos deberán ser diseñadas para una buena gestión del conocimiento.

Las herramientas facilitan al profesor la realización de tareas docentes, tutoriales y de administración: y al alumno, autonomía y posibilidad de organizar su propio aprendizaje. Además, proporciona la comunicación entre los participantes en el proceso educativo, sea éste presencial, a distancia o mixto (López y Prendes, 2013, p.62)

Las características fundamentales de los EVEAS se pueden dividir en dos grupos, según muestran la figura 22 y 23 (elaboradas a partir de Salinas, s.f):

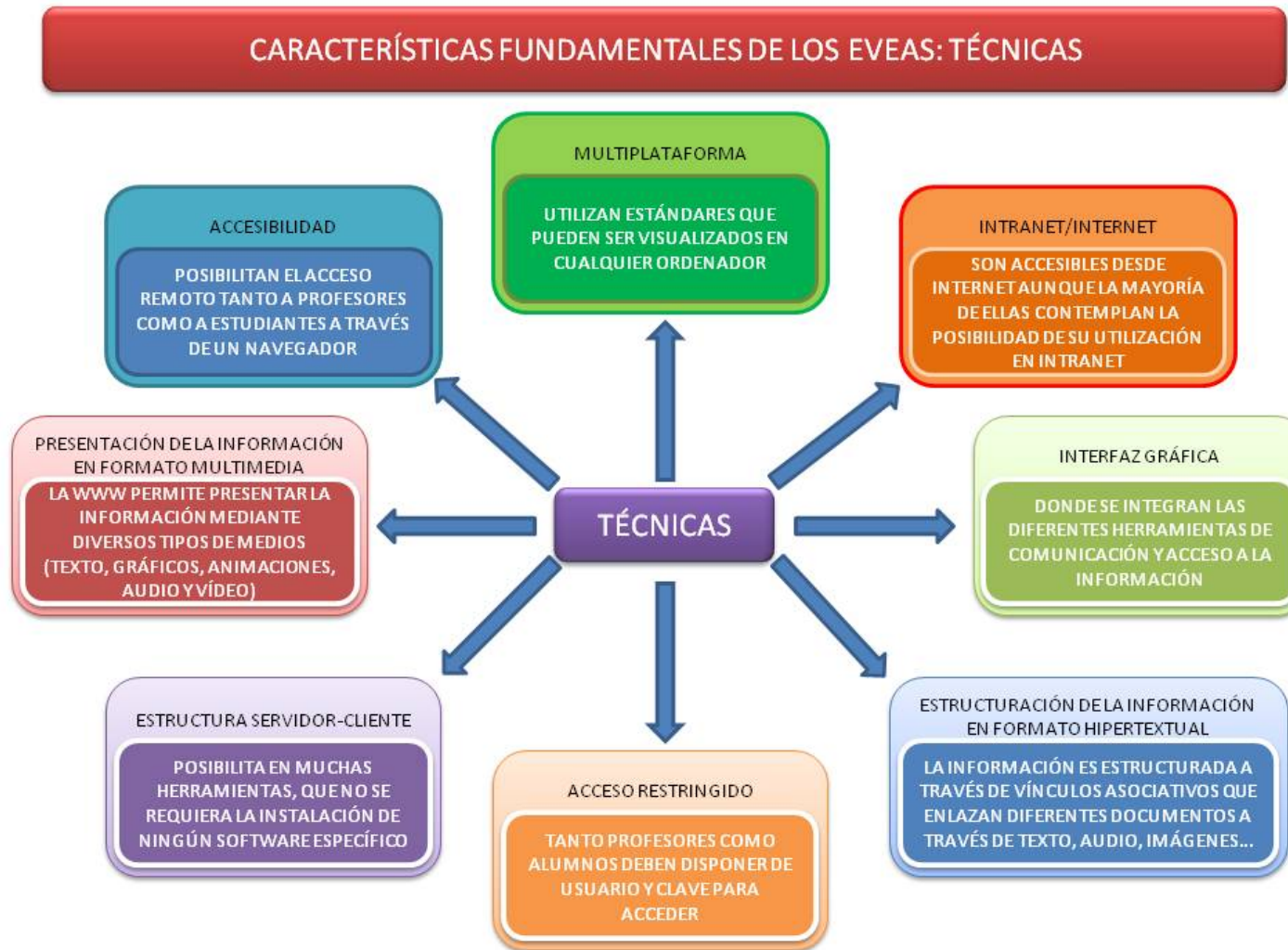


Figura 22. Características técnicas fundamentales EVEA.

Fuente: Elaboración propia. .



Figura 23. Características educativas fundamentales EVEA.

Fuente: Elaboración propia.

Pasamos a exponer distintos modelos didácticos que se pueden implementar por medio de este entorno de aprendizaje:

- Tipo 1: son aquellos profesores que utilizan la plataforma para la distribución de materiales y/o con la posibilidad de hacer alguna actividad puntual de forma voluntaria. Pueden usar la plataforma para la gestión de la asignatura, ya sea a través del calendario, del tablón, del foro, etc. También se incluyen aquí aquellos profesores que no utilizan plataforma, pero realizan tutorías o distribuyen material a través de correo electrónico.
- Tipo 2: aquellos profesores que utilizan la plataforma para la distribución de materiales y realizan actividades individuales obligatorias.
- Tipo 3: aquellos profesores que utilizan la plataforma para la distribución de materiales y realizan actividades individuales y/o grupales obligatorias.
- Tipo 4: en este perfil los profesores usan la plataforma para la distribución de materiales y para la realización de actividades, sean individuales y/o grupales obligatorias. Trabajo colaborativo, también de forma obligatoria.
- Tipo 5: son aquellos profesores que utilizan la plataforma para la realización de actividades, ya sean individuales, grupales o que hayan especificado realizar trabajo colaborativo. Estas actividades son de tipo

obligatorio. Les diferencia de los demás perfiles que no cuelgan para su distribución ningún tipo de materia (Salinas 2008, 114, citado por Prendes 2009, p.38).

Como indica Salinas (s.f.), el desafío presente en los entornos virtuales de enseñanza, no es la reconstrucción del sistema de enseñanza basado en las clases magistrales, ni por el contrario, intentar crear un ambiente un aprendizaje totalmente autónomo. Hay que lograr nuevas vías de transmisión de conocimientos, intentando fomentar la conectividad, ya mencionada, entre toda la comunidad educativa, entre el aprendizaje y la experiencia por medio de la interacción desde dos planos, el individual (él con el contenido) y él junto a otros (también sobre el contenido) destacando las ventajas que ofrecen para ello las TIC, logrando así un aprendizaje eficiente, efectivo y afectivo.

RECURSOS DIGITALES: RECURSOS EDUCATIVOS ABIERTOS (OER)

En referencia a los materiales que son mencionados por Prendes, muchas de estas plataformas aceptan que el docente pueda tener cuantos recursos crea conveniente para el alumnado. Centrándonos en los recursos multimedia y en la elección de los mismos, el profesor siempre tendrá que tener en cuenta los criterios de calidad indicados por Marquès (s.f.a) que fueron publicados en 1999 y revisados en 2009. Según este autor se entiende por recurso educativo multimedia: “Son materiales que integran diversos elementos textuales (secuenciales e hipertextuales) y audiovisuales (gráficos, sonido, vídeo, animaciones...) y que pueden resultar útiles en los contextos educativos” (Marquès 1999, p.1).

De entre todos, destacamos los materiales didácticos multimedia (entendemos por ellos los software educativos que tienen como finalidad facilitar el aprendizaje), pudiendo ser, según la misma obra, de dos tipos:

- Los que proporcionan información, como por ejemplo los documentos multimedia por medio de la consulta de hipertextos, navegación, etc.
- Los que ofrecen actividades interactivas, como los materiales multimedia interactivos que buscan la interacción con los usuarios por medio de preguntas, simulaciones, ejercicios, entre otros.

En los últimos tiempos (Gutiérrez, 2008) ha aparecido un nuevo término “Open Educational Resource (OER)” que fue utilizado por primera vez en julio de 2002 durante un Workshop de la Unesco. Éste hace referencia a los recursos educativos abiertos, es decir, cualquier tipo de recurso que (Unesco, 2005) está plenamente disponible para la comunidad educativa y cuya utilización no implica el pago de licencias. La Unesco (2005) señala que estos materiales pueden ser de cualquier tipo: libros, vídeos, mapas curriculares, la totalidad del material diseñado para la enseñanza, el aprendizaje, la evaluación, la investigación.

Para finalizar, haciendo la conjunción entre el aprendizaje abierto del que hemos hablado, los recursos que poseen acceso abierto y la vía que es internet, se podrá construir un entorno completo de enseñanza flexible.

3. LAS TIC EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS.

Según Whitin (1989) son muchas las razones que llevan a los alumnos a preguntarse el porqué de los procesos matemáticos. Él señala los beneficios que presentan las TIC, tales como:

- Potencia el desarrollo de la capacidad matemática.
- El alumno aprende más, pues explican al profesor y a sus compañeros, los procesos seguidos.
- Fomenta la confianza del alumno.
- Favorece la participación y el aprendizaje comunitario.

Una vez expuestos en capítulos anteriores los pilares matemáticos (abstracción, precisión...), la importancia de la imagen en la enseñanza de esta disciplina, la responsabilidad que tiene el profesor de trabajar las capacidades matemáticas de los discentes, las experiencias que estimulan la investigación y el papel comunicativo e instructor que pueden tener las TIC, exponemos algunas experiencias educativas en matemáticas que las han potenciado.

El acercamiento a los contenidos matemáticos se ha de basar en las actividades prácticas y en la manipulación. De esta forma, en el proceso de construcción del conocimiento matemático, se partirá de la propia experiencia práctica del alumno. Así, también se estará favoreciendo el acercamiento de esta materia a los niños, por medio de nuevos escenarios de aprendizaje. Los conceptos y generalizaciones se construirán mientras procesan las experiencias matemáticas mentalmente, basadas en la construcción de nuevos conocimientos, formando ellos mismos sus propias ideas, a través del ensayo-error (Godino et al. 2003, y Dienes, 1987). Por medio de las tecnologías se intentará fomentar la comprensión básica, al mismo tiempo que ayudaran a los docentes a entrelazar el desarrollo de procedimientos, con uno más general de comprensión matemática, lo que podrá conducir a que los estudiantes puedan trabajar en niveles más altos de generalización o abstracción. López (2003) señala que por medio de las TIC el profesor puede crear un ambiente donde los alumnos perciban el carácter experimental de las matemáticas y por medio de un proceso exploratorio adquieran la formación en referencia a esta materia.

Señalamos el trabajo de Aguilar y Marchena (2015) en el que demostraron que se observaron beneficios tras la intervención de las TIC en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Estos estaban relacionados con las dificultades existentes en el discente respecto del razonamiento lógico-matemático. El programa educativo que se implementó estaba basado en las nuevas tecnologías y centrado en la estimulación, tanto verbal como matemática (lógica) y ayuda al discente a superar la problemática en referencia a esta rama que tenía. Muñoz (2016), por medio de la página oficial de Geogebra, (una aplicación con la que se pueden hacer representaciones de objetos matemáticos) señala que usando este medio se potencian las características de “ver, tocar, investigar y descubrir”. Autores como Yerushalmy, Shternberg, y Gilead (1999) o Parzysz (1999) han señalado múltiples ventajas de la utilización de software informático, para las recreaciones dinámicas de las matemáticas, en campos como la geometría, la trigonometría y el álgebra.

Se ha de resaltar otra ventaja del uso de las TIC en la enseñanza de las matemáticas. El ritmo de aprendizaje de cada alumno es distinto, por lo que en muchas ocasiones hay que buscar estrategias que atiendan a la diversidad. Los programas informáticos en el área de la enseñanza de las matemáticas adquieren, un papel fundamental en la atención a la diversidad pues, a través de ellos, los alumnos pueden llevar distintos ritmos de aprendizaje, ya que podrán trabajar con ellos cuantas veces lo necesiten sin depender del profesor, y pudiendo experimentar con sus propias ideas (Barroso, 2007; Marchesi y Marín 2003). Se ha de resaltar que, tras el estudio de distintos expedientes académicos de menores con necesidades educativas especiales, estos logran alcanzar el ritmo con el que trabajan sus compañeros en muchas de las asignaturas, pero no en las troncales, por lo que el uso de una herramienta que facilite los distintos ritmos de aprendizaje en esta materia, adquiere un papel destacado.

Para integrar las TIC en los procesos de aprendizaje de las matemáticas es importante basarse en diferentes herramientas. Rubin (2000) clasifica en cinco grupos los instrumentos para desarrollar entornos beneficiados por la tecnología: conexiones dinámicas manipulables, herramientas avanzadas, comunidades ricas en recursos matemáticos, herramientas de diseño y construcción y por último, herramientas para explorar la complejidad. Podemos hablar de ellas de la siguiente manera:

- *Conexiones dinámicas manipulables:* Puesto que las matemáticas tienen gran número de conceptos abstractos y símbolos, la imagen, ya sea fija o una simulación, es fundamental en esta materia pues hace que el discente pueda entender mejor los conceptos al tener una visualización de los mismos. Por medio de las presentaciones interactivas, podrán manipular y entender la materia, incluso saber cómo influye un concepto sobre otros.
- *Herramientas avanzadas:* Los cálculos en matemáticas es una característica siempre presente pero en ocasiones no es necesario tener que realizarlos mentalmente, por medio de algoritmos. Estas herramientas usadas fundamentalmente para el manejo de operaciones, facilitan que el estudiante pueda descubrir patrones complejos. Algunas de las más usadas son las hojas de cálculo, calculadoras, herramientas para hacer gráficos, etc. Cada vez es mayor el número de empresas que usan muchos programas de esta índole, por lo que es fundamental preparar a los alumnos para el mundo en el que se desarrollarán como adultos.
- *Comunidades ricas en recursos matemáticos:* En la actualidad, son muchos los recursos que un profesor de matemáticas puede encontrar en la red. Por medio de ellos, se pueden enriquecer las clases de matemáticas. De igual modo, los estudiantes también pueden encontrar en internet gran cantidad de recursos que les ayuden en su aprendizaje matemático.
- *Herramientas de diseño y construcción:* Otra de las ramas de la tecnología, en el área de las matemáticas, es la creación de artefactos robóticos, por medio del lenguaje de programación. Dicha programación

hace que el discente desarrolle la inteligencia lógica, fundamental en las matemáticas.

- *Herramientas para explorar complejidad: En el área de las matemáticas, dentro del campo de la tecnología, tiene un crecimiento exponencial el desarrollo de herramientas para el manejo de fenómenos complejos. De nuevo, el uso de los ordenadores hace que el estudiante pueda centrarse en el análisis del fenómeno y no en las operaciones matemáticas.*

Para Weist (2001) las aplicaciones informáticas utilizadas como herramientas en la educación no deben ser el objetivo de la misma sino que se han de utilizar como ayuda hacia otro objetivo (curricular). No enseñan por sí mismas sino que realizan una función que facilita el logro de algún objetivo (al que el alumno podrá llegar por medio de la experimentación, característica ya enunciada como importante en el área de las matemáticas durante el marco teórico así como en otros artículos como Peña, 2012; Chamoso et al. ,2004; entre otros). “Usar manipulativas en la enseñanza de las matemáticas es siempre un medio para un fin, nunca un fin en sí mismo” (Godino et al. 2003, 137). Lo que nos indica, como señaló el NCTM en 2003, que aunque se deba hacer un uso frecuente y responsable de la tecnología, no se debe olvidar el objetivo principal de la inserción de las mismas en el panorama educativo, que será la de enriquecer el aprendizaje y fomentar la comprensión básica y las intuiciones. “La tecnología tiene un papel importante en la enseñanza de las matemáticas puesto que mejora el proceso de aprendizaje de las mismas, pero es muy enriquecedora si la desarrollamos en ambientes llamados de “papel, lápiz y tecnología”” (Hitt, 2003, p.15).

Finalizamos enunciando que por medio de las TIC se intentará construir una enseñanza que, como exponían García y Beltrán (1988), no sea recibida como una obligación y que haga que el alumno se considere afortunado de recibir como regalo.

4. CÓMO DISEÑAR Y DESARROLLAR EXPERIENCIAS EDUCATIVAS EXITOSAS APOYADAS EN LAS TIC PARA EL AULA DE MATEMÁTICAS.

Desarrollaremos este apartado teniendo presente tanto los elementos influyentes en la elaboración de recursos TIC, como aquellos factores que intervienen en que éstos se integren de manera correcta.

Durante el diseño y programación de estas experiencias se deberán tener presente las indicaciones aportadas por Calderone y González (2016), referentes tanto al proyecto como al escenario tecnológico. El investigador tendrá que planificar su trabajo dando respuesta a las preguntas ¿qué se ofrece?, ¿a quién?, ¿para qué? y ¿cómo?. De este modo quedarán definidos los contenidos (alcance, profundidad y amplitud), los destinatarios, los objetivos, y por último la evaluación de los recursos humanos, económicos y tecnológicos que se podrán incluir en la experiencia. Centrando el estudio en el marco técnico, para el diseño del material didáctico, el responsable deberá contar con un asesoramiento en cuanto al área a impartir e informático (programación, diseño y usabilidad de la interfaz) teniendo siempre presente características como la accesibilidad, interoperabilidad y reutilización y tendrá que generar primero el prototipo sobre el que basará todo su desarrollo.

Será conveniente que este tipo de prácticas educativas no se consideren esporádicas y transitorias, sino que sea una fuente constante de valiosas actividades cognitivas. Uno de los problemas que el docente tiene cuando se adentra en este mundo, y que deberá sortear cuando se disponga a diseñar y desarrollar este tipo de experiencias, es la escasa comunicación entre el mundo de la investigación, con el de los profesores y responsables de las leyes educativas. Además el docente tendrá que vencer la falta de programas de formación que deberán no solo contener enseñanza pedagógica y educativa sobre el potencial de las TIC, sino también el cómo desarrollar la nueva práctica docente (Dettori, s.f.)

Una vez que se tenga presente el diseño y la implementación de la práctica educativa con TIC, se deberá contar con una programación. Así como con una evaluación final de la experiencia para no encontrarnos con situaciones como la descrita a continuación:

La presencia de la "presión del examen" también puede significar que los profesores no tienen la posibilidad de experimentar con métodos de enseñanza innovadores por el temor de que los estudiantes podrían desempeñarse mal en los métodos convencionales de evaluación. Esto, combinado con la falta de conocimientos técnicos y pedagógicos, así como la dificultad de integrar las TIC en el plan de estudios, indica que las iniciativas claramente orientadas a las nuevas pedagogías necesitan complementar las acciones relacionadas con el equipamiento técnico en las escuelas con las evaluaciones, métodos de aprendizajes. (Varios, 2013, p.1)

Centrándonos en los materiales, para que el proceso de enseñanza aprendizaje sea correcto deberán ser eficaces, cumpliendo aspectos funcionales, técnicos y pedagógicos. Tanto para las actividades como para el entorno virtual se podrá tener presente en su diseño los siguientes apuntes (Marquès 1999, 2000; Morales, García y Barrón. s.f.)

- Planteamientos pedagógicos: atendiendo a dos vertientes:
 - Modelo pedagógico: se deberá tener claro cuál es la concepción del aprendizaje que se persigue, los roles de los estudiantes, docentes, adecuación a los destinatarios, interactividad y creatividad.
 - Plan docente: Con un diseño detallado de los objetivos (correctamente formulados, factibilidad), contenidos (información correcta, precisa, no discriminatoria, estructura de la materia) secuenciación, actividades, metodología.

FACTORES QUE INFLUYEN EN EL MATERIAL TECNOLÓGICO

Para destacar las principales características que se han de tener presentes, cuando se diseña una experiencia apoyada en las TIC en matemáticas, nos basamos en las ideas aportadas por trabajos como los del grupo de investigación Becta (Varios, 2003):

- La tecnología (ya sea el software o el hardware) estará diseñada para acelerar el proceso de representación gráfica, liberando a los alumnos para analizar y reflexionar sobre las relaciones entre los datos.
- La tecnología tendrá que llevar a cabo el trabajo manual de cálculos y el estudiante podrá centrarse en las estrategias, fomentando el proceso de ensayo y error.
- La aplicación debe ser capaz de reordenar los datos, para potenciar la exploración de problemas.
- El profesor debe ser conocedor del rango de software disponible y seleccionar el programa de apoyo más adecuado.

Teniendo presentes estas ideas aportadas, más enfocadas a la disciplina propia de nuestro estudio, debemos también estudiar unas pautas más generales que se deberán tener en cuenta para la creación/elección del material. Marquès (1999, 2000), Morales et al. (s.f.) y Varios (2003), señalan:

- Bidireccionalidad: Buscando que los usuarios no solo sean receptores, sino queriendo que tengan la posibilidad de ser emisores pudiendo mandar mensajes a terceros (profesores, estudiantes).
- Calidad del entorno visual: presencia y diseño atractivo, calidad técnica y estética de sus elementos (tipografía, fondo, títulos).
- Calidad del entorno auditivo: el sonido siempre deberá ser el adecuado tanto en las animaciones, como en vídeos.
- Calidad y cantidad de los contenidos: la información presentada carente de errores científicos, faltas de ortografía, redacción adecuada.
- Actividades instructivas: sabiendo que el estudiante aprende interactuando, las actividades deben facilitar esta forma de aprendizaje intentando que cumplan alguna de las siguientes características:

- Actividades auto-correctivas
- Actividades con corrección por parte del profesor o tutor
- Trabajos autónomos, actividades de foros, etc.
- El tiempo de encendido y apagado del ordenador estará equilibrado de acuerdo con las necesidades de aprendizaje, al igual que el del funcionamiento de la aplicación.
- Facilidad de uso
- Ausencia de publicidad
- Reusabilidad.

FACTORES QUE INFLUYEN EN LA CONJUNCIÓN PROFESOR-ALUMNO-SOFTWARE.

Continuando con el trabajo antes mencionado (Varios, 2003), destacamos:

- El alumno debe recibir retroalimentación instantánea de los programas informáticos al probar ideas, pues de este modo se anima a los discentes a usar conjeturas y a seguir experimentando.
- Los alumnos tendrán que estar equipados con las competencias TIC que sean adecuadas para lograr los objetivos fijados para ellos.
- El profesor debe ser conocedor del rango de software disponible y seleccionar el programa de apoyo más adecuado.
- El hardware más apropiado, software y soporte estará disponible tanto para el docente como para los discentes.
- Debe existir una mediación apropiada por el profesor, entre los alumnos y los ordenadores, de modo que donde los alumnos se espera que se conviertan en aprendices activos, el profesor proporcione apoyo en esa dirección.
- Diseñar la experiencia de forma que además de cooperar los alumnos puedan debatir sus ideas y pensamiento por medio de las TIC. Probando por medio de ellas sus teorías o contraejemplos fomentando así un intercambio de conocimientos.
- No se debe olvidar el grupo-clase, por tanto junto con una pizarra digital interactiva, el software debe poder usarse para la enseñanza grupal.

FACTORES QUE INFLUYEN EN LA INTEGRACIÓN DE LAS TIC EN LA ENSEÑANZA

Se debe tener presente que al incluir en la enseñanza las TIC, se modificará y habrá cambios tanto a niveles de infraestructuras, como en el profesorado y en el propio alumnado (Álvarez et al. 2011; Martínez Segura y Mirete, 2012; Morales et al. 2015; Sanabria y Hernández, 2011; Sánchez-López, García-Sánchez, Torres y Martínez, 2014; Vera, Rangel y Peñalosa, 2013).

Cuesta et al. (2015) destacan que es necesario un entorno basado en la innovación pedagógica sustentado por las TIC. No podremos olvidar los siguientes aspectos en los procesos educativos donde intervengan las TIC:

- La formación del profesorado, no sólo en la materia a impartir, es indispensable.

- Tendrá que existir un modelo o proyecto pedagógico.
- No sólo nos podemos basar en la utilización del ordenador en el aula. Debe haber un esfuerzo de elaboración y reorganización de los conocimientos, tras la búsqueda y comprensión de la información tanto por parte del docente como del estudiante.

A esto se le añade que, como señalan Méndez y Méndez (2014), cada docente deberá tener un material curricular idóneo.

Jarret (1998) señala tres cambios en cuanto a la perspectiva que deben tener los profesores que integran las TIC en el aula. El principal es el cambio del enfoque de la enseñanza, que deberá ser más centrado en el alumno apoyando las pedagogías constructivistas, siendo el alumno el que debe tener mayor predisposición a experimentar. Explorando, logrará alcanzar la comprensión de los conceptos matemáticos. Se potencia de este modo otro gran cambio en la educación, que es el aumento de las expectativas del alumno. Si el diseño de la experiencia no se hace sobre estos pilares, la integración de las TIC será pobre al no hacer eclosionar en este tipo de enseñanza lo más importante, las capacidades del alumno.

Escobar (2016) recoge que, por medio de las TIC, se pueden potenciar ideales formulados por la conjunción de los docentes y psicólogos. Estas organizaciones curriculares se deberán construir teniendo como centro al estudiante y no al docente y tendrán como pilares:

- a. Ofrecer al aprendiz ambientes de aprendizaje ricos en materiales y experiencias que cautivan su interés
- b. Otorgarle mayor libertad para explorar, observar, analizar, y construir conocimientos
- c. Estimular su imaginación, creatividad, y sentido crítico
- d. Ofrecerle múltiples fuentes de información más ricas y actualizadas
- e. Facilitarle una comprensión científica de los fenómenos sociales y naturales
- f. Permitirle realizar experiencias de aprendizaje multisensorial.
- g. Desarrolla la comprensión de conceptos, de una manera transversal e integrada. (Escobar, 2016, p.31).

Otro factor, en el éxito de la enseñanza, es la actitud del estudiante hacia la misma. Hay distintos estudios (Auzmendi 1992, Aliaga y Pecho 2000, Bazán, Espinosa y Farro 2001) que demuestran que la relación entre el rendimiento y las actitudes es una realidad, quedando patente que ante actitudes negativas, los resultados suelen calificarse con rendimientos bajos. Por medio de escenarios tecnológicos se podrá intentar una mejora en la predisposición, dado que distintos trabajos (Paredes y Dias De Arruda, 2012; Peinado y Navarro, 2014) ponen de manifiesto el aumento del interés y motivación por parte del alumnado.

BLOQUE II

CAPÍTULO 4: MÉTODO DE LA INVESTIGACIÓN.

- 1. Justificación.**
- 2. Problema y objetivos.**
- 3. Paradigma, enfoque y diseño de la investigación.**
- 4. Contexto.**
- 5. Participantes.**
- 6. Instrumentos.**
 - 6.1. Cuestionarios.**
 - 6.2. Grupos de discusión.**
 - 6.3. Diario del investigador.**
 - 6.4. Otros.**
- 7. Fases.**
 - 7.1. Cronograma de la investigación.**
 - 7.2. Desarrollo de las fases.**
- 8. Nuestra propuesta didáctica.**
 - 8.1. Diseño de la propuesta didáctica.**
 - 8.2. Concreción de la propuesta didáctica.**
 - 8.3. Exposición de la propuesta didáctica.**

CAPÍTULO 5: RESULTADOS.

- 1. Resultados de las fases de análisis.**
- 2. Resultados de los grupos de discusión.**
- 3. Resultados de los diarios.**
- 4. Resultados de los cuestionarios.**

CAPÍTULO 6: CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS.

- 1. Consecución de los objetivos.**
- 2. Análisis global de la experiencia.**
- 3. Discusión de los resultados.**
- 4. Limitaciones de la investigación**
- 5. Futuras líneas de investigación.**
- 6. Reflexiones personales.**

4

CAPÍTULO MÉTODO DE LA INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO 4: MÉTODO DE LA INVESTIGACIÓN

*“El éxito de la educación depende del talento,
de la competencia y de la creatividad
de las personas que se dedican a ella”*
(Goéry Delacôte, citado por Marín, 2007, p.1)

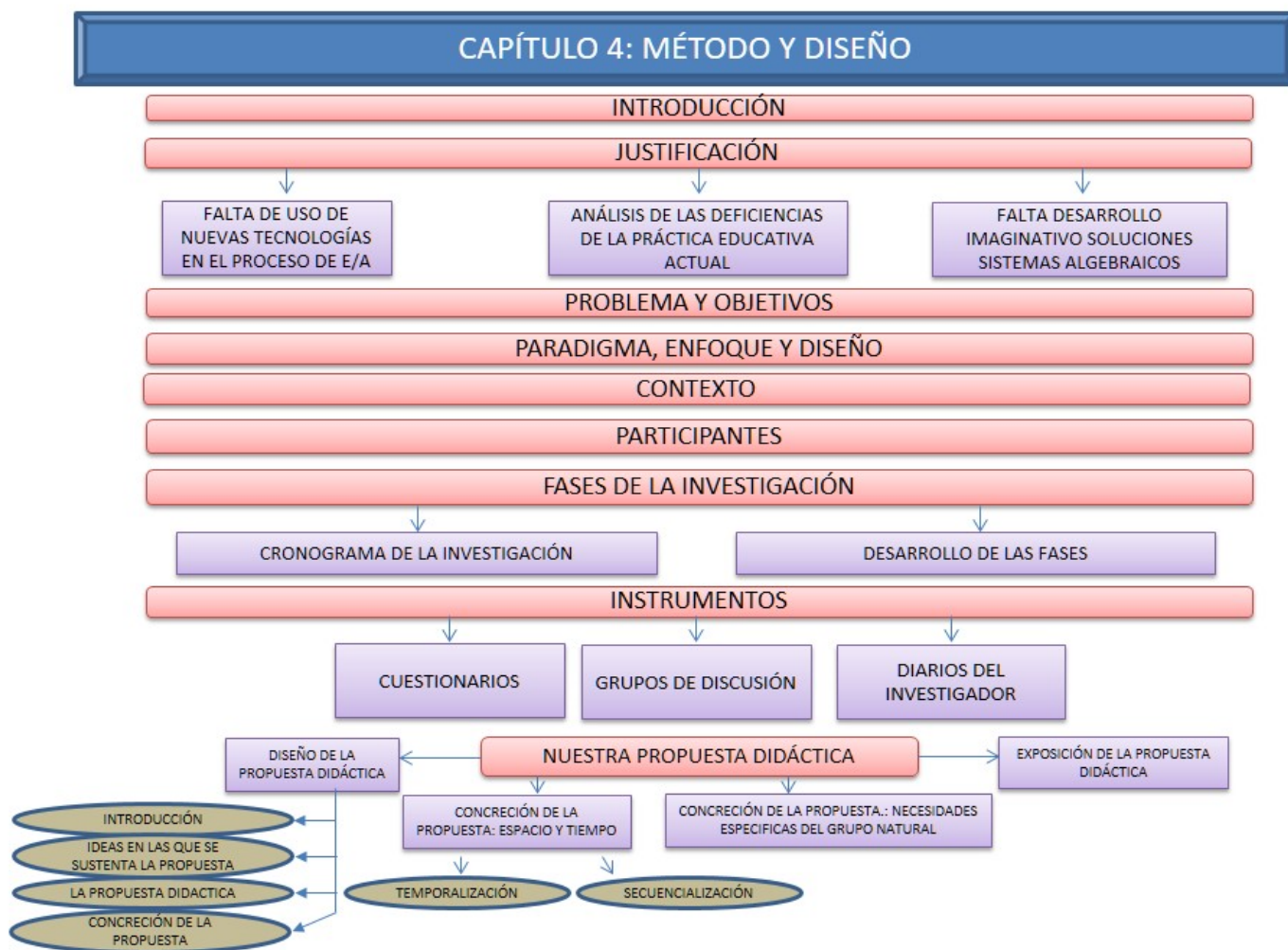


Figura 24. Mapa conceptual capítulo 4. Fuente: Elaboración propia.

1. JUSTIFICACIÓN.

El origen de este estudio tiene dos vertientes bien diferenciadas.

La primera de ellas es el marco legislativo. En la legislación se evidencia, como ya se expuso en el capítulo 3, que el uso de las TIC es obligatorio en el proceso de enseñanza-aprendizaje, así como el de la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales:

➤ La competencia digital y el tratamiento de la información.

En el Anexo III del presente trabajo se recoge el estudio que realizamos sobre lo que se entiende por competencia digital. El desarrollo de esta competencia conlleva trabajar en el aula utilizando las TIC, lo que hace que la intersección de estas en los procesos de E-A tenga que ser una realidad. Se llegó a la conclusión de que la legislación vigente recoge su uso de manera obligatoria, no sólo al tener que trabajar el tratamiento de la información y la competencia digital de manera transversal desde todas las áreas, sino también, por los estándares que establece para la calificación de los alumnos en el uso de las mismas (Anexo I).

➤ Los sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, como contenido/estándar en la legislación.

En el Anexo I se recoge un estudio sobre las dos últimas legislaciones que rigen los contenidos y estándares de las matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria. Se puso de manifiesto que esta parte de la materia queda englobada en el tercer curso de la ESO, aunque aparece como contenido (pero sin su correspondiente estándar evaluable) para el segundo curso.

La otra vertiente está sustentada en la observación, por parte de la investigadora, a lo largo del desarrollo de su docencia en el colegio Hispania de Cartagena. Durante ésta, la docente aprecia una serie de evidencias recogidas por medio de los exámenes ordinarios así como de su experiencia docente, que ponen de manifiesto el problema existente (falta de entendimiento de las clasificaciones de los sistemas lineales de dos ecuaciones y dos incógnitas) en el área de las matemáticas.

Pasamos a exponer las evidencias que hicieron necesario nuestro estudio.

➤ Análisis de las deficiencias de la práctica educativa actual.

La transmisión del conocimiento en el área del álgebra se caracteriza a menudo como una síntesis en la que el alumnado aprende las reglas nemotécnicas para el tratamiento de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones, dejando de lado los razonamientos que subyacen (reglas de transposición, sistemas equivalentes, entre otros).

Por otra parte, la enseñanza de la geometría se ha sustentado sobre dos posibilidades, una basada en el lenguaje algebraico y el

álgebra de vectores, la otra mediante la memorización de teoremas y fórmulas. Ninguna de las dos deja espacio a la intuición, necesaria para un buen aprendizaje geométrico y lógico.

Cuando, finalmente, el alumno pasa a estudiar las funciones (análisis), se limita a un trabajo memorístico, sin razonar el porqué una función tiene una u otras características, cuál es su representación, de qué depende su dominio, la base de todas sus características, la relación entre el enunciado y su escritura algebraica, etc.

Tras todo lo expuesto y junto a nuestra práctica como docente creemos que los problemas y dificultades que subyacen en los estudiantes en esta parte de la materia se pueden englobar en tres ejes de procedencia:

- Procedentes de la propia dificultad de los conceptos involucrados.
- Procedentes de deficiencias cognitivas de los propios alumnos.
- Procedentes de la práctica educativa.

Nuestra línea de investigación intentará suplir la deficiencia puesta de manifiesto en tercer lugar apoyándose en las TIC y buscando el desarrollo de la percepción visual para tratar de minimizar las dificultades cognitivas y de conceptos que sabemos existentes. Creemos que, de este modo, se podrá mejorar la comprensión, enfocando a los estudiantes a la adquisición de estrategias basadas en razonamientos, no en la memorización. Intentaremos basarnos en un aprendizaje entre iguales en donde el trabajo colaborativo alcance mayor relevancia esperando que, así adquieran mayor confianza, estimulando la participación e interacción entre los discentes para lograr mejoras en el aprendizaje significativo.

El trabajo se basará al mismo tiempo en el convencimiento de que, cuando los estudiantes pueden usar herramientas tecnológicas, en este caso un software, fundamentalmente, que le resuelva el sistema, ellos se concentran en tomar decisiones, razonar... tal y como hemos visto en los estudios recogidos en el bloque I sobre la didáctica de las matemáticas y el papel de las TIC como recursos de enseñanza.

Por medio de estos recursos y metodologías, se velará por construir el conocimiento, no limitándose el docente a la simple transmisión en el aula. Para ello, se deberá recurrir a una mayor motivación del alumnado, pudiendo encontrar enfoques nuevos que inviten a que el discente se sorprenda, intente conjeturar, descubra... intentando abandonar la lección magistral para evitar de este modo la repetición de patrones, sin entendimiento de las técnicas.

Rico (s.f.b) señala:

Sólo hay aprendizaje, realmente, cuando el alumno llega a integrar en su estructura lógica y cognoscitiva los datos procedentes de la

realidad exterior, en un proceso estrictamente personal, lleno de tanteos, de avances y retrocesos, que el profesor puede orientar, eligiendo las situaciones didácticas más apropiadas, en cada momento, a las posibilidades intelectuales y cognoscitivas de los alumnos, más cercanas a sus intereses espontáneos, a sus motivaciones y deseos. Estas situaciones didácticas pueden incluir el recurso a la información externa, al uso de una bibliografía adecuada. Pero estos recursos deben ser inducidos por el proceso de descubrimiento de los niños y sentidos como una necesidad por ellos. (Rico, s.f.b. p.1)

➤ Falta de desarrollo imaginativo de las soluciones de los sistemas algebraicos.

La enseñanza actual de esta parte de la materia está basada, fundamentalmente, en la adquisición de destrezas válidas para la resolución de estos sistemas por tres métodos algebraicos fundamentales: sustitución, igualación y reducción, que los discentes asumen tras su formación aritmética (véase Anexo VIII).

Se ha de resaltar que “existen multitud de estudios que demuestran que esta enseñanza basada en destrezas y técnicas aplicadas acríticamente conduce a resultados indeseados, como la llamada “ilusión de linealidad””, Oller (2012,1) haciendo que los discentes conviertan el aprendizaje de las matemáticas en procesos carentes de razonamientos.

En esta parte de las matemáticas, donde el alumno podría, y debería, hacer un pequeño ejercicio mental para imaginarse las rectas, los puntos de corte entre las mismas, las pendientes. Los discentes presentan una gran falta de desarrollo abstracto. Esta capacidad se desarrolla dentro del proceso madurativo del alumno. Aun así, es muy importante que empiecen a visualizar en el plano todas estas características, ayudando, de este modo, a dar el paso a lo abstracto.

En la práctica cotidiana de la enseñanza, es frecuente encontrar al alumno buscando cuál de las fórmulas desarrolladas en clase puede utilizarse para resolver el problema. Tratan el proceso como si las matemáticas consistiesen en “la caza de la fórmula”. Frente a esto, los expertos utilizan el conocimiento de una forma diferente.

Conceptualmente, el papel del pensamiento visual es tan fundamental para el aprendiz del cálculo que es difícil imaginar un curso exitoso del cálculo que no enfatice los elementos visuales del tema. Esto es especialmente verdad si el curso tiene la intención de promover un entendimiento conceptual, el cual es ampliamente reconocido como carente en la mayoría de los cursos de cálculo como es actualmente enseñado. La manipulación algebraica ha sido enfatizada en demasía y... en el proceso el espíritu del cálculo se ha perdido (Zimmermann, 1990, p.136).

A partir de las ideas conceptuales básicas, propias de la materia y aplicando una visión geométrica del problema, el experto llega al razonamiento para encontrar la solución. La idea expuesta del pensamiento visual presenta diversas ventajas, entre ellas que tiene una carga memorística menor y que asienta mejor los conocimientos y su significado en la mente del alumno, lo que le permitirá recordarlos mejor. Queremos que el material mostrado por el ordenador y la propuesta didáctica completa le ayude a ello, intentando que el razonamiento destaque sobre la mecanización matemática.

Nos hemos centrado en el tema de los sistemas lineales, que lleva implícito el estudio de las rectas. Recordemos que las ecuaciones que representan las rectas son de grado uno y tienen la forma $mx+ny=c$. Basándonos en las leyes de transposición de términos, podemos escribirlas (si n es distinta de cero) en la forma $y= ax+b$, siendo “ a ” y “ b ” números reales, sin restricción alguna. Recordemos que la pendiente, es decir la inclinación de la recta, viene dada por “ a ”, siendo b la ordenada en el origen. La recta será creciente si “ a ” es positiva, y si es negativa, será decreciente. Tendremos una recta horizontal (función constante) cuando “ a ” sea uno e “ y ” cero. La forma general que se usa para escribir los sistemas de ecuaciones lineales, están formados por dos rectas, en una expresión del tipo:

$$\begin{cases} mx + ny = c \\ m'x + n'y = c' \end{cases}$$

Al estar éstos formados por dos rectas, éstas podrán ser paralelas, secantes o coincidentes, lo que conlleva a una clasificación dependiendo del número de soluciones que presenten. La solución de un sistema no es más que el conjunto de pares (x, y) que hacen ciertas las dos igualdades a la vez. Es decir, el conjunto de puntos comunes a las dos rectas. Si son secantes, quiere decir que solo se cortan en un punto, por lo que solo existe un punto, determinado por las dos coordenadas (x,y) , común a ambas rectas. A este tipo de sistemas se les llama Sistemas Compatibles Determinados (una única solución). En cambio si las rectas son coincidentes, todos los puntos de las dos rectas coinciden, dando lugar a un sistema del tipo Compatible Indeterminado (infinitas soluciones). Tendremos un Sistema Incompatible cuando no exista punto alguno en donde se corten las rectas, es decir, cuando ambas rectas sean paralelas.

➤ Falta de uso de las nuevas tecnologías en el proceso de E/A.

En el actual proceso de enseñanza-aprendizaje no se trabaja por medio de las TIC ni se fomenta la competencia digital. La causa puede ser que la mayoría del personal docente proviene de un estilo de enseñanza tradicional, cuyo pilar mayor estaba en la enseñanza por medio de las clases magistrales. El uso de las TIC se sustenta en distintos cimientos, todos ellos justificados por una sociedad que no cesa en su proceso de desarrollo. Dichos cimientos los podemos enumerar como siguen:

- La escuela no debe limitarse a la enseñanza de una o varias materias. A través de los colegios e institutos se debe formar a los niños para una vida futura (capítulo uno). En ella, las nuevas tecnologías seguramente estarán presentes, por lo que es necesario que se familiaricen con ellas y sepan tratarlas desde un nivel no exclusivamente lúdico, véanse los Anexos I, II y III.
- La inserción de las tecnologías en el proceso de enseñanza-aprendizaje puede hacer que el alumno demuestre una mayor motivación. De este modo, por medio de los materiales multimedia, podrán resolver problemas matemáticos, observando, de manera más global e ilustrativa, todo el proceso, lo que les ayudará en su estudio. Estas características fueron estudiadas en el capítulo tres de la tesis.
- Pero, fundamentalmente, la enseñanza con las nuevas tecnologías puede mejorar el aprendizaje. Usadas correctamente, las nuevas tecnologías pueden facilitar el aprendizaje constructivista. También la enseñanza más individualizada, ya que el alumno puede trabajar a su ritmo, desde casa, de manera asíncrona (como quedó justificado en el capítulo dos y tres del presente trabajo).

En la particularidad propia de nuestro estudio, los sistemas de ecuaciones lineales, al tener la posibilidad de visualizar la solución gráfica de los mismos en la pantalla (por medio de las TIC), facilita, incluso antes de que adquieran todos los conocimientos analíticos, el que los alumnos vayan observando de qué tratan, qué significan las ecuaciones...lo que les ayudará a asimilar mejor los procesos analíticos y a entender el razonamiento que hay detrás de éstos. Usando apropiadamente la tecnología, los discentes pueden aprender más profundamente y mejor las matemáticas (Boears Van Oosterum 1990; Dunham y Dick 1994; Groves 1994, citado por el Consejo Estadunidense de Profesores de Matemáticas-NTCM-2003; Rojano, López y López 1996;).

Por todo lo expuesto y para intentar mejorar la práctica educativa diseñaremos un ambiente enriquecido por las TIC, ya que éstas (como ha quedado demostrado en el marco teórico) nos ofrecen nuevas posibilidades de comunicación y de acceso a la información.

Creemos que por medio de este trabajo, podemos lograr que primen los procesos lógicos y no los conocimientos estáticos y memorísticos. Así busquemos favorecer el paso a la abstracción por medio de herramientas externas y auxiliares como las nuevas tecnologías. Éstas nos acercarán al objeto simbólico matemático pudiendo llegar con mayor facilidad al entendimiento de conceptos más complejos. De esta forma, el alumno podrá construir su conocimiento matemático, por medio de la experimentación y dejando mayor espacio para la discusión entre todas las relaciones que intervienen dentro del sistema al verse resuelto gráficamente o al poder saber con antelación su solución.

2. PROBLEMA Y OBJETIVOS.

Toda nuestra investigación tiene como finalidad la mejora de la enseñanza por medio de una propuesta didáctica completa que, a través de las TIC, pueda mejorar la enseñanza de esta parte de las matemáticas. Con este proyecto queremos conseguir una mejora, por parte de los estudiantes, en la comprensión de las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales de dos variables aumentando también la motivación hacia el área de las matemáticas. Y esto por medio de estas tecnologías, basándose en los tres pilares básicos de este tema: las rectas, los sistemas y la clasificación de los mismos.

En tiempos pasados, Eisenberg y Dreyfus (1990) demostraron que tanto profesores como alumnos presentan una dificultad para visualizar las matemáticas y que este hecho se debe, por parte de los alumnos, no sólo a una actitud negativa hacia el aprendizaje de esta materia, sino también a las dificultades que presentan para aprenderla debido a su carácter, en ocasiones, abstracto (no nos adentramos en los motivos del profesorado pues esta investigación se centra en el discente).

Ha quedado probado por medio de nuestra experiencia, exámenes, y pruebas variadas, realizadas a lo largo de nuestra experiencia laboral y educacional en nuestro sistema educativo, que aunque los estudiantes aprenden a resolver los sistemas de ecuaciones lineales de manera analítica, no adquieren las competencias propias de la visualización de los mismos. Los alumnos aprenden lo que significa que un sistema sea Compatible Determinado, Compatible Indeterminado e Incompatible, como se ha constatado por medio de la práctica diaria en el aula y confirmado por medio de los cuestionarios de los que hablaremos más adelante, pero no relacionan estas ideas con las posibles soluciones. Nos centraremos en que el alumnado entienda y sepa manejar las ecuaciones correspondientes a funciones de tipo afín, lineal y constante, dadas ya en el curso anterior, segundo de la ESO, y repasadas de nuevo en éste, tercero. Se considera conveniente que la mecanización de las matemáticas no sea lo único que debe aprender el alumno, sino que esta materia, siempre caracterizada por los procesos lógico-deductivos, esté acompañada de distintos materiales que ayuden al desarrollo del alumnado en sus procesos mentales. Una vez que el alumno entienda, de manera gráfica y analítica, las variables de las rectas y vea las relaciones que pueden existir entre ellas (relacionando las pendientes y la ordenada en el origen) se podrá pasar a los sistemas mencionados con anterioridad.

En síntesis, nuestro problema de investigación es la búsqueda de mejoras, por medio de las TIC, para la enseñanza de los sistemas lineales, buscando que el discente entienda los conceptos y no limitando la enseñanza a la tautología, esperando que los alumnos aprendan las relaciones entre los distintos coeficientes, ya sean números naturales, enteros, racionales o reales, que intervienen en las ecuaciones de las rectas y su relación con la representación gráfica de las mismas.

Pasamos a exponer los objetivos generales de nuestra investigación.

- Diseñar un ambiente enriquecido con TIC que integre una propuesta didáctica para mejorar la enseñanza de los sistemas lineales de dos ecuaciones y de dos incógnitas (sistemas de ecuaciones lineales, lenguaje algebraico y representación de los mismos) en 3º de la ESO.
- Evaluar la implementación de la propuesta didáctica.

En el siguiente cuadro, tabla 6 podemos observar los objetivos generales así como los específicos.

Tabla 6. Objetivos generales y específicos. Fuente: elaboración propia

GENERAL	ESPECIFICO
DISEÑO DEL AMBIENTE ENRIQUECIDO CON TIC.	EVALUACIÓN, SELECCIÓN Y DISEÑO DE HERRAMIENTAS, CANALES Y RECURSOS DIGITALES PARA LA CONCRECIÓN DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA
EVALUACIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA	EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE DE LOS ALUMNOS
	EVALUACIÓN DE LA MOTIVACIÓN DE LOS ALUMNOS
	EVALUACIÓN DE LAS METODOLOGÍAS DISEÑADAS
	EVALUACIÓN DEL PROCESO

3. PARADIGMA, ENFOQUE Y DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN.

Para desarrollar nuestra investigación, nos hemos basado en el método denominado Análisis Didáctico (Gómez, 2002) que tiene como base fundamental el “procedimiento en virtud del cual el profesor planifica, lleva a la práctica y evalúa una unidad didáctica, una hora de clase o una porción de una hora de clase” (Gómez, 2002, 257). El esquema de dicho proceso se puede consultar en la figura 25. Hemos de destacar que no es algo novedoso en educación pues otras investigaciones ya han sido sustentadas en el mismo, como las llevadas a cabo por el propio Gómez (2004), por Lupiáñez y Rico (2008) o por Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008), entre otros.

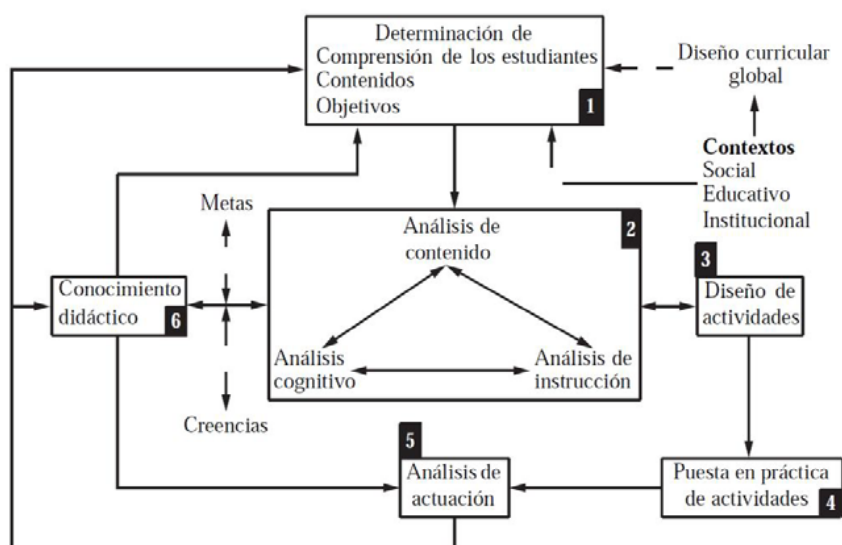


Figura 25. Ciclo del análisis didáctico. Fuente: Gómez ,2002.

El paradigma cualitativo desarrollado se basa en los experimentos de diseño (Brown 1982; Collinns, 1992), en la investigación del diseño (Cobb, 2001; Collins, Edelson, 2002, Josep & Bielaczyc, 2004), en la investigación del desarrollo (Van den Akker, 1999) y en la investigación formativa (Reigeluth y Frick, 1999, Walker, 1992, citado por Wang y Hannafin, 2005).

Nuestra investigación, es similar a la de otros trabajos como los de Castro (1994), Gairín (1999) y Escolano (2007), Oller (2012), por ejemplo, y está englobada en la metodología denominada Investigación-Acción. Una de las características fundamentales de esta metodología es aquella en la que destaca que el investigador desempeña un doble papel al ser también docente en el aula, logrando así que no exista brecha entre los casos prácticos y el diseño de la investigación. (Lewin, citado por Elliot, 1990). Además, podemos justificar dicha decisión porque este método de investigación se fundamenta, en nuestro caso, en la reflexión sobre la práctica educativa, con la finalidad de mejorar la calidad de dicha práctica (paradigma socio-crítico) docente (McNiff, 1992) a través de una análisis reflexivo (Kemmis y McTaggart, 1988).

Recurriendo a Oller (2012, p. 10) exponemos:

A la hora de detallar con mayor precisión la metodología que utilizaremos podemos recurrir a diversos autores. Así, atendiendo a la clasificación de Arnal et al. (1992) podemos decir que nuestro trabajo se halla en la intersección de dos de las categorías de la escuela lewiniana:

- Lo consideramos dentro de la categoría de investigación-acción diagnóstica puesto que está enfocado hacia la recogida de datos y su interpretación realizando un diagnóstico y enunciando medidas de acción.
- Lo consideramos dentro de la categoría de investigación-acción empírica ya que se estudia un problema social mediante una acción que supone un cambio tratando de valorar sistemáticamente los efectos que tal cambio produce.

A la vez, nuestra investigación está basada en el diseño y desarrollo por medio de una metodología sistemática y flexible sustentada en el análisis, diseño, desarrollo e implementación interactivos (Cobb, Confrey, DiSessa, Lehrer y Schauble, 2003; Wang y Hannafin, 2005), “una serie de aproximaciones en las cuales se intentan producir nuevas teorías, artefactos y prácticas que pueden tener un impacto potencial en el aprendizaje y la enseñanza en una configuración naturista” (Barab y Squire, 2004), intentando desarrollar la innovación educativa en escenarios educativos cotidianos del día a día de los discentes (Bell, 2004). Toda esta metodología toma como eje fundamental la evolución de las propuestas diseñadas.

Por último, tras las indicaciones de Oller (2012) que, recurre a autores como Stake (1994), nuestra investigación también se podría calificar como estudio de caso instrumental dado que se diseña e implementa una experiencia curricular. Delimitamos nuestro trabajo en los términos siguientes:

- Es una investigación aplicada en cuanto a su finalidad. Esto es debido a que se desea mejorar el proceso de enseñanza y para ello se modifica el mismo.
- Es un estudio de alcance temporal. Se recaban datos durante siete cursos académicos
- Respecto a su objeto, se trata de una investigación de tipo descriptivo. Siempre se desea descubrir e interpretar las situaciones vividas en el aula.
- Por el marco, la investigación desarrollada es de campo. Siempre se trabaja en el aula con grupos de estudiantes.
- Es una investigación evaluativa pues se introducen cambios, en un proceso ya existente, y se valorarán los efectos que de estos. Oller (2012, p.10)

Debemos resaltar que nuestra investigación tiene también una metodología denominada de “Diseño y Desarrollo” que posee las siguientes

características (TDBRC- The Design Based Research Technology-,2003; Wang y Hannafin, 2005; Cobb et al. 2003):

Los objetivos principales del diseño de entornos de aprendizaje y las teorías de desarrollo del aprendizaje están entrelazados.

El desarrollo y la investigación tienen lugar a través de continuos ciclos de diseño, promulgación, análisis y rediseños.

La investigación en diseños debe conducir a compartir teorías que ayuden a comunicar implicaciones relevantes para los practicantes y otros diseñadores educativos.

La investigación debe tener en cuenta cómo funcionará el diseño en entornos reales. No solo debe documentar el éxito o el fracaso, sino también hacer hincapié en las interacciones para ajustar nuestro conocimiento sobre los problemas envueltos.

El desarrollo de dichas cuentas se basa en métodos que se pueden documentar y conectar, procesos de aprobación a los resultados de interés. (Reverte 2014, p.106).

Durante todo el proceso de diseño educativo debemos tener presentes los siguientes niveles (Collins et al. 2004):

- Nivel Cognitivo: Hemos de saber los conocimientos previos de los discentes antes de adentrarse en la experiencia innovadora y hacer un seguimiento para ver si varían con el tiempo.
- Nivel interpersonal: Intentando estudiar la relación existente entre docentes y discentes.
- Nivel de grupo o clase: Para conocer durante todo el proceso los posibles problemas que se den entre los alumnos, midiendo la participación de los mismos...
- Nivel de recursos: Estudiando los medios que se poseen y el manejo de los mismos.
- Nivel institucional o de colegio: Comprobando el apoyo por parte de los organismos participantes.

Rescatando la idea expuesta con anterioridad, el diseño de la investigación lo fundamentamos en el modelo ADDIE (Analizar, Diseñar, Desarrollar, Implementar y Evaluar). Belloch (2013) explica las etapas del mismo: (figura 26)

- Análisis. Es la primera fase del modelo, el investigador fija las bases en función de las necesidades y de la situación actual tomando como partida las técnicas de investigación desarrolladas.
- Diseño. Tomando como partida los resultados de la fase de análisis, se diseña la propuesta didáctica, organizando los contenidos secuencialmente teniendo en cuenta los criterios pedagógicos.

- **Desarrollo.** La tercera fase consistirá en la producción de los contenidos diseñados en la fase anterior, tanto medios físicos o hardware como programas o software específico.
- **Implementación.** En esta fase se aplican en clase con los alumnos los resultados de la fase de desarrollo, con especial hincapié en que se lleve a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje de la mejor forma posible.
- **Evaluación.** El último punto evalúa cada una de las fases anteriores, pudiendo adoptarse una evaluación sumativa, al final de todo el proceso, o formativa, durante las distintas etapas y entre las mismas, pretendiendo así la mejora antes de la fase de implementación.

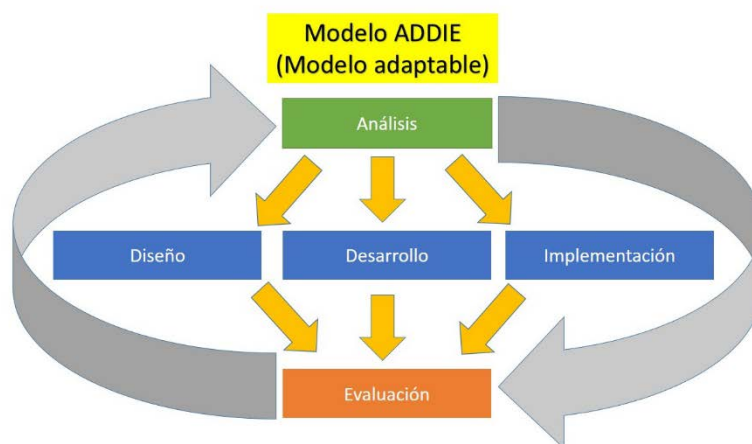


Figura 26. Esquema del modelo ADDIE. Fuente: Elaboración propia

Señalamos como características principales de este modelo:

- Está basado en la creación y aplicación de materiales didácticos de diferente naturaleza.
- Las fases son secuenciales e interrelacionadas
- El producto de cada fase es el elemento mínimo de la que le sigue.
- Es dinámico, flexible, cíclico e interactivo, no siendo rígido.

Debido a que esta investigación se desarrollará en un “ambiente enriquecido con TIC” y que la “propuesta didáctica” tendrá como medio de recursos y materiales tecnológicos, tendremos presentes los conceptos de “diseño tecno-instruccional o tecno-pedagógico” (Coll, 2008)

- **Dimensión tecnológica.** Haciendo una correcta selección de las herramientas tecnológicas (plataforma virtual, las aplicaciones de software, los recursos multimedia, etc) adecuadas para el proceso de enseñanza en el que nos encontramos, estudiando sus ventajas e inconvenientes.
- **Dimensión pedagógica.** Para desarrollar de manera correcta esta dimensión es preciso tener presentes las características de los destinatarios, el análisis de los objetivos/contenidos y/o

competencias, la planificación de las actividades, la preparación de un plan de evaluación de los procesos/resultados...

Las distintas acciones desarrolladas en nuestra investigación se pueden observar a continuación (figura 27)



Figura 27. Esquema de acciones de la investigación.
Fuente: Elaboración propia

Durante la investigación se integran instrumentos cuantitativos y cualitativos pues, combinando datos de ambas naturaleza, se podrá hacer un estudio de manera global y completa. Explorando qué datos provocan determinadas consecuencias, pudiendo hacer cambios o refuerzos sobre aquellos aspectos que veamos necesarios, y obtener de todo ello una gama de explicaciones ricas y fructíferas. Nuestro escenario son varios entornos reducidos en los que se introducirán las modificaciones pertinentes conforme la investigación avance y los análisis de las consecuencias del estudio por parte del investigador y profesor continúen.

Como conclusión podemos indicar que este tipo de diseño, con todo lo expuesto, es extensible (iterativos), intervencionista (innovadores y basados en el diseño) y orientada a trabajos reales en casos prácticos (Cobb et al, 2003). Podemos destacar los siguientes principios en nuestra investigación (Reverte 2014):

- Principio A: Implementar los métodos de investigación de manera sistemática y objetiva.
- Principio B: Analizar datos inmediatamente, continuamente y retrospectivamente.
- Principio C: Refinar el diseño constantemente partiendo de un plan inicial que debe ser flexible.

Recordaremos (De Benito y Salinas, 2016) que nuestro proceso de investigación siempre ha presentado dos focos. La investigación, para poder diseñar y obtener, tras las mejoras pertinentes, nuestro producto, a la vez que, se deseaba aportar datos que pudiesen contribuir en los procesos de diseño. Todo ello, en referencia, a los distintos aspectos que intervienen en ésta trabajo: libros de texto, aplicaciones de ordenador, métodos de enseñanza, planes de organización, estrategias didácticas...

Por último resaltar que “tendremos que esforzarnos en conseguir, combinando nuestra pericia y conocimiento de las teorías conductistas, constructivistas y cognitivistas del aprendizaje con otras disciplinas (la multimedia, las ciencias humanas, la ingeniería de sistemas, las telecomunicaciones, etc.) diseñar y ofrecer las soluciones más adecuadas a las diferentes situaciones de aprendizaje y mejorar los resultados” (Gillespie, citado por Guárdia, 2000, p.174). En la educación la tecnología es un medio, muy importante, pero no un fin.

4. CONTEXTO.

El contexto de esta investigación es el centro educativo Colegio Hispania, en la ciudad de Cartagena, provincia de Murcia. Es un centro concertado de Educación Infantil, Primaria y Secundaria y privado de Bachillerato y Primer Ciclo de Educación Infantil.

El centro cuenta con 80 profesores y 1100 alumnos, aproximadamente. Se está produciendo, desde que se comenzó con la investigación, un relevo en el profesorado, por la jubilación de la primera generación de docentes del centro.

Está enclavado en las inmediaciones del Barrio Peral de Cartagena. Cuando se inició el estudio estábamos asistiendo a una remodelación total de las inmediaciones, con la construcción de viviendas de alto precio y de centros comerciales y de ocio muy próximos. Aunque durante la crisis económica se detuvo la construcción de más edificaciones y el complejo de ocio no logró alcanzar éxito comercial. El proceso de llegada de inmigrantes de origen sudamericano está trayendo al centro alumnos de diversas procedencias como colombianos, ecuatorianos y peruanos. Al no existir la barrera de idioma, este hecho no ha supuesto ningún problema de adaptación. Las familias pertenecen, en su mayoría, a un nivel económico medio o medio-bajo. Los padres, en general, se interesan y cooperan con la Institución Educativa.

El centro cuenta con un ideario católico. Los docentes trabajan desde la perspectiva de que cada alumno es único y que la tarea educativa debe ir enfocada a la formación integral, tratando al estudiante como un ser racional, singular y libre, que formará parte de la sociedad del mañana. Trabajan en colaboración con los padres, fomentando la coordinación entre padres y docentes para el desarrollo de todas las capacidades del estudiante.

La investigación se centra en el segundo nivel de la Enseñanza Secundaria Obligatoria. En el tercer curso de la misma se imparten los contenidos propios de nuestro estudio y en cuarto curso se estudia el aprendizaje significativo (pero siendo los discentes los mismos que en el curso anterior estudiaban tercero y habían participado también en la investigación).

5. PARTICIPANTES.

Nuestra muestra es intencional, puesto que son los alumnos y los profesores del centro en el que trabaja la investigadora. En este sentido y debido a la muestra de los discentes, podríamos considerar nuestra investigación como un estudio de caso, dado que no pretendíamos realizar un estudio estadísticamente representativo de una población para extrapolar las conclusiones, sino que hemos enfocado nuestra propia investigación como una experiencia de innovación basada en una línea de investigación abierta sobre las TIC como recursos para la enseñanza de los sistemas lineales en la ESO. Aunque al mantenerse durante varios cursos y con distintos discentes hemos logrado una perspectiva globalizada y temporal. Se ha considerado que limitarse a explorar el contexto próximo no debe ser analizado como un elemento que devalúe el trabajo sino como un elemento de valor añadido, al ser un contexto, que la investigadora conoce bien y del cual puede extraer conclusiones de gran interés, no sólo basadas en los datos objetivos, sino también, en su percepción subjetiva. Y tal como hemos justificado al comienzo, la mirada del investigador, desde el enfoque socio-crítico en el cual nos hemos situado, es de enorme interés en la aproximación a la realidad investigada.

Durante todo el estudio (desde el curso escolar 2009/2010 hasta 2016/2017) las características del alumnado son las mismas, con edades comprendidas entre los 14 y los 16 años, pudiendo llegar a los 18 si han repetido en una o dos ocasiones durante su etapa educativa y que cursan 3º o 4º E.S.O. Al estar siempre en el mismo centro educativo, las particularidades del alumnado (de todo tipo de nivel y motivación) y del entorno no han sido modificadas.

En el curso 2009/2010 se detecta el problema, en el curso 2010/2011 se realiza el estudio exploratorio previo y en el 2011/2012 se realiza un estudio piloto. En referencia al alumnado destacamos que el estudio del curso 2009/2010 y del estudio exploratorio previo, curso 2010/2011, participaron estudiantes que no eran discentes de la investigadora. Pero, de esta muestra, sólo se obtuvieron los datos que indicaban que la materia propia de nuestro estudio no era adquirida de una manera correcta. A partir de ese momento, los estudiantes integrantes del estudio han sido seleccionados de manera intencionada pues son los alumnos de la investigadora y de este modo siempre se podrá constatar que se trata de una muestra heterogénea. Al mismo tiempo, el factor de que el aprendizaje depende también del profesor no era una variable a estudiar, puesto que todos los alumnos tenían el mismo. Destacar que la muestra del curso piloto, año escolar 2011/2012, en donde se desarrolló la primera implementación, es la más pequeña, al pertenecer al curso de referencia del primer nivel de diversificación curricular. Sólo en este curso se estudian los resultados antes y después de usar el programa informático, en el mismo curso académico.

Durante los cursos escolares 2012/2013 al 2016/2017 las muestras son igualmente los cursos de tercero de la ESO en los que la investigadora es docente, teniendo cada uno de ellos una media de unos 30 discentes. También los de cuarto de la ESO (consultar tabla 7). Más adelante veremos

que el último curso de esta etapa interviene en el estudio para medir la consecución o no del aprendizaje significativo o para ver sus opiniones sobre la extrapolación de las formas de trabajo llevadas a cabo en la investigación (siempre eran los alumnos con los que durante el curso anterior se había llevado a cabo la experiencia educativa diseñada). Aunque, también, con el diario del investigador se media en el propio curso escolar, en el mismo curso escolar (pero unos temas más avanzados, antes de dar los conceptos de funciones), con la muestra con la que se desarrolló la implementación de este trabajo.

Tabla 7. Tamaño muestral. Fuente: elaboración propia.

2009/10	2010/11		2011/12	
≈ 25 alumnos, observación directa de la investigación ≈ 50 alumnos, observación indirecta de la investigación	≈ 75 alumnos Estudio		≈ 20 alumnos (pertenecientes al grupo de referencia del 1 ^{er} nivel de diversificación curricular)	
	Exploratorio previo		Curso Piloto	
			Geogebra: Rectas	
Medición: Pruebas estandarizadas ordinarias (para los 75 alumnos)	Medición: Cuestionario diseñado en la investigación (para los 75 alumnos)		Medición: Instrumentos de la investigación.	

2012/13	2013/14	2014/15	2015/16	2016/17
Aprendizaje significativo → ≈20 alumnos (4 ^º ESO)	Aprendizaje significativo → ≈30 alumnos (4 ^º ESO)	Aprendizaje significativo → ≈30 alumnos (4 ^º ESO)	Aprendizaje significativo → ≈30 alumnos (4 ^º ESO)	Aprendizaje significativo → ≈30 alumnos (4 ^º ESO)
Implementación → ≈30 alumnos (3 ^º ESO)	Implementación → ≈30 alumnos (3 ^º ESO)	Implementación → ≈30 alumnos (3 ^º ESO)	Implementación → ≈30 alumnos (3 ^º ESO)	Implementación → ≈30 alumnos (3 ^º ESO)
Geogebra: Sistemas	Geogebra: Sistemas	Propuesta Didáctica Global	Hoja de ejercicios. NO TIC	Propuesta Didáctica Global
Medición: Instrumentos de la investigación.	Medición: Instrumentos de la investigación.	Medición: Instrumentos de la investigación.	Medición: Instrumentos de la investigación.	Medición: Instrumentos de la investigación.

Durante la investigación, aunque se habló con muchos de los docentes del departamento de matemáticas, el mayor apoyo se encontró en el que poseía mayor experiencia en la docencia de dicha materia, que coincidió en la afirmación de la problemática existente. En ocasiones puntuales se recurrió a profesores de otros seminarios o centros, para fomentar el intercambio de ideas por medio de los grupos de discusión. Tan solo en dos momentos puntuales se recurrió a los profesores de otros centros para saber las ideas que se tenían.

6. INSTRUMENTOS.

Para poder tener una idea más concreta de lo que queremos hacer, pasamos a exponer los tipos de instrumentos de recogida de información que se han utilizado a lo largo de la investigación. Haremos un estudio detallado de ellos, basándonos en los trabajos llevados a cabo por Barroso y Cabero (2010).

Tras la información de cada uno de ellos, describimos los instrumentos de recogida de información en los que nos hemos apoyado a lo largo de todo el estudio.

6.1. Cuestionarios.

El objetivo de los cuestionarios es averiguar lo que hacen, opinan o piensan los encuestados, mediante las preguntas realizadas por escrito que no precisan de la presencia del encuestador (Colás y Buendía, 1994, Buendía, Colás y Hernández, 1998). Es una forma de expresar características propias de un tema, por medio de un canal sencillo y fácil de recoger información amplia y rica (Hopkins, 1989).

- ✓ Instrumento propuesto para la recogida de información:

Se estudiará la eficacia de este planteamiento mediante la evaluación de la mejora de la comprensión cualitativa de estos conceptos, así como su repercusión.

Para la recogida y evaluación de dicha información proponemos emplear la herramienta o instrumento del cuestionario.

- ✓ Justificación:

Las causas y motivos por los que elegimos esta herramienta son:

- Económico.
- Elimina la interacción sujeto-entrevistador y las limitaciones que ello conlleva.
- No es necesaria formación para las personas que lo aplican.
- Puede asegurar el anonimato de los entrevistados.
- Permite evaluar y comparar las respuestas en distintos grupos.
- Sencillo y rápido de aplicar.
- Comodidad para los entrevistados en responderlo.

- ✓ Procedimiento:

El proceso seguido para su aplicación sigue el esquema siguiente:

1. Definir los objetos.
 - Evaluar la equipación tecnológica.
 - Evaluar los gustos por la materia de las matemáticas por parte de los dicentes.

- Evaluar la comprensión por parte de los alumnos del tema objeto de nuestro estudio.
 - Evaluar la repercusión de dicha mejora.
2. Definir la información a recoger.
 - Evaluación de los conocimientos adquiridos por el alumnado, en cuanto a la representación de rectas y clasificación de sistemas lineales (tanto antes de la puesta en marcha del programa/propuesta didáctica, como después).
 - Estudio sobre la equipación tecnológica, material, que poseen los alumnos.
 - Preguntas para conocer los gustos que tienen nuestros alumnos, referentes a esta materia.
 - Valorar el cuestionario más adecuado, para obtener las aptitudes intelectuales que poseen los alumnos y poder hacer una correlación con sus destrezas matemáticas. (EFAI, Evaluación Factorial de las Aptitudes Intelectuales, Anexo XV)
 3. Definir las preguntas a plantear.
 - Formulación clara, comprensible y breve.
 - La formulación de las preguntas no debe inducir a una respuesta.
 - Comprensión sencilla, la dificultad debe estribar en encontrar una respuesta, no en interpretar la pregunta.
 - Cada pregunta debe referirse a un único aspecto.
 4. Definir la población objeto de estudio.
 - El objeto de estudio serán alumnos de 3ºESO/4ºESO.
 5. Establecer los recursos disponibles.
 - Debemos definir los recursos disponibles y los necesarios, y en caso de no disponer de ellos, la manera de conseguirlos y el coste.
 6. Elaboración, revisión y evaluación por parte de los expertos de esta primera versión del cuestionario.
 - Este primer borrador servirá para que un conjunto de expertos lo evalúen y nos den una primera versión del cuestionario. Este paso se llevará a cabo cuantas veces sea necesario para cada cuestionario.
 7. Revisión del cuestionario y redacción definitiva.
 - En caso de ser necesario por haber realizado algún cambio, se procede a la redacción definitiva del cuestionario. Desarrollaremos dicha revisión en cada cuestionario.
 8. Implantación.

- Se procede a la realización definitiva del cuestionario para el centro de enseñanza.
9. Recogida y evaluación de datos, interpretación de resultados.
- Tras recoger los cuestionarios se procede a su evaluación e interpretación con ayuda de un programa informático.
10. Información final.
- A la vista de los resultados obtenidos y de su interpretación, se emite un informe definitivo con las conclusiones del estudio.

Se ha de señalar que como indica Hopkins (1989) también tiene algunos inconvenientes, como que el análisis requiera tiempo, las personas que lo elaboran han de tener una preparación, tiene dificultad el hecho de formular preguntas que exploren en profundidad el tema a estudiar.

6.1.1. Cuestionarios utilizados en esta investigación.

Cuestionario “Matemáticas en la enseñanza”.

Sabemos que en la enseñanza de las matemáticas son muchos los factores que intervienen, como la experiencia en el aula, las actitudes y gustos que presentan los alumnos, la predisposición, la motivación, los gustos personales...Esto hace que la predisposición ante ellas y el aprendizaje sean distintos para cada discente. Por ello, se diseñó un cuestionario (Anexo XII) que tenía por objetivo conocer los gustos de los discentes ante la asignatura de matemáticas, por si en alguna fase de la investigación este dato tomaba relevancia (se podría incluso estudiar si hay correlación entre el uso de las TIC en esta materia y el gusto hacia el aprendizaje de las mismas). Creímos de igual modo oportuno saber si los discentes conocían otros métodos de enseñanza-aprendizaje para las mismas, distintos de los tradicionales, usando otros soportes diferentes al “lápiz y papel”. Es decir, si se imaginaban aprender matemáticas usando los ordenadores y no solo por los canales tradicionales.

El cuestionario está compuesto por 6 preguntas que evalúan tres bloques temáticos diferenciados. El primer ítem mide el gusto del alumno hacia la materia, el segundo evalúa qué opinión tiene el discente sobre sus aptitudes para esta materia. En el último bloque, las preguntas 3,4,5 y 6 tienen como objetivo saber si los alumnos opinan que las matemáticas pueden trabajarse de una forma distinta a la tradicional. Destaca la última pregunta que recogerá si tienen deseo de aprender esta asignatura por medio de los ordenadores (ya que sabemos que, en este centro, con anterioridad, no se ha hecho con estos grupos pertenecientes al estudio).

Este cuestionario fue realizado por un grupo de profesores y ex-profesores de matemáticas y otras disciplinas, siendo validado por estos expertos.

El nacimiento de estas preguntas fue durante el curso 2010/2011, en el estudio exploratorio previo y en las fases primeras de la investigación, ya que se recogieron en el diario personal del investigador, con ocasión de los debates y de los grupos de discusión, llevados a cabo. Tras estas experiencias, se creyó oportuno que los alumnos contestasen a dichas preguntas de manera individual y anónima, pues se observó que los dicentes más retraídos no querían opinar y que alguno mostraba su temor a que “lo mirasen mal”, tanto si decía que le gustaba la materia o justo lo contrario. Además, nos dio la sensación que las respuestas se veían contaminadas, al escuchar las de otros compañeros. Además de que sería mejor tener todos los datos bien estructurados y recogidos. Por ello, tras hablarlo con un grupo de expertos en la enseñanza, se decidió pasárselas directamente a los alumnos. Aún habiéndolo usado previamente, se consideró oportuno tener una validación más adecuada, por lo que el método usado para este objetivo fue el de las entrevistas cognitivas realizadas a distintos alumnos durante los distintos cursos escolares. Dichos adolescentes fueron seleccionados cubriendo un amplio espectro, pues fueron de distintas clases, cursos, niveles sociales y curriculares. En este trabajo de campo quedó demostrado, entre otras cosas, que se entendían las preguntas, que las opciones para las respuestas eran válidas y que no quedaba fuera ninguna contestación que les gustase dar.

Cuestionario de Disponibilidad Tecnológica.

Este cuestionario se diseña para poder conocer las herramientas tecnológicas a las que tienen acceso nuestros alumnos (Anexo XVII). Partiendo del ya existente, realizado por Reverte (2014) se adecuó a nuestro entorno y se trabajó para poder presentárselo a los discentes.

Creímos importante conocer la disponibilidad tecnológica que poseían nuestros alumnos, los que iban a realizar esta experiencia, para que quedase expresamente manifiesto el conocimiento de la equipación tecnológica del entorno de nuestros adolescentes y sus hábitos de conexión a internet. De este modo, podríamos descubrir si solo usan estos dispositivos y conexiones, en caso de tenerlos, para el ocio o para estudiar. De esto modo también se podría plantear en la propuesta didáctica un aprendizaje síncrono y asíncrono, así como la utilización de un entorno de aprendizaje basado en las nuevas tecnologías y en el e-learning y b-learning.

Este cuestionario está formado por 14 preguntas en torno a dos dimensiones:

- Dimensión Equipación Tecnológica (seis preguntas). Se corresponde con los ítems 3, 4, 5, 6, 7, 8.
- Dimensión usos de internet (seis preguntas). Se corresponde con los ítems 9, 10, 11, 12, 13, 14.

Además de los datos de identificación, datos referentes a edad y sexo. Ítems 1 y 2.

Este instrumento de investigación ha sido validado por el Panel Internacional de Expertos en Tecnología Educativa (PI2TE) en <http://gte2.uib.es/panel/>

En el Anexo XVI, se encuentra la primera versión del cuestionario, la validación de los expertos y las respuestas dadas por los mismos, pudiéndose consultar la información referida al proceso de validación. Dicho proceso, Anexo X, dejó de manifiesto el siguiente estudio:

Los expertos han emitido valoración sobre la pertinencia y adecuación de las preguntas, los resultados son idénticos en ambos casos, obteniendo solo en 3 de las 14 preguntas que uno de los 4 expertos no ha emitido valoración, siendo en el resto de los casos favorable (78,57%).

Con respecto al orden y presentación, en 4 de las 14 preguntas un experto se ha abstenido de emitir juicio, siendo favorable en el resto de los casos (71,43%).

Con respecto al estilo, han emitido una valoración con 4 opciones: nada adecuado, poco adecuado, adecuado y muy adecuado. Las respuestas arrojan como media los siguientes resultados:

▪ Nada adecuado	Desierto
▪ Poco adecuado	1,79 %
▪ Adecuado	10,71 %
▪ Muy adecuado	82,14 %
▪ No contesta	5,36 %

Con respecto a la presentación, han emitido una valoración con 4 opciones: nada adecuado, poco adecuado, adecuado y muy adecuado. Las respuestas arrojan de media los siguientes resultados:

▪ Nada adecuado	1,79 %
▪ Poco adecuado	1,79 %
▪ Adecuado	17,86 %
▪ Muy adecuado	73,21 %
▪ No contesta	5,36 %

A continuación (gráficos 1-5) se muestran los resultados del análisis de nuestro cuestionario realizado por el juicio de expertos.

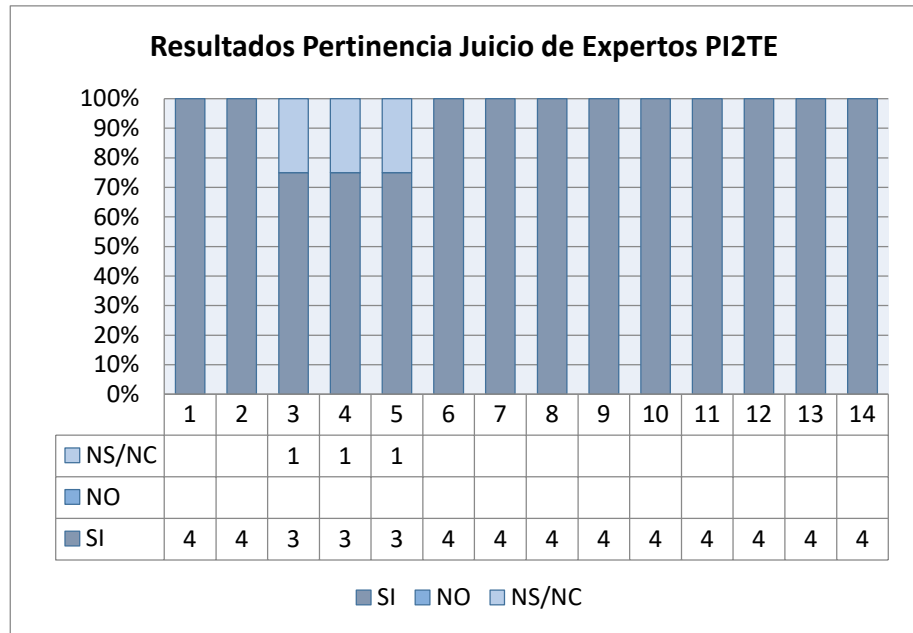


Gráfico 1. Respuestas sobre la pertinencia de las preguntas.

Fuente: Elaboración propia.

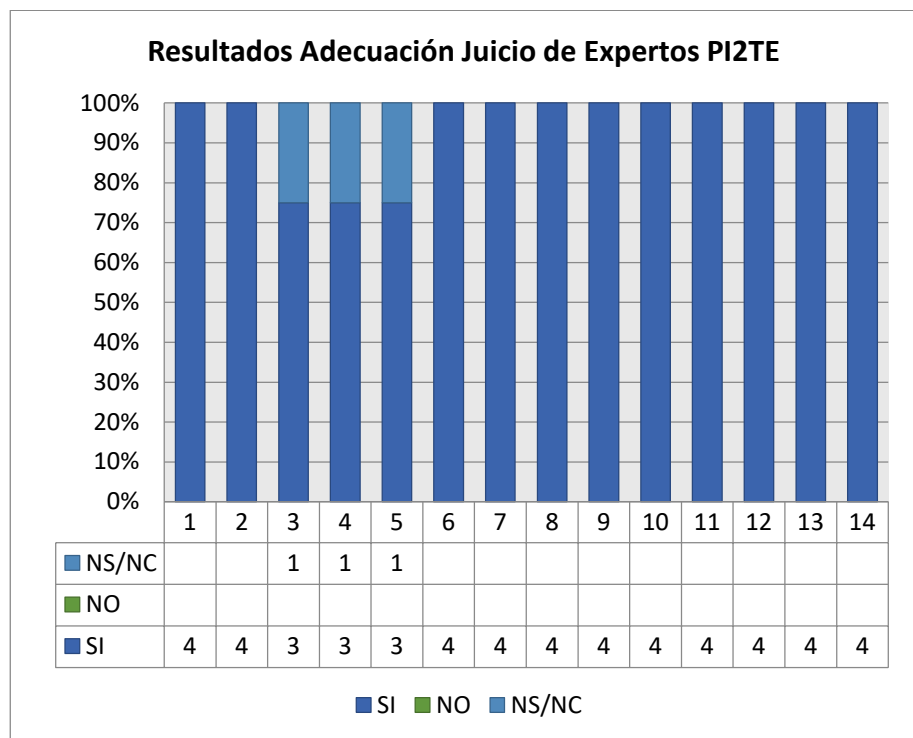


Gráfico 2. Respuestas sobre la adecuación de las preguntas.

Fuente: Elaboración propia

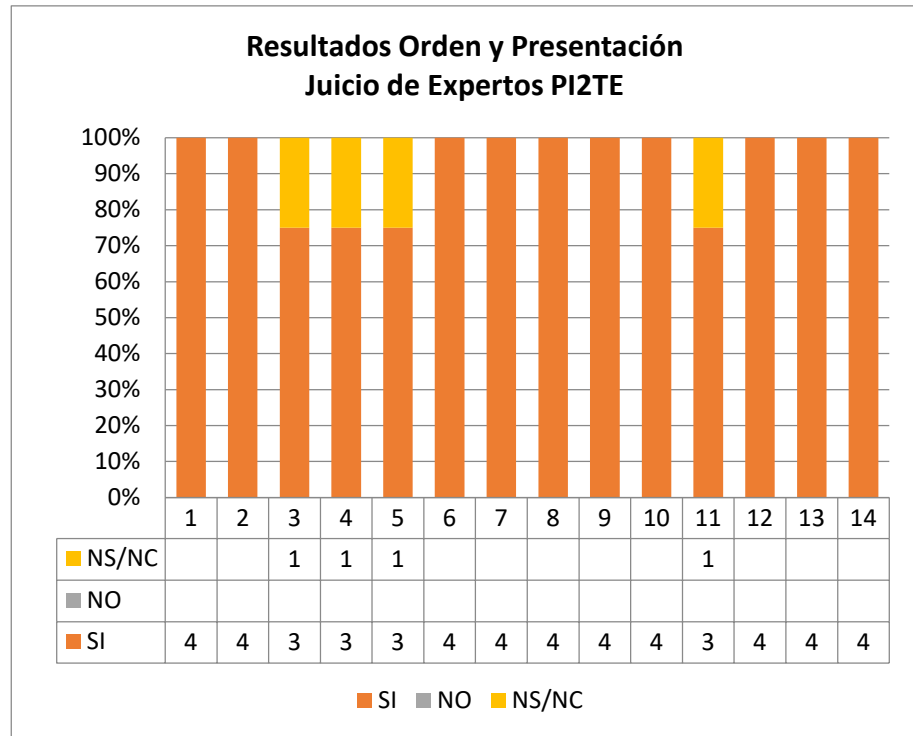


Gráfico 3. Respuestas sobre el orden y la presentación de las preguntas.
Fuente: Elaboración propia

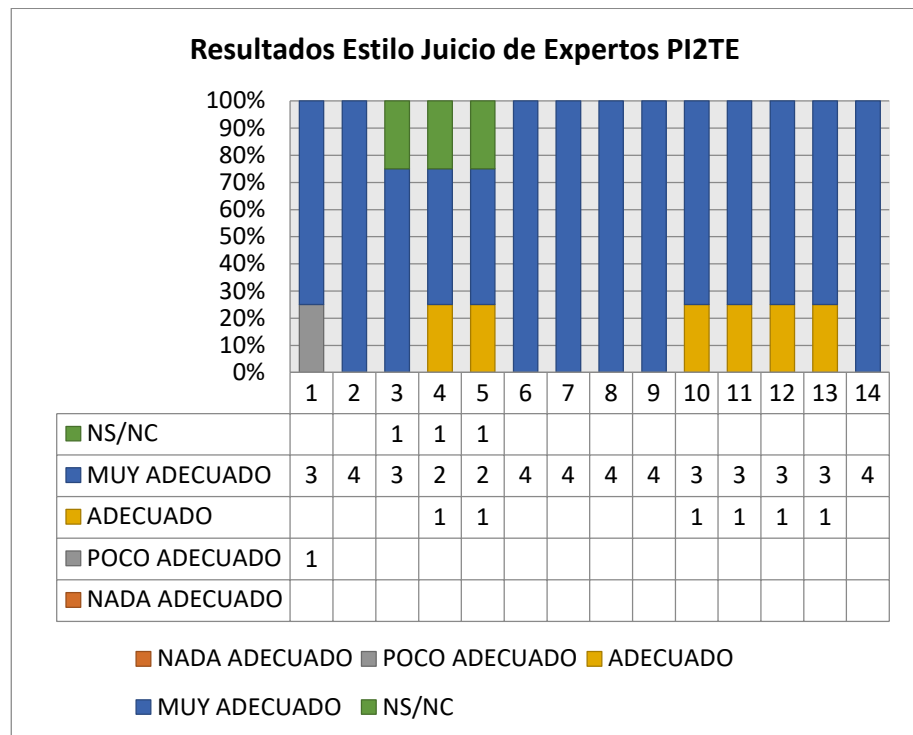


Gráfico 4. Respuestas sobre el estilo de las preguntas Fuente: Elaboración propia

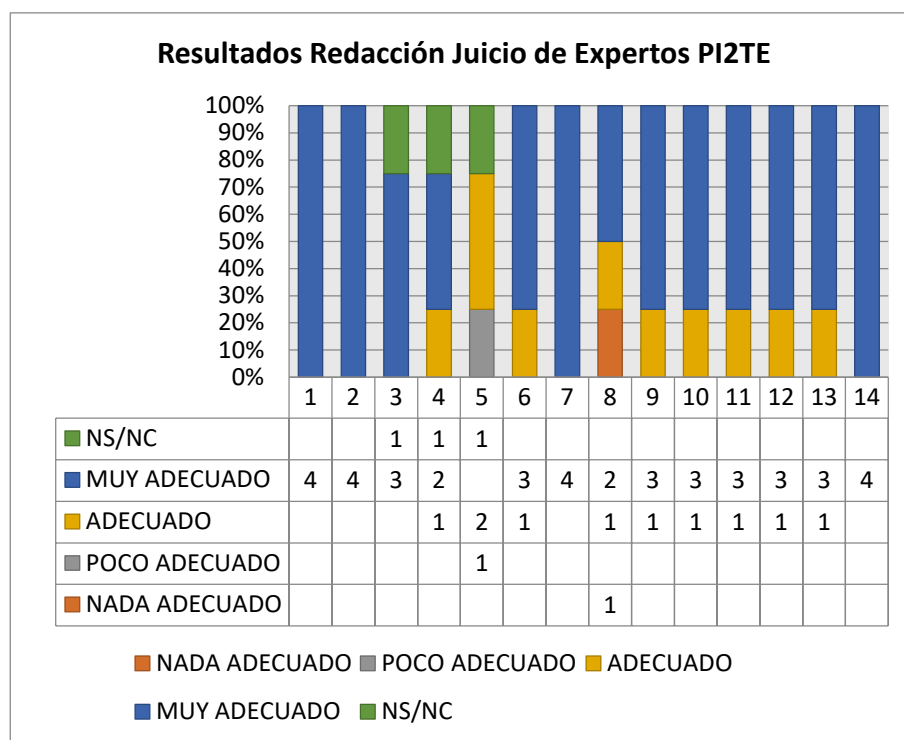


Gráfico 5. Respuestas sobre la redacción de las preguntas Fuente: Elaboración propia

Tras todo lo expuesto, se decidió hacer las modificaciones propuestas, Anexo XVIII, dando como resultado el cuestionario final. En el Anexo XVI y XVII se encuentran las dos versiones del cuestionario.

Cuestionario sobre conocimiento inicial de los sistemas.

El cuestionario que nosotros diseñamos y ponemos en común con otros profesores de matemáticas, que usamos como validación, al tratarse de un valioso juicio de expertos y que se recoge completo en el Anexo XI, está formado por diez preguntas, que se dividen en tres bloques, para evaluar la representación de sistemas, la influencia de los coeficientes en las soluciones y la representación de los puntos, su relación con las rectas y las soluciones de los sistemas. El primer y tercer bloque están formados por tres preguntas respectivamente. El segundo bloque por cuatro preguntas, dado que queríamos estudiar con más detalle los contenidos referentes a la implicación de los coeficientes de la rectas en la soluciones de los sistemas, pues es donde se detectó mayor vacío de conocimientos. Las tres primeras preguntas son cerradas, pues el alumno debía de seleccionar la respuesta correcta, de entre tres posibles, siendo solo una la correcta. En cambio el bloque 2, formado por las preguntas 4, 5, 6 y 7, era de respuesta abierta, al igual que pasaba con el tercer bloque.

La finalidad del cuestionario es evaluar el conocimiento sobre el tema de matemáticas que es objeto de estudio por nuestra parte. Para analizar actitudes u opiniones hemos utilizado otras técnicas

cualitativas, reservando la técnica cuantitativa para medir aprendizajes.

Este cuestionario, en la primera fase, tiene como objetivo comprobar si los discentes relacionaban o no los coeficientes con su significado. Para la segunda fase del estudio, se parte de éste para, por medio de los grupos de discusión con los docentes, crear uno que sirviese para evaluar el aprendizaje significativo.

Cuestionarios sobre rectas y sistemas.

En este caso el cuestionario está diseñado para ser una prueba para medir el aprendizaje de los sistemas, pero no es una prueba “al uso” sobre estos contenidos, pues lo que intentamos medir no es la destreza para la resolución de los mismos, sino si el alumno ha adquirido los conocimientos relacionados con los coeficientes de las rectas y su implicación en la representación de los mismos.

Este cuestionario es validado, tras ponerse en común con los mismos docentes de esta materia, que de nuevo usamos como validación al ser un gran juicio de expertos y que se recoge completo en el Anexo XIII. Está formado por diez preguntas, divididos en cuatro bloques. Las tres primeras preguntas están planteadas de forma que tienen el alumno no tenga que centrar su atención en los coeficientes para hacer el estudio y la clasificación de los sistemas. En el segundo bloque, las preguntas 4 y 5, donde también se les proporciona a los alumnos dos ejes de coordenadas, tienen como finalidad comprobar si el alumno ha interiorizado todo lo visto sobre esta parte de la materia, intentando que no necesiten el gráfico para dar una respuesta correcta. En el bloque tercero, correspondiente a las preguntas 6 y 7, tiene los mismos objetivos que el anterior, pero ya no se les proporciona la cuadrícula para la representación, por lo que tendrán que responder basándose en los coeficientes. Pudiéndose valorar, así, si hay o no mejora en este proceso de E-A. Por último, en el bloque 4, preguntas 8, 9 y 10, el alumno pondrá o no de manifiesto si ha logrado adquirir los conceptos relacionados con los coeficientes, rectas, sistemas... Además, por medio de las respuestas se podrá observar si el alumno que responda bien a un bloque u otro a baso su aprendizaje en la memorización y no en el razonamiento.

Por medio de este cuestionario, se desea comprobar si existe un aprendizaje significativo correcto, al ser cumplimentado pasado un año (en el siguiente curso escolar, cuando los alumnos se encuentran en 4ºESO) y considerando por distintos docentes de esta materia que los datos no están viciados al no haberse corregido en ningún momento de la investigación en clase y pasar tantos meses (lo que haría que no recordasen las preguntas). Resaltamos que se diseñó con preguntas que evaluaban los procesos mecánicos y otros donde se podría observar si el aprendizaje se había basado en procesos lógicos y de razonamiento de los conceptos.

Cuestionario en referencia al aprendizaje colaborativo.

Se realizó un cuestionario para medir las opiniones de los alumnos sobre el aprendizaje colaborativo.

Aunque el estudio de este tipo de aprendizaje también se llevó a cabo por medio de la observación y los diarios de clase, se les pidió a los alumnos que cumplimentasen un cuestionario, realizado a partir del desarrollado por Gómez (2002). Para la cumplimentación del mismo se toma una muestra de alumnos (no pertenecientes al estudio), valorando por medio de éstos si las preguntas se entendían, las posibles respuestas que se daban eran apropiadas, el tiempo para la realización era adecuado...

Dicho cuestionario se puede observar en el Anexo XIV y versaba sobre si este tipo de aprendizaje les había ayudado para la realización de actividades, si les había gustado y el tiempo empleado que necesitaban para trabajar de esta forma.

Cuestionario EFAL.

La prueba EFIA (Santamaría, Arribas, Pereña y Seisdedos, 2014) está compuesta por más de cien preguntas en relación a cinco aspectos intelectuales: inteligencia fluida, inteligencia cristalizada, razonamiento cualitativo, procesamiento visual, y almacenamiento y recuerdo a largo plazo. Esta prueba cuenta con un elevado grado de fiabilidad y validez, como se indica en sus manuales (Santamaría et al., 2014) que hará que los datos obtenidos sean fiables en referencia a las aptitudes intelectuales que poseen los alumnos.

La inteligencia fluida y la cristalizada hacen referencia al razonamiento y la solución de problemas que no podrán desarrollarse sin la formación de conceptos, la clasificación, generación y comprobación de hipótesis y a la capacidad para comunicarse.

Todas estas aptitudes se evalúan desde tres grandes dimensiones globales:

- Inteligencia general: Aptitud espacial + Aptitud numérica + Razonamiento abstracto + Aptitud verbal
- Inteligencia no verbal: Aptitud espacial + Razonamiento abstracto.
- Inteligencia verbal: Aptitud numérica + Aptitud verbal.

Este cuestionario, que puede observarse por medio de algún ejemplo, en el Anexo XV, tiene como objetivo, en esta investigación, que se puede observar, poder dejar líneas de investigación que relacionan o no las capacidades cognitivas con las destrezas en matemáticas. Viendo de qué modo afecta la percepción, atención, motivación, memoria, razonamiento, funciones ejecutivas, lenguaje, orientaciones espacio-temporales/ orientación... al proceso de enseñanza-aprendizaje de esta ciencia.

En nuestro estudio se cumplimentará el cuestionario EFAL-3, al ser el que se ajusta al nivel y edades de la muestra.

6.2. Grupos de discusión.

Al igual que la entrevista es un “modo directo de recogida de datos en el que se da una relación personal entre quien los recoge y quien los ofrece” (Colás y Buendía, 1994, p.212), los grupos de discusión, bien conducidos, pueden ser uno de los mejores medios para analizar una situación. Siempre que se consiga que los participantes se comporten con espontaneidad y libertad.

✓ Instrumento propuesto para la recogida de información:

Para la recogida de información, se propone emplear la técnica de los grupos de discusión. De manera que el conjunto de profesores de matemáticas afectados por la implantación de las TIC, dialogarán y debatirán juntos sobre dicha implantación, aportando sus perspectivas, percepciones y puntos de vista específicos y particulares. De igual modo se trabajará con los alumnos, cuando con éstos se desarrolle dicha técnica.

✓ Justificación:

Proponemos la herramienta de los grupos de discusión, por los siguientes motivos:

- Se ha empleado, en el ámbito de la investigación sobre educación.
- Busca desentrañar no tanto lo que se dice, como lo que está detrás de lo que se dice.
- Carácter colectivo, en contraste con la singularidad personal de otras herramientas, como la entrevista en profundidad.
- Combina elementos de las técnicas de la entrevista individual y la observación participante.
- Coloca al participante en una situación social de interacción con los otros que se parece más a una situación real de la vida.
- Flexible en el discurso. No estructurado.
- Reducido coste de tiempo y personal.
- Técnica sencilla de entender.
- Agilidad en la producción de resultados.

✓ Procedimiento:

Con esta herramienta pretendemos:

- Estudiar el cambio de actitudes o de nivel de satisfacción de los estudiantes, tras la participación de los mismos en el grupo de discusión.
- Analizar las interacciones que tienen lugar en él.
- Estudiar las conductas de los participantes.
- Conocer el proceso de resolución de problemas o adopción de conclusiones, de manera que todos puedan aprovechar la experiencia del resto de participantes.
- Cuidaremos que el ambiente de las reuniones de los grupos sea permisivo, no directivo.

El proceso seguido para su aplicación sigue el esquema siguiente:

1. Selección del problema.
Implantación de las TIC en el curso 3º ESO de la asignatura de Matemáticas.
2. Selección de los grupos de discusión.
Se intentará que los grupos estén formados por discentes de distintas características, para que las aportaciones no sigan todas las mismas corrientes y así el estudio pueda ser más enriquecedor y completo.
Se cree oportuno que se pueda formar algún grupo de cursos superiores, para saber sus opiniones, sobre el programa que se está llevando a cabo.
3. Determinación del número de grupos y su composición y tamaño.
Determinaremos el número de grupos y su composición (discentes), en función de la población objeto de estudio. Tratando de que sean suficientemente representativos, para poder extrapolar los resultados.
Como norma general, no debe ser tan reducido que no permita recoger información cualificada, ni tan amplio que no facilite la participación de sus miembros. Más adelante se concreta este aspecto en referencia a nuestro estudio.
En referente a los profesores, serán los que intervengan en la investigación.
4. Selección de los participantes.
La selección de los participantes-estudiantes se llevará a cabo siempre de manera voluntaria, fomentando la participación, sobre todo, de la parte del alumnado que puede ser un grupo algo hostil. De entre ellos se valorará que la muestra sea global, no reuniendo solo a alumnos con calificaciones positivas. El mismo cuidado, o más, tendremos a la hora de seleccionar al entrevistador, que puede o no ser la propia investigadora. Debe ser experto en manejo de grupos, tener empatía suficiente para producir confianza y crear un clima de participación entre los entrevistados, saber orientar la reunión si va por objetivos diferentes a los planteados en el estudio, y estar atento a la comunicación no verbal entre los participantes.
5. Descripción de los grupos constituidos.
Procuraremos que los grupos de los discentes sean de dos o tres alumnos y que dichos grupos, conforme trabajen, a la vez se agrupen para continuar haciéndolo. Podremos observar dichas dinámicas más adelante.
6. Desarrollo de las reuniones.
Es importante comunicar anticipadamente tanto la hora de comienzo como la de finalización. Dependerá del momento, su desarrollo será más o menos extenso.

6.2.1. Grupos de discusión utilizados en esta investigación.

Esta actividad se ha llevado a cabo siguiendo dos vertientes bien diferenciadas. En primer lugar, podemos comentar que en el seminario de matemáticas del colegio, los profesores que han participado en este trabajo han usado en muchas ocasiones esta técnica para poder decidir tanto las preguntas que debía contener el cuestionario, como en qué momentos los alumnos lo debían responder. La otra línea fue mucho más informal y se realizó con los alumnos sin indicarles de que se trataba. Se decidió dotarlo de este carácter, pues así los alumnos se encontrarían en su medio, sin cambios, pensando que al no variarles su entorno, podrían encontrarse más relajados para responder con libertad. Hemos de tener en cuenta que estamos trabajando con adolescentes y muchas veces los cambios de rutina les invitan a descentrar su atención. Para iniciar los grupos de discusión se comenzó en el aula, en una clase ordinaria, una conversación por parte del profesor para llegar a conocer las respuestas a las siguientes preguntas:

Grupo de discusión entre expertos.

- ¿Cómo se desarrolla el proyecto?
- ¿La aplicación es mejorable? ¿En qué?
- ¿Debemos crear algún cuestionario? ¿Cuál y por qué?
- Pasos a tomar para el diseño de la propuesta didáctica...
- ...

Grupo de discusión anterior a usar el programa (alumnos):

- ¿Nos gustan las matemáticas?
- ¿Nos gustaría trabajar de otra manera esta materia?
- ¿Si pudiésemos aprender matemáticas con programas informáticos ¿lo preferirías?

Grupo de discusión posterior a usar el programa (alumnos):

- ¿El hecho de usar el programa informático ¿ha hecho que aumente la motivación por la asignatura?
- ¿Ha sido de fácil manejo?
- ¿Has aprendido aspectos que en el aula tradicional te costaron más o no lograste alcanzarlos?
- ¿Te gustaría usarlo para la representación de otro tipo de funciones que has estudiado?

Grupo de discusión tras la implementación de la investigación (alumnos):

- ¿Os gustó la experiencia?
- ¿La podemos llevar a cabo en otras secciones de la asignatura?
- ¿Y en otros cursos?

Grupo de discusión tras la implementación de la propuesta didáctica (alumnos):

- ¿Me han gustado las aplicaciones que nos presentaron en este tema? ¿Qué destacarías de ellas?

- ¿Opinas que hay algún punto débil, en el diseño de las actividades, que hemos realizado on-line?
- ¿Qué opinión tienes acerca de la hoja de ejercicios específica para la comprensión de la interacción de los coeficientes y la representación gráfica de las rectas y por tanto de los sistemas?

Grupo de discusión para la realización de la encuesta final (alumnos):

- ¿Me han gustado las clases?
- ¿Me apetecía que llegase la clase de matemáticas más o menos que antes?
- ¿Las herramientas presentadas para la realización de actividades, te han parecido más/menos motivadoras que las tradicionales?
- ¿Me ha gustado intervenir/prefería no intervenir?
- ¿Considero que he aprendido con las explicaciones que he visto, por medio del ordenador?
- En el proceso de aprendizaje ¿me han ayudado mis compañeros?
- ¿He entendido las relaciones entre los coeficientes y la representación?
- ¿Qué se puede mejorar?

La selección de los grupos para llevar a cabo los debates fue totalmente intencionada en todas las ocasiones.

- Entre el profesorado

Señalamos en primer lugar que los grupos de discusión se han desarrollado en primer término entre profesores expertos a lo largo de la investigación (tanto en la primera fase como en la segunda), en donde se ponían de manifiesto opiniones y planes de trabajo, se desarrollaban conversaciones para la toma de distintas decisiones que ayudaban al transcurso de la investigación.

- Entre el alumnado

Otras vertientes llevadas a cabo con los grupos de discusión durante las dos fases del trabajo se centraron en dos poblaciones distintas. En primer lugar señalaremos que se llevó a cabo en tercero de ESO, para, o bien dar respuesta a sus gustos matemáticos o tras cumplimentar el cuestionario “Matemáticas en la enseñanza”, con el fin de hablar sobre sus respuestas y opiniones antes de la investigación. Creemos que así el estudio es más cercano y logramos que los alumnos interaccionen preparándolos para el trabajo colaborativo que queremos desarrollar cuando trabajen con los ordenadores.

Y más tarde, en dos momentos distintos, tras finalizar la puesta en marcha de la aplicación y/o esta experiencia (dependiendo del curso escolar en el que nos encontrásemos,

propuesta didáctica y por ende uso de las TIC). Los debates se llevaron a cabo intentando focalizarlos para dar respuesta a las preguntas indicadas con anterioridad.

La otra población fue la de otros alumnos de tercero de educación secundaria obligatoria que no habían participado en la experiencia de las nuevas tecnologías, al no ser discentes del profesor participante en esta investigación y los de cuarto que cuando vuelven a ver el temario sobre sistemas pero que durante el curso anterior no se llevó a cabo experiencia alguna. Tras exponerles el trabajo que habían realizado sus compañeros de otro curso con los ordenadores las preguntas, también usadas en ambas fases de la investigación ya quedaron reflejadas.

Por último señalamos el cuarto curso de ESO, opción B de matemáticas. Se les recordó/explicó la experiencia completa del curso anterior (con la propuesta didáctica incluida) al llegar al tema de los sistemas y se inició un debate sobre el mismo y la extrapolación, viable o no, para la materia en este nuevo curso.

Grupos de discusión sobre el aprendizaje colaborativo, constructivo y la motivación.

Se llevaron a cabo tras las implementaciones y en ocasiones tras ser cumplimentados algunos de los cuestionarios de la investigación pues de este modo se obtenía más información o se matizaban las respuestas que habían dado con anterioridad.

Las preguntas trabajadas fueron:

- ¿Te apetecía más que llegase la clase de matemáticas?
- ¿Te apetecía más o menos que antes hacer los ejercicios que eran interactivos?
- ¿Te gustaba trabajar con la aplicación Geogebra?
- ¿Estabas más motivado?
- ¿El aprendizaje colaborativo te gustó?
- ¿Te costó acostumbrarte a trabajar de manera colaborativa?
- ¿Preferías que el profesor te explicase los conceptos o “investigar tú”?

6.3. Diario del investigador.

McKernan (1999) expone que el diario es un instrumento que recoge todas las vivencias que han ocurrido, tanto en el mismo momento que ocurren como a posteriori. Es decir, es un documento que se utiliza como recurso en donde se recogen datos que pueden poner de manifiesto aspectos importantes para la investigación, siendo este personal.

De entre sus ventajas e inconvenientes destacamos:

Tabla 8. Ventajas y limitaciones del diario.
Fuente: Barroso y Almenara, 2010

Ventajas	Limitaciones
<ul style="list-style-type: none"> • Es un documento personal. • Se pueden expresar sentimientos • Permite almacenar información sin los efectos distorsionadores. • Permite captar las valoraciones e interpretaciones de los participantes. 	<ul style="list-style-type: none"> • Olvido de las personas y no registro sistemático y constante. • Subjetividad de la persona que lo elabora. • Necesita de dominio de la claridad en la exposición de las ideas.

El diario fue utilizado a lo largo del desarrollo del proyecto, como una herramienta exclusiva del investigador, en la que pudiera recoger los datos que creyera relevantes. Este nos han servido para poder situarnos en la salida de los conocimientos previos que tenían los alumnos, para enfrentarse a un programa informático, para planificar los recursos que queríamos diseñar, para estudiar las posibles mejoras para estudiar la motivación, el tipo de aprendizaje, el desarrollo de la propuesta... El criterio para el registro de datos fue sistemático, respondiendo a las preguntas planteadas en la metodología de la investigación.

Además de utilizar este instrumento en la fase primera, se utilizó también en la segunda. Es en esta última parte de la investigación donde toma un valor mayor, pues se tienen en cuenta los tres tipos de diarios, no excluyentes, mencionados por Reverte (2014):

- *El diario como organizador estructural de la clase:* Se utilizan para tomar nota de los horarios, secuencia de actividades, organización que se lleva a cabo...
- *El diario como descripción de las tareas.* En este caso toma gran relevancia la información, que se recoge, sobre las tareas que el profesor y los alumnos realizan en clase.
- *El diario como expresión de las características de los alumnos y de los profesores.* En ellos se destaca la información de los sujetos que participan en el proceso instructivo, pudiéndose reflejar en él apuntes sobre el propio profesor (sentimientos, actuaciones,...).

Se creyó conveniente, apoyados en Zabalza (2008), que tanto para esta investigación como para futuras, se llevase a cabo un diario de clase, pues estos aportan un establecimiento de "circulo de mejora" que nos sirve para poder revisar y enriquecer nuestra experiencia de una manera diacrónica y pudiendo ser también global al estudiar varios aspectos a la vez de una misma sesión, dotando a la investigación cualitativa de gran rigurosidad y de vigorosidad a este proceso de enseñanza.

Los diarios son una herramienta con la que se puede llevar a cabo todas las etapas necesarias en fase de la investigación:

- Recoger información significativa sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje que estamos llevando a cabo y las particulares circunstancias en que lo hacemos.
- Acumular información histórica sobre el aula y lo que en ella acontece. Esta información puede referirse igualmente al centro escolar en su conjunto o a alguno de sus servicios si quien escribe el diario se refiere a ellos.
- Describir sucesos o momentos parciales. Identificar que se hayan ido presentado. Hacer seguimientos de temas de interés.
- Analizar los datos y reflexionar sobre esos sucesos, momentos, problemas o asuntos.
- Imaginar explícita o implícitamente (a través de nuestras consideraciones espaciadas por el diario) soluciones, hipótesis explicativas, causas de los problemas, etc.
- Tratar el propio texto del diario como un objeto de investigación al que le son aplicables técnicas de análisis de contenido, identificación, y tratamientos de indicadores varios (relativos a creencias, concepciones, ideas, conductas, etc), identificación de redundancias, identificación de coherencias y divergencias entre distintos diarios, etc. (Porlan 2008, citado por Zabalza, 2008, 30)

Además, como investigadores hemos querido darle al diario el sentido de herramienta para también poder acceder al pensamiento del investigador (que es la misma persona que la profesora). Como decía Zabalza (2008) esto es debido a que se trata de un recurso que implica, entre otras cosas, reflexionar de manera longitudinal en el tiempo.

6.3.1. Diarios utilizados en esta investigación:

El diario durante el diseño del programa y la planificación y diseño de la propuesta didáctica:

En primer lugar se realizó el diario del investigador de la etapa de “Evaluación del Proceso y del Producto” de la fase dos. En él se recogían las siguientes preguntas:

- ¿Poseen los alumnos conocimientos previos para abordar el programa?
- ¿Hay alumnos que van a participar en el programa en situación diferente? En esta circunstancia ¿se prevé una adaptación del programa a estos alumnos?
- ¿Poseen los alumnos habilidades para abordar el programa?
- El programa ¿interrelaciona diferentes bloques de conocimientos matemáticos?
- ¿Aparecen todos los elementos del currículum: objetivos, contenidos, actividades, recursos, materiales, temporalización y evaluación?
- Las actividades propuestas, ¿son motivadoras y cubren todos los contenidos del programa?
- ¿Se presenta alguna dificultad, derivada del uso de una metodología concreta?

- ¿Se han previsto los recursos necesarios?
 - La propuesta de evaluación ¿está en consonancia con los objetivos que se pretenden conseguir?
 - Las estrategias de evaluación ¿responden al enfoque de enseñanza desarrollado en el programa?
 - ¿Se muestran interesados los alumnos durante el desarrollo del programa?
 - ¿Siguen los alumnos el ritmo previsto?
 - ¿Qué dificultades se están presentando en cuanto al cumplimiento de los objetivos, la metodología, las actividades, los recursos...?
 - ¿Hay que modificar algún aspecto del programa? En caso afirmativo, ¿cuál?
 - ¿Los alumnos han mantenido una actitud favorable a lo largo del programa?
 - ¿Se han cumplido los objetivos propuestos?
 - ¿Han participado los alumnos de manera activa?
 - ¿Se ha favorecido el aprendizaje cooperativo y colaborativo entre los alumnos?
 - ¿Qué aspectos del programa son susceptibles de modificación para favorecer un aprendizaje de calidad?
 - ¿Qué aspectos del programa habría que mantener para favorecer un aprendizaje de calidad?
- Durante la implementación del estudio de las aplicaciones usadas en la enseñanza y de la metodología se llevó a cabo un diario para poder evaluarlas y estudiar posibles mejoras, intentando darle respuesta a las preguntas de la tabla anterior junto a estas nuevas:
- ¿Los espacios de agrupamiento han sido correctos?
 - ¿Se ha favorecido la comunicación entre los alumnos? ¿y entre estos y el profesor?
 - ¿Se han puesto en común las actividades que se le propusieron?
 - ¿Han necesitado mucho apoyo/ayuda para saber responder a las mismas?
 - ¿Ha habido aprendizaje significativo?
 - La evaluación del material ¿ha sido continua, exigente?
 - ¿La metodología ha sido la correcta?

El diario para la medición del aprendizaje colaborativo.

Durante los cursos en los que se implementó la propuesta curricular completa y se trabajaron ejercicios interactivos, el investigador recabó los datos en referencia al número de alumnos que hacían los ejercicios de manera correcta tras trabajar de manera colaborativa, tanto los que hacían referencia a las rectas como a los sistemas.

Las anotaciones que el docente hacía estaban en relación con los siguientes focos:

- ¿Los alumnos están trabajando ayudándose entre ellos?

- ¿El agrupamiento de varios grupos está siendo positivo?
- ¿Se les nota “cómodos” trabajando así?
- ¿Hay alumnos más retraídos y desconfiados ante este tipo de aprendizaje?

El diario para la medición del aprendizaje significativo.

Aunque el aprendizaje significativo se midió por medio del cuestionario ya descrito, hubo dos momentos más donde se anotaron referencias en cuanto al mismo. Así, cuando en el mismo curso de tercero de la ESO se explicaron los temas de “Funciones”, “Función lineal y función cuadrática” se vio, por medio de la “lluvia de ideas” por parte de los discentes, si estos tenían los conocimientos previos y así partir de los mismos. Antes de empezar se hacían preguntas estilo a las que pasamos a exponer, para que se contestase como “lluvia de ideas”:

- ¿Cómo tenía que ser la expresión algebraica de una recta para que su representación fuera una función creciente?
- ¿Qué era la pendiente en el origen?
- Si una recta tiene pendiente negativa ¿qué sabemos sobre su representación?

El otro momento fue en cuarto curso, pero no antes de cumplimentar el cuestionario sobre rectas y sistemas y antes de explicar la parte del temario sobre sistemas (lineales y no lineales, de dos ecuaciones y dos incógnitas y de tres ecuaciones y mismo número de incógnitas). Se procedió como en tercero.

El diario de clase.

Dado que el diario recogerá la información detallada de todas las experiencias llevadas a cabo en cada sesión, dichas notas se agruparán en función de los distintos pilares que a continuación se expresan:

1. Plan previsto.
2. Ejecución.
3. Aspectos actitudinales del alumnado, asistencia de los alumnos y segregación de los discentes.
4. Metodología y aspectos relacionados con la comprensión.
5. Valoración.
6. Toma de decisiones.
7. Incidencias con los ordenadores

6.4. Otros.

Otros instrumentos de control utilizados a lo largo de nuestra investigación han sido:

Examen ordinario para evaluar el aprendizaje correspondiente a los contenidos/objetivos correspondientes a los sistemas lineales.

Prueba escrita ordinaria que los alumnos cumplimentan para ser evaluados. No se diseña exprofeso para esta evaluación. Es la que considera la docente que es apropiada y que realiza en su práctica docente habitual. Parte de esta, la referente a nuestro estudio, se puede observar en el Anexo XX.

Registros de la plataforma

Por medio de los mismos podremos saber si los alumnos se han conectado a la plataforma, frecuencia... Un ejemplo del mismo está, para su consulta, en el Anexo XXI.

7. FASES.

7.1. Cronograma de la investigación

Exponemos las fases de nuestra investigación, tabla 9. Durante toda la investigación se desarrolló la revisión literaria, estudiando el marco teórico que sustentase el trabajo.

La primera fase de trabajo se desarrolló durante los cursos 2009/2010, 2010/2011 y 2011/2012.

La segunda fase se trabajó de manera cíclica y completa en todos los cursos escolares desde el año 2012 al 2017.

Tabla 9. Fases de la investigación. Fuente: elaboración propia.

1ª fase	Estudio exploratorio previo	Detección del problema
		Obtención de resultados propios de la investigación
	Estudio piloto	Análisis y selección de las herramientas
		Diseño del ambiente enriquecido con TIC
		Implementación de la propuesta
2ª fase	Etapa de planificación	Análisis de resultados
		Análisis de la situación
		Diseño del ambiente enriquecido con TIC
		Redacción de la propuesta didáctica
		Desarrollo y puesta en marcha de la propuesta didáctica, del entorno y de las metodologías
	Revisión de los instrumentos de evaluación	
	Etapa de acción	Implementación de la propuesta
	Etapa de análisis	Observación y evaluación de resultados
Etapa de reflexión	Consideraciones del trabajo presente y planteamiento de mejoras	
Redacción final		

Ha de señalarse que la propuesta didáctica para la inserción de las TIC del curso 2011/2012, se sustenta en una aplicación de Geogebra referida a las rectas. En los dos siguientes cursos, se complementa con otra sobre sistemas. Finalmente, se decide hacer una propuesta didáctica más completa que integre toda la unidad formativa, con más medios tecnológicos, creando un espacio más completo. Esta propuesta estará

formada por materiales y recursos interactivos y tradicionales. Se implementó en los cursos escolares 2014/2015 y 2016/2017.

En el curso 2015/2016, de la propuesta didáctica anterior, que como en los cursos anteriores ya contaba con nuevas metodologías (las cuales se mantienen), sólo se implementa los nuevos recursos no tecnológicos. De este modo se podrían obtener datos objetivos sobre si las mejoras o no en el proceso de enseñanza-aprendizaje se debían a la inserción de las TIC, a los recursos, a las metodologías, al conjunto...

Podemos observar en la tabla 10 las metodologías desarrolladas en cada curso:

Tabla 10. Metodologías de la investigación. Fuente: elaboración propia.

Curso Escolar	Inserción de TIC	Herramientas nuevas	Metodologías
2009/2010	No		Tradicional
2010/2011	No		Tradicional
2011/2012	Sí	•Geogebra: rectas	Tradicional. De manera puntual y para trabajar las rectas con la aplicación se utiliza una metodología constructivista.
2012/2013	Sí	•Geogebra: sistemas	Tradicional, constructivista y colaborativa.
2013/2014	Sí	•Geogebra: sistemas	Tradicional, constructivista y colaborativa.
2014/2015	Sí	•Geogebra: rectas. •Geogebra: sistemas •Aplicaciones interactivas para representación de puntos •Aplicaciones interactivas para la construcción de tablas de datos. •Aplicaciones para teoría interactiva •Hoja de ejercicios	Tradicional, constructivista y colaborativa. Dándole un mayor peso a las dos últimas y fomentando la construcción del conocimiento frente a la memorización del mismo.
2015/2016	No	•Hoja de ejercicios (pero sin recurso tecnológico)	Tradicional, constructivista y colaborativa. Dándole un mayor peso a las dos últimas y fomentando la construcción del conocimiento frente a la memorización del mismo.
2016/2017	Sí	•Geogebra: rectas. •Geogebra: sistemas •Aplicaciones interactivas para representación de puntos •Aplicaciones interactivas para la construcción de tablas de datos. •Aplicaciones para teoría interactiva •Hoja de ejercicios	Tradicional, constructivista y colaborativa. Dándole un mayor peso a las dos últimas y fomentando la construcción del conocimiento frente a la memorización del mismo.

Teniendo presente los alumnos participantes y las fases, nos encontramos con la siguiente conjunción (tabla 11):

Tabla 11. Participantes en cada fase. Fuente: elaboración propia.

	Trabajo	Tamaño de la muestra	Curso escolar
1ª fase	Estudio exploratorio: Determinación del problema	75 alumnos	2009 / 2010
	Estudio exploratorio: obtención de resultados	75 alumnos	2010 / 2011
	Estudio piloto	20 alumnos	2011 / 2012
2ª fase	Implementación de la propuesta didáctica para la medición del aprendizaje significativo	20 alumnos	2012 /2013
		30 alumnos	2013 / 2014
		30 alumnos	2014 / 2015
		30 alumnos	2015 / 2016
		30 alumnos	2016 / 2017
	Implementación de la propuesta didáctica	30 alumnos	2012 /2013
		30 alumnos	2013 / 2014
		30 alumnos	2014 / 2015
		30 alumnos	2015 / 2016
		30 alumnos	2016 / 2017

En el siguiente cronograma (tabla 12) queda reflejado el trabajo que se desarrolló en cada parte de la investigación.

Tabla 12. Cronograma del proyecto. Fuente: Elaboración propia

Curso Escolar	2009-2010								2010-2011								2011-2012													
Mes	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8
Detección del problema	■																													
Puesta en común con otros profesores del Seminario		■	■																											
Compromiso para buscar una solución al problema				■	■																									
Propuesta de incluir las TIC para aprender álgebra										■	■																			
Redacción del cuestionario para los alumnos												■	■																	
Los alumnos cumplimentan el cuestionario															■															
Corrección y Evaluación del Estudio															■	■														
Elección del software																			■	■										
Desarrollo de la aplicación																					■	■								
Los nuevos alumnos completan el cuestionario																											■			
Los discentes trabajan con el software																												■		
Cumplimentan el cuestionario de nuevo para ver la mejora																												■		
Análisis de resultados																														
Redacción del proyecto																														

Curso Escolar	2012-2013												2013-2014												
	Mes	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8
Elección de la línea de investigación para el doctorado																									
Puesta en común con los directores																									
Redacción y validación del cuestionario "Sobre rectas y sistemas"																									
Cumplimentación de los cuestionarios (aprendizaje significativo) por los alumnos del curso pasado																									
Desarrollo de los grupos de discusión por los alumnos de 3º y 4º.																									
Se rediseña la aplicación Geogebra para que sea más completa																									
Implementación de la misma enseñanza que el curso pasado con la inserción de las TIC, aplicación mejorada.																									
Cumplimentación por parte de los alumnos del EFAI																									
Comprobación de aprendizaje significativo en el siguiente curso con los mismos alumnos que el año anterior desarrollaron la experiencia.																									
Continuación del trabajo con los diarios.																									
Corrección y Evaluación del Estudio																									
Redacción y validación del cuestionario "Matemáticas en la enseñanza"																									
Revisión de la literatura																									
Comprobación de aprendizaje significativo en el siguiente curso con los mismos alumnos que el año anterior desarrollaron la experiencia																									
Desarrollo de los grupos de discusión																									
Se diseña la hoja de ejercicios																									
Implementación de la misma enseñanza que en los cursos anteriores (Geog.)																									
Revisión global del estudio hasta el momento																									
Se inicia el diseño de la nueva investigación																									
Se inicia el diseño de la propuesta didáctica																									

Curso Escolar	2014-2015												2015-2016												2016-2017						
Mes	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3
Diseño e implementación de Moodle	■	■	■	■																											
Puesta en común con otros profesores	■	■	■	■																											
Redacción y validación del cuestionario "Disponibilidad tecnológica"				■	■																										
Se finaliza el diseño de la nueva propuesta didáctica				■	■																										
Comprobación de aprendizaje significativo en el siguiente curso con los mismos alumnos que el año anterior desarrollaron la experiencia					■	■																									
Cumplimentación de los cuestionarios y desarrollo de los grupos de discusión					■	■	■																								
Se desarrolla la puesta en marcha de todo lo diseñado en la investigación: implementación						■	■																								
Revisión de los resultados								■	■	■	■																				
Revisión de la literatura								■	■	■	■																				
Comprobación de aprendizaje significativo en el siguiente curso con los mismos alumnos que el año anterior desarrollaron la experiencia																			■												
Revisión de los resultados																				■	■										
Análisis de resultados																									■	■	■	■	■		
Comprobación del aprendizaje significativo																														■	
Cumplimentación EFAI																														■	
Cumplimentación de los cuestionarios, grupos de discusión y diarios																														■	■
Implementación de la propuesta didáctica																														■	■

Curso Escolar	2014-2015												2015-2016								2016-2017										
Mes	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3
Revisión literaria																															
Redacción final del proyecto																															
Corrección final del proyecto																															

7.2. Desarrollo de las fases.

Durante toda la investigación se procedió a la revisión del marco teórico del proyecto.

En cuanto a la primera fase de la investigación, dado que fue la parte fundamental del trabajo fin de Máster de la doctorando Carrillo (2012), no creemos necesario reproducirla íntegramente en este trabajo. Hacemos, no obstante, un breve resumen de la misma.

En esta fase se desarrolló un módulo informático con el que los alumnos podían visualizar las construcciones geométricas de las rectas correspondientes a un sistema lineal dado y a su posición relativa en el plano. En el periodo posterior a nuestro estudio, tras esta experiencia y junto a un estudio mayor, se valoró la mejora de esta aplicación al comprobar las limitaciones que tenía. Se consideró que podría ser mejorable en cuanto a la representación de los sistemas, para que tuviese el mismo grado de efectividad y de utilidad que se había comprobado para el estudio de las rectas, abordando así de manera más concreta los problemas del proceso de enseñanza-aprendizaje de estos conceptos. Creemos conveniente, llegado a este punto, recordar los motivos que hacen fundamental el uso de esta aplicación. Con ella podrán disponer de mayor tiempo para el razonamiento al ver qué ocurre cuando cambian determinados parámetros de las rectas dadas. Así, el alumno podrá entender que, en ocasiones, al ver las ecuaciones de un sistema, sin la resolución gráfica ni analítica, se podrá hacer la clasificación (Compatible Determinado, Compatible Indeterminado, Incompatible), comprobando después de su resolución si la respuesta obtenida es lógica dado el problema planteado o si por el contrario debería repasar los cálculos.

Pasamos a exponer los procedimientos llevados a cabo en cada fase.

En la **primera fase** señalamos de este estudio las siguientes características:

1ª Fase – Estudio exploratorio previo	<ul style="list-style-type: none"> • Observación y detección del problema: estudio exploratorio previo. Respecto a la primera fase, fue en el estudio inicial, curso 2009/2010, cuando se detectó el problema, que se llevó a cabo por medio de la observación, mientras se desarrollaba la práctica docente del investigador. Como fue un solo profesor el que destacó este hecho (el investigador), la puesta en común, en distintas conversaciones presenciales de carácter informal con los compañeros de seminario, fue fundamental, pues de esta manera quedaban avaladas, por profesores más experimentados las percepciones adquiridas en el aula. Esto llevó a implementar el estudio exploratorio previo, curso 2010/2011, donde se diseñó el cuestionario inicial. Puesto que se tuvo claro desde el principio, por parte de los profesores del departamento que imparten este curso, cuáles eran las carencias que destacaban en el proceso de enseñanza aprendizaje, se desarrolló un cuestionario de acuerdo con ello. Por medio de él se quería valorar si los objetivos que se habían considerados importantes eran adquiridos por los alumnos. Dichas preguntas fueron elaboradas y puestas en común, a lo largo de varias reuniones en el centro, por los profesores. Una vez que estaba completamente redactado, se decide que se le pedirá a los alumnos que lo resuelvan al final del curso, para no interferir en el ritmo del mismo. Así, dentro de una clase ordinaria, y de manera tradicional (papel y bolígrafo), los discentes, con carácter voluntario, responderán a las preguntas planteadas en el cuestionario.
1ª Fase – Estudio piloto	<ul style="list-style-type: none"> • Estudio piloto. <ul style="list-style-type: none"> ○ Análisis y selección de las herramientas. Por medio de la búsqueda y la exploración, de distintas herramientas, se decide usar el programa Geogebra. Como la investigadora y profesora no conocía su funcionamiento, de manera personal, realizó un curso sobre este programa (Anexo XV). De esta manera podría aportar un trabajo más completo a la investigación en curso.
1ª Fase – Estudio piloto – Diseño	<ul style="list-style-type: none"> ○ Diseño del ambiente enriquecido con TIC. En el curso 2011/2012 se desarrolla una aplicación propia. Se evaluaron los contenidos que se deseaban abarcar y las estrategias que serían convenientes llevar al aula. En esta etapa es en la que se desarrolla el programa y, por medio de valoraciones personales y diarios de investigador, se procede a una evaluación continua del material. Este trabajo se lleva a cabo de manera individual y sin trabajar en grupo, pues al resto del profesorado no se le pidió una colaboración para el desarrollo del material, al no conocer Geogebra.

- Implementación de la propuesta.
Las siguientes tareas, correspondientes al trabajo de campo (implementación), son llevadas a cabo por la docente, pues ella misma ha desarrollado el material didáctico por ordenador. Los alumnos trabajan con el programa sin darles demasiadas instrucciones previas sobre su uso. Tan sólo se les indica que deben cambiar la pendiente y ordenada en el origen de las rectas. Tras hacer parejas de alumnos, y estando cada una de ellas en un ordenador, se les pone en la pizarra un sistema, y se les indica que representen cada una de las rectas. A partir de este momento se les pide que cambien la pendiente de una de ellas, la ordenada en el origen,... Incluso se les pide que trabajen con varias rectas a la vez para observar qué posición relativa tienen, organizados como hasta el momento. Tras hacer las mismas reflexiones realizadas en clase sobre la clasificación de los sistemas y recordándoles cómo afectaban los coeficientes de las variables indeterminadas. Se hace una puesta en común de cómo se deben cambiar los parámetros para obtener sistemas equivalentes o completamente distintos. A continuación se les deja trabajar con los ordenadores. Pasado un tiempo, los alumnos dan varios ejemplos de distintos casos, pues se les pide a cada grupo un sistema compatible determinado, otro compatible indeterminado y otro incompatible, partiendo del que pusimos en la pizarra al principio de la clase. Al tener ellos el tiempo necesario para “probar” con el ordenador, comprobaron que lo que habíamos dado en la teoría era cierto y trabajaron esta actividad. En clases posteriores respondieron de nuevo al cuestionario con los medios indicados con anterioridad (papel y bolígrafo). Al considerarse más tarde que el hecho de que un mismo alumno cumplimente dos veces el cuestionario (uno tras dar el tema de forma tradicional y la otra tras el uso de la aplicación) podía desvirtuar los datos recogidos en segunda ocasión, se decide no volver a desarrollar de este modo esta práctica. Destacamos que, cuando se habló con los alumnos sobre este hecho, estos señalan que dado que las preguntas no se habían corregido en clase, y que muchas no sabían contestarlas, se encontraban con que ni tan siquiera sabrían reproducirlas sin el cuestionario delante. De nuevo toman gran valor los grupos de discusión y los diarios para la obtención de datos por parte del investigador.


- Análisis de resultados
Termina esta primera fase con el análisis de los resultados de la investigación, sólo queda señalar que se hizo un estudio estadístico del que se sacaron las conclusiones pertinentes, como el aumento de la motivación, la mejora de los resultados en relación al aprendizaje.... Es decir, en esta primera etapa, tras estudiar el estudio exploratorio previo y haber trabajado en un primer momento para desarrollar las primera fase de la investigación, como conclusión general podemos señalar que desde nuestra percepción de la experiencia, los alumnos no solo mejoraron en cuanto a rendimientos académicos se refiere, como recogieron los datos cuantitativos, sino que se sintieron motivados e incentivados, incluso ilusionados, por participar en esta experiencia piloto. Esto repercutió positivamente en su actitud ante la asignatura y el aprendizaje. Además, se vio reforzado el aprendizaje conducido por ellos mismos y apoyado en los compañeros. (Carrillo, 2012).

Haciendo referencia a la **segunda fase**, desarrollamos los procedimientos llevados a cabo en ella.

En esta fase se diseña una aplicación que representa los sistemas, pudiendo el alumno manejar dichas rectas y sus coeficientes. El objetivo del mismo es el ya mencionado para el caso de las rectas (apoyo visual para activar el razonamiento). Además se completa con otros recursos que formarán parte de la propuesta de mejora, integrando, en mayor medida, las TIC.

Antes de explicar cada una de las etapas de esta segunda fase, mostramos (tabla 13) las características que ha tenido nuestra investigación en relación a la innovación pedagógica apoyada en TIC.

Tabla 13. Características investigación-innovación Fuente: elaboración propia

2009	Investigación – Acción (Estudio de caso)	Innovación apoyada en TIC
	<ul style="list-style-type: none"> • Cuestionarios. <ul style="list-style-type: none"> • Cuestionario “Matemáticas en la enseñanza”. • Cuestionario de Disponibilidad Tecnológica. • Cuestionario sobre conocimiento inicial de los sistemas. • Cuestionarios sobre rectas y sistemas: Aprendizaje significativo. • Cuestionario en referencia al aprendizaje colaborativo. • Cuestionario EFAI. • Grupos de discusión. <ul style="list-style-type: none"> • Grupo de discusión anterior a usar el programa (alumnos). • Grupo de discusión posterior a usar el programa (alumnos). • Grupo de discusión tras la implementación de la investigación (alumnos). • Grupo de discusión tras la implementación de la propuesta didáctica (alumnos). • Grupo de discusión para la realización de la encuesta final (alumnos). • Grupos de discusión sobre el aprendizaje colaborativo y la motivación. • Diario del investigador. <ul style="list-style-type: none"> • El diario durante el diseño del programa y la planificación y diseño de la propuesta didáctica. • El diario para la medición del aprendizaje colaborativo. • El diario de clase. • Otros. <ul style="list-style-type: none"> • Examen ordinario para evaluar el aprendizaje correspondiente a los contenidos/objetivos correspondientes a los sistemas lineales. • Registros de la plataforma. 	<ul style="list-style-type: none"> • Diseño y Desarrollo de la propuesta Didáctica • Diseño de Moodle • Aplicaciones <ul style="list-style-type: none"> • Teóricas con ejercicios: material interactivo • Puntos y representación: aplicaciones interactivas • Geogebra Rectas y Sistemas • Hoja de ejercicios
2017	Aproximadamente 500 alumnos	

• A) ETAPA DE PLANIFICACIÓN

En capítulos anteriores hemos desarrollado un análisis fenomenológico, histórico y epistemológico de las matemáticas y las TIC. Opinamos que debíamos cerrar aún más el enfoque y que nuestras fases anteriores nos habían aportado la información necesaria, nos adentramos en una nueva etapa. Se busca dar una alternativa más completa, por medio de las TIC, en la enseñanza de estos contenidos teniendo como objetivo principal incrementar la comprensión por parte de los alumnos de los razonamientos propios de esta ciencia, especialmente en los siguientes campos:

- El concepto de función y sus variables. Tablas de valores.
- Las funciones lineales. Representaciones gráficas
- Los sistemas de ecuaciones lineales: conjunción de dos rectas.

La didáctica de los sistemas de ecuaciones lineales se basa, en la realidad estudiada, a la resolución analítica, basándose en el enfoque memorístico de “receta” para la resolución de los mismos pero no de razonamiento una vez que tenemos el sistema planteado. El alumno no piensa, solo se limita a resolver por medio de los algoritmos estudiados los sistemas o problemas.

Nuestro trabajo intentará mejorar la enseñanza y de este modo que, determinadas respuestas y planteamientos erróneos de nuestros discentes no se repitan en el tiempo, al ser errores conceptuales.

En algunos ejemplos, (Anexo IV), los alumnos señalan el valor de una variable como infinito, dan respuestas a los problemas cuando resuelven el sistema aunque la solución no sea lógica en el contexto el error podía venir del planteamiento o de la resolución del mismo), en un sistema que tiene una única solución lo clasifican tan solo como sistema compatible, realizan resoluciones algebraicas innecesarias para la clasificación de los sistemas... Se pone así de manifiesto la memorización de procedimientos frente a la construcción lógica de conceptos

- Análisis de la situación

El investigador estudió los resultados obtenidos con anterioridad y todas las anotaciones llevadas a cabo.

Continuó desarrollando, asimismo, la revisión literaria ampliando en aquellos puntos que consideró que se debía estudiar con mayor profundidad.

Llegado este momento se realizó una programación de lo que debía ser la investigación. Destacamos el hecho de la reformulación de algunos de los diarios que se pasaron a cuestionarios, los cuales se validaron. Se crearon también hojas de ejercicios, para trabajar aquellos puntos conceptuales que se habían puesto en evidencia en los procesos de enseñanza aprendizaje.

Hemos de matizar que aunque somos conscientes de que el único elemento de cambio no fue el ordenador, en este caso la percepción de la experiencia, así como los resultados obtenidos a través de la observación

directa y los grupos de discusión, nos llevaron a entender que había sido el elemento clave para el cambio y había condicionado de forma significativa tanto el aprendizaje como la motivación y la valoración de los alumnos con respecto a esta experiencia en el aula.

El análisis de la fase anterior puso de manifiesto que la propuesta de mejora por medio de las TIC podía mejorarse implementando, como mínimo, una nueva herramienta, para sistemas. Más adelante se mejora haciendo una propuesta que integrase mayor número de recursos TIC.

En esta etapa de planificación también se llevó a cabo la de revisión literaria para poder tener un entorno más completo. La bibliografía estudiada hasta el momento que versaba sobre la tecnología educativa y las didácticas de las matemáticas, siempre era repasada y enriquecida, la vez que se hacía una búsqueda de experiencias educativas con TIC, en el campo del álgebra y de la geometría, en estos niveles. Se desarrolló una búsqueda en las principales revistas de investigación de las matemáticas, investigación sobre educación, educación en nuevos escenarios, TIC en la educación... En el Anexo VI se puede observar un listado de algunas seleccionadas entre todas las existentes, aunque señalamos que no sólo nos centramos en dichas revistas.

Una mención especial merece la búsqueda de recursos TIC, para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales. Para el diseño de la propuesta didáctica, era imprescindible encontrar las herramientas tecnológicas adecuadas para llevar al aula y que trabajasen los conceptos propios de nuestro estudio. Partiendo de la primera búsqueda, realizada en las fases anteriores, y dentro del marco teórico, se procedió a completarla (Anexo V). Hemos de destacar que las lecturas ayudaron al desarrollo de las ideas en la que sustentar nuestra propuesta, pero no encontrábamos material apropiado por diversos motivos que se pueden observar en el citado anexo (Anexo V).

Esta revisión continua de las etapas anteriores, así como de la literaria nos ayudó a valorar todo lo trabajado para mejorar aquellas deficiencias que estábamos viendo durante la investigación. Se mantenían nuestras ideas, cada vez más completas y mejor sustentadas. Los materiales fueron complementados por otros, como veremos a la largo de la exposición, estando siempre presente la evaluación continua de los mismos.

La siguiente tabla 14 muestra el análisis de cada año de la investigación:

Tabla 14. Análisis de situación. Etapa de planificación.

Fuente: Elaboración propia.

ANÁLISIS DE LA SITUACIÓN	CURSO
Se llevó a cabo un estudio de la primera fase que puso de manifiesto las deficiencias y mejoras que podían desarrollarse respecto a la aplicación de Geogebra.	2012/2013

2ª Fase A) Etapa de planificación	Análisis de la situación	<p>Se decide que los alumnos no deben cumplimentar el mismo cuestionario sobre rectas y sistemas en dos momentos distintos de la investigación por lo que se opta por dejar éste para medir el aprendizaje significativo en el curso siguiente a la implementación. Se estudia, de nuevo, dicho cuestionario y se decide introducir mejoras.</p> <p>El aprendizaje significativo podría ser medido antes de dar, en el mismo curso de tercero de la ESO, el tema de “funciones”, por lo que aparece la necesidad de aumentar los instrumentos de evaluación de la investigación.</p> <p>Se observa que no se poseen datos objetivos sobre las capacidades cognitivas de los alumnos, por lo que se plantea investigar sobre dicha rama.</p>	
		<p>Se consta que el trabajo que se está desarrollado con las nuevas tecnologías “se queda corto”, aún iniciado ya el proceso de mejora.</p>	2013/2014
		<p>Para trabajar con mayor profundidad la relación entre los coeficientes de las rectas y la representación de los sistemas, así como su clasificación y representación se desarrolla una hoja de ejercicios. Por medio de esta y de las aplicaciones de Geogebra, que ya se tienen, se podrá trabajar estas ideas.</p> <p>Se observa que los estudiantes no pueden trabajar en sus casas, pues no tienen canal ni la aplicación informática. Se estudia las características del b-learning y las plataformas educativas para ver su posible implementación.</p> <p>Se observa que los instrumentos de recogida de la información pueden ampliarse para obtener más datos durante la investigación.</p> <p>Se detectó que la propuesta didáctica podía ser más completa pues no tenía materiales interactivos en referencia a la parte teórica. Se realizó un estudio minucioso de las herramientas TIC y se eligieron aquellas que formarían parte de nuestra propuesta didáctica. Hemos de resaltar que se buscaba satisfacer distintas ideas:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Poseer un material con el que poder hacer un repaso de las ideas sobre rectas. A la vez se quería encontrar un material que no fueran apuntes digitalizados y que tuviera una gran iteración, y que permitiese su uso con el ordenador. Para ello también sería bueno recurrir a alguna aplicación que hiciese representación de puntos en el plano y el cálculo de tablas (coordenadas de los puntos). • Poder practicar lo aprendido y repasado (rectas) con una aplicación de Geogebra entendiendo la implicación de los coeficientes. • Que el alumno, que ya sabe qué es un sistema de 	2014/2015

2ª Fase A) Etapa de planificación	Análisis de la situación	<p>ecuaciones lineales (se dieron en el curso anterior), pueda disponer de un recurso TIC para trabajarlas, ofreciéndole así una clase distinta a la tradicional donde él tenga un papel destacado y el trabajo colaborativo sea parte activa del proceso.</p> <ul style="list-style-type: none"> • De nuevo, poder relacionar la influencia de los coeficientes de los sistemas con sus soluciones. Se debería recurrir, una vez más a una aplicación de Geogebra. • Trabajar una hoja, tradicional, de ejercicios propuesta para la total comprensión de estos conceptos. Se podrían apoyar para su realización en los recursos digitales. • Dar la parte central del tema de manera tradicional. • Explicar la parte de los problemas no solo basándonos en las herramientas tradicionales, también por medio de las TIC. <p>Con todo este trabajo se llevará a cabo el diseño para la inserción de las TIC en el aula para la enseñanza de los sistemas.</p>	
		<p>Tras el estudio de los datos se llega a la conclusión que la propuesta didáctica del curso anterior es completa y válida pues se ha alcanzado la comprensión de los sistemas por medio del aprendizaje significativo, por descubrimiento y colaborativo, sustentado por la inclusión de las TIC en el proceso de enseñanza aprendizaje.</p> <p>Se desea estudiar si los datos de mejora que se están obteniendo son debido a las nuevas metodologías o a las TIC. Para ello se decide implementar la propuesta didáctica con las metodologías diseñadas y con los recursos no tecnológicos diseñados (hoja de ejercicios). De esta forma se podrán obtener datos objetivos sobre si el aprendizaje mejora o no con las TIC.</p>	2015/2016
		<p>Tras estudiar los resultados del curso anterior y de los cuestionarios que miden el aprendizaje significativo del presente curso, se llega a la conclusión que la propuesta didáctica sin el uso de las TIC ha obtenido resultados muy malos. Se decide que la propuesta didáctica implementada en el curso 2014/2015 es la más apropiada y que se debe volver a implementar para la obtención de un mayor número de datos que avalen, o no, nuestra teoría.</p>	2016/2017
	T		
	Diseño ...	<p>– Diseño del ambiente enriquecido con TIC.</p> <p>Tras el profundo estudio anterior se llevó a cabo el diseño del entorno teniendo varios ejes de actuación.</p> <p>Se buscará fomentar el aprendizaje constructivista y significativo, el razonamiento, la reflexión, la intuición, la curiosidad. Se intentará que los alumnos, tras obtener la información, puedan valorarla para la toma de</p>	

decisiones así como para el desarrollo correcto de sus argumentos. Para ello se trabajara tanto de manera colaborativa como individual.

Se tendrán presentes los errores conocidos por los docentes para intentar trabajar la materia de forma que no se repitan.

El uso de las TIC ha quedado justificado tanto por sus beneficios como por la legislación. Se buscarán recursos manipulativos, basando la geometría, funciones... en aplicaciones dinámicas.

A los docentes que lo desearan se les aportaría documentación sobre la importancia de la contextualización de los conceptos matemáticos en el marco histórico y evolutivo de esta ciencia, así como la de sus autores. Se les formará sobre el álgebra, la geometría y las funciones por si consideran oportuno incluirlo en su realidad docente.

Concretando en nuestro caso particular, como estrategia de intervención, se decide que los materiales permitiesen los espacios de agrupamientos, queriendo favorecer las situaciones de comunicación entre el alumnado y el profesor, y entre ellos. Las actividades ante el ordenador debían permitir poder hacerlas en parejas/tríos. A su vez, estas agrupaciones podrían formar grupos para poder comparar los resultados, estrategias, razonamientos... Se buscarían actividades que conectasen los conceptos, buscando la interacción entre los conceptos y el razonamiento.

De todas las actividades que se realizasen se fomentaría después una puesta en común en la que los niños expresasen cómo las hacían.

Los alumnos dispondrían de los ordenadores. Es importante recordar a los alumnos que los ordenadores son una herramienta más para su estudio. Por ello cada estudiante se deberá llevar a la sala de ordenadores su cuaderno, que contiene los apuntes de clase y un lápiz o bolígrafo, así como su libro de texto.

El profesor dispuso de una pizarra en la que ponía las explicaciones, los enunciados de los problemas y la reflexión o conclusiones a las que se llegaban.

Tanto la aplicación de Geogebra inicial, referida a las rectas, como la resultante de las mejoras, sobre los sistemas, se pueden observar en el Anexo X.

Por último, hablaremos sobre el planteamiento de la propuesta didáctica final, que se puede observar en el Anexo IX.

Para el diseño y evaluación del programa, aplicaciones variadas y recursos (tanto en referencia a la parte teórica como practica) nos basándonos en la segunda parte del libro "Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria", que firman Hernández y Soriano, en 1999, en el que explican el "Diseño y Evaluación de programas de intervención en Matemáticas" y teniendo como finalidad el hecho de desarrollar el programa y avanzar en la investigación, se siguió el siguiente esquema (figura 28): objetivos, contenidos (especificando conceptos, procedimientos, actitudes así como contenidos transversales), actividades, recursos llevados a cabo y diseño de evaluación. La evaluación se planteó según el modelo CIPP, lo que conlleva un estudio de contexto (C), en el que se observa la necesidad del programa que antes y después se evalúa (I), para ver si se adecúa a los planteamientos propuestos. Conforme se avanza en la investigación, se especifica la manera de evaluar el proceso

(P) y finalmente se tendrá la presentación de la evaluación del producto (P) (Hernández y Soriano, 1999).

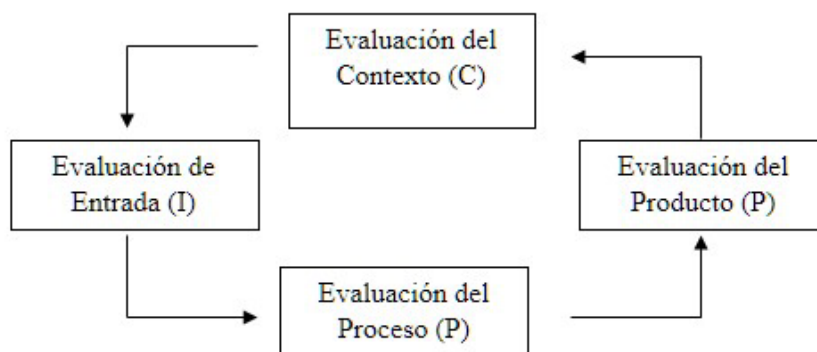


Figura 28. Desarrollo del modelo CIPP. Fuente: Elaboración propia

- o Evaluación de Contexto (C).

Fue tras la primera fase de la investigación cuando se plantea que la aplicación propuesta no abarca todos los aspectos que se quieren estudiar en el aula, en relación a los sistemas. Se plantea la idea de buscar una propuesta más completa por medio de la suma de escenarios TIC.

- o Evaluación de Entrada (I).

En esta fase de planificación dio comienzo el estudio detallado de qué se desea y cómo se puede contemplar el diseño y la evaluación del programa. Para ello, el profesor reflexionó sobre el mismo teniendo presentes los contenidos del currículum, así como las estrategias de intervención, los espacios de agrupamiento, recursos, evaluación continua del material, etc.

Aunque este trabajo se desarrolló entre varios cursos escolares, en resumen podemos señalar que se decide mejorar la aplicación de geogebra y buscar más aplicaciones que complementen la propuesta.

Para la evaluación continua del material los aspectos que fueron objetos los siguientes:

- Cuando los alumnos estaban delante del material didáctico tecnológico, si aumentaba su interés por los recursos, usando para ello la observación,

- Si por medio del programa entendían y manejaban con soltura el cambio de parámetros que era necesario para que se modificasen las rectas y con ello, la teoría de este tema,

- Comprobar la complejidad del software utilizado y la destreza ante el mismo (si las actividades las trabajaban bien, si aprendían de los errores, si las realizaban solos o necesitaban ayuda...).

El profesor recurrió en algún momento a un diario para reflejar cómo se llevan a cabo las actividades presentadas y su resolución. Un aspecto muy importante era aprender, tras una breve puesta en marcha del software, los aspectos que era necesario modificar y los que se debían mantener para el desarrollo de las siguientes fases de la investigación.

Para todo ello, el docente usó a lo largo de todo el proyecto una reflexión personal, a través de preguntas como las que siguen:

- i. ¿Poseen los alumnos conocimientos previos para abordar el programa?
- ii. ¿Hay alumnos que van a participar en el programa en situación diferente? ¿En esta circunstancia se prevé una adaptación del programa a estos alumnos?
- iii. ¿Poseen los alumnos habilidades para abordar el programa?
- iv. ¿El programa interrelaciona diferentes bloques de conocimientos matemáticos?
 - ¿Aparecen todos los elementos del currículum: objetivos, contenidos, actividades, recursos, materiales, temporalización y evaluación?
- v. ¿Las actividades propuestas, son motivadoras y cubren todos los contenidos del programa?
- vi. ¿Se presenta alguna dificultad derivada del uso de una metodología concreta?
- vii. ¿Se han previsto los recursos necesarios?
- viii. ¿La propuesta de evaluación está en consonancia con los objetivos que se pretenden conseguir?

¿Las estrategias de evaluación responden al enfoque de enseñanza desarrollado en el programa?

o Evaluación del Proceso (P).

A lo largo de la implementación, el programa fue evaluado por parte del profesor, contestando a las siguientes preguntas.

- i. ¿Se muestran interesados los alumnos durante el desarrollo del programa?
- ii. ¿Siguen los alumnos el ritmo previsto en el programa?
- iii. ¿Qué dificultades se están presentando en cuanto al cumplimiento de los objetivos, la metodología, las actividades, los recursos...?
- iv. ¿Cómo se han resuelto las dificultades?
- v. ¿Hay que modificar algún aspecto del programa? En caso afirmativo, ¿cuál?

o Evaluación del Producto (P).

El objetivo en esta etapa era valorar, interpretar y juzgar los logros del programa. Para evaluar la eficacia del programa y más tarde la propuesta didáctica completa, se utilizó un cuestionario elaborado exprofeso, así como el diario del investigador, del cual luego se partía para hacer posibles mejoras.

También se creyó oportuno que el docente, de nuevo, de manera reflexiva, se hiciese las siguientes preguntas:

- i. ¿Los alumnos han mantenido una actitud favorable a lo largo del programa?
- ii. ¿Se han cumplido los objetivos propuestos?
- iii. ¿Se ha trabajado a lo largo del programa como se tenía previsto?
- iv. ¿Han participado los alumnos de manera activa?

- v. ¿Se ha favorecido el aprendizaje cooperativo y colaborativo entre los alumnos?
- vi. ¿Qué aspectos del programa son susceptibles de modificación para favorecer un aprendizaje de calidad?

¿Qué aspectos del programa habría que mantener para favorecer un aprendizaje de calidad?

Pasamos a exponer la evaluación del diseño del ambiente enriquecido con TIC durante toda la investigación (tabla 15):

Tabla 15. Diseño del ambiente enriquecido. Etapa de planificación.

Fuente: Elaboración propia

DISEÑO DEL AMBIENTE ENRIQUECIDO CON TIC	CURSO
<p>Aunque la selección del programa Geogebra se realizó en los inicios de la investigación, se decidió continuar con Geogebra aunque realizando una mejora de la misma.</p> <p>1. Mejora del programa de Geogebra</p> <p>Durante el desarrollo de la investigación se observó que la primera versión del programa era deficiente por lo que éste se mejoró continuando con el esquema CIPP expuesto con anterioridad.</p> <p>La deficiencia se observó al comprobar que la aplicación solo representaba una recta y no un sistema, por lo que, aunque los alumnos empezaban a entender la relación de los coeficientes en la recta no extrapolaban estas ideas a los sistemas y, además no les servía para la corrección gráfica de los mismos.</p> <p>Se creó una nueva aplicación más completa que representaba los sistemas pudiendo variar el alumno los coeficientes de cada recta para, de manera visual y rápida, observar como influía estos en la representación y por tanto en el número de soluciones y clasificación del mismo.</p> <p>Tanto la aplicación inicial como la resultante de las mejoras se describen en el Anexo III.</p> <p>A la aplicación sobre rectas se le suma la aplicación que se diseña para sistemas.</p>	2012/2013
Se mantiene la misma que en el curso anterior.	2013/2014
<p>1. Selección de la red educativa que se implementará.</p> <p>Planteados todos los conceptos y criterios anteriores se considera positivo que se habilite una plataforma en internet, por parte del centro escolar, y del curso correspondiente, creando así un espacio donde tener todos los recursos y un sitio virtual para poder trabajar disponiendo, también, con foros o blog donde los alumnos puedan escribir sus opiniones,</p>	2014/2015

<p>vivencias y experiencias del uso y resultado de las herramientas.</p> <p>Aunque son varios los EVEAS de software libre que podemos encontrar en el mercado y que usan distintas instituciones educativas, escogimos Moodle (Moodle es el acrónimo de Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment). Creado en el año 2002, en él podemos trasladar, por ejemplo, una acción educativa completa por medio de procesos informáticos.</p> <p>2. Selección de otras aplicaciones y recursos.</p> <p>Son el resultado de la búsqueda de recursos TIC para el aprendizaje del álgebra tras definir qué propuesta didáctica queríamos.</p> <p>Se llevó a cabo una comparativa informal a partir de nuestro trabajo y el de otros estudios para saber dónde estábamos y a donde queríamos llegar.</p> <p>Las herramientas que no están relacionadas con las nuevas tecnologías, dícese el resto de materiales, como las relaciones de ejercicios, cuestionarios, libros... serán detallados más adelante.</p> <p>3. Características de la propuesta didáctica.</p> <p>El aprendizaje a través de las TIC se basa principalmente en el uso de varias aplicaciones (la de Geogebra junto a otras que completan el entorno) a las que por medio de la plataforma Moodle del centro los alumnos podrán acceder. Se decide que, aunque dicho EVEA ofrece la posibilidad de ser un espacio de comunicación entre el profesor y el alumno y entre ellos, aunque finalmente no se crea un foro, ni se entregan tareas, a través de la propia aplicación. No queremos que nuestro objetivo principal se difumine. Los alumnos disponen por medio de este entorno de un repositorio de recursos que explica los conceptos propios del tema, así como ejercicios concretos, que al hacerlos te indicaban si las respuestas eran correctas o no. Además se dispone de una aplicación para recordar cómo se posicionan puntos en los ejes de coordenadas y la propia de Geogebra, en sus dos versiones (para rectas y sistemas)</p>	
<p>No hay ambiente con TIC.</p>	<p>2015/2016</p>
<p>No se modifica la diseñada para el curso 2014/2015.</p>	<p>2016/2017</p>

- **Redacción de la propuesta didáctica**

Las distintas propuestas didácticas que se ha desarrollado engloban todos los aspectos conceptuales propios del currículo del curso de tercero de Educación Secundaria Obligatoria. Por ello la búsqueda de recursos, ya sean teóricos como prácticos, así como en el diseño de material propio, siempre fue revisada bajo estos parámetros. El investigador tuvo presente el tiempo de docencia del que disponen los profesores (horas lectivas en dicho nivel) y la programación anual que tenía dicho curso. Es decir, el tiempo estimado que se podía dedicar a la enseñanza de este tema.

Dada la extensión de la propuesta didáctica final, diseñada e implementada en el curso 2014/2015 (y presentada de nuevo a los alumnos en el 2016/2017), su interrelación con varias tareas de la investigación y la importancia de la misma, creemos oportuno resaltar los aspectos más destacados, dejando su exposición completa para el epígrafe de “nuestra propuesta didáctica”.

- **Desarrollo y puesta en marcha de la propuesta, el entorno y las metodologías.**

Resaltamos que en los cursos escolares 2012/2013 y 2013/2014 se mejoró el programa y potenciando, el trabajo autónomo a la vez que colaborativo de los alumnos. En los cursos 2014/2015 y 2016/2017 fue donde se desarrolló la propuesta didáctica final con un mayor número de recursos TIC y un ambiente de trabajo sustentando en las metodologías ya comentadas.

La propuesta didáctica final se lleva a cabo en referencia a varias temáticas:

- La previsión de la gestión de la plataforma para que los usuarios, objetos del estudio, pudiesen acceder fácilmente.
Se debía tener presente que era necesario avisar al centro, así como a los alumnos de las excepciones informáticas (limitaciones de acceso) que debían de introducir en los ordenadores para que no hubiese problemas durante la implantación de la propuesta.
- El montaje y puesta en marcha de todo tipo de recursos para la didáctica del tema.
- La preparación de las clases.

- **Revisión de los instrumentos de evaluación.**

Durante todo el trabajo se desarrolla esta tarea, quedando en casa curso escolar el uso de los siguientes instrumentos (tabla 16):

Tabla 16. Revisión de los instrumentos de evaluación. Etapa de planificación. Fuente: Elaboración propia

REVISIÓN DE LOS INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN	CURSO
<ul style="list-style-type: none"> • Cuestionario sobre rectas y sistemas (versión 2,V2) • Cuestionario EFAI • Grupo de discusión A: Profesores seminario • Grupo de discusión B: Alumnos y docentes <ul style="list-style-type: none"> • Matemáticas en la enseñanza • Tras el término del uso de la aplicación • Tras la implementación completa • Diario del profesor/investigador, observación 	2012/2013
<ul style="list-style-type: none"> • Cuestionario sobre rectas y sistemas V2 • Cuestionario Matemáticas en la enseñanza • Grupo de discusión A: Profesores seminario • Grupo de discusión B: Alumnos y docentes <ul style="list-style-type: none"> • Matemáticas en la enseñanza • Tras el término del uso de la aplicación • Tras la implementación completa • Diario del profesor/investigador, observación 	2013/2014
<ul style="list-style-type: none"> • Cuestionario sobre rectas y sistemas V2 • Cuestionario “Matemáticas en la enseñanza” • Cuestionario “Disponibilidad Tecnológica” • Grupo de discusión A: Profesores seminario • Grupo de discusión B: Alumnos y docentes <ul style="list-style-type: none"> • Matemáticas en la enseñanza • Tras el término del uso de la aplicación • Tras la implementación completa • Encuesta final • Diario del profesor/investigador, observación. Se incluye el diario de clase para todas las jornadas que dura la implementación de la propuesta. 	2014/2015
<ul style="list-style-type: none"> • Cuestionario sobre rectas y sistemas V2 • Grupo de discusión B: Alumnos y docentes <ul style="list-style-type: none"> • Tras la implementación completa • Diario del profesor/investigador, observación. Se incluye el diario de clase para todas las jornadas que dura la implementación de la propuesta. 	2015/2016
<ul style="list-style-type: none"> • Cuestionario sobre rectas y sistemas V2 • Cuestionario EFAI • Cuestionario “Matemáticas en la enseñanza” • Cuestionario “Disponibilidad Tecnológica” • Grupo de discusión A: Profesores seminario • Grupo de discusión B: Alumnos y docentes <ul style="list-style-type: none"> • Matemáticas en la enseñanza • Tras el término del uso de la aplicación 	2016/2017

- Tras la implementación completa
- Encuesta final
- Diario del profesor/investigador, observación. Se incluye el diario de clase para todas las jornadas que dura la implementación de la propuesta.

• **B) ETAPA DE ACCIÓN: IMPLEMENTACIÓN DE LA PROPUESTA.**

En esta fase la investigadora se torna profesora dentro del aula siendo esta persona la que, teniendo en cuenta lo diseñado y la realidad presente, dirige el proceso de enseñanza-aprendizaje presentando las explicaciones, materiales, orientando a los alumnos, reforzando sus aciertos, corrigiendo de manera adecuada sus errores y llevando a cabo el objeto de esta investigación.

Fue en este momento cuando se desarrolló de forma más completa nuestra investigación, diseñando e implementándose la propuesta didáctica y en el que la investigadora poseía mayor madurez tanto en la docencia como en la investigación científica. Podemos distinguir dos ejes de actuación (figura 29) de los alumnos:

- Presencial:
 - Autónomo
 - Cooperativo
 - Tradicional
- No presencial
 - Autónomo.

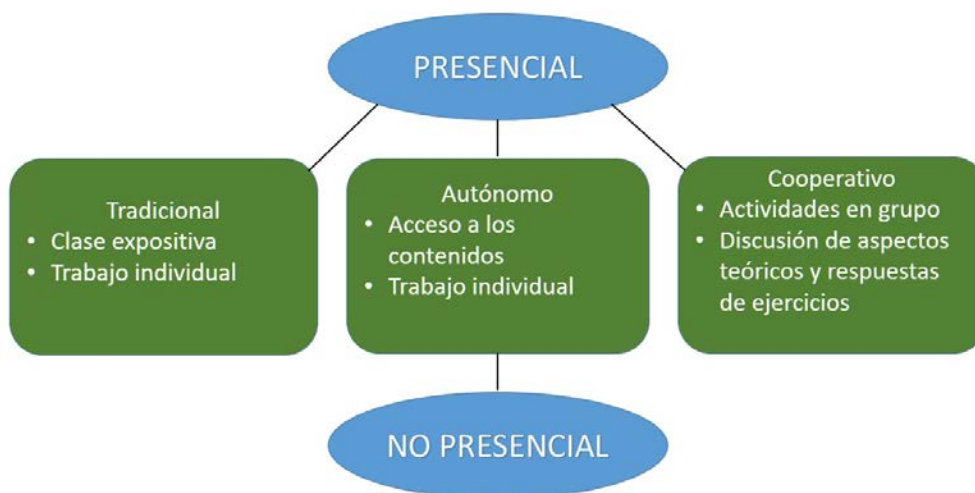


Figura 29. Trabajo presencial y no presencial.

Fuente: elaboración propia.

Centrándonos en el aprendizaje cooperativo, al ser la primera experiencia explícita que se llevaba a cabo, se decidió que fuesen los propios alumnos los que formasen dichos agrupamientos para más adelante poder hacer grupos heterogéneos. Al ser los propios estudiantes los que eligieron a sus compañeros de trabajo, se esperaba que se sintieran con mayor libertad y comodidad para desarrollar la experiencia al no sentirse

juzgados durante el desarrollo de la misma, por compañeros con menos confianza o menos afines. Estos primeros grupos fueron formados por dos/tres alumnos. Cuando un grupo no lograba llegar a la resolución correcta (el ordenador decía si así era) de las actividades debía acudir al grupo más cercano que la hubiese realizado de manera correcta y trabajar con ellos para entenderla. Finalmente se hizo un pequeño debate o exposición en la que intervino todo el alumnado, guiada por el profesor. Las actividades propuestas para la realización en grupo se desarrollaban siempre en clase y con el ordenador.

Hay que tener en cuenta que en un principio los alumnos pueden no saber su aprendizaje, pero que el profesor deberá hacerles vencer las ideas conductistas para potenciar las constructivistas por medio de las nuevas tecnologías y ser consciente que en ocasiones este tipo de propuesta conlleva mayor trabajo colaborativo, lo que puede hacer que la clase trabaje de otro modo y no se guarde un silencio absoluto como durante las clases expositivas.

Hemos de subrayar que si mientras se está implementando toda la propuesta didáctica se observa que no se está dando un buen proceso de aprendizaje (bien porque los alumnos presentan desmotivación o las pruebas ponen de manifiesto que no se están alcanzando los objetivos propios de la temática de esta parte de la materia) se volverá al sistema tradicional. Esto es debido a que en todo momento se velará por el aprendizaje de los discentes estando en un segundo plano la investigación. La implementación supondrá un esfuerzo para los docentes pues se tendrá que modificar parte de sus esquemas y de las comodidades adquiridas en sus años de docencia.

En lo referente a la enseñanza tradicional, se llevó a cabo en el aula diaria. Siendo la clase magistral la desarrollada para el aprendizaje de la resolución analítica de los sistemas.

Una vez finalizada la experiencia, se solicitó a los alumnos que cumplimentasen una prueba extra estandarizada y otro cuestionario al curso siguiente de su implementación y se analizaron todos los datos obtenidos

En la propuesta didáctica final (curso 2014/2015), se diseñó todo el desarrollo de la experiencia, que más tarde fue llevada a la realidad.

• C) ETAPA DE ANÁLISIS: OBSERVACIÓN Y EVALUACIÓN

Tras dar término a la experiencia educativa se llevó a cabo la recogida de información por medio de los instrumentos diseñados para tal fin y así más tarde poder tratarlos para un análisis exhaustivo. En el capítulo 5 y 6 se pueden observar dichos datos:

- Tratamiento de la información.
- Análisis de los resultados.
- Elaboración de las conclusiones.

• **D) ETAPA DE REFLEXIÓN**

Hay que poner de relieve que durante los años en los que se desarrolló la investigación esta etapa y la del “análisis de la situación eran contemporáneas.

Con esta etapa se concluyó la investigación. Durante ella, se estudió la consecución de los objetivos, se hizo un análisis de la experiencia, se trabajaron los resultados y las posibles mejoras así como las futuras líneas de investigación.

En la siguiente tabla se muestra una pequeña síntesis de algunas de las ideas referentes a la reflexión (tabla 17):

Tabla 17. Etapa de reflexión. Fuente: Elaboración propia.

ETAPA DE REFLEXIÓN	CURSO
<p>Implementamos la misma enseñanza con los discentes que se encuentran en tercero de la ESO, los cuales durante el curso anterior (cuando se encontraban en segundo curso) ya habían dado y estudiado el tema de los sistemas. Cuando se comienza con la explicación y se interactúa con los alumnos, el profesor constata que, o bien no han entendido la dependencia entre los coeficientes y soluciones o que las han olvidado. Esto continúa poniendo de manifiesto que hay un fallo en la enseñanza que puede ser debido a que se desarrolla de forma incorrecta el proceso de enseñanza aprendizaje, en cuanto a conceptos o que hay una ausencia de aprendizaje significativo.</p> <p>El aprendizaje significativo, también se mide con los alumnos que en esos momentos se encuentran en cuarto y que el curso anterior participó en la experiencia con la aplicación de Geogebra.</p>	2012/2013
<p>En el presente curso se constata que el trabajo que se está desarrollando con las nuevas tecnologías se ha de ampliar.</p> <p>El aprendizaje significado se continúa estudiando en cuarto (en los años posteriores también), con los alumnos que el año anterior participaron en la experiencia. Al igual que en el año anterior se comprueba que las preguntas que se hacen en el tema de las funciones, con los alumnos de tercero, para ver si los conceptos trabajados sobre las rectas (sistemas), son apropiadas para ver el este tipo de aprendizaje.</p>	2013/2014
<p>Se ha de resaltar que “el montaje” de toda la propuesta didáctica es complejo, no por la utilización de la plataforma, que</p>	2014/2015

<p>también conlleva trabajo, sino por el hecho de encontrar el material adecuado. Este es el primer año que se trabaja con un escenario más amplio de inserción de las TIC.</p> <p>La propuesta didáctica de este curso es muy completa. La hoja de ejercicios diseñadas ayuda, en gran medida, a que los alumnos entendiesen los la relación de los coeficientes de las rectas y las soluciones de los sistemas.</p> <p>Las metodologías son apropiadas.</p>	
<p>El balance de este año no es positivo en referencia al aprendizaje de los estudiantes. El hecho de haber mantenido las metodologías pero no las inserción de las TIC hace que los alumnos no hayan aprendido con facilidad, incluso que su aprendizaje sea menor que el de otros cursos con características cognitivas similares. Se observa, cuando más adelante se estudian las funciones, que los alumnos no entendieron cómo debían ser las gráficas de las rectas dependiendo de su expresión algebraica, y que el aprendizaje que poseían era memorístico y no razonado.</p>	2015/2016
<p>La medición del aprendizaje significativo con los alumnos que el curso pasado desarrollamos el proyecto constata que el aprendizaje había sido malo.</p> <p>La propuesta didáctica implementada es la del curso 2014/2015. Se comprueba que su uso favorece el proceso de enseñanza aprendizaje. Los resultados, tanto en el examen como en el aprendizaje significativo en los temas que le siguen avalan dicha afirmación.</p>	2016/2017

8. NUESTRA PROPUESTA DIDÁCTICA.

8.1. DISEÑO DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA.

En la enseñanza tradicional actual, y centrándonos en los textos de la editorial Oxford, con las que nuestros alumnos trabajan durante los presentes cursos, el tema de los “Sistemas Lineales” está ubicado en el bloque de “Álgebra”, encontrándose más adelante, en el de “Análisis”, las “Funciones”. Este hecho se da, tanto en segundo y en cuarto de la ESO (en ambas opciones), como en el curso objeto del estudio, tercero.

Señalaremos, dejando a un lado la materia impartida en cursos anteriores, que cuando los alumnos se enfrentan en tercero de la ESO a este tema, han dado con anterioridad el bloque de “Aritmética”, así como los temas referentes a “Polinomios” y “Ecuaciones”, lo que les hace disponer de las herramientas necesarias para el manejo operativo de las ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Presentamos en este capítulo una alternativa, nuestra propuesta didáctica, para la enseñanza tradicional llevada a cabo con los contenidos relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales, en el tercer curso de enseñanza secundaria obligatoria. Dichos contenidos, referenciados en la ley educativa, se pueden encontrar en el Anexo I y VII. En el diseño de esta propuesta se ha tenido presente que la integración de las tecnologías no implicase un abandono de los contenidos. Es más, que por medio de ellas la consecución de los mismos se alcanzase en un proceso de enseñanza mejorado. Dado que el diseño se lleva a cabo antes del cambio legislativo, se estudia si hay cambios significativos en los contenidos, criterios y estándares expuestos hasta el momento.

Tendremos presentes para el diseño, las experiencias fundamentales vividas por el investigador y docente, que se refieren a los aspectos conceptuales de los sistemas de ecuaciones lineales, de dos incógnitas y su manera actual de trabajarlo en el aula:

- En primer lugar destacamos que esta temática está muy alejada por parte de los discentes de los significados que conlleva. Como ya hemos expuesto con anterioridad, el sistema educativo se limita a evaluar si el alumno ha aprendido a resolverlos pero no a razonar el tipo de solución que se espera. Históricamente, los libros han presentado un desequilibrio en cuanto al número de ejercicios enfocados para la resolución algebraica en contraprestación del pensamiento y significado de cada uno de los factores que interviene en cada uno. Se ha de destacar que en las últimas ediciones de los libros empieza a aparecer algún ejercicio en esa línea, tras una explicación teórico, pero no práctica, por lo que el aprendizaje continúa sin ser completo.

- Señalamos el hecho de que, en las explicaciones de los libros de texto, cuando se adentran en la clasificación de los sistemas, no se explica el razonamiento de esos nombres para cada situación, lo que hace que el alumno memorice los nombres dejando a la memoria un papel que debería ocupar el razonamiento.
- Los textos no ponen ninguna observación especial al hecho de que los alumnos equivocan conceptos como “infinitas soluciones” con que la variable x sea infinito.
- Los libros no resaltan el hecho de que un problema no tenga solución, aun teniendo solución real el sistema que nos hayamos planteado, al no ser valores extrapolables a la realidad existente.

Creemos importante marcar los aspectos conceptuales que entendemos que son fundamentales transmitir en nuestra enseñanza:

- Definir un estudio claro de la relaciones de los coeficientes en la representación de las rectas, viendo la relación directa existentes entre los mismos y sus representaciones gráficas.
- Entender la clasificación de los sistemas en relación a las expresiones generales de los sistemas.
- Potenciar el razonamiento frente a los algoritmos, dando significado a las representaciones gráficas.

Anteriormente, la propuesta didáctica se deberá detener en que el alumno entienda qué es una recta (y sus tipos) y todas sus características, qué es una función y las representaciones gráficas de las mismas. Después, y tras adentrarse en las ideas de equivalencia de rectas, será cuando el discente reúna las condiciones óptimas para poder enfrentarse a las ideas marcadas sobre los sistemas.

Por todo lo expuesto, la propuesta didáctica la desarrollaremos alrededor de estos cuatro focos:

1. Las rectas.
2. Los sistemas.
3. La clasificación de los mismos.
4. Problemas.

Estos aspectos conceptuales son los ya trabajados de manera ordinaria en la enseñanza secundaria, pero lo innovador en este estudio, es intentar potenciar la parte conceptual de la geometría, el álgebra y las funciones, dejando unas clases con metodología tradicional para la resolución de sistemas por medio de las tres formas tradicionales (sustitución, igualación y reducción) y ampliando por medio de las nuevas tecnologías el potencial propio del alumno, intentando dotarlo, no sólo de algoritmos, sino de un razonamiento conceptual, dándole mayor énfasis a la razón frente a la mecanización.

En referencia a las metodologías que se proyectan en la propuesta didáctica, se trabajará teniendo presente las metodologías

constructivistas y el aprendizaje significativo, el apoyo visual y los materiales manipulativos (electrónicos), manteniendo una enseñanza b-learning por medio de una plataforma virtual. Se destaca que el uso de las nuevas tecnologías tendrá un papel relevante en este estudio didáctico en función de la motivación y del aprendizaje. De este modo, analizaremos si los alumnos han comprendido los conceptos explicados y para los que hemos usado nuevas herramientas. Haremos análisis de la experiencia para evaluar y cuantificar si hay mejora y si el diseño ha sido el correcto.

Tras la implementación de la propuesta se estudiarán si los objetivos de aprendizaje se han cumplido al introducir las metodologías fijadas, las nuevas tecnologías, nuestra secuenciación y las nuevas estrategias de enseñanza.

Centrándonos en los materiales, en el inicio de esta propuesta didáctica decidimos fijar cuales serían los instrumentos y herramientas que usarían nuestros alumnos.

Refiriéndonos a recursos tecnológicos destacamos que esta propuesta didáctica se llevaría a cabo, fundamentalmente, en el aula de informática, clase dotada de treinta ordenadores, sistema de audio, un proyector y una pizarra. De esta manera todos los alumnos tendrían un papel fundamental en el trabajo con los ordenadores pero al querer potenciar el trabajo colaborativo serían dos/tres alumnos lo que estarían usando un solo ordenador.

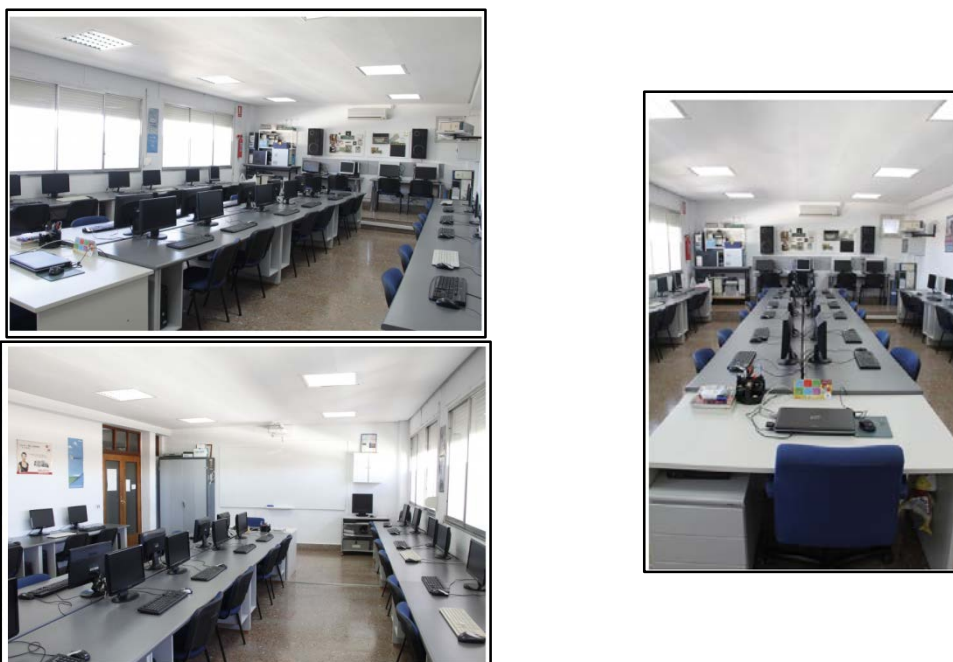


Figura 30. Aula de informática. Fuente: www.colegiohispania.es

También será preciso que el alumno pueda trabajar/reforzar fuera del horario escolar por medio del portal educativo del centro (en concreto), del aula virtual, algunos de los aspectos que se trabajan durante las clases. Para aquellos discentes que no dispongan de ordenador o conexión a internet en sus domicilios, se les brindará la oportunidad de poder acceder en el centro.

Como recurso físico también hemos de señalar el aula tradicional dotada de un proyector y una pizarra, pupitres...



Figura 31. Aula de informática. Fuente: www.colegiohispania.es

Los estudiantes tendrán como materiales propios o bien como trabajos a realizar:

1. Cuestionario sobre la matemática en la enseñanza.
2. Cuestionario sobre disponibilidad tecnológica.
3. Cuestionario sobre conocimiento inicial de los sistemas.
4. Libro de texto. En mención a este recurso creemos oportuno resaltar que es el que usan durante todo el curso pero al que en esta propuesta didáctica se le restará protagonismo.
5. Hojas de ejercicios (que se desea que los alumnos puedan trabajar con los programas).
6. Cuestionario sobre rectas y sistemas.
7. Los alumnos dispondrán de los ordenadores con el software, aplicaciones, apuntes.... como ya hemos mencionado.

El profesor tendrá a su disposición una pizarra, un proyector, un ordenador, que usará para sus explicaciones, los enunciados de los problemas, el libro de texto del alumno, una libreta de anotaciones, el diario de clase... (en el que anotará las reflexiones o conclusiones a las que se llega, observa...)

Los alumnos por medio de los grupos de discusión valorarán la implementación del programa, de toda la propuesta didáctica y contestarán una encuesta final.

8.2. CONCRECIÓN DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA.

Llegado el momento se estudiará dependiendo de las características del grupo de clase, así como de los alumnos integrantes del mismo, si hay necesidades específicas de algún tipo.

8.2.1. Materia.

Los contenidos matemáticos se dividirían en los siguientes apartados.

1. Repaso sobre los puntos, las tablas de valores, rectas y funciones.

Se trabaja con detalle las ecuaciones lineales con dos incógnitas y los conceptos de función.

- a) Los puntos.
- b) Las tablas de valores.
- c) ¿Qué es una función?
- d) Función (rectas) lineal, afín y constante.
- e) Posición de las rectas.
- f) Definición de Ecuación Lineal con dos incógnitas.
- g) Definición de Solución. Número de soluciones.
- h) Estudio de funciones-incidencia de los coeficientes de una recta.

Se llevará a cabo por medio del ordenador, sin clase expositiva por parte de profesor y potenciando el trabajo entre iguales

2. Sistemas de ecuaciones lineales

- a) Definición de sistema de ecuaciones lineales.
- b) Definición de solución.
- c) Sistemas equivalentes.
- d) Número de soluciones de un sistema de ecuaciones.
- e) Incidencia de los coeficientes de dos rectas ante las soluciones de un sistema.

3. Resolución de sistemas

- a) En qué consiste la resolución de un sistema.
- b) Resolución gráfica.
- c) Métodos para resolver analíticamente los sistemas.

4. Resolución de problemas mediante ecuaciones y sistemas

- a) Traducción de enunciados al lenguaje algebraico, planteamiento del sistema y resolución del mismo.

Se trabajaran los tres bloques temáticos por medio de aplicaciones informáticas y ambientes enriquecidos. En algunos puntos se recurrirá a la enseñanza tradicional o la conjunción de las dos.

8.2.2. Temporalización

Se contempla emplear un mínimo de 8 sesiones de 55 minutos de duración cada una. Estas clases se organizan en torno al diseño de la propuesta didáctica diseñada.

En el siguiente cuadro se presenta la distribución temporal de las actividades y tareas para casa de uno de los núcleos:

Tabla 18. Concreción de la temporización de la propuesta didáctica.

Fuente: Elaboración propia

Núcleo del contenido	Numero de sesión	Actividades aula	Tarea para casa
Repaso sobre puntos, las tablas de valores, rectas y funciones	1, 2	Si	Si
Sistemas de ecuaciones lineales	2,3,6	Si	Si
Resolución de sistemas	3,4,5,6	Si	Si
Resolución de problemas mediante ecuaciones y sistemas	7,8	Si	Si

8.2.3. Secuenciación

A continuación se describe la secuencia prevista, junto con el tiempo estimado para cada una de las partes en la que se dividirá el trabajo.

La semana anterior se les advertiría de la necesidad de contar con una cuenta de correo, para poder registrarse en la plataforma, y de manera oral se les explicará (sin soporte informático) cómo han de registrarse en la plataforma y en el curso. Se les indicará que tienen su disposición en la web del centro el vídeo explicativo, realizado por la investigadora, para que les sea más fácil este trámite.

También se le comunicará que deben pensar en la composición de los grupos de trabajo (se deben dividir en grupos de dos o tres alumnos).

El libro usado es el de Oxford, proyecto Adarve. Tras el cambio de legislación se continuó con el libro de Oxford que se había realizado en concordancia con la misma. En los casos donde esos ejercicios que creíamos interesantes no se encontrasen en la nueva legislación, se les daría para que los pudiesen hacer (es así como se ha trabajado con el resto de unidades temáticas).

En las siguientes figuras reflejamos las distintas sesiones en el aula.

SESIÓN PRIMERA

En esta primera sesión se recogerán a los alumnos en su aula habitual y se les pedirá que acompañen a la profesora al aula de informática. Se les recordará que está en un piso distinto y el buen comportamiento que deben tener tanto durante el traslado como en la propia clase. Se les indicará que cuiden los ordenadores, el mobiliario y que su comportamiento sea ejemplar. En vez en el aula, la profesora les indicará que se pongan por grupos en los ordenadores y que un representante de cada grupo, por medio de sus datos y su sesión, llegue hasta el curso de la plataforma Moodle objeto de este estudio. Se les indicará que tan solo tienen que sacar una libreta y un boli, que deben apuntar o hacer cuanto considere oportuno pero que en verdad es tan solo un material de apoyo para que puedan hacer “operaciones, gráficas...”, en su caso.

Trabajo en el aula:

- Se les comunicará que empiecen a “leer e investigar” el tema uno. Antes de ello la profesora recordará en la pizarra lo que era una recta y muy por encima alguna de sus características. Podrá hacer preguntas como:
 - ¿De qué depende que la recta sea creciente?
 - ¿Podemos saber solo con la expresión analítica si pasa por el origen?
 - Dada una gráfica: ¿Cómo podemos saber cuál es su expresión?
 - ...
- Las respuestas se dejarán abiertas, invitando al diálogo entre compañeros y potenciando la curiosidad al decirles, que las respuestas a esas y más preguntas las podrán ir obteniendo (o en caso de saber, contestarlas) conforme avancen en la teoría.
- Más tarde, cuando compruebe, la profesora, que tras leerse la “Introducción” (por medio de la observación, al ver cómo trabajan con las aplicaciones) los alumnos recuerdan como representar puntos y como calcular el valor de la variable independiente, se les dejará que comiencen con los bloques teóricos de “funciones”, “funciones cuya gráfica es una recta”, “funciones de proporcionalidad”, “posición relativa de dos rectas”, “recta que pasa por dos puntos”.
- Se les indicará que deben realizar todos los ejercicios interactivos que aparecen y que apunten en el cuaderno aquellos que, tras agotar el número de intentos, no logran hacer de forma correcta. Se les hará hincapié en que no pueden pasar al siguiente ejercicio o continuar con los mismos si al terminar y tenerlo correcto éste no ha sido entendido por todos los integrantes del grupo.

Trabajo para casa:

- Deberán hacer el último punto, el de autoevaluación. Esto se desarrollará de manera individual y tendrán que apuntar en la libreta las respuestas que han dado al ordenador así como los problemas que les surjan.
- Deberán saber explicar el porqué de sus respuestas correctas.
- Si algún concepto del tema no les ha quedado claro tendrán que preguntarlo al día siguiente.

Figura 32. Sesión primera.
Fuente: Elaboración propia

SESIÓN SEGUNDA

Trabajo en el aula de informática:

- Se dedicaran los primeros minutos de la clase a aclarar los ejercicios de la sesión anterior. Solo en momentos puntuales será el profesor el que los haga pues lo que se desea es que sean los alumnos lo que trabajen de manera autónoma y fomenten el aprendizaje entre iguales. Se trabajará por medio del debate.
- Tras esto y cuando el docente observe que es el momento se volverá a hacer las mismas preguntas que en la sesión anterior.
- Se trabajará con ellos (tiempo restante) el punto de "posición relativa de dos rectas" y se intentará que ellos razonen con la aplicación creada y que encuentren en Moodle. Por medio de la misma y del trabajo colaborativo y grupal-clase se trabajaran las siguientes preguntas:
 - ¿Dos ecuaciones distintas siempre se cruzaran?
 - ¿Qué le tengo que hacer a la expresión analítica de una recta para que cambie de ser creciente a decreciente?
 - ¿Puedo cambiar la expresión analítica de una recta y que su representación gráfica no varíe?
 - ...
- Se les explicará la clasificación de los sistemas y el número de soluciones en cada uno de los casos y se hacen con ellos los ejercicios de su libro 10, 11 (se inicia) de la página 113,

Trabajo para casa:

- Leer, del libro de texto perteneciente a la enseñanza tradicional, en concreto las paginas 108, 109, 110, 111.
- Tendrán que hacer los ejercicios 1, 2, 4, 5, 7, 8 y 9. Terminar el 11.

Figura 33. Sesión segunda.
Fuente: Elaboración propia

SESIÓN TERCERA

Trabajo en el aula:

- Esta sesión se llevará a cabo en el aula tradicional. El profesor explicará las páginas que los alumnos han tenido que leerse previamente en casa. Para la explicación el docente se apoyará y desarrollará los conceptos teóricos a partir del material interactivo de la web, correspondiente al tema 2, en concreto los apartados de "introducción", "definición de sistemas" y "sistemas equivalentes". Se mantendrán los grupos de las sesiones anteriores y cuando se tengan que hacer los ejercicios interactivos cada grupo dará una sola solución. Por medio del debate se llegará al final, guiada por el profesor, que será el que lo compruebe.
- A continuación se corregirán en la pizarra los ejercicios que llevaban de deberes.
- Se les recordará (lo normal es que lo supiesen del año pasado) el método de sustitución y el de igualación, a partir de las explicaciones de su libro.

Trabajo para casa:

- Repasar los ejercicios interactivos, realizadas durante esa clase, ahora de manera individual.
- Hacer el ejercicio 15 y 17 de su libro.
- Deben trabajar, por medio del material de la web, el punto "método de resolución". No es necesario que realicen los ejercicios.

Figura 34. Sesión tercera.
Fuente: Elaboración propia

SESIÓN CUARTA

Trabajo en el aula de informática:

- Se resolverán dudas y se corregirán los ejercicios que se les había indicado que debían realizar.
- Se explicará el método de reducción, con su libro, página 116 y el profesor hará el ejercicio 16 de esa misma página.
- Trabajaran de manera grupal, como en sesiones anteriores, con el ordenador, los ejercicios interactivos del apartado "método de resolución".
- Se hará la puesta en común de los mismos.
- Se les explicará cómo funciona la aplicación Wiris para que puedan auto-corregirse algunos de los ejercicios que tienen en su libro de texto.
- Si diese tiempo los alumnos podrán comenzar con las tareas de casa.

Trabajo para casa:

- Libro de texto, página 117:
 - ejercicio 18 apartados: b), c) y d);
 - ejercicio 19 apartados b) y c);
 - ejercicio 20: a) y d);
 - ejercicio 21 apartados: a) y b).

Figura 35. Sesión cuarta.
Fuente: Elaboración propia

SESIÓN QUINTA

Esta sesión se dejará abierta por si se han teniendo que reajustar algunas de las anteriores por falta de tiempo, problemas en cuanto al proceso de enseñanza aprendizaje...

Trabajo en el aula:

- Mientras que dé comienzo con la corrección en la pizarra por parte de los alumnos, con ayuda, si fuese necesario, del docente, los alumnos se dispondrán a hacer los ejercicios del libro 22 y 25.
- Se harán todos los deberes que llevaban, en la pizarra, dejando que los alumnos pregunten dudas...

Trabajo para casa:

- Terminar los ejercicios 22 y 25 si es que no les dio tiempo.

Figura 36. Sesión quinta.
Fuente: Elaboración propia

SESIÓN SEXTA

Llegados este momento los alumnos se supone que ya saben resolver todo tipo de sistemas, por el método que consideren más adecuado.

Trabajo en el aula de informática:

Para comprobar si todo lo explicado, en cuanto a los coeficientes y soluciones, lo han entendido se les pedirá que con la ayuda de la teoría que encuentran en el tema dos, en concreto en el apartado de "soluciones", realicen los ejercicios 1 y 2 con la ayuda de la aplicación diseñada para tal fin. Se les explicará cómo se trabaja con ella y se debatirá en clase, tras el trabajo de ellos, todas las conclusiones obtenidas. De nuevo, se trabajarán las repuestas a las preguntas que se han ido planteando en otras sesiones. Se comenzará a trabajar con ellos la hoja de "Ejercicios de ecuaciones lineales", siendo fundamental la práctica con la aplicación de sistemas de Geogebra diseñada.

Trabajo para casa:

• Terminar la hoja de ejercicios y hacer de la página 113 del libro, los ejercicios: 12, 13 y 14. Estos se deberán hacer "pensando"...

Figura 37. Sesión sexta.
Fuente: Elaboración propia

SESIÓN SEPTIMA

Trabajo en el aula:

El comienzo de esta sesión será cerrar el trabajo de la clase anterior corrigiendo los ejercicios que sean necesarios.

A continuación se pasará a la resolución de problemas que se dará de forma tradicional pues esta parte no es objeto de nuestro estudio. Aun así dispondrán de un material interactivo referente a la resolución de problemas que, aunque no se les exigirá, el alumno que lo desee podrá disponer de él. Resaltándoles que también les servirá de repaso para los problemas de primer grado y de segundo.

Se harán en clases, cuantos problemas sean posibles de la página 119, 122 y 123 del libro del discente. Se les dará, en estas sesiones, más relevancia al planteamiento que, a la resolución, que se supone ya está adquirida tras toda la práctica anterior.

Figura 38. Sesión séptima.
Fuente: Elaboración propia

Hemos de resaltar que si invertimos alguna sesión más de lo habitual, se espera que el aprendizaje significativo sea mayor por lo que en el tema “Función lineal y cuadrática” se podrá avanzar con un ritmo mayor.

8.3. EXPOSICIÓN DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA.

El material seleccionado para la recreación de puntos y tablas fueron tres aplicaciones y se escogieron por:

- La primera de ellas, solo con darle a un clic del ratón, te dibuja en el eje de coordenadas distintos puntos, siendo estos variados en cuanto a que ambas variables toman tanto valores positivos como negativos y cero.
- La aplicación de Geogebra se diseñó para que el discente pudiese escoger el punto que quisiese visualizar y así poder trabajar los cuatro cuadrantes. Entendiendo la implicación de los signos con el lugar en el que quedan representados.
- La aplicación de las tablas fue seleccionada, principalmente porque explica cómo se calcula la variable dependiente a partir de la independiente. Además, dibuja todos los puntos que calcula.
- De los dos módulos de la aplicación de Geogebra que se diseñaron, para esta primera parte de temario, se escogió el que trabaja con una sola recta, para que el aprendizaje fuese secuencial.

En cuanto al material teórico seleccionado, es escogido tras una búsqueda exhaustiva, por los siguientes motivos:

- El material teórico está implementado en una herramienta bastante interactiva.
- Obliga al discente a interactuar, forzando a la reflexión y al razonamiento. El nivel de dificultad es progresivo.
- Las respuestas de los ejercicios se han de seleccionar o escribir teniendo un número determinado de intentos. En aquellos que tienen que dar varias respuestas, el software dice cuántas están bien para que el alumno pueda continuar mejorando, dejando señaladas las que el alumno contestó de forma correcta. Como ya se comentó, los discentes no trabajaran de manera individual sino en pequeños grupos, por lo que la característica reseñada sobre la corrección de ejercicios fomenta el trabajo en equipo. Así cada miembro del equipo defenderá la que cree que es la respuesta correcta y, una vez que se cercioren de la solución válida, se la podrán explicar entre ellos. Para aquellos ejercicios que deberán hacer fuera del horario escolar y de manera individual, se le pedirá que las respuestas que vayan introduciendo en el sistema las apunten en una libreta y tras la corrección dejen por escrito por qué opinan que su respuesta está bien o mal y

en caso de haberse equivocado, que reflexionen sobre la misma y repitan este proceso.

- Presenta mapas conceptuales.
- Trabaja la clasificación de los sistemas tanto de manera teórica como práctica:
- Tiene problemas, no todos son ejercicios algebraicos.
- Puede servir para alumnos con alguna dificultad, al ser leído lo que está escrito, y por supuesto porque respeta los distintos ritmos de aprendizaje.

De la aplicación de Geogebra para la segunda parte del temario, la referente a los sistemas, destacamos:

- Por medio de los cursores el alumno puede variar los valores de las rectas, tanto de la pendiente como de la ordenada en el origen.
- Al mismo tiempo que se cambian los coeficientes, la representación gráfica varía, lo que facilita el razonamiento y entendimiento, por parte del discente, de la correspondencia que se da.
- En la misma aplicación se queda escrita la expresión algebraica de las funciones (forma general algebraica de sistema, aunque no de manera general).
- Cada función tiene sobre ella "su nombre" (expresión).

Se diseñó una hoja de ejercicios, Anexo XIX, que el alumno podía realizar por el canal que desease (resolución algebraica tradicional o Geogebra). Se esperaba que el estudiante pudiese decidir que material sería el más adecuado y razonar el motivo.

Se escogió un programa existente para que los alumnos pudiesen auto-corrigerse los ejercicios de los sistemas. Fue por medio de WIRIS (aplicación que proporciona la solución algebraica de un sistema) aunque ya sabían que Geogebra les podía dar la solución por medio de las gráficas.

Recordamos que también se diseñó una serie de preguntas que el alumno iba a contestar antes de comenzar el tema, para medir el aprendizaje significativo, pero dado que el hecho de que los alumnos contestasen a un cuestionario similar en un corto periodo de tiempo podía desvirtuar la investigación, se dejó la cumplimentación para más adelante y solo se llevó a cabo, anteriormente y posteriormente, en una ocasión. El estudio de la valoración de este tipo de aprendizaje, significativo, se midió en cuarto curso, tras haber pasado un curso escolar de la implementación expuesta. Se evaluó la temática de los sistemas de ecuaciones lineales, destacando no solo la resolución algebraica, (que sabemos por nuestra experiencia docente que adquieren, en condiciones normales, en tercero), sino que nos centramos en su clasificación sin necesidad de resolución.

En el Anexo X se puede consultar las pruebas referidas.

La presentación visual de algunos ejemplos de todo lo explicado, es decir, de nuestra propuesta didáctica completa se puede consultar en el Anexo IX.

5

CAPÍTULO RESULTADOS

CAPÍTULO 5: RESULTADOS

CAPÍTULO 5: RESULTADOS

RESULTADOS DE LA SELECCIÓN DEL PROGRAMA Y RECURSOS DIGITALES

RESULTADOS DE LA SELECCIÓN DE LA PLATAFORMA

RESULTADOS DE LOS GRUPOS DE DISCUSIÓN

RESULTADOS DE LOS DIARIOS

RESULTADOS DE LOS CUESTIONARIOS

Figura 39. Mapa conceptual capítulo 5. Fuente: Elaboración propia.

1. RESULTADOS DE LAS FASES DE ANÁLISIS.

➤ Selección del programa y recursos digitales.

Esta decisión viene heredada de la segunda fase de nuestra investigación. Aunque se puede consultar en la bibliografía recordamos que hizo que se escogiese la aplicación Geogebra:

Debemos comentar que aunque existen programas muy completos que permiten trabajar con construcciones geométricas, la misma complejidad de éstos, con multitud de opciones y menús, puede hacer que el uso por estudiantes resulte difícil o que distraiga a los alumnos de lo que se desea enseñar.

Por ello y por los inconvenientes ya citados de otras aplicaciones, hemos decidido usar Geogebra, software ya existente, desarrollando un material específico básico, que focalice la atención del alumno. Antes de adentrarnos en la aplicación creada, creemos oportuno comentar que es un programa interactivo de matemáticas y que su uso se extiende por todos los niveles de la enseñanza al ser de libre distribución. El programa reúne aplicaciones dinámicas para la rama de la aritmética, geometría, álgebra y cálculo. Las características más importantes para nuestro estudio, son que permite la representación gráfica de funciones, y que por medio de los deslizadores, se puede estudiar el comportamiento de las mismas, dependiendo de los parámetros. Además, se pueden construir las rectas por medio de los puntos que la forman. Su creador fue Markus Hohenwarter, que desarrollo este proyecto a partir del año 2001 entre las universidades de Salzburgo y Atlantic. Con este material multimedia, los alumnos podrán visualizar las transformaciones que se producen en las funciones afines cuando se mantiene la pendiente cambiando la ordenada en el origen, manteniendo la ordenada en el origen pero variando la pendiente, ya sea con coeficiente positivo o negativo, así como la relación que tendrán dos rectas por medio de un sistema para estudiar si tienen algún punto en común. A través de él, los alumnos podrán observar la clasificación de los sistemas... Por medio de esta implementación podremos abordar los problemas del proceso de enseñanza-aprendizaje existentes, que constatamos en el estudio previo de estos conceptos.

Otro de los motivos que nos hizo decantarnos por ese programa es que el CPR (centros de profesores y recursos) de la Región de Murcia, ofrece cursos para que los profesores aprendan a usar este programa, lo que es muy interesante para que en el centro estudiantil los docentes puedan formarse y crear distintas aplicaciones para su alumnado. Además, hay algunas editoriales que ya están incluyendo entre sus recursos, aplicaciones de este programa. (Carrillo 2012, p.95-96).

Destacar el hecho de que la investigadora realizó dicho curso para poder aprovechar al máximo los recursos y crear la aplicación con las características propias que se querían trabajar (Anexo XXV).

En relación al material digital, recursos TIC, con los que se diseñó la propuesta didáctica, se sustentaron las decisiones en los pilares comentados en la propuesta didáctica y se puede ver en el Anexo IX.

➤ **Resultados de la selección de la plataforma.**

La selección de Moodle se debe a varios motivos, algunos sustentados en el inicio del trabajo:

- Tiene muy buena valoración a nivel mundial.
- Es de tipo modular, lo que permitiría poder ir ampliando los contenidos sin tener que modificar lo que ya se hubiese trabajado y además el docente puede diseñar el entorno sin demasiadas restricciones.
- Tiene fácil navegación al ser estructurado y presentar barra de navegación.
- Permite que los recursos que se presentan tengan distintos formatos.
- Permite trabajar desde una perspectiva constructivista tan en auge en la educación en los últimos tiempos.
- Trabaja con varios sistemas operativos sin tener que hacer modificaciones (característica fundamental en nuestro caso pues los ordenadores del centro educativo operan con Linux mientras que la gran mayoría de los de los discentes y el de la investigadora con Windows).
- La investigadora realizó un curso sobre esta plataforma. (Anexo XIV)
- Es la plataforma instalada en el centro para su aula virtual, lo que implica que el alumnado no tendría que aprender a gestionar otro nuevo.

Aun así se llevó a cabo un estudio de las distintas plataformas, reflejando en el siguiente cuadro las características principales de nuestro estudio. Al encontrar un trabajo completo de Prendes (2009), tablas 19 y 20, "Plataformas de campus virtual de software libre: Análisis comparativo de la situación actual en las universidades españolas", estudiamos la actualidad de las características mencionadas ante de la toma de las decisiones pertenecientes. Adjuntamos el esquema:

Tabla 19: Comparativa EVEAS. Fuente: Prendes, 2009.

	Origen	Web	Ventajas	Aspectos a mejorar
Claroline	2000 Instituto Pedagógico universitario de Multimedia (Bélgica), Centro de Investigación y Desarrollo del Instituto Superior de Ingeniería Belga, (CERDECAM).	www.claroline.net	<ul style="list-style-type: none"> Facilidad de uso y fiabilidad Soporta itinerarios de aprendizaje Herramientas de comunicación (chat, foros...) Test y evaluación Módulo importar SCORM Soporta muchas lenguas 	<ul style="list-style-type: none"> Las herramientas de autor se pueden mejorar Los usuarios no pueden escoger su propio estilo y personalización No hay audioconferencia No hay motor de búsqueda
Dokeos	2001/2002; Universidad Católica de Louvain, Instituto Universitario de Pedagogía y Multimedia	www.dokeos.com	<ul style="list-style-type: none"> Facilidad de uso y fiabilidad Soporta itinerarios de aprendizaje Muchas herramientas de comunicación Herramientas de evaluación Importación de SCORM Alta modularidad con tecnología plug-in 	<ul style="list-style-type: none"> Las herramientas de autor se pueden mejorar No hay motor de búsqueda La documentación no está completa y existe sólo en inglés.
Ilias	1997/1998; Universidad de Cologne Software libre desde 2000	www.ilias.de	<ul style="list-style-type: none"> Entorno de autor para crear cursos Soporte de metadatos para objetos de aprendizaje Muchas funcionalidades para usuarios y administradores Importación de SCORM/AICC/HTML Herramientas de evaluación 	<ul style="list-style-type: none"> Algunas funcionalidades no son fáciles de entender. La preinstalación es complicada Pocas herramientas sincrónicas
.LRN	2006; MIT (Massachusetts Institute of Technology)	www.dotlrn.org	<ul style="list-style-type: none"> La continuidad del proyecto está asegurada con el consorcio .LRN Está basado en Open ASC Foro, almacenamiento de ficheros, calendario, noticias, encuestas, FAQ, email de grupo. 	<ul style="list-style-type: none"> La instalación es compleja Algunas herramientas son complejas

Moodle	2002; Martin Dougiamas (Universidad Tecnológica de Curtin)	www.moodle.org	<ul style="list-style-type: none"> • Sistema intuitivo y fácil de usar • Traducido a más de 70 idiomas • Se apoya en una gran comunidad de usuarios y desarrolladores 	<ul style="list-style-type: none"> • Hace falta mejorar la documentación basada en Wiki • Necesita mejor personalización mediante plantillas • No soporta especificaciones de accesibilidad W3C.
Sakai	2004; Universidad de Michigan, Universidad de Indiana, MIT, Universidad de Stanford, Iniciativa de Conocimiento Abierto, Fundación Mellon	www.sakaiproject.org	<ul style="list-style-type: none"> • Tiene por objetivo la movilidad de información a nivel de la educación superior en el área de la teleenseñanza y la investigación. • Intenta crear un portal institucional basado en servicios desde el que acceder a distintas herramientas. 	<ul style="list-style-type: none"> • Desarrollo inicial de la plataforma. • Incertidumbre respecto a su evolución.

Tabla 20: Comparativa EVEAS. Fuente: Prendes, 2009.

	ATutor	Moodle	Sakai	.LRN
Aspectos Técnicos				
Interoperabilidad/ Integración	✓	✓	✓	✓
Cumplimiento de Estándares y Especificaciones	(1) (2)	(1)	(6)	(6)
Escalabilidad	✓	✓	✓	✓
Adaptación y Personalización				
Personalización del Interfaz	X	✓	✓	✓
Elección del Lenguaje del Interfaz	✓	✓	X	✓
Conocimiento Previo del Estudiante	X	X	X	X
Adaptabilidad de Fuentes y Contenidos	X	X	X	X
Gestión Administrativa				
Gestión del Estudiante/ Herramientas de Monitorización	✓	✓	✓	✓
Mecanismos de Acceso a Bases de Datos	✓	✓	✓	✓
Elaboración de Informes	✓	✓	✓	✓
Administración Cualitativa y Funcional de Flujos de Trabajo	✓	✓	✓	✓
Seguimiento de Usuarios	✓	✓	X	X
Gestión de Recursos				
Control de Autoría y Edición de Contenidos	✓	✓	✓	✓
Learning Objects y otros tipos de Gestión de Contenidos	X	X	X	X
Plantillas de ayuda en la Creación de Contenidos	✓	✓	✓	✓
Búsqueda e Indexado de Learning Objects	✓	X	X	X
Mecanismos de Subida y Descarga de Contenidos	✓	✓	✓	✓
Métodos de Evaluación de la Calidad de los Recursos	X	X	X	X
Reutilización y Compartición de Learning Objects	✓	X	X	X
Herramientas de Comunicación				
Foro	✓	✓	✓	✓
Chat	✓	✓	✓	X
Pizarra	✓	X	X	X
Email	✓	✓	✓	✓
Streaming de Audio y Vídeo	X	X	X	X
Herramientas de Evaluación				
Autoevaluación	✓	✓	✓	✓
Test	✓	✓	✓	✓
Peticiones de Información e Investigación	X	✓	X	X
Coste	Ninguno	Ninguno	Ninguno	Ninguno
Documentación	✓	✓	✓	✓

2. RESULTADOS DE LOS GRUPOS DE DISCUSIÓN.

Pasamos a analizar los resultados de los grupos de discusión de la segunda fase de la investigación pues los de la primera están recogidos en el trabajo anterior (Carrillo, 2012)

- Tercero de la ESO
 - Antes del inicio de la experiencia
 - Cursos Escolares 2012/2013, 2013/2014: “Matemáticas en la enseñanza”.

De igual modo que pasó en la primera fase de la investigación, de nuevo señalamos que los alumnos no conocen respuesta alguna frente a preguntas del tipo “¿Se pueden aprender matemáticas jugando?”. Pues no reconocen otra forma de aprender que no sea el estudio tradicional y que no terminan de entender cómo se pueden aprender matemáticas por medio de los ordenadores pues lo único que alcanzan es a pensar “en la calculadora” que tiene el ordenador. Durante el intercambio de opiniones se muestran encantados y receptivos ante el hecho de ir a la sala de ordenadores, para aprender conceptos matemáticos, usando, como medio, las nuevas tecnologías y además, creen que esto aumentaría su gusto hacia las matemáticas.

Las respuestas en relación a la pregunta “¿Te gustan las matemáticas?” versan en dos líneas. Por una parte aseguran que las clases de matemáticas sí les gustan y que incluso están más relajados que en otras. Otras, aseguran que tienen mucho que trabajar, que en casa muchas veces el estudio de esta materia lo usan para descansar de las demás. Cuando se les pide una respuesta entre sí o no dudan pues dicen que “las matemáticas son muchas cosas y depende”. Siempre se presenta un grupo de alumnos, minoritario, que dice, sin dudar, que no le gustan.

Resaltar que ante la respuesta de ¿Se te dan bien las matemáticas?” comentan que depende del curso, tema, tipo de ejercicios, y que incluso hay veces que piensan que están haciendo bien las cosas y al corregirlas en clase descubren que no. También comenta algún alumno que aunque en ocasiones suspenden, piensan que “no se les da mal del todo”.

Esta puesta en común será contrastada con los resultados del estudio de las respuestas del cuestionario de los cursos escolares 2014/2015, 2016/2017 pues se transformó de grupo de discusión a cuestionario por escrito, siendo uno de los objetivos, cuando se realizó este cuestionario, el de poseer datos más cuantitativos para el estudio y que estas dos fuentes de información pudiesen complementarse.

- Tras el término de la implementación (uso del programa o propuesta didáctica completa).
 - Cursos Escolares 2012/2013, 2013/2014, 2014/2015, 2016/2017.

El grupo de discusión, centrado de nuevo en conversaciones grupales en el aula, tras la experiencia del uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza de los sistemas lineales, da como respuesta un alto índice de gratitud y el aumento de motivación por la asignatura tras haber podido vivir la experiencia, el fácil manejo, no solo del programa, también del resto de aplicaciones. Opinan que han aprendido y que su nivel de conocimientos ha aumentado, destacando que “han logrado entender” la correlación que existe entre los coeficientes de los sistemas y sus soluciones. Además, destacan que les ha gustado mucho hacer los ejercicios en el ordenador y que para ellos era un reto cuando “el ordenador les decía que las respuestas que estaban poniendo no eran correctas”. Critican el hecho de que el programa no les diese la respuesta correcta cuando no lograban dar con ella. En relación a la opinión sobre la hoja de ejercicios realizada para la investigación opinan que “atraía” pero reconocen que para realizarla se han tenido que apoyar en la aplicación Geogebra. Por ejemplo, para entender cuando las rectas se cortaban de manera perpendicular. Ayudados por el programa entendían muchos de los aspectos relacionados con los sistemas. Por último, demandan el poder usar este tipo de metodología y de TIC en más apartados de esta materia, incluso en otras asignaturas.

- Cursos Escolares 2014/2015, 2016/2017.

Hacemos un apartado para el grupo de discusión relativo a la “Encuesta final”. Responden que sí les han gustado las clases y que incluso les apetecía más que antes que llegase “la hora de mates”, que es mucho más divertido hacer los ejercicios con el ordenador y que sí que entendían, en la mayoría de las ocasiones, las explicaciones teóricas que les daba el ordenador. Destacan que el hecho de que “tuviesen sonido” y “se las leyera la propia maquina” les encantó (aunque en la clase “había un poco de lío pues todos no escuchan la misma explicación en el mismo momento”). Sin dudar afirman que gracias a la aplicación Geogebra “les he convencido, entendiendo la relación entre los coeficientes y la representación de rectas y soluciones de los sistemas”.

Como para el curso 2016/2017 se les pidió que llevaran auriculares, la referencia “al sonido en el aula” no se hizo. En ambos años dos o tres alumnos expresan que prefieren trabajar de manera tradicional (con lápiz y papel, en la pizarra...), que tardaban más en hacer este tipo de ejercicios...

Todos coinciden en que el ambiente de las clases ha sido más relajado, que les gustaba trabajar entre ellos, de manera colaborativa y expresar ante sus compañeros sus ideas/pensamientos. También señalan que cuando “se encontraban perdidos” demandaban que la profesora les explicase “como siempre”.

- Curso escolar 2015/2016.

Es indispensable hacer una mención especial en este curso. Tras recordar que en éste las metodologías que se usaron fueron las mismas que el curso anterior, y que los contenidos explicados fueron,

de igual modo, coincidentes, destacamos el hecho de que no se usó ningún medio tecnológico, De la propuesta didáctica completa se utilizó la hoja de ejercicios que se diseñó para poder trabajar las relaciones entre los coeficientes de los sistemas y sus soluciones. Se habló con los alumnos, que destacaron que “no había quien se aclarase”, que era “un follón tener que hacerlos, había que resolverlos...”.

- Para conocer sus opiniones sobre el aprendizaje colaborativo, constructivo y la motivación.

Siempre quedó patente el aumento de la motivación de los discentes. En cuanto al aprendizaje colaborativo la mayoría de los alumnos indican que si les gustó pero que no estaban acostumbrados a trabajar así. Aportaron comentarios como: “antes no sabía hacerlo y lo dejaba, ahora trabajamos hasta que lo lográbamos”, “los compañeros no te dejaban “pasar””, “tenía que seguir trabajando, dependíamos todos de todos”... Al principio les costó adaptarse al aprendizaje constructivista y recurrían a la profesora con cualquier duda, lograron entender que tenían que trabajar siendo ellos lo que “pensasen y ayudándose entre ellos”.

➤ Cuarto de la ESO

- Curso Escolar 2014/2015.

Preguntan al profesor si este año ¿“no nos vas a llevar a la clase de ordenadores”? Se constata que les gustó la experiencia del curso pasado. Expresan que desean “aprender más de esa forma”.

- Curso Escolar 2015/2016.

Este grupo de cuarto de ESO, de la opción de ciencias, comentaban si este año no tendrían un programa que les reflejase de manera gráfica los sistemas no lineales estudiados en este curso, así como los de grado uno pero de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Hemos de resaltar que los comentarios de estos alumnos no vienen motivados por un grupo de discusión que fomente o inicie la profesora.

- Curso Escolar 2016/2017.

Tras cumplimentar el cuestionario y comprobar que no sabían las relaciones y el porqué de las clasificaciones de los sistemas, el docente da una clase de tipo magistral y tradicional sobre dicha temática, recordando todos los conceptos necesarios para que lo entendiesen. Comentan tras la misma que nunca habían entendido, “ni se habían parado a pensar” en esto, pero “acaban contentos” de la clase diciendo que si pueden “ir al ordenador a comprobar” que lo que se les ha contado es cierto (previamente se les explicó la existencia de la experiencia de nuestra investigación con otros compañeros de cursos anteriores).

Un grupo de alumnos, pregunta, algo molesto: “¿por qué no lo hiciste con nosotros el curso pasado?”.

3. RESULTADOS DE LOS DIARIOS.

Si analizamos los diarios personales del investigador (que era la misma persona que llevó a cabo el desarrollo de la aplicación informática y ha llevado a cabo la experiencia con los alumnos en la sala de ordenadores), obtenemos diversas respuestas.

Gracias a los diarios se mantuvo la línea del tiempo y se hicieron mejoras tanto en el programa como en algunos de los instrumentos de recogida de información. Pasamos a analizar los de la tercera fase de nuestro estudio.

- o Curso Escolar 2012/2013, 2013/2014

La siguiente tabla muestra las respuestas correspondientes al diario:

Tabla 21. Respuestas al diario personal. Fuente: Elaboración propia

¿Poseen los alumnos conocimientos previos para abordar el programa?	Sí. Quitando los alumnos que abandonaron la asignatura o que no la trabajan como deberían.
¿Hay alumnos que van a participar en el programa en situación diferente? ¿En esta circunstancia se prevé una adaptación del programa a estos alumnos?	Sí, tenemos algún alumno, dependiendo del curso académico, que presenta un gran retraso (de diferentes niveles) en referencia a los contenidos de las matemáticas y demuestra una gran dificultad (o desinterés). No haremos ningún tipo de adaptación, pues no la creemos necesaria.
¿Poseen los alumnos habilidades para abordar el programa?	Sí. Además de ser nativos digitales, el programa no requiere habilidades especiales.
El programa ¿interrelaciona diferentes bloques de conocimientos matemáticos?	No diferentes bloques, pero sí dos temas distintos, las rectas y los sistemas lineales.
¿Aparecen todos los elementos del currículum: objetivos, contenidos, actividades, recursos, materiales, temporalización y evaluación?	No en todos los aspectos. Nos centramos en el desarrollo del programa y sin abandonar los objetivos del currículum.
Las actividades propuestas, ¿son motivadoras y cubren todos los contenidos del programa?	No cubren todos los contenidos
¿Se presenta alguna dificultad derivada del uso de una metodología concreta?	No. Todo lo contrario.
¿Se han previsto los recursos necesarios?	Faltan actividades
¿La propuesta de evaluación está en consonancia con los objetivos que se pretenden conseguir?	No se va a evaluar esta iniciativa.
Las estrategias de evaluación ¿responden al enfoque de enseñanza desarrollado en el programa?	No se va a evaluar esta iniciativa.
¿Se muestran interesados los alumnos	Sí. Mucho

durante el desarrollo del programa?	
¿Siguen los alumnos el ritmo previsto?	Sí. Pero nos falta tiempo. La actividad se queda pobre teniendo en cuenta que es un gran campo en el que se puede trabajar.
¿Qué dificultades se están presentando en cuanto al cumplimiento de los objetivos, la metodología, las actividades, los recursos...?	Se quedan objetivos en el aire.
¿Hay que modificar algún aspecto del programa? En caso afirmativo, ¿cuál?	Sí. El programa representa rectas, sería, muy beneficioso que los alumnos pudiesen ver en los mismos ejes dos rectas a la vez.
¿Los alumnos han mantenido una actitud favorable a lo largo del programa?	Sí. Buenísima
¿Se han cumplido los objetivos propuestos?	No todos.
¿Han participado los alumnos de manera activa?	Sí.
¿Se ha favorecido el aprendizaje cooperativo y colaborativo entre los alumnos?	Sí. Mucho.
¿Qué aspectos del programa son susceptibles de modificación para favorecer un aprendizaje de calidad?	Temporalidad y mejora del software.
¿Qué aspectos del programa habría que mantener, para favorecer un aprendizaje de calidad?	Todos.

A raíz del estudio del mismo se llegaron a las siguientes conclusiones que serían tenidas en cuenta para continuar con la investigación:

1. Se debían buscar y exponerle a los discentes más actividades para trabajar todos los contenidos de esta parte.
2. Se estudiará de nuevo el programa viendo las deficiencias descritas con anterioridad, además se decide completar con más aplicaciones interactivas. Es decir, las mejoras de software son indispensables pero el avance del trabajo.
3. Se concretará una propuesta didáctica, más completa, para impartir todo el tema de los sistemas que tenga un enfoque en el que se usasen más las TIC, abandonando la idea de solo usar el ordenador para entender la relación de los coeficientes con la representación gráfica de las rectas. Es decir, se decide completar con más aplicaciones interactivas. Algunas mejoras de software son indispensables para el avance del trabajo.
4. Se intentará que la propuesta didáctica sea más concreta, con una temporalización precisa.

o Curso Escolar 2014/2015, 2016/2017

Tras hacer la propuesta didáctica, a partir de las preguntas anteriores, el investigador vio necesario hacer alguna modificación, quedando, los apuntes de este modo:

Tabla 22: Respuestas al diario personal. Fuente: Elaboración propia

¿Poseen los alumnos conocimientos previos para abordar el programa?	Sí. Quitando los alumnos que abandonaron la asignatura o que no la trabajan como deberían.
¿Hay alumnos que van a participar en el programa en situación diferente? ¿En esta circunstancia se prevé una adaptación del programa a estos alumnos?	Sí, tenemos algún alumno, dependiendo del curso académico, que presenta un gran retraso (de diferentes niveles) en referencia a los contenidos de las matemáticas y demuestra una gran dificultad (o desinterés). No haremos ningún tipo de adaptación, pues no la creemos necesaria.
¿Poseen los alumnos habilidades para abordar el programa?	Sí. Además, el programa no requiere habilidades especiales.
El programa ¿interrelaciona diferentes bloques de conocimientos matemáticos?	No diferentes bloques, pero sí dos temas distintos, las rectas y los sistemas lineales.
¿Aparecen todos los elementos del currículum: objetivos, contenidos, actividades, recursos, materiales, temporalización y evaluación?	En la propuesta completa didáctica sí.
Las actividades propuestas, ¿son motivadoras y cubren todos los contenidos del programa?	En la propuesta completa didáctica sí.
¿Se presenta alguna dificultad derivada del uso de una metodología concreta?	No. Todo lo contrario.
¿Se han previsto los recursos necesarios?	Hay un gran número de actividades, incluso "de más" para que el alumno no se vea limitado en ese tipo de recursos. Los recursos para la teoría cubren incluso más de lo referenciando en los objetivos.
¿La propuesta de evaluación está en consonancia con los objetivos que se pretenden conseguir?	Sí.
Las estrategias de evaluación ¿responden al enfoque de enseñanza desarrollado en el programa?	No se va a evaluar esta iniciativa.
¿Se muestran interesados los alumnos durante el desarrollo del programa?	Sí. Mucho
¿Siguen los alumnos el ritmo previsto?	No siempre. El profesor reajusta los tiempos, en relación al desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje.
¿Qué dificultades se están presentando en cuanto al cumplimiento de los objetivos, la metodología, las actividades, los recursos...?	La mayoría los alcanza con éxito.

¿Hay que modificar algún aspecto del programa? En caso afirmativo, ¿cuál?	Sí. El programa podría permitir el movimiento directo de las rectas.
¿Los alumnos han mantenido una actitud favorable a lo largo del programa?	Sí. Buenísima
¿Se han cumplido los objetivos propuestos?	Sí.
¿Han participado los alumnos de manera activa?	Sí.
¿Se ha favorecido el aprendizaje cooperativo y colaborativo entre los alumnos?	Sí. Mucho.
¿Qué aspectos del programa habría que mantener para favorecer un aprendizaje de calidad?	Todos.

o Curso Escolar 2014/2015, 2016/2017

Tabla 23. Respuestas al diario personal. Fuente: Elaboración propia

¿Los espacios de agrupamiento son los correctos?	Sí. El hecho de que los alumnos los hayan formado hace que trabajen mejor. En algún momento puntual ha tenido que intervenir el profesor para que nadie se quedase “desubicado”.
¿Se ha favorecido la comunicación entre los alumnos y entre estos y el profesor?	Sí, aunque no por el entorno virtual.
¿Se han puesto en común las actividades que se le propusieron?	Por supuesto.
¿Han necesitado mucho apoyo/ayuda para responder a las mismas?	Dependiendo del alumno y del nivel de las mismas pero continuando con la línea general presente durante todo el curso.
¿Ha habido aprendizaje significativo?	Sí.
¿La evaluación del material ha sido continua y exigente?	Sí.
¿La metodología seguida es correcta?	Creemos que sí.

o Curso Escolar 2014/2015, 2016/2017

Cuando en clase se comprobaban los ejercicios, el resultado global de estos dos cursos muestra que en relación a los interactivos los resultados mejoraban conforme se trabaja de manera colaborativa, ampliando el ratio de los grupos. Algunos resultados se pueden observar en la siguiente tabla (tabla 24)

Tabla 24. Apuntes diario personal en referencia al aprendizaje colaborativo.
Fuente: Elaboración propia

Alumnos que realizan correctamente los ejercicios de rectas ...	2014/2015	2016/2017
...trabajando de manera colaborativa con su grupo	68%	72%
...trabajando con los integrantes de su grupo junto con un mínimo de otro grupo	97%	95%
...trabajando con el grupo clase y la profesora como guía	83%	97%
Alumnos que realizan correctamente los ejercicios de sistemas...	2014/2015	2016/2017
...trabajando de manera colaborativa con su grupo	60%	71%
...trabajando con los integrantes de su grupo junto con un mínimo de otro grupo	75%	90%
...trabajando con el grupo clase y la profesora como guía	83%	92%

o Curso Escolar 2014/2015, 2016/2017

El diario de clase que fue llevado en la fase de observación, en cada una de las sesiones de clase, recoge las conclusiones en los aspectos que siguen:

1. Plan previsto
2. Ejecución
3. Metodología y aspectos actitudinales del alumnado, asistencia de los alumnos y segregación de los discentes
4. Aspectos relacionados con la comprensión
5. Valoración
6. Toma de decisiones
7. Incidencias con los ordenadores.

Un ejemplo de los diarios del profesor se puede observar en el Anexo XXII.

Se concluyó que no era necesario hacer grandes cambios en la propuesta realizada. De la primera implantación a la segunda se mejoró en cuanto a la explicación de cómo hacer funcionar todos los elementos en casa de los discentes, así como en el centro escolar. Se aprendió que si en algún momento teníamos problemas con los ordenadores, en ocasiones era más efectivo que esa pareja/trío de alumnos se repartiese entre otros grupos para no invertir más tiempo, por su parte, en fallos tecnológicos.

o Curso Escolar 2015/2016

Hacemos referencia a este año aunque no se implementó la propuesta didáctica pero sí que se realizó la hoja de ejercicios, sin TIC alguna (ni tan siquiera Geogebra). La docente tomó nota pues con los métodos tradicionales se encontraron los estudiantes, y por tanto ella, muchísimos problemas para la visualización y la abstracción. La siguiente tabla (tabla 25) muestra como en el curso 2015/2016 los resultados de los ejercicios correspondientes a la hoja mencionada son peores, no logrando los

alumnos resolverlos sin ayuda de la profesora y, en muchos casos, incluso tras la primera realización de los mismos en la pizarra continuaron sin entenderse.

Tabla 25. Comparativa resultados de los ejercicios.
Fuente: Elaboración propia.

Bien en la mayoría	Trabajo individual	Trabajo en grupo	Interacción de varios grupos	Con profesora
2014/2015	40 %	58 %	72 %	100 %
2016/2017	50 %	53 %	94 %	98 %
2015/2016	33 %	38 %	43 %	70 %

- Curso Escolar 2012//20163, 2013/2014, 2014/2015, 2015/2016, 2016/2017.

Durante estos cursos se tuvo presente que se quería comprobar si se avanzaba en el aprendizaje significativo. En tercero, tras la implementación y cuando se iba a dar los temas relacionados con estos conceptos, se comprobó que los alumnos sí recordaban la parte correspondiente a las rectas y la relación de los coeficientes con la representación gráfica de las mismas. De igual modo, aunque en menor medida, ocurría en cuarto de la ESO.

4. RESULTADOS DE LOS CUESTIONARIOS.

No se resaltan en este apartado los resultados de la fase segunda pues creemos que carecen de importancia al ser los de la tercera más completos.

- Cuestionario “Matemáticas en la enseñanza”
 - Curso Escolar 2012/2013, 2013/2014: no se lleva de manera escrita pues es durante este curso escolar cuando se valida este cuestionario (hasta ese momento se llevaba a cabo mediante los grupos de discusión).
 - Cursos Escolares 2014/2015, 2016/2017: los resultados son análogos a los obtenidos en los grupos de discusión de los años anteriores, es decir, los alumnos no se imaginan estudiar las matemáticas por medio del ordenador, hay alumnos a los que le gusta esta materia, que no se les da del todo mal, otros que opinan a veces trabajan y suspende...
- Cuestionario de “Disponibilidad tecnológica”
 - Curso Escolar 2014/2015.

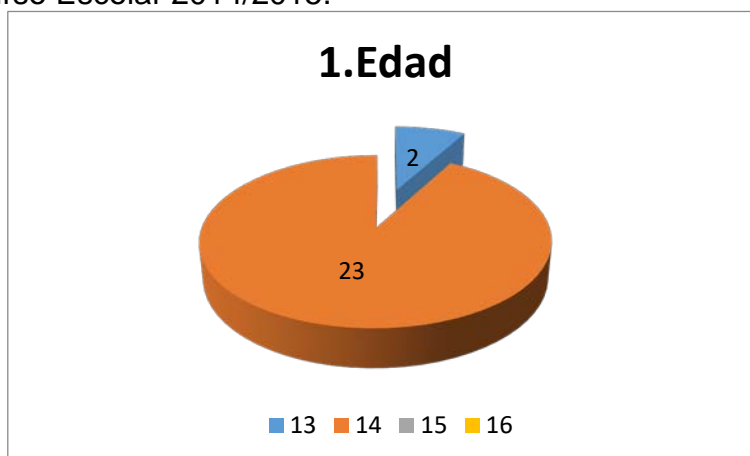


Gráfico 6. Resultado pregunta sobre la edad en el cuestionario equipación tecnológica curso 2014/2015.
Fuente: Elaboración propia.

Las respuestas representadas en el gráfico anterior ponen de manifiesto que el 92% de los discentes se encuentran en el curso que por edad les corresponde puesto que el cuestionario es cumplimentado en el momento de curso donde ya han cumplido los años. Podría darse el caso de que esos dos alumnos no sean repetidores, sino que sean nacidos en el mes ya pasado del año 2015, se le pregunta al grupo clase y se observa que no, por lo que el porcentaje muestra la realidad del aula.

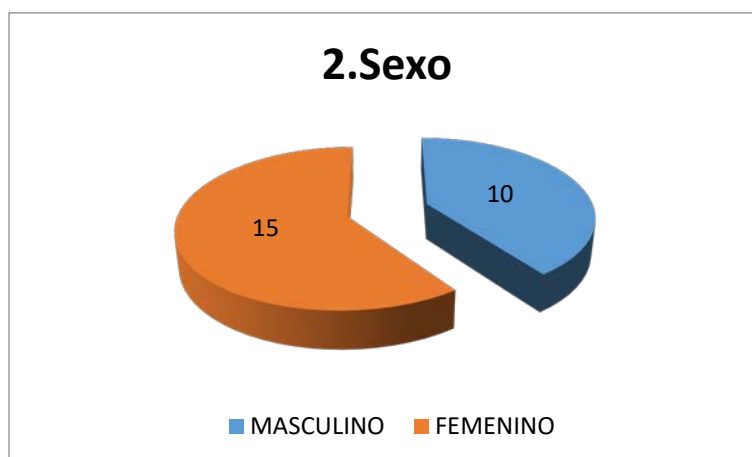


Gráfico 7. Resultado pregunta sobre el sexo en el cuestionario equipación tecnológica curso 2014/2015.
Fuente: Elaboración propia.

El gráfico muestra que el 60% de la clase es de sexo femenino, es decir es una clase bastante igualada en cuanto a estas características. Tras hablar con el equipo directivo del centro constatamos que esta característica junto con los meses de nacimiento son dos variables con las que se trabajan al confeccionar las listas intentando que en todas las clases se encuentren el mismo número de alumnos de todos los trimestres de nacimiento y que en la medida que se pueda las clases queden lo más equilibradas posibles en cuanto al número de niñas y niños que las formen.

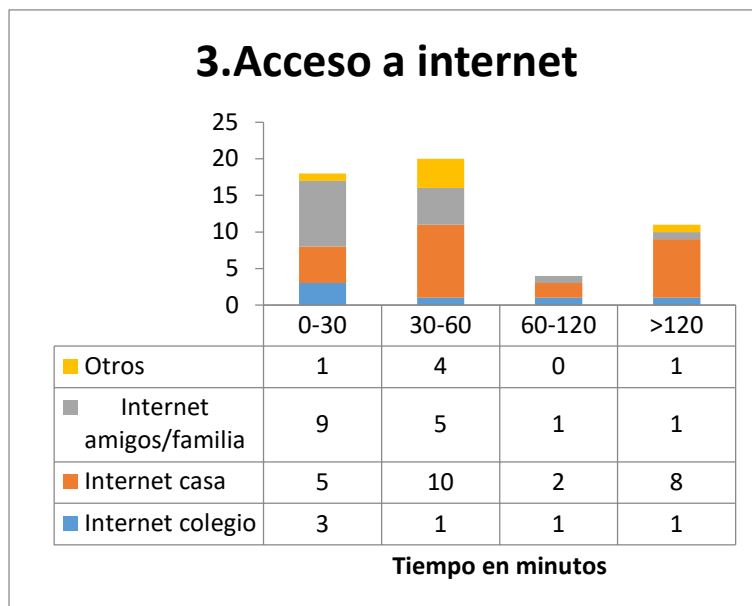


Gráfico 8. Resultado pregunta sobre el acceso a internet en el cuestionario equipación tecnológica curso 2014/2015.
Fuente: Elaboración propia.

Los resultados representados en el gráfico de barras anterior, muestran que el 24% de alumnos se conecta a internet desde el colegio, haciéndolo el 67% de ellos por un tiempo inferior a los 30 minutos.

El 100% de los discentes se conectan también desde sus casas: un 20% lo hacen en un margen no superior a los 30 minutos, el 40%

entre 30 y 60 minutos, el 8% entre una hora y dos horas y el 32% restante, por un tiempo superior a las dos horas.

Hay un grupo de alumnos que de igual modo usan la conexión a internet de amigos o familiares destacando que el 56% de ellos lo hacen no superando los 60 minutos.

Hay un niño que responde que se conecta incluso en los centros comerciales.

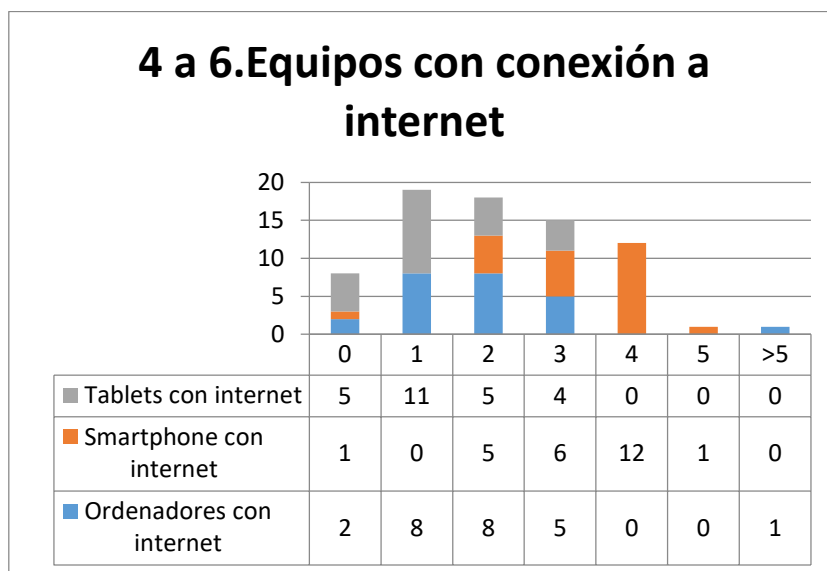


Gráfico 9. Resultado pregunta sobre la conexión a internet en el cuestionario equipación tecnológica curso 2014/2015.

Fuente: Elaboración propia.

Con estas preguntas se conoce que el 8% no tienen ordenador en casa, que el 32% posee uno, y que es el mismo porcentaje el que dice tener dos, el 20% tiene tres y que solo un 4% tiene más de cinco, quedando los resultados claramente representados en el gráfico 9.

La totalidad de los encuestados (100%) tienen smartphone en sus casa con conexión a internet destacando un alto porcentaje, el 42%, con 4 dispositivos. Tan solo el 4% posee uno solo en su familia directa y ese mismo porcentaje tiene más de cinco aparatos de estas características en su domicilio.

El 20% no tienen tablet, el 44% una, el 20% dos, el 16% cuatro, es decir, el 80% poseen este tipo de dispositivo.

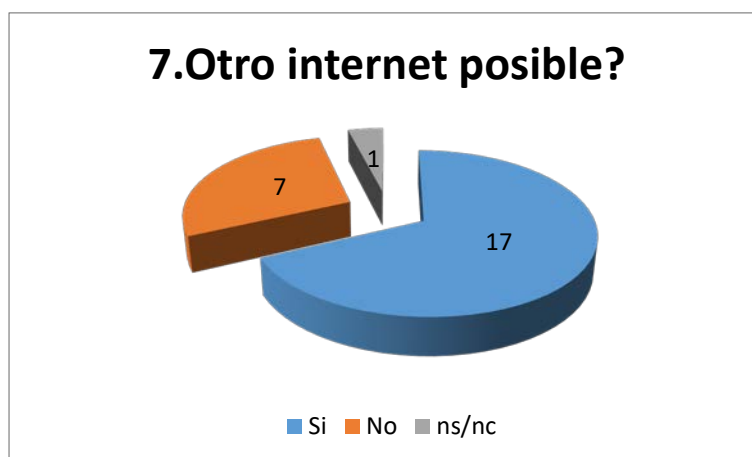


Gráfico 10. Resultado pregunta disponibilidad otra conexión a internet en el cuestionario equipación tecnológica curso 2014/2015.
Fuente: Elaboración propia.

En el gráfico 10 vemos que el 96% de los discentes pueden disponer de internet fuera de su domicilio, el 4% no contesta.

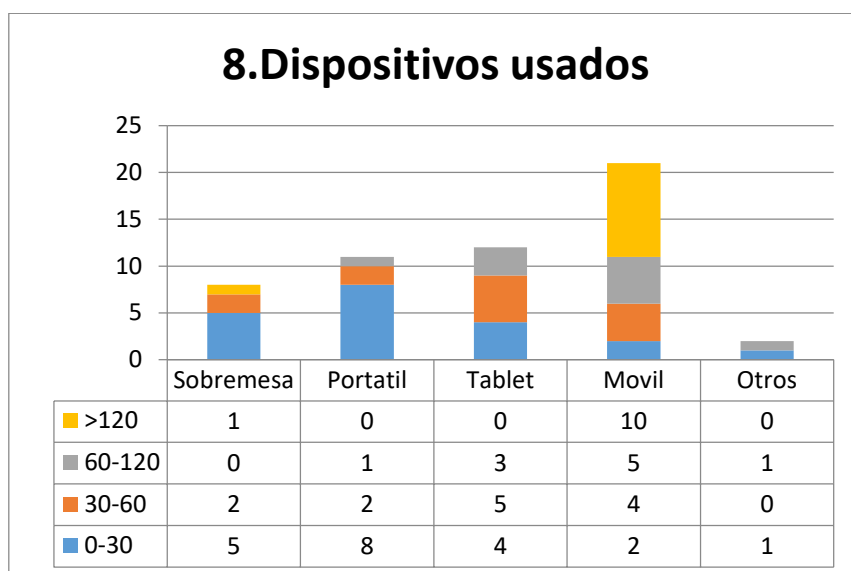


Gráfico 11. Resultado pregunta uso de dispositivos en el cuestionario equipación tecnológica curso 2014/2015.
Fuente: Elaboración propia.

El gráfico 11 arroja los siguientes resultados:

El 32% utiliza el ordenador de sobremesa, de éste el 63% no supera los 30 minutos, el 25 no está más de una hora (pero si más de 30 minutos) y el 12% por un tiempo mayor a las 2 horas.

El 44% utiliza el ordenador portátil estando un 73% de sus usuarios menos de media hora, el 18% de los mismos más de media hora pero menos de una y el resto de los que utilizan este tipo, el 9%, entre una y dos horas.

La tablet es empleada para la conexión a internet por el 48% de estos discentes, dándole un 33% un uso inferior a los 30 minutos, el 42% entre 30 y 60 minutos, y el 25% están más de una hora pero menos de dos.

En cuanto al teléfono móvil con conexión a internet destaca el alto porcentaje, obteniendo que el 48% invierte más de dos horas en estar conectado a internet y un 23% está entre una y dos horas. El 84% de los alumnos disponen de internet en el móvil.

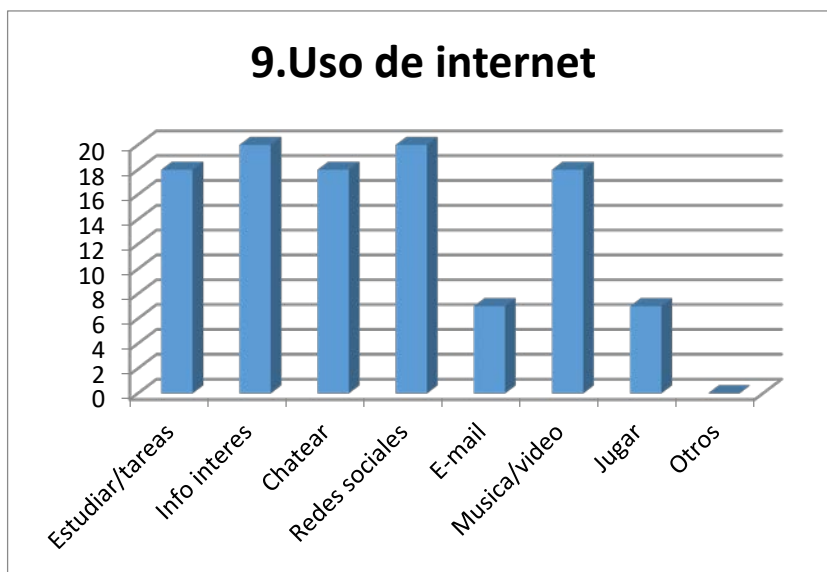


Gráfico 12. Resultado pregunta uso de internet en el cuestionario equipación tecnológica curso 2014/2015. Fuente: Elaboración propia.

Preguntados los alumnos sobre el uso de internet, y representadas sus respuestas en el gráfico 12, es importante resaltar que los resultados más elevados, se refieren a las utilizaciones de internet para temas relacionados con la búsqueda de información/visitar páginas (80%) y las redes sociales, seguidas muy de cerca para usos de la escuela, y la música (72%).

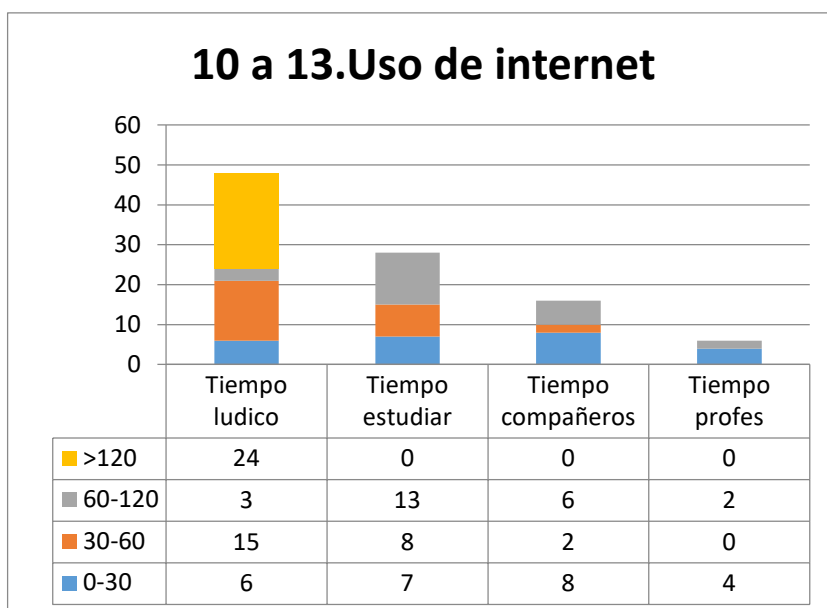


Gráfico 13. Resultado preguntas uso de internet en el cuestionario equipación tecnológica curso 2014/2015. Fuente: Elaboración propia.

Las preguntas 10 a 13 cuestionaban a los alumnos el uso de internet, reflejando los resultados en el gráfico 13.

El 100% de los alumnos utilizan el móvil para divertirse repartiéndose del siguiente modo el tiempo:

- 24% de 0 a 30 minutos
- 28% de 30 a 60 minutos
- 32% de 60 a 120 minutos
- 16% más de 120 minutos.

Todos los alumnos dicen usar internet para estudiar repartiéndose del siguiente modo el tiempo:

- 60% de 0 a 30 minutos
- 32% de 30 a 60 minutos
- 8% de 60 a 120 minutos
- 16% más de 120 minutos.

Hay un alumno que no responde a la pregunta que versa sobre el tiempo que invierte en comunicarse con sus compañeros, del resto obtenemos estos datos:

- 13% de 0 a 30 minutos
- 54% de 30 a 60 minutos
- 25% de 60 a 120 minutos
- 8% más de 120 minutos.

En la pregunta número 13 *¿Aproximadamente cuánto tiempo usas diariamente internet para comunicarte con tus profesores?* Un alumno ha respondido, poniendo la respuesta “de su puño y letra” que “nada”, pero el resto, 24 alumnos, aun habiendo señalado que de 0 a 30 minutos tras la entrega del cuestionario le dicen al profesor que en verdad no lo usan para eso, que han señalado esa respuesta pues “llevaba el cero”.

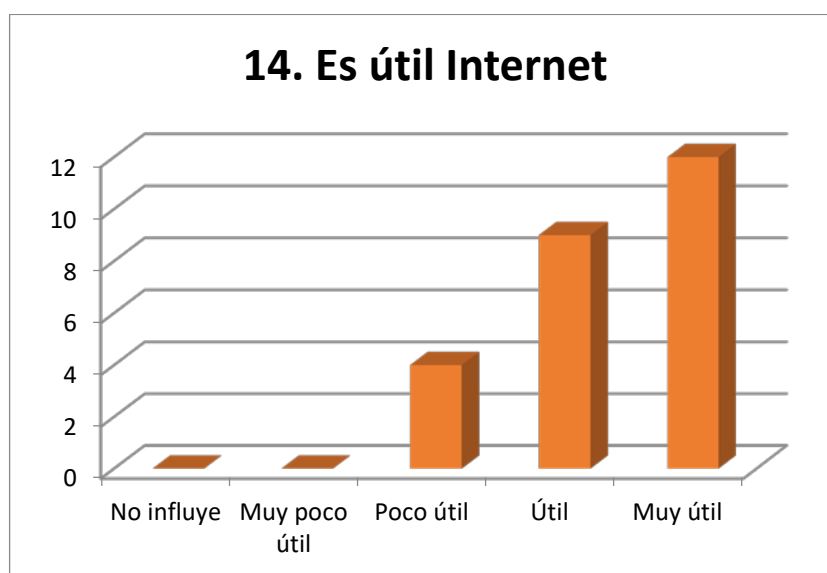


Gráfico 14. Resultado pregunta utilidad internet en el cuestionario equipación tecnológica curso 2014/2015. Fuente: Elaboración propia.

El 100% de los alumnos responden que sí ven útil el uso de internet en la educación, centrándose toda la muestra entre muy útil, útil

y poco útil (siendo sus respuestas el 48%, el 36% y el 16% respectivamente), según reflejan los resultados de la pregunta 14 en el gráfico 14.

Cuestionario equipación tecnológica – Curso 2014/2015

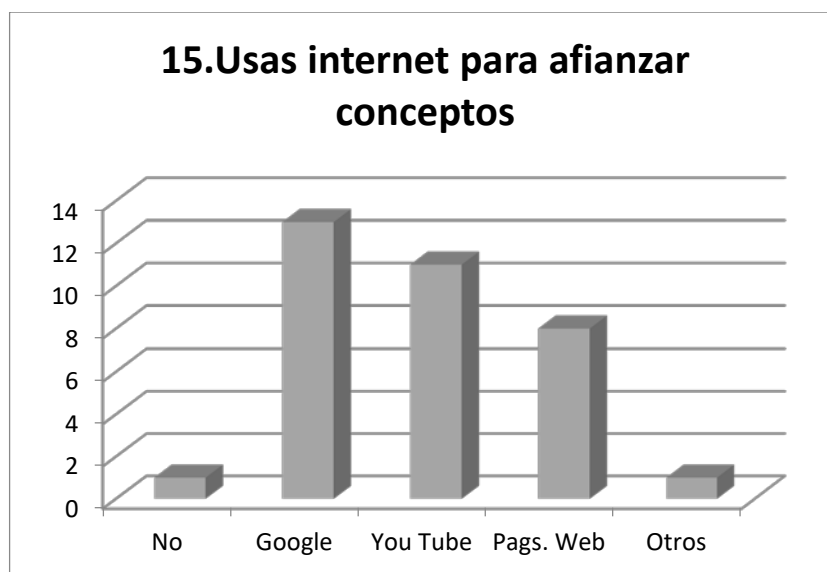


Gráfico 15. Resultado pregunta uso internet afianzar conceptos en el cuestionario equipación tecnológica curso 2014/2015.
Fuente: Elaboración propia.

Respecto al uso de internet para afianzar conceptos, un alumno contesta que no, pues eso lo hace su logopeda, el resto sí que lo usan para ello. Dando algunos de ellos distintas actuaciones, los porcentajes son de un 54% por medio de la búsqueda de google, el 46 % consultando en youtube y un 33% por medio de páginas webs. Un alumno señala "Otros: y escribe plástica" no sabiendo que nos quería decir por medio de esta respuesta. Dichos resultados quedan reflejados en el gráfico 15

- o Curso Escolar 2016/2017

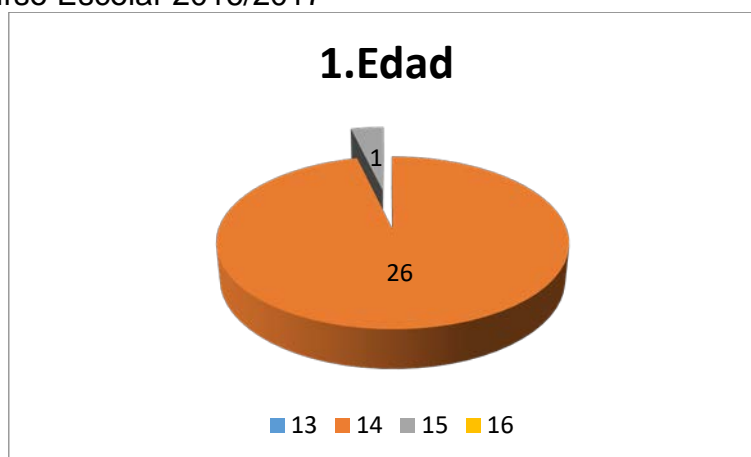


Gráfico 16. Resultado pregunta sobre la edad en el cuestionario equipación tecnológica curso 2016/2017.
Fuente: Elaboración propia.

Las respuestas a la pregunta sobre la edad, representadas en el gráfico 16 ponen de manifiesto que el 96% de los discentes se encuentran en el curso que por edad les corresponde, puesto que el

Cuest. Eq. Tecnológica - Curso 2016/2017

cuestionario es cumplimentado en el momento de curso donde ya han cumplido los años. Podría darse el caso de que ese alumno no sea repetidor, sino que sea nacido en el mes ya pasado del año 2017, se le pregunta al grupo clase y se observa que no, por lo que el porcentaje muestra la realidad del aula.

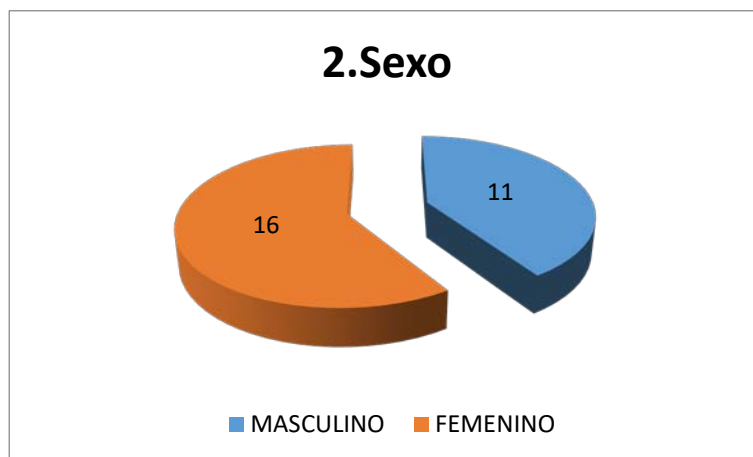


Gráfico 17. Resultado pregunta sobre el sexo en el cuestionario equipación tecnológica curso 2016/2017. Fuente: Elaboración propia.

El 60% de la clase es de sexo femenino, es decir, es una clase bastante igualada en cuanto a estas características, como podemos comprobar en el gráfico 17.

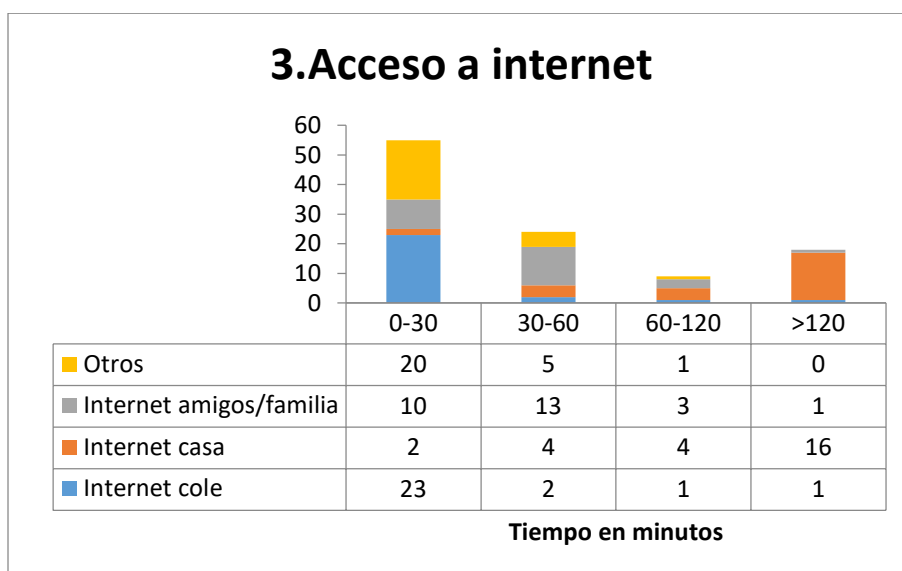


Gráfico 18. Resultado pregunta sobre el acceso a internet en el cuestionario equipación tecnológica curso 2016/2017. Fuente: Elaboración propia.

Según muestran los resultados de la pregunta sobre el acceso a internet, reflejados en el diagrama 18:

El 41% de alumnos se conecta a internet desde el colegio, haciéndolo el 63% de ellos por un tiempo inferior a los 30 minutos.

El 93% de los discentes se conectan también desde sus casas: nadie lo hace en un margen inferior a los 30 minutos, el 16% entre 30 y 60 minutos, el 20% entre una hora y dos horas y el 64% restante por un tiempo superior a las dos horas.

Hay un grupo de alumnos, el 85%, que de igual modo usan la conexión a internet de amigos o familiares destacando que el 82% de ellos lo hacen no superando los 60 minutos.

Un 44% de los alumnos también se conectan desde otros lugares.

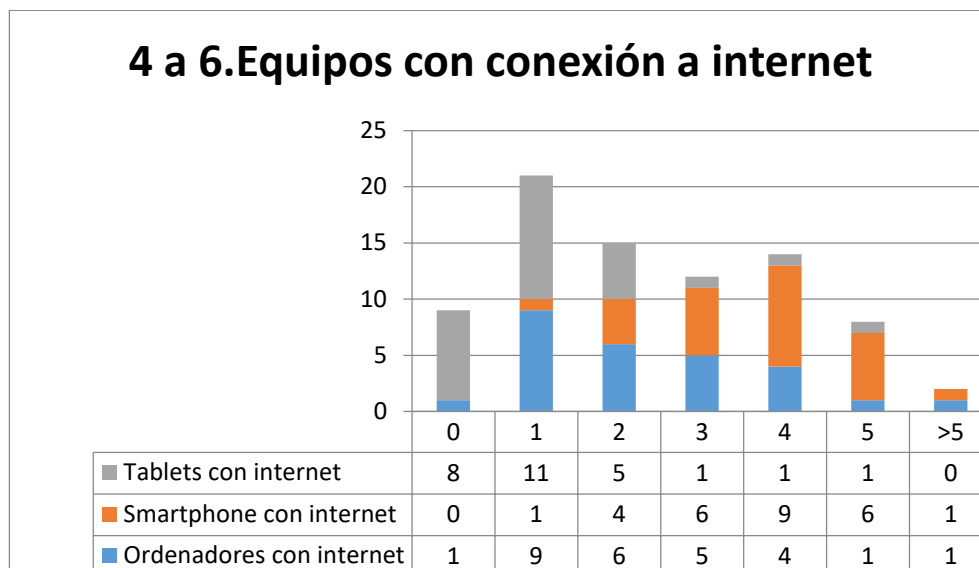


Gráfico 19. Resultado pregunta sobre la conexión a internet en el cuestionario equipación tecnológica curso 2016/2017.

Fuente: Elaboración propia.

Con las preguntas sobre los equipos con conexión a internet cuyas respuestas reflejamos en el gráfico 19, se conoce que el 4% no tienen ordenador en casa, que el 33% posee uno, y que el 22% dice tener dos, el 19% tiene tres, el 15% tiene 4 y que solo alrededor del 4% tiene 5 e igual de porcentaje más de cinco.

La totalidad de los encuestados (100%) tienen smartphone en su casa con conexión a internet destacando un alto porcentaje, el 33%, con 4 dispositivos. Tan solo el 4% posee uno solo en su familia directa y ese mismo porcentaje tiene más de cinco aparatos de estas características en su domicilio.

El 30% no tienen tablet, el 41% una, el 19% dos, el 4% tres y cuatro.

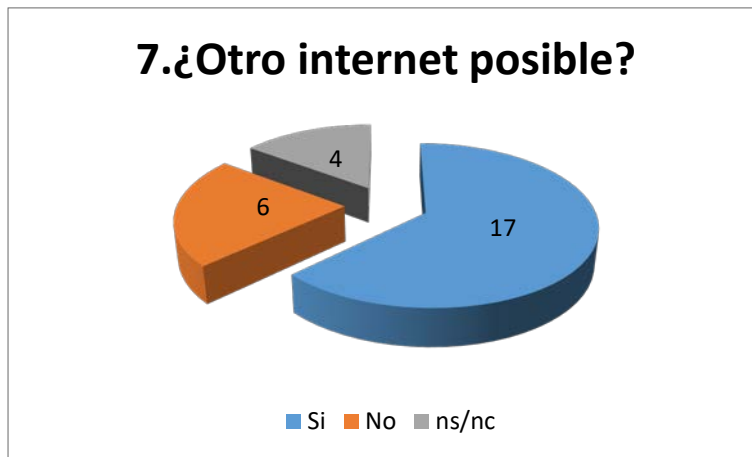


Gráfico 20. Resultado pregunta disponibilidad otra conexión a internet en el cuestionario equipación tecnológica curso 2016/2017.
Fuente: Elaboración propia.

El gráfico 20 nos da los resultados sobre la disponibilidad de otra conexión a internet, el 63% de los discentes pueden disponer de internet fuera de su domicilio, el 15% no contesta.

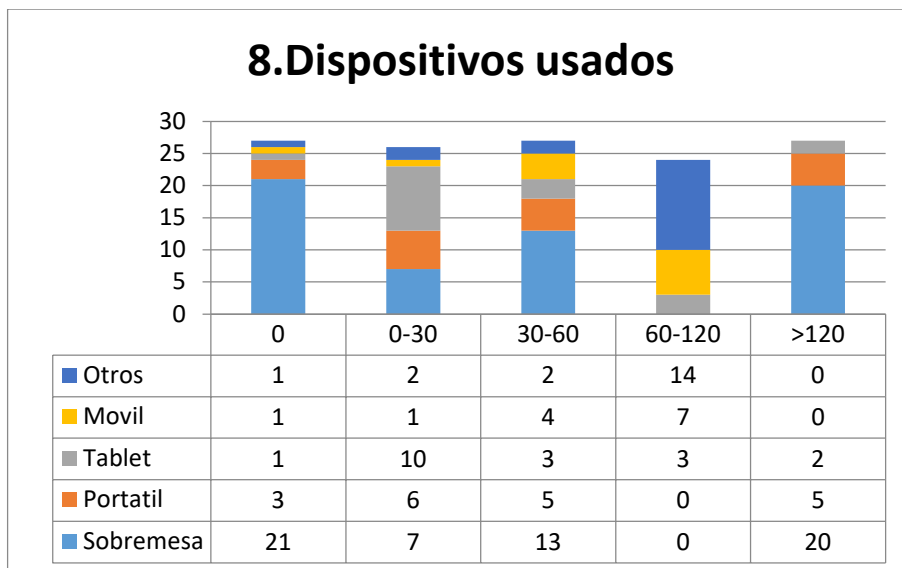


Gráfico 21. Resultado pregunta uso de dispositivos en el cuestionario equipación tecnológica curso 2016/2017.
Fuente: Elaboración propia.

Preguntados los alumnos sobre los dispositivos que usan habitualmente, mostramos los resultados en el gráfico 21. El 22% utiliza el ordenador de sobremesa, de éste el 50% no supera los 30 minutos, en cada apartado restante aproximadamente se sitúa el 16% en cada uno.

El 74% utiliza el ordenador portátil estando un 35% de sus usuarios menos de media hora, el 50% de los mismos más de media hora pero menos de una, el 5% entre una hora y dos y el 10% más de dos.

La tablet es empleada para la conexión a internet por el 52% de estos discentes, dándole un 36% un uso inferior a los 30 minutos, el 21%

entre 30 y 60 minutos, el 14%, aproximadamente, están más de una hora pero menos de dos.

En cuanto al teléfono móvil con conexión a internet destaca el alto porcentaje, un 89% tiene, obteniendo el 58% que invierte más de dos horas en estar conectado a internet y un 29% está entre una y dos horas. Ninguno lo utiliza por un tiempo inferior a la media hora.

El 26 % de los encuestados usa otros dispositivos.

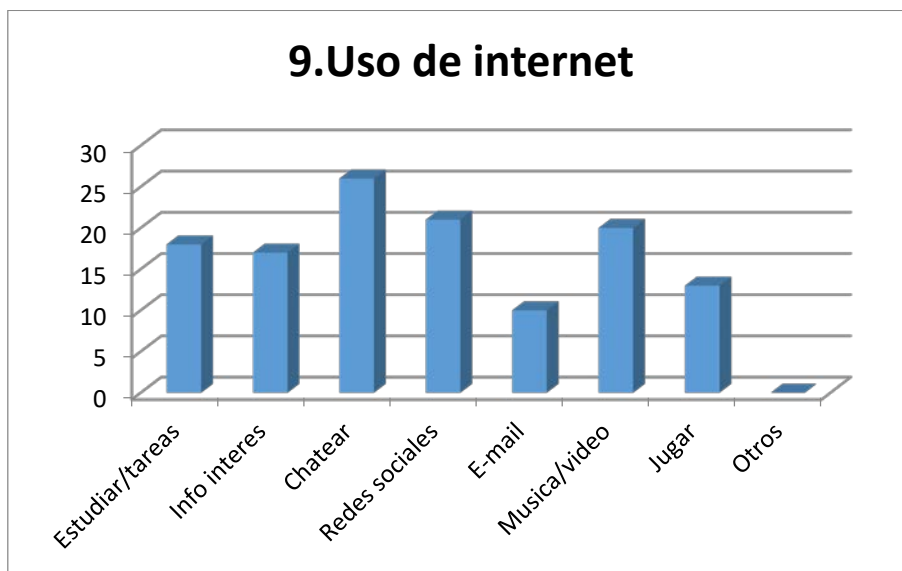


Gráfico 22. Resultado pregunta uso de internet en el cuestionario equipación tecnológica curso 2016/2017. Fuente: Elaboración propia.

A la vista de los resultados del gráfico 22, es importante resaltar que los resultados más elevados se refieren a las utilizaciones de internet para temas relacionados con el chat y los amigos, 96%, para las redes sociales un 74%, para la música. Para estudiar el 67% y para visitar paginas un 63%. El penúltimo lugar lo ocupan los juegos on-line, 48% y el último los correos electrónicos, 37%.

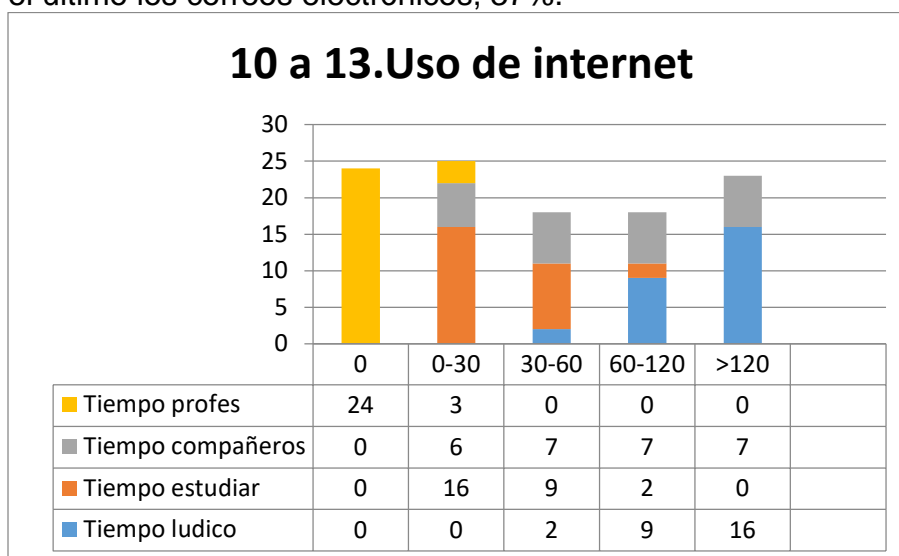


Gráfico 23. Resultado preguntas uso de internet en el cuestionario equipación tecnológica curso 2016/2017. Fuente: Elaboración propia

Las preguntas 10 a 13 cuestionaban a los alumnos el uso de internet, reflejando los resultados en el gráfico 23.

El 100% utilizan el móvil para divertirse repartiéndose del siguiente modo el tiempo:

- 0% de 0 a 30 minutos
- 7% de 30 a 60 minutos
- 33% de 60 a 120 minutos
- 60% más de 120 minutos.

Todos los alumnos dicen usar internet para estudiar repartiéndose del siguiente modo el tiempo:

- 60% de 0 a 30 minutos
- 33% de 30 a 60 minutos
- 7% de 60 a 120 minutos
- 0% más de 120 minutos.

Respecto a la pregunta que versa sobre el tiempo que invierte en comunicarse con sus compañeros, obtenemos estos datos:

- 22% de 0 a 30 minutos
- 26% de 30 a 60 minutos
- 26% de 60 a 120 minutos
- 26% más de 120 minutos.

En la pregunta número 13 *¿Aproximadamente cuánto tiempo usas diariamente internet para comunicarte con tus profesores?* 89 % no usan y tan solo un 11% dice que entre 30 y 60 minutos.

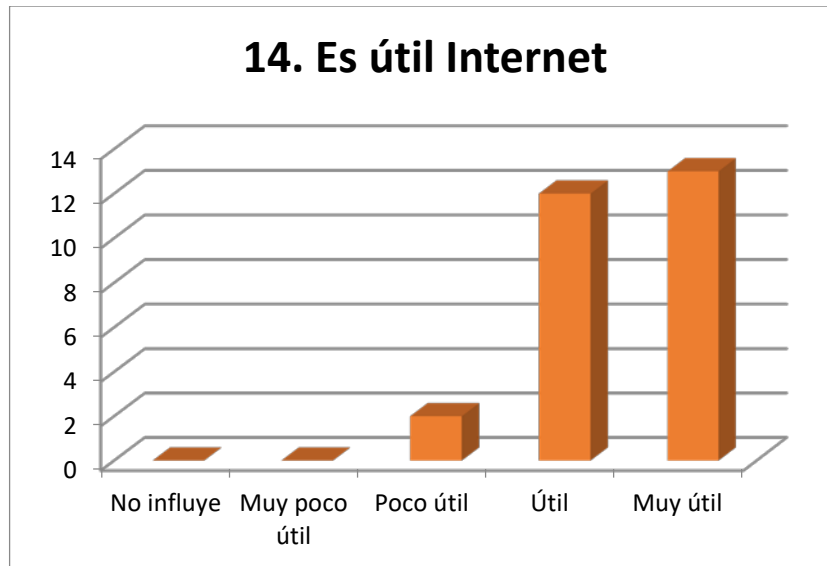


Gráfico 24. Resultado pregunta utilidad internet en el cuestionario equipación tecnológica curso 2016/2017. Fuente: Elaboración propia.

El 100% de los alumnos responden que si ven útil el uso de internet en la educación, centrándose toda la muestra entre muy útil, útil y poco útil y (siendo sus respuestas el 48% y el 45%, 7% respectivamente).

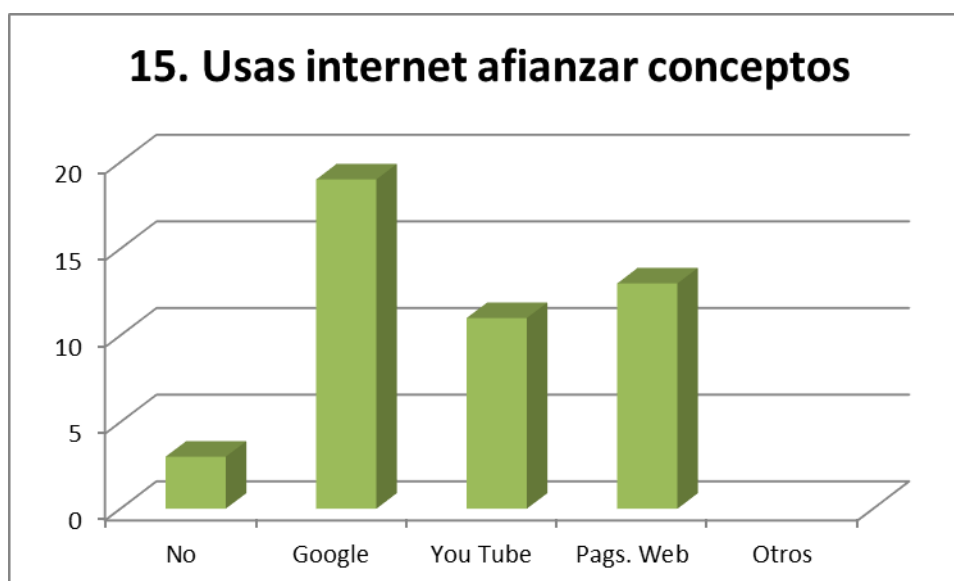


Gráfico 25. Resultado pregunta uso internet afianzar conceptos en el cuestionario equipación tecnológica curso 2014/2015.

Fuente: Elaboración propia.

Respecto al uso de internet para afianzar conceptos, dan algunos de ellos distintas actuaciones, los porcentajes son de un 41,3% por medio de la búsqueda de google, el 23,9 % consultando en youtube y un 28,2% por medio de páginas webs, el 6,52% restante dice no usar internet para este fin. Dichos resultados quedan reflejados en el gráfico 25.

➤ Cuestionarios sobre “rectas y sistemas”

Este cuestionario es cumplimentado por los alumnos de 4ºESO. Tiene como objetivo medir el aprendizaje significativo sobre el tema de los sistemas que se dio en el curso pasado con la ayuda de las TIC.

Se ha de resaltar que aunque no se recoge en este estudio, los resultados sobre otras pruebas realizadas sobre este mismo aprendizaje, suelen ser poco positivas y demuestran que de un curso a otro los alumnos no recuerdan muchos de los conceptos aprendidos. Es el caso de los controles iniciales de principio de curso, de las lluvias de ideas que se hacen muchas veces antes de empezar a explicar... Destacan, en este tipo de pruebas, que las respuestas relacionadas con procesos memorísticos suelen ser más acertadas que aquellas que están en consonancia con razonamientos...

Centrando nuestra atención en esta prueba, que se encuentra en el Anexo XIII, tenemos los siguientes resultados. Se ha de recordar que el único curso escolar que responde a este cuestionario, sin haber trabajado ni la aplicación Geogebra ni la propuesta didáctica completa, es el que se corresponde con el año 2016/2017. Aunque los resultados no tienen por qué estar en relación directa con este motivo sí que invita a la reflexión, pues el profesor era el mismo y no hubo mayores cambios. De hecho, aunque había otra muestra que también cumplimentó este cuestionario, no

se incluyó en el estudio al provenir de otros docentes, lo que podía desvirtuar el estudio.

Las tres primeras preguntas están relacionadas con la representación gráfica de los sistemas y su clasificación.

Representamos los resultados a estas tres primeras preguntas en los gráficos 26, 27 y 28.

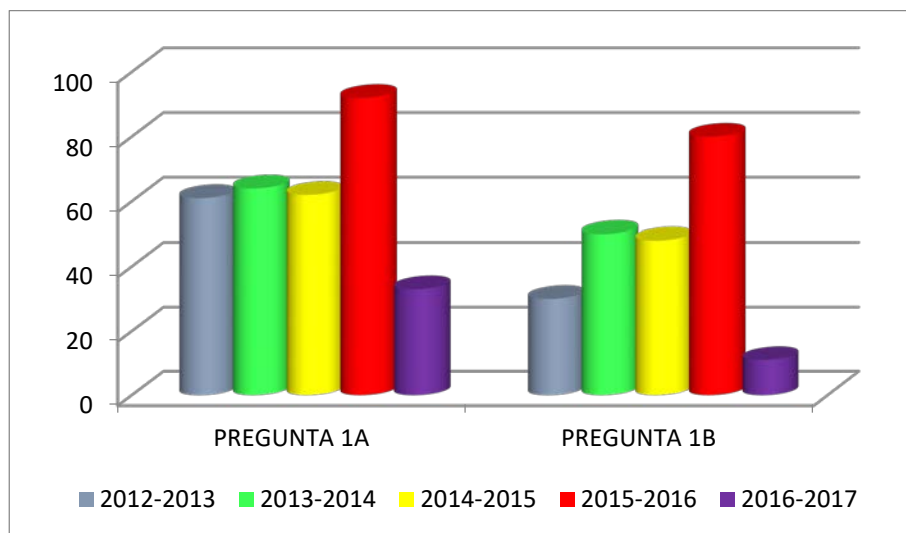


Gráfico 26. Aciertos pregunta primera cuestionario rectas y sistemas.

Fuente: Elaboración propia.

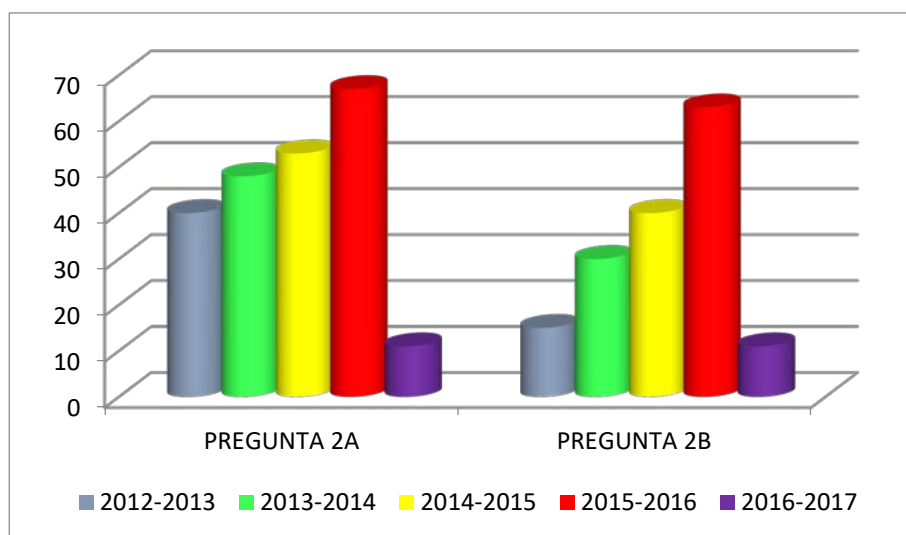


Gráfico 27. Aciertos pregunta segunda cuestionario rectas y sistemas.

Fuente: Elaboración propia.

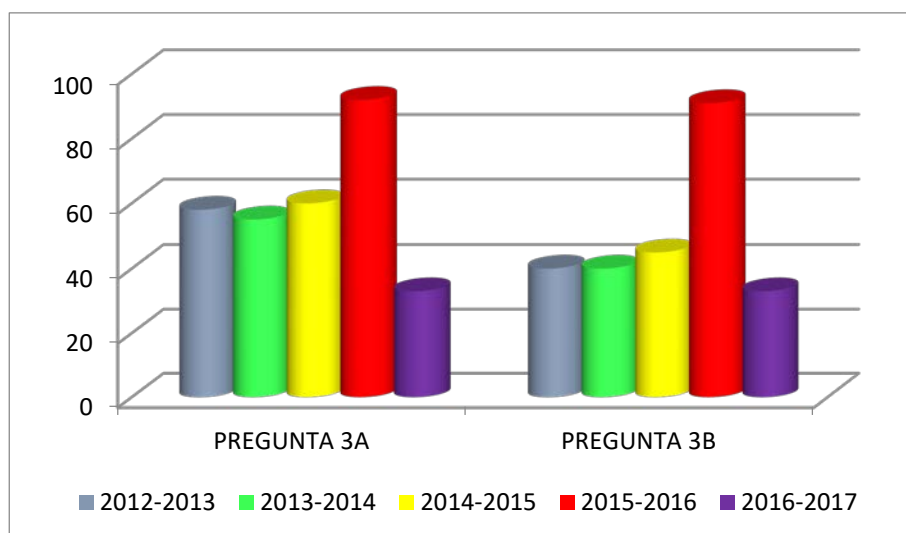


Gráfico 28. Aciertos pregunta tercera cuestionario rectas y sistemas.

Fuente: Elaboración propia.

Estos resultados demuestran que la primera parte de estas preguntas tiene siempre resultados mejores. Esto puede ser debido a que se corresponde con la representación en el plano de las rectas. En cambio, la segunda que es la clasificación de los mismos, siempre tiene un menor número de aciertos. Hay un gran salto, en cuanto al número de aciertos, tras la implementación de la propuesta didáctica completa. Destacamos que en el curso 2012/2013 se mide el aprendizaje significativo con los alumnos que habían trabajado con la aplicación de Geogebra que luego se mejoró, y observamos que en todas las respuestas, tras la mejora de la misma, los resultados son más positivos. Los alumnos con los que no se trabajó por medio de las TIC, que cumplimentan el cuestionario durante el curso 2016/2017, muestran resultados análogos a los que se recogieron en el curso 2009/2010, donde se realizó el estudio exploratorio previo, con el que se comenzó este estudio.

Presentamos en el siguiente gráfico 29 los porcentajes de alumnos que habiendo contestado bien a la primera parte de estas preguntas, no lo hicieron en la segunda. Observamos que la diferencia disminuye conforme implementábamos las mejoras en nuestra investigación, es decir, el número de alumnos que habiendo contestado de forma correcta a la primera parte lo hacen también a la segunda cada vez es mayor.

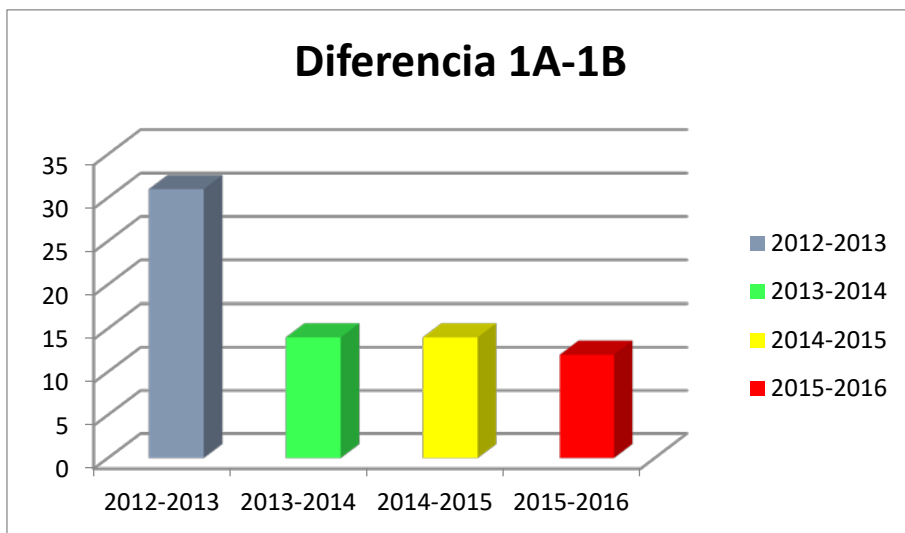


Gráfico 29. Comparativa respuestas de la primera pregunta del cuestionario rectas y sistemas. Fuente: Elaboración propia.

En esta pregunta, en el año en donde se mide el aprendizaje significativo tras el uso de la aplicación Geogebra sencilla, en comparativa al estudio con la otra aplicación Geogebra más completa, se logra descender el número de errores en aproximadamente el 15%. Tras la implementación de la propuesta didáctica se logra bajar el número de fallos, estando sobre un 10%, como podemos ver en el gráfico 30.

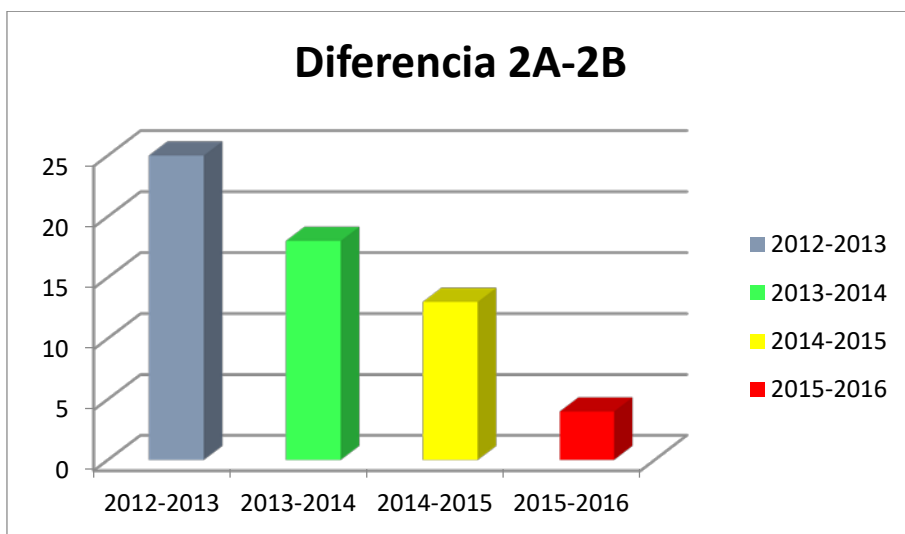


Gráfico 30. Comparativa respuestas de la segunda pregunta del cuestionario rectas y sistemas. Fuente: Elaboración propia.

Según el gráfico 31, destaca el descenso, situándose en menos de un 5% tras la implementación.

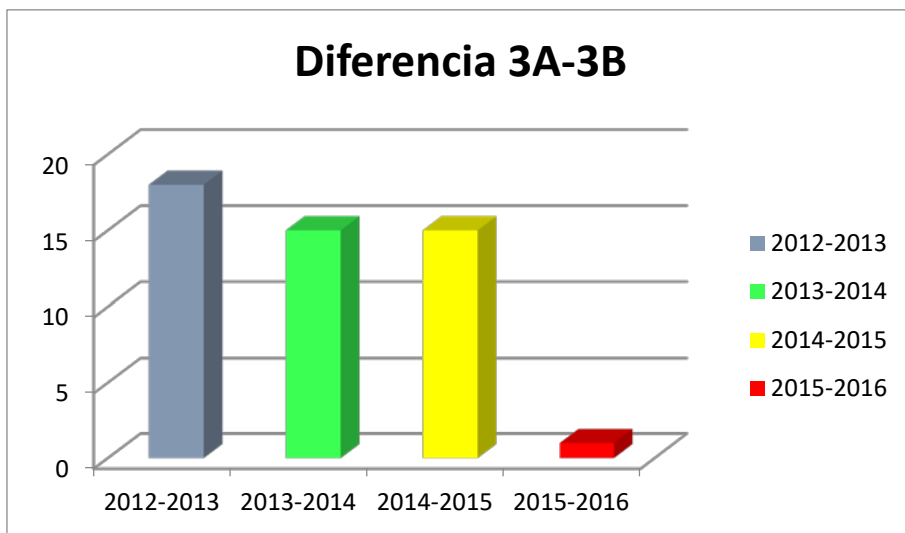


Gráfico 31. Comparativa respuestas de la segunda pregunta del cuestionario rectas y sistemas. Fuente: Elaboración propia.

En esta pregunta es mejor el resultado que en las anteriores, tras la propuesta didáctica, aunque no sea tan acentuado entre las dos aplicaciones de Geogebra.

En los gráficos 32 y 33, mostramos los resultados de las preguntas cuarta y séptima, en ellas se recoge si el alumno sabe hacer cambios en los coeficientes de las rectas para que estas sean paralelas.

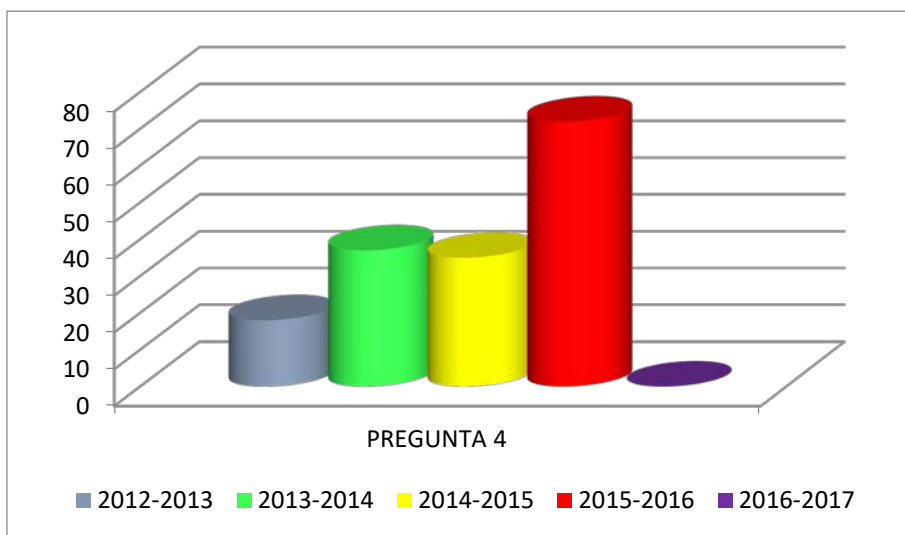


Gráfico 32. Aciertos pregunta cuarta del cuestionario rectas y sistemas. Fuente: Elaboración propia.

Destaca, en ambas preguntas, el bajo porcentaje que se presenta el primer año (habían desarrollado su enseñanza con la aplicación de Geogebra de rectas). Hay una mejoría en los dos posteriores (tras el software de sistemas). El resultado mejora considerablemente tras la

implementación de toda la propuesta. Los resultados del presente curso escolar son demasiado negativos. Tras hablar con ellos, comentan que aunque recordaban “algo” de los sistemas, no sabían aplicarlo.

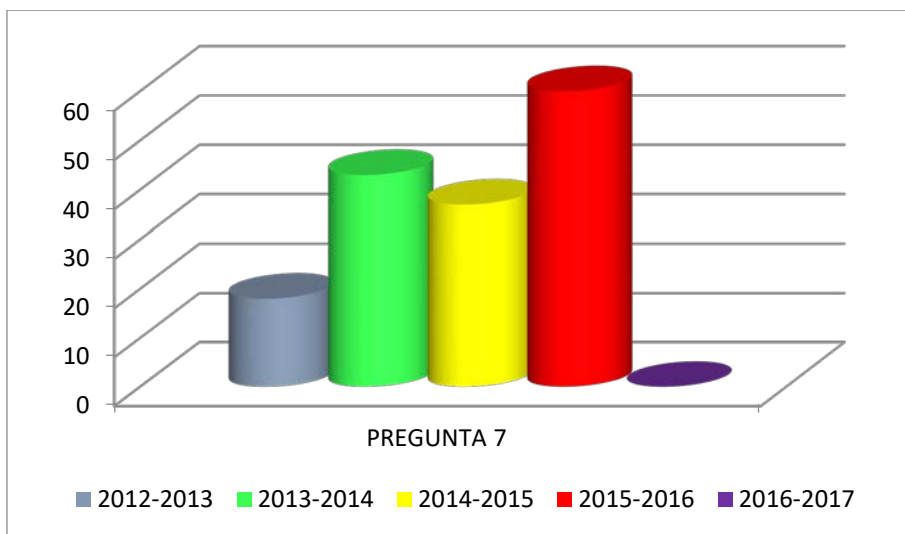


Gráfico 33. Aciertos pregunta séptima del cuestionario rectas y sistemas.

Fuente: Elaboración propia.

En la quinta pregunta, recogemos dos respuestas, reflejadas en el gráfico 34.

La primera de ellas se corresponde con la posición relativa que tendrían las dos rectas propuestas. Se ha de comentar que la mayoría de alumnos hacen la representación gráfica antes de contestar a la pregunta “¿cómo serían las rectas?” Les cuesta más razonar la respuesta. Los resultados son muy buenos, no habiendo diferencias sustanciales ni cuando se varía la aplicación Geogebra ni tras la implementación.

Destacamos que aunque sin la implementación los alumnos saben responder, no saben razonar. Este resultado (2016/2017, pregunta 5b) se sitúa en la misma línea que los obtenidos en el estudio exploratorio previo.

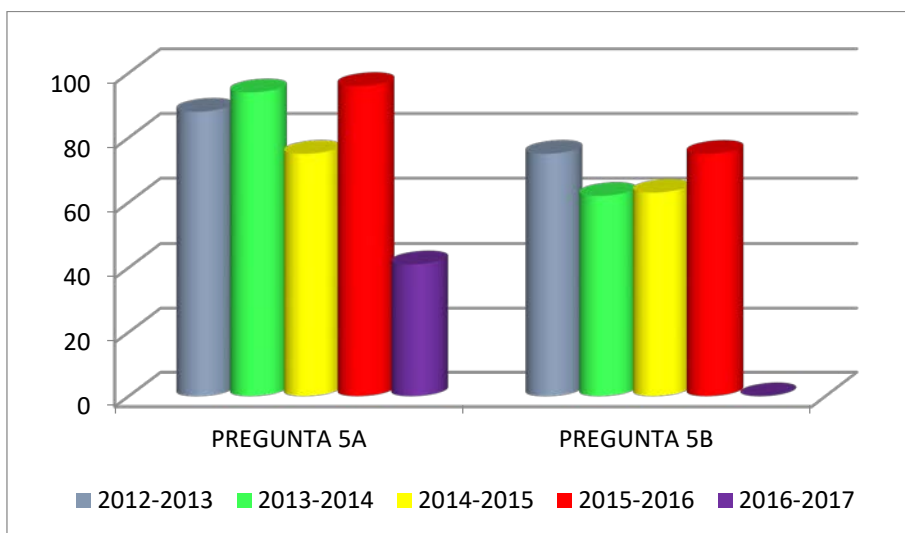


Gráfico 34. Aciertos pregunta quinta del cuestionario rectas y sistemas.
Fuente: Elaboración propia.

La pregunta número seis es análoga a las cuatro y cinco, pero en esta ocasión sobre rectas secantes, mostramos las respuestas a dicha pregunta en el gráfico 35.

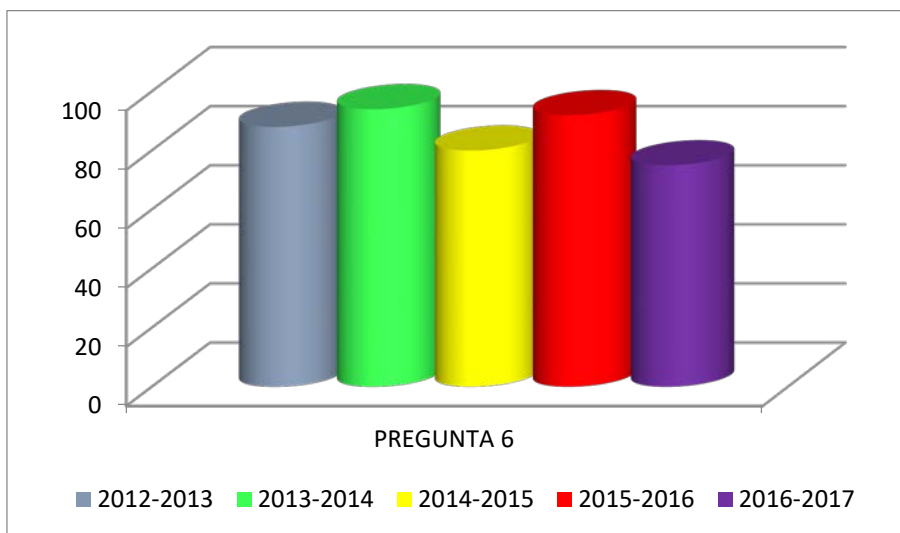


Gráfico 35. Aciertos pregunta sexta del cuestionario rectas y sistemas.
Fuente: Elaboración propia.

Dado que se trata de rectas secantes, el caso “más típico”, el porcentaje de las respuestas correctas está más igualado, incluso tras la no implementación de las TIC.

Las tres últimas preguntas son de respuesta más abierta pues el alumno debe explicar las diferencias y similitudes para que las rectas sean secantes, paralelas o coincidentes. Tenemos los siguientes resultados, representados en los diagramas 36, 37 y 38:

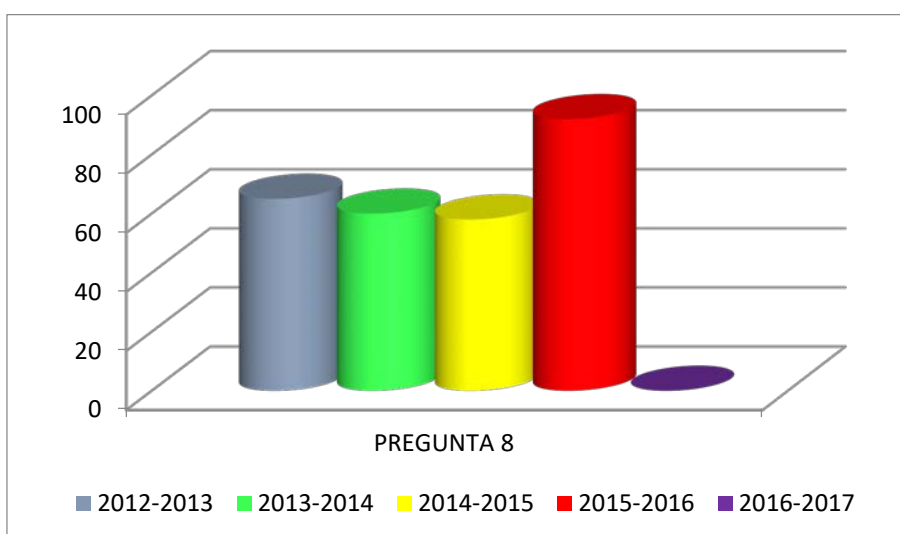


Gráfico 36. Aciertos pregunta octava del cuestionario rectas y sistemas.
Fuente: Elaboración propia.

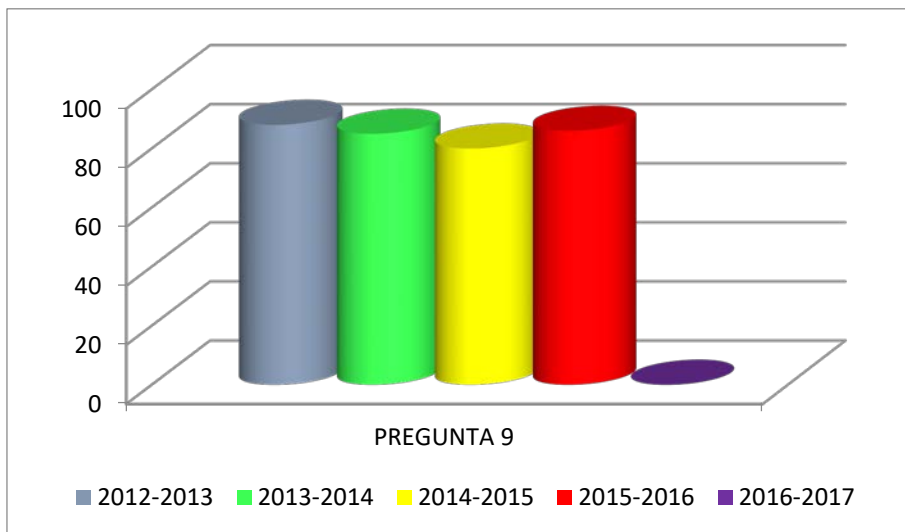


Gráfico 37. Aciertos pregunta novena del cuestionario rectas y sistemas.

Fuente: Elaboración propia.

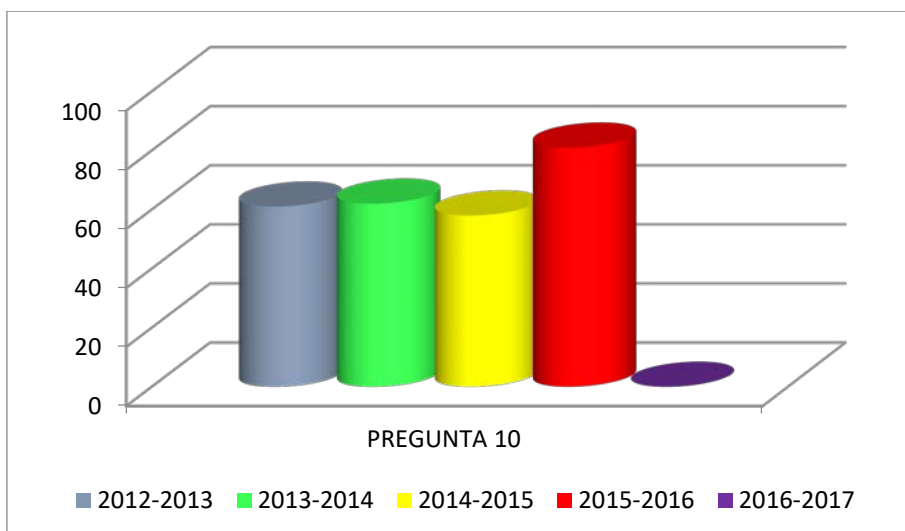


Gráfico 38. Aciertos pregunta décima del cuestionario rectas y sistemas.

Fuente: Elaboración propia.

En los casos de rectas coincidentes y paralelas la mejoría es muy notable, en el caso de las secantes el número de respuestas correctas es más uniforme a lo largo de los años.

Hemos de resaltar que en el curso 2016/2017 hay alumnos que sí que saben responder de forma correcta a parte de las preguntas, pero que las respuestas son incompletas o incongruentes en algún razonamiento. Si tomásemos esas respuestas como buenas (aunque es su totalidad no lo sean) en la pregunta 8 tendríamos un 5% de aciertos, en la 9 un 33% y el la última un 27%. De igual modo son datos mucho peores que los cosechados en cursos anteriores cuando se indujeron escenarios nuevos de aprendizaje por medio de las TIC.

Por último pasamos a hacer una comparativa entre la pregunta 4 y 8 en el gráfico 39, la 5 y 10 en el gráfico 40 y la 6 y 9 en el gráfico 41. El motivo de escoger dichas preguntas para emparejarlas de este modo es que la 4 es la aplicación práctica de la 8 (sobre rectas coincidentes), la 5 de la 10 (rectas paralelas) y por último la 6 es la práctica de los conceptos teóricos de la 9 (secantes).

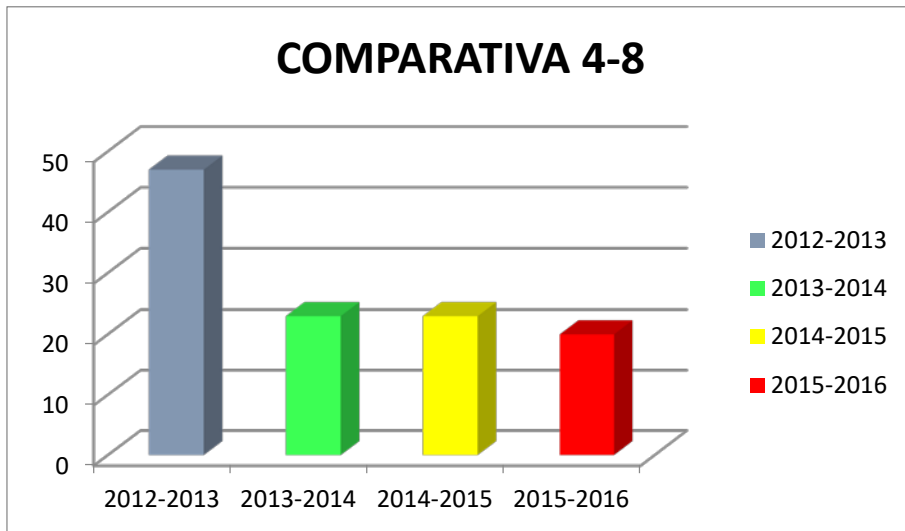


Gráfico 39. Comparativa respuestas de la cuarta y octava pregunta del cuestionario rectas y sistemas. Fuente: Elaboración propia.

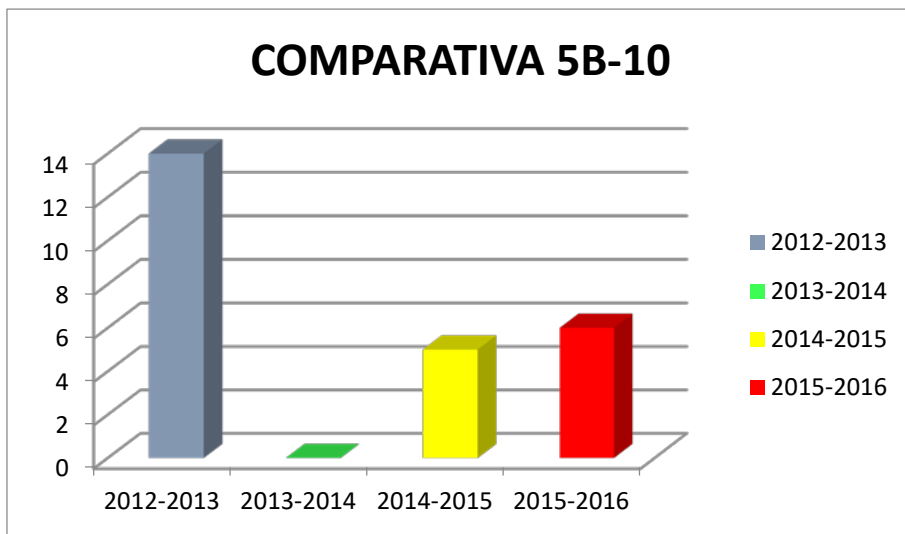


Gráfico 40. Comparativa respuestas de la quinta y décima pregunta del cuestionario rectas y sistemas. Fuente: Elaboración propia.

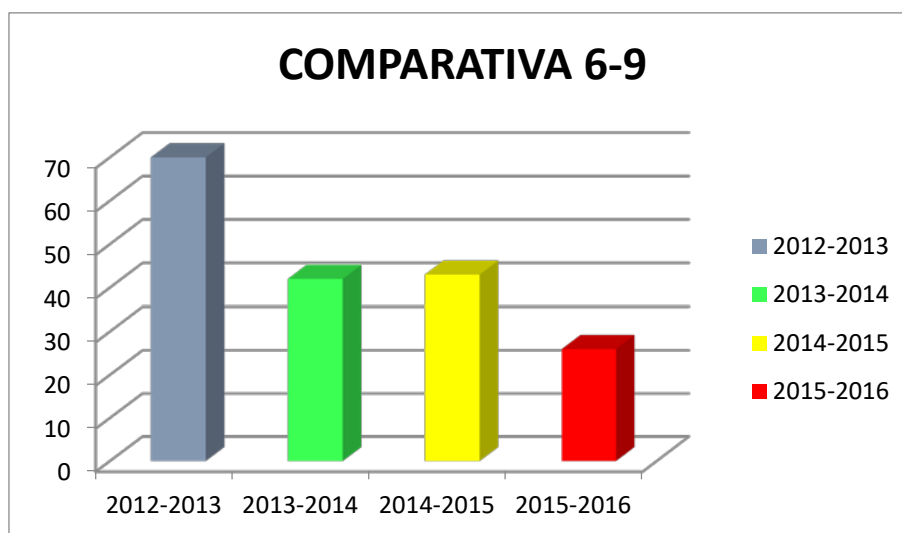


Gráfico 41. Comparativa respuestas de la sexta y novena pregunta del cuestionario rectas y sistemas. Fuente: Elaboración propia.

Estos gráficos muestran la comparativa de responder bien a la teoría (pregunta de la 8 a la 10) y haberlo hecho bien en la práctica (pregunta 4,5b, y 6).

La diferencia entre la 8 y la 4 es del 47%, 23%, 23% y del 20%. Es decir, se mejora la relación entre conceptos teóricos estudiados y aplicaciones prácticas tanto tras la mejora de la aplicación Geogebra como al mejorar toda la enseñanza de este tema tras la propuesta didáctica completa.

En relación a las rectas paralelas, sí hay un descenso de la aplicación sobre rectas y la mejorada, pero en cambio, ninguna sustancial entre ésta y la propuesta didáctica.

Por último, en las rectas paralelas (pregunta 6 y 7) conforme mejoran los escenarios TIC la relación entre la teoría y la práctica mejora, quedando de este modo:

- Curso 2012/2013: 70% de diferencia entre los alumnos que contestan bien a la teoría pero mal a la práctica.
- Curso 2013/2014: 51% de diferencia entre los alumnos que contestan bien a la teoría pero mal a la práctica.
- Curso 2014/2015: 43% de diferencia entre los alumnos que contestan bien a la teoría pero mal a la práctica.
- Curso 2015/2016: 32% de diferencia entre los alumnos que contestan bien a la teoría pero mal a la práctica.

- Examen del tema de los sistemas: En los exámenes, en las preguntas donde tradicionalmente los alumnos solían equivocarse, se nota gran mejoría. Destaca la mejora sustancial del grupo con el que se implementó toda la propuesta didáctica durante el curso 2014/2015 y se repite la obtención de buenos resultados con el grupo del curso 2016/2017.

- **Cuestionario en referencia al aprendizaje colaborativo.**
Se hace un estudio global sobre las opiniones de los alumnos en referencia al aprendizaje colaborativo. Este se fundamentó en tres preguntas en la que se obtenían las opiniones de los discentes sobre si este tipo de aprendizaje les había ayudado (un 66% de los alumnos opinan que sí), otra pregunta medía el gusto hacia el trabajo colaborativo (un 50% contestó que les gustó). Destaca que al tratarse de un nuevo método de trabajo tuvieron que emplear más tiempo del habitual en el proceso (así lo afirman el 63% de los encuestados).



Gráfico 42. Cuestionario aprendizaje colaborativo 1.
Fuente: Elaboración propia

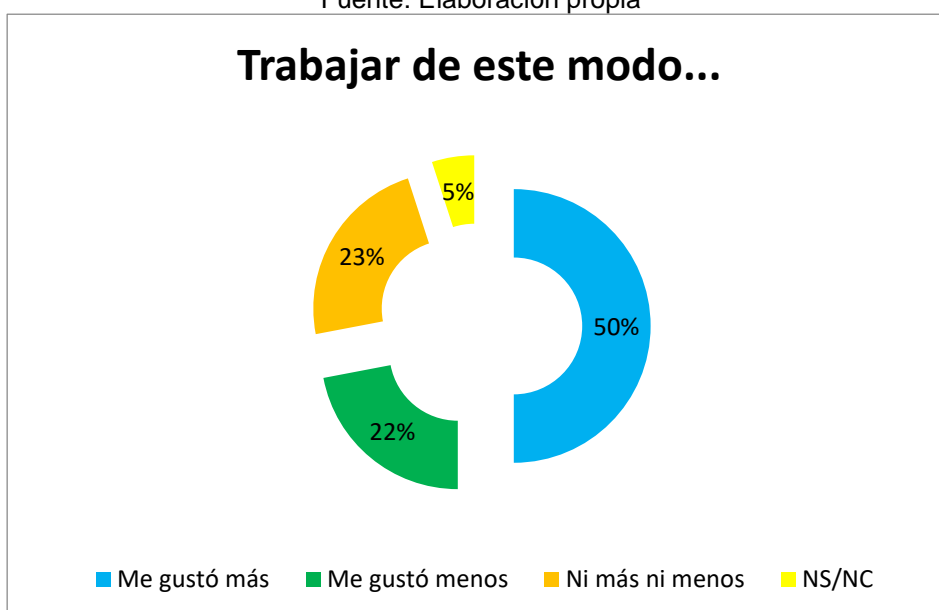


Gráfico 43. Cuestionario aprendizaje colaborativo 2.
Fuente: Elaboración propia

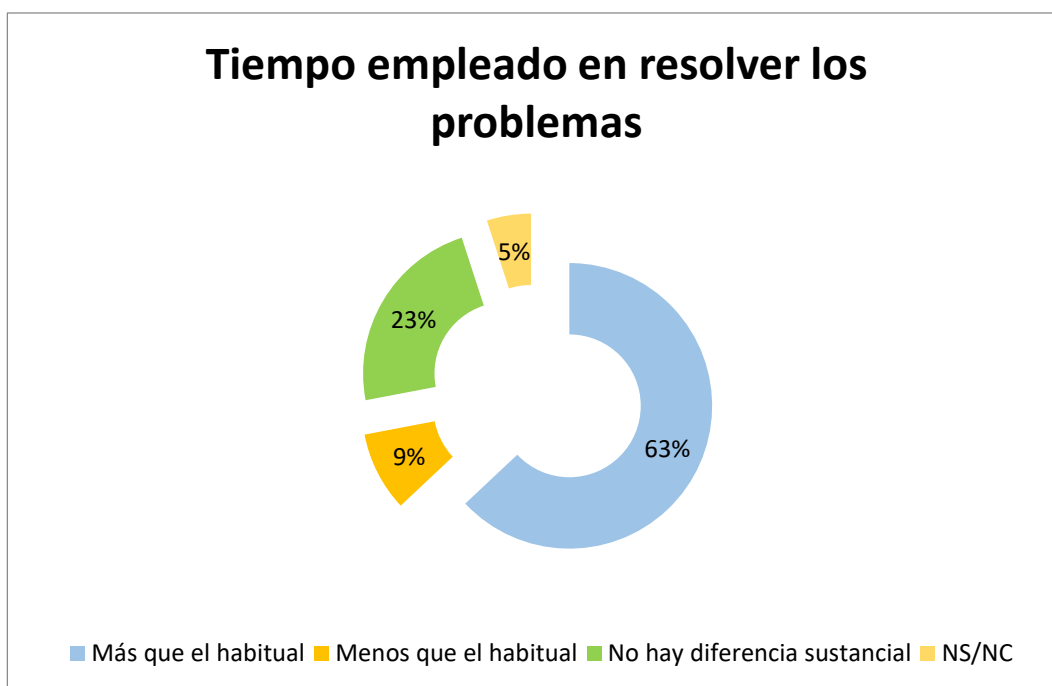


Gráfico 44. Cuestionario aprendizaje colaborativo 3.
Fuente: Elaboración propia

➤ Cuestionario “EFAI”

Estos cuestionarios se hicieron en dos momentos de la investigación, en el curso 2012/2013 y en el 2016/2017. Tan solo tenían como objetivo empezar a tener algunos datos sobre las capacidades cognitivas que tienen nuestros estudiantes y el desarrollo que hacen de las matemáticas, las habilidades, destrezas que tienen ante las mismas...

La síntesis de los resultados es la que sigue:

- El 66% de los alumnos que presentan resultados por debajo del percentil 50 en la parte correspondiente a la visión espacial tienen malos resultados académicos en la parte de geometría durante el primer ciclo de la ESO.
- El 80% de los alumnos que tienen un percentil por debajo del 50 en la parte de razonamiento presentan calificaciones malas en la asignatura de matemáticas, tanto en el primer ciclo de la ESO como en la primera evaluación de tercero. Son alumnos que se caracterizan por la repetición de los ejercicios, la mecanización, destacando malos resultados cuando los ejercicios “no son tipo”. Estos alumnos han empeorado los resultados conforme han aumentado de curso. Logran “salvar el aprobado” en muchas ocasiones por la parte aritmética de la materia.

- Los alumnos que presentan bajos resultados (por debajo del percentil 50) en los dos apartados, a la vez, de espacial y razonamiento “no son buenos” en matemáticas. Tan sólo logran mejorar los resultados de los exámenes aquellos que destacan (con un percentil igual o superior a 75) en el apartado de números.
- No hay ningún alumno que puntúe por debajo del percentil 50 solo en el apartado numérico. Suele ir acompañado, de manera habitual por:
 - Numérico y espacial
 - Numérico y razonamiento

El 75 por ciento de estos alumnos obtienen malísimos resultados en esta materia, llegando a llevar la asignatura de cursos anteriores suspensa. El 25% restante suelen lograr superar las matemáticas, siendo algo mejor que el grupo anterior, pero por supuesto, nunca sobresaliendo de manera positiva en esta ciencia.

➤ Registros de la plataforma.

Aunque no se trata de un cuestionario, en el Anexo XI podemos observar un ejemplo de dichos registros. En los dos cursos escolares donde se llevó a cabo la implementación de la propuesta didáctica completa se estudiaron dichos registros y se comprobó que la mayoría de los alumnos se habían conectado. Dado que trabajaban por grupos, había alumnos que no tenían muchas visitas a la plataforma o al temario pues lo hacían desde un solo ordenador y con un solo nombre. En caso de querer hacer un control exhaustivo del tiempo y del número de veces, que necesita cada alumno para trabajar este tema con los materiales propuestos, se deberá habilitar un registro único por grupos, la obligatoriedad de que, aunque sea por grupos, todos los alumnos trabajasen con un ordenador...

6

CAPÍTULO CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

CAPÍTULO 6: CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

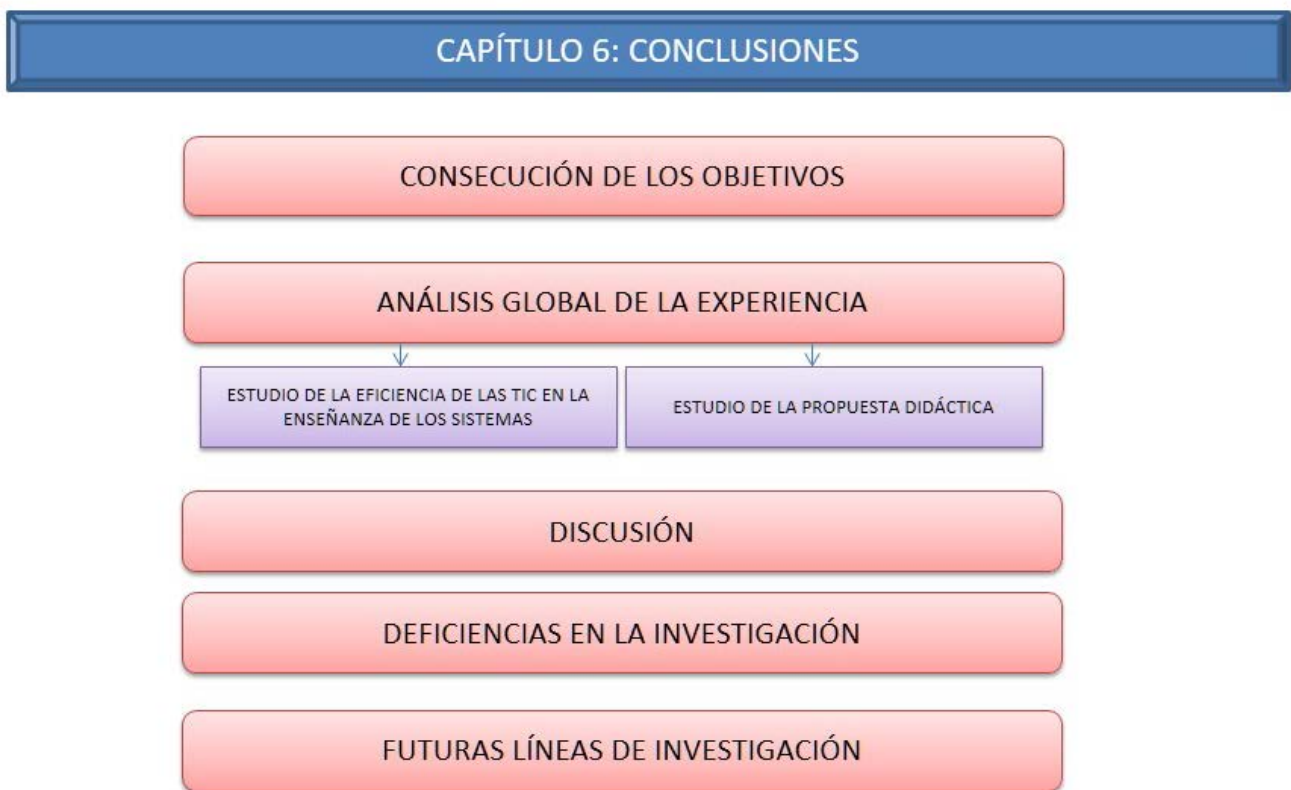


Figura 40. Mapa conceptual capítulo 6. Fuente: elaboración propia.

1. CONSECUCCIÓN DE LOS OBJETIVOS.

Pasamos a analizar la consecución de los objetivos planteados al principio de la investigación.

- **Diseñar un ambiente enriquecido con TIC que integre una propuesta didáctica para mejorar la enseñanza de los sistemas lineales de dos ecuaciones y de dos incógnitas (sistemas de ecuaciones lineales, lenguaje algebraico y representación de los mismos) en 3º de la ESO.**
Este objetivo está cumplido.
 - ✓ *El diseño de tal ambiente y la propuesta didáctica se pueden observar en el Anexo IX y en el punto 9 del capítulo anterior, respectivamente.*

Asociado a este objetivo general se planteó, como específico:

- **Evaluación, selección y diseño de herramientas, canales y recursos digitales para la concreción de la propuesta didáctica.**
Este objetivo está cumplido.
 - ✓ *Esta finalidad se alcanzó por medio de la selección del programa Geogebra haciendo una aplicación específica para los puntos, las rectas y los sistemas y con la que pudiesen extrapolar los resultados a los sistemas de ecuaciones. El objetivo también se cumplió al escoger las presentaciones interactivas que contenían tanto teoría como actividades. Finalmente se usó otro programa, Wiris, para la autoevaluación del alumno.*
 - ✓ *Se escogió el apoyo visual y los materiales manipulativos (electrónicos), manteniendo una enseñanza b-learning por medio de una plataforma virtual.*
 - ✓ *El canal electrónico de transmisión utilizado fue la plataforma Moodle.*
- **Evaluar la implementación de la propuesta didáctica.**
Este objetivo está cumplido.

Asociado a este objetivo general se plantearon, como específicos:

- **Evaluación del aprendizaje de los alumnos.**
Este objetivo está cumplido.
 - ✓ *En referencia a los contenidos/estándares/objetivos propios del currículo, siempre se tuvo presente que la implementación de esta propuesta didáctica, que le daba un papel destacado a las TIC, no podía darle mayor valor al uso de las herramientas, que al propio proceso de aprendizaje. Los alumnos superaron los objetivos del currículo, tanto los generales como los específicos. Se puede consultar con mayor detalle en el Anexo XIII.*
 - ✓ *En cuanto a la evaluación del aprendizaje significativo, que se midió en dos momentos (en el curso siguiente a la implementación, y en el mismo, tras unos meses después) se puede afirmar que sí se desarrolla este tipo de aprendizaje. En*

el punto 5 del capítulo anterior está recogida toda la información referente a este punto.

- **Evaluación de la motivación de los alumnos.**
Este objetivo está cumplido.
 - ✓ *Se midió por medio de la observación y se obtuvieron datos en los grupos de discusión llevados a cabo con los discentes. Los alumnos demostraron gran motivación e interés por el área cuando descubrieron que iban a trabajar esta materia con un ordenador, por lo que el objetivo se ha superado satisfactoriamente. Además, la motivación se mantuvo durante la implementación. Estos resultados están recogidos en el punto 5 del capítulo anterior.*

- **Evaluación de las metodologías diseñadas.**
Este objetivo está cumplido.
 - ✓ *Se integraron metodologías constructivistas y colaborativas. Objetivo cumplido, como se pone de manifiesto en el análisis de los resultados.*

- **Evaluación del proceso.**
Este objetivo está cumplido.
 - ✓ *En el desarrollo de las fases, para las nuevas implementaciones, siempre se estudiaron los procesos anteriores, y tras esto, se trabajaban cuantas mejoras fueran necesarias. En el punto 7 del capítulo 5 quedan reflejados las evaluaciones que se desarrollaban.*

Por último hemos de resaltar uno de los grandes progresos que se ha llevado a cabo gracias a esta investigación. El proceso de e-a ha puesto de manifiesto que aquel problema detectado (falta de entendimiento y razonamiento respecto a las relaciones de los coeficientes de las rectas y la representación de las mismas) en el estudio exploratorio previo se ha solucionado, pues, los alumnos han aprendido las relaciones entre los distintos coeficientes, ya sean naturales, enteros o racionales, que intervienen en las ecuaciones de las rectas.

2. ANÁLISIS GLOBAL DE LA EXPERIENCIA.

La experiencia que hemos implementado ha tenido como objetivo principal el uso de las herramientas tecnológicas para mejorar el proceso de enseñanza, creando así un escenario nuevo para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales.

La investigación se ha desarrollado en el área de las matemáticas, combinando el aprendizaje colaborativo, el autoaprendizaje y el tradicional por medio de los recursos TIC y las clases expositivas. Todo ello se llevó a cabo en el centro escolar donde desarrolla parte de su labor docente la investigadora. En los cursos de 3ºESO fue donde se llevó a cabo el desarrollo de la implementación y parte del estudio sobre el aprendizaje significativo y en el de 4ºESO la toma de datos específicos, tan solo referente al aprendizaje último referido.

Este estudio puede englobarse dentro de un módulo de b-learning (se esperaba que los alumnos trabajasen desde casa, semipresencial) puesto que el diseño está enfocado para que la experiencia educativa combine tecnologías en espacio presencial (físico) y no presencial (virtual).

Los objetivos y contenidos a trabajar son los propios que marca el boletín oficial de la región de Murcia, como se puede observar en el Anexo I, centrándonos en el tema de los sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, destacando que se trabajará para que el alumno entienda los beneficios de las matemáticas y el papel que tienen éstas en la vida y en el desarrollo integro de nuestros discentes, como indica la ley de educación (Anexo II) y desarrollando la competencia digital (Anexo III). Al saber, gracias al marco teórico, que nuestros alumnos están en la última etapa de las enunciadas por Piaget, por lo que pueden dar el paso a la abstracción y poseen las capacidades de razonamiento propias de la disciplina. Al mismo tiempo, quisimos comenzar una pequeña experiencia para ver la relación de las capacidades cognitivas con el manejo de los alumnos con los saberes matemáticos, dejando el estudio abierto a futuras investigaciones.

En esta investigación que se ha desarrollado durante un periodo de ocho cursos escolares, se ha detectado un mayor interés en el aprendizaje por parte de los alumnos, tanto por los más desmotivados como por los que durante el curso habían demostrado mayor atención. Cabe señalar que a varios alumnos a los que no se les dejó pasar a una clase práctica con los ordenadores, de manera puntual, al llegar tarde al aula, mostraron cierta disconformidad al respecto, y como luego reconocieron los demás, era una actividad que, aunque fuese de matemáticas, les había motivado.

Destacó la contraposición de las respuestas que los alumnos daban cuando se hablaba de aprender matemáticas de otra forma que no fuese la tradicional (a la que estaban acostumbrados) con las respuestas en afirmativo de usar internet y los distintos medios que le dan soporte para el estudio. Destacaba que los discentes veían muy útil, en su mayoría, el uso de internet para la educación y que lo usaban incluso para afianzar conceptos con el hecho de que no lo utilizasen en el área de las matemáticas. Es sorprendente la gran equipación tecnológica que tienen a su alcance, en su quehacer diario. Este hecho hace que nos reafirmemos en que la enseñanza debe caminar a usar

estos escenarios para que los discentes aprendan con las herramientas que ellos tienen a su alcance y que usan con asiduidad.

Los análisis realizados ponen de manifiesto que se encuentran cambios significativos en el rendimiento académico de los alumnos. Con distintos conocimientos iniciales antes de ponerse frente a los ordenadores, han mantenido la misma tendencia hacia la mejora de los resultados y la adquisición de los conocimientos.

También hemos observado que algunos de los objetivos relacionados con los contenidos propios de esta temática se consiguieron, iniciaron o estaban en proceso, independientemente del uso del programa informático (Anexo XIII).

Gracias a esta experiencia, la investigadora, como docente, puede afirmar que este estudio ha supuesto un incremento en su motivación, para años venideros. Esto es debido a que ha comprobado el aumento de la estimulación del alumnado, lo que se ha visto traducido en una mayor implicación y responsabilidad de los estudiantes hacía el trabajo matemático. Incluso opina, gracias a su experiencia y a la de sus compañeros, que el gran motor para un buen proceso de enseñanza-aprendizaje es la motivación de los alumnos y que un alumno, de esta manera, puede hacer despertar inquietudes matemáticas que, de otra forma no se descubrirían.

Todo lo expuesto avala el mantenimiento de la hipótesis que suponíamos, la utilización de los ordenadores en la enseñanza es beneficiosa para los alumnos. Aunque no debemos olvidar otras características como el tamaño muestral, el cambio metodológico...

En relación a la formación del profesorado, se ha detectado, que la mayoría de los docentes, sobre todo cuantos más mayores son, no presentan motivación alguna por este tipo de herramientas. Además, la formación que tienen con respecto a la utilización de las TIC, ya sea del propio software así como de las metodologías a desarrollar con ellos, es casi inexistente.

Se han de tener presentes las restricciones que impone el currículo, pues es un factor a tener en cuenta y que hace que no se puedan desarrollar todas las experiencias deseadas, en referencia a un contenido concreto. Este aspecto, junto con el tiempo limitado que tenemos los profesores para centrarnos en los contenidos de la programación hace que en muchas ocasiones no realicemos este tipo de iniciativas, al no tener seguro su éxito y nos da miedo “perder el tiempo” y no poder cumplir con la temporalización del curso.

Se han de destacar las dificultades organizativas de los centros, y en ocasiones la falta de recursos, para poder usar en el aula las TIC. Son muchos los colegios que se están adaptando a los nuevos tiempos en cuanto a material electrónico se refiere, pero se necesitará todavía un periodo grande para que cada alumno pueda contar con un ordenador en el aula, con el que poder experimentar este tipo de situaciones.

Como se ha recogido en capítulos anteriores, los alumnos suelen presentar un rechazo hacia las matemáticas y hemos comprobado que se puede vencer presentando esta materia por medio de herramientas con las que a ellos les gusten trabajar. De este modo, por medio de las TIC, los estudiantes podrán investigar, perdiendo el miedo a la materia y motivando su interés por las mismas, sin tener que invertir demasiado tiempo. El mundo de las nuevas tecnologías es un amplio abanico para trabajar, pues incluso por medio de los juegos matemáticos, y de aplicaciones que contengan problemas de la vida

diaria, con un atractivo para los alumnos, podremos estimular su actitud en cuanto a su formación académica se refiere.

Además, los exámenes (Anexo XX) han puesto de manifiesto que los resultados han mejorado, lo que le da mayor peso a nuestra investigación.

2.1. Estudio de la propuesta didáctica

En enero de 2014 se llevó a cabo la experiencia completa. Durante la realización se tuvieron que adaptar algunas de las planificaciones y realizar algunas modificaciones para poder adecuarse a la realidad existente. Podemos mencionar, como ejemplos de estas situaciones, el hecho de que en la primera sesión no se pudieron realizar todas las tareas pendientes, pues los alumnos tardaron más de lo previsto en adaptarse al entorno (llegar a la sala de ordenadores, formar los grupos quedando estos con el mismo número participantes, no todos accedieron de manera directa a la plataforma virtual, tuvieron que entender la nueva forma de trabajo...). Estas pequeñas variaciones se pueden considerar normales y cotidianas en el desarrollo de las programaciones docentes, por lo que la investigadora no cree necesario reseñarlas ya que también dependen del grupo-clase con el que se trabaje.

Destacó el aprendizaje colaborativo que se dio entre los estudiantes, sobre todo cuando entre distintos grupos trabajaban para explicarse o ayudarse en aquel ejercicio/concepto que un grupo sí entendía pero el otro no...

Finalmente, también se implementó con la actual ley de educación, en enero de 2017. La investigadora estudió si tenía que variar algún objetivo, añadir algún estándar de aprendizaje... Comprobó que no era preciso, por lo que el desarrollo de la investigación continuó sin cambios.

Esta implementación se desarrolló de manera más lineal que la anterior. Los alumnos trabajaron de manera más autónoma y sobresalió el aprendizaje constructivista que desarrollaron. Interactuaron mucho entre ellos pero mayoritariamente entre los integrantes de un mismo grupo. Se ayudaron entre grupos distintos pero no al nivel que la vez anterior.

Destaca el gran avance, en cuanto al aprendizaje significativo se refiere, tras implementar la propuesta didáctica completa en el curso 2014/2015 y que fue medido en el año escolar 2015/2016. El aprendizaje significativo de la última implementación no ha podido ser medido debido a que se dio por finalizada la investigación en marzo de 2017.

2.2. Estudio de la eficiencia de las TIC en la enseñanza de los sistemas lineales.

En primer lugar destacar que tanto las herramientas interactivas, como las distintas aplicaciones escogidas y el entorno personal de aprendizaje los consideramos apropiados por ser interactivos, ser manipulativos (en el caso de Geogebra) y poseer el canal todas características que necesitábamos, incluido el informe sobre las actuaciones de los alumnos (Anexo IX y X y XII). Desde nuestra percepción de la experiencia los alumnos no solo han mejorado en

cuanto a rendimientos académicos se refiere, como recogen los datos cuantitativos, sino que se han sentido motivados e incentivados incluso ilusionados por participar en esta experiencia piloto. Esto ha repercutido positivamente en su actitud ante la asignatura y el aprendizaje. Además se ha visto reforzado el aprendizaje, conducido por ellos mismos y apoyado en los compañeros.

Hemos de matizar que, aunque somos conscientes de que el único elemento de cambio no es el ordenador, en este caso la percepción de la experiencia así como los resultados obtenidos a través de la observación directa y los grupos de discusión, nos llevan a entender que ha sido el elemento clave para el cambio y ha condicionado de forma significativa, tanto el aprendizaje, como la motivación y la valoración de los alumnos con respecto a esta experiencia en el aula.

Destacamos fundamentalmente la comparativa que se llevó a cabo de los cuestionarios que median el aprendizaje significativo, cada vez que se implementaba cada propuesta, y la mejora en los exámenes tras la experiencia. Señalar que los resultados académicos mejoraban tras el uso de las TIC (con metodologías constructivistas y aprendizajes colaborativos) pero que no lo hicieron con las mismas metodologías mencionadas, con el recurso diseñado de la hoja de ejercicios, pero sin la inclusión de las TIC. Se ha de mencionar, de manera explícita de esta experiencia que se llevó a cabo en el curso 2015/2016 y que los datos que se obtuvieron en cuanto al aprendizaje significativo y en los exámenes, arrojaron un retroceso en el entendimiento de los conceptos. Trabajar de manera constructivista fue muy complicado, para esta parte de la materia, sin apoyarnos en recursos visuales y digitales, pues la resolución de algunos ejercicios era tediosa, llevaba mucho tiempo y no se lograba alcanzar resultados sin que el profesor fuese el protagonista de la adquisición del conocimiento por parte de los alumnos. Se tuvo que retomar el proceso de enseñanza en varios momentos pues los alumnos estaban perdidos y no llegaban a conclusiones correctas, protestaban porque habían tardado mucho en hacer los ejercicios...

En cambio, conforme la propuesta era más completa, en cuanto a medios tecnológicos, el aprendizaje significativo arrojaba resultados mejores, como mostraban los cuestionarios (que se cumplimentaban, por parte de los alumnos, al curso siguiente, con la misma muestra se estudiaba a la que hacía referencia este proyecto). Cabe destacar que el aprendizaje medido en otros momentos, como por ejemplo en la prueba inicial/nivel, que siempre se lleva a cabo a principio de curso, siempre arrojaba resultados pésimos.

3. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Durante el diseño de nuestra propuesta didáctica se tuvo presente todo lo referenciado en el marco teórico (capítulo 1) sobre las didácticas de las matemáticas y al aprendizaje de las mismas.

En primer lugar, se analizaron los errores que sabíamos que cometían los alumnos para, a partir de ellos, planificar la enseñanza (Engler et al. s.f), destacando el hecho expuesto por Rico (1998), que indicaba que el estudio de los propios errores debía ser, por sí mismo, un objetivo propio en el campo de esta ciencia. Por ello, se trabajó según las pautas dadas por Astolfi (1999), Abrate et al. (2006); Guerrero, Castillo, Chamorro y de Gil (2013). Es decir, se abogó por que el alumno encontrase su propio error y reflexionase acerca de las causas del mismo, para poder entender aquello que estaba mal, no limitándose a la simple corrección del ejercicio.

Tal y como se afirmó en el primer capítulo, nos encontramos en el periodo de la enseñanza de las matemáticas en donde se apuesta por el carácter intuitivo de estas, por la experiencia y la manipulación. En efecto, nuestra propuesta se cimienta sobre estos pilares.

Nuestra investigación se apoya en la idea de Guzmán (1994) que indicaba que se debía revisar qué enseñar en matemáticas, al encontrarnos en una era donde muchos procesos los puede desarrollar el ordenador. A la vez, no se olvidó la función instrumental, funcional y pragmática (Castro, 2001, Godino et al. 2003, Godino, 2004) que debe cumplir la enseñanza de las matemáticas. De igual modo, el presente estudio (capítulo dos) intentó trabajar la potencialidad de las capacidades cognitivas, su capacidad matemática, (NCTM, 1991) y la formación integral que da esta ciencia en la cultura del individuo. Se planteó la enseñanza para poder dar el paso a lo abstracto (Aleksandrow, Komogrovo y Laurentiev, 1973) y la investigadora/docente diseñó un entorno, tareas y metodología donde el estudiante era el protagonista de su estudio, en consonancia con la idea de que el aprendizaje está en estrecha relación con la forma en cómo lo aprenden (NCTM, 1991). Se dotó el proceso de enseñanza-aprendizaje de situaciones que estimularan la curiosidad de los estudiantes, potenciando la investigación, la resolución de problemas, por medio de la participación activa y potenciando la comunicación (Zemelman, Harvey y Hyde, 1998)

Las metodologías desarrolladas fueron las basadas en aprendizajes colaborativos verificando que no es una manera de trabajar sencilla (Collazos et al. s.f) y que dado que el fracaso puede ser de todo el grupo, los estudiantes han de colaborar, estimulando, por medio de esta, las relaciones que se dan entre los estudiantes (López, 2015). Nos encontramos en un mundo donde el aprendizaje y la formación continua (Prendes, 2003) son unos hechos reales y el trabajo colaborativo contribuye a ellos. Destacó durante la implementación la cooperación, entre los discentes, la responsabilidad, la comunicación, el trabajo en equipo... (características señaladas por Johnson y Johnson (1997), en cuanto al aprendizaje colaborativo). Se observó que es una buena estrategia para aprovechar el potencial de trabajo entre compañeros (Osalde, 2015) pues en todo momento se ayudaron, entre los compañeros, en las tareas. Podemos

avalar, como ya lo hacían Serrano y otros (1997) los beneficios de este tipo de metodología en el aula de matemáticas. Se apostó por las metodologías constructivistas, dando siempre mayor peso a la intuición frente a la memorización, por medio de un descubrimiento guiado y autónomo (Díaz y Hernández, 2002). Se formalizó una propuesta didáctica no fundamentada en clases magistrales pero tampoco en un ambiente totalmente autónomo (Salinas, s.f.).

Se trabajó desarrollando estas metodologías por medio de la creación de nuevos escenarios donde estuviesen presentes las TIC (capítulo 2). Nuestra intención es preparar a los jóvenes para las nuevas realidades educativas. Pues, como indica Prendes (2005), el porcentaje de cursos realizados a través de la red es todavía bajo (pero el tiempo empleado en internet es muy elevado). Como ya indicaba Jarret (1998), cuando estas se integran en el proceso de enseñanza-aprendizaje se ha de cambiar el enfoque de la enseñanza, dándole el ya expuesto con las metodologías mencionadas. Gracias a la reflexión, tras la investigación, podemos afirmar que se logró construir una enseñanza que el alumno no recibía como una obligación (García y Beltrán, 1988), y que se sentían afortunados de poder estar viviendo esta experiencia. Ha quedado demostrado que la intervención con las TIC en nuestra práctica educativa ha arrojado beneficios en el proceso de enseñanza-aprendizaje (Aguilar y Marchena, 2015) y que en concreto con las aplicaciones de Geogebra los discentes han podido ver, comprobar, investigar... como ya indicaba Muñoz (2016), destacando que el hecho de usar manipulativos en matemáticas nos ha ayudado mucho, pero que no ha sido el único recurso utilizado, siguiendo la idea expuesta por Hitt (2003) sobre “papel, lápiz y tecnología”. De entre las muchas ventajas que hemos encontrado, podemos señalar el aumento de la motivación y de la comprensión (Deci 1975; Lepper, 1983; Parzys, 1999, Yerushalmy et al. 1999;). Al implementar las TIC se ha demostrado que los alumnos han construido los conceptos mientras procesaban sus experiencias ante el ordenador, a través del enseñó-error, característica fundamental señalada por Dienes (1987). Esta innovación educativa, por medio de las TIC, ha ayudado a la atención a la diversidad, al poder llevarse distintos ritmos de aprendizaje y poder, cada alumno, trabajar cuantas veces sea necesario con todos los recursos existentes (Barroso, 2007; Marcheni y Marín, 2003).

Se entrelazaron los conceptos matemáticos (Amos, 1983; Dimova, 1981 y Pribram, 1991), para que se pudiesen ver las relaciones que se dan entre las distintas partes de esta disciplina. Se realizó la propuesta didáctica con las indicaciones de Romero y Quesada (2014). Es decir, se conectó el estudio de las rectas con el de los sistemas, manteniendo la idea de aprendizaje constructivista y fomentando, de este modo, el aprendizaje significativo. La investigadora comprobó que la planificación de la docencia teniendo en cuenta el aprendizaje significativo requiere mucho tiempo (Baroody, 1997), tanto para su preparación docente como para que el estudiante desarrolle su competencia de aprender a aprender (Díaz y Hernández, 2002)

Nuestros estudiantes se encontraban en la etapa de las operaciones formales (Ginsburg y Oppen, 1982) y comprobamos que eran capaces de

desarrollar el pensamiento abstracto, trabajándolo por medio del razonamiento lógico de forma inductiva y deductiva siendo el propio alumno el que realizase dicho trabajo (Kitchener, 1986). De esta forma, como indicaba Chamorro (1992), se les ha preparado para la vida, al enseñarles a pensar y no simplemente a reproducir patrones estudiados, dejando el profesor actuar a los discentes con mayor libertad (Cabo y Moida, 2014).

A partir de la representación icónica (Bruner, citado por Godino, et al. 2003) se constató lo dicho por Boaler (s.f.), opinando que la visualización en las clases de las matemáticas (capítulo uno) ha sido fundamental para el entendimiento de la parte de los sistemas lineales, estando, de este modo, en la misma línea de pensamiento que los trabajos presentados por Presmeg (s.f.) así como los de Radrod, Bardini, Sabena, Diallo y Simbogoye (2005), Kanduz y Strässer (2004), entre otros. Además, hemos trabajado por medio de recursos dinámicos llegando a la misma conclusión que la expuesta por Joubert (2008), al llegar a una comprensión mayor por medio del mismo. Es cierta, en nuestro estudio, la idea expuesta por Rosich et al. (1996) que indicaban que también se puede lograr el aprendizaje sin el apoyo visual pero que entonces este sería más costoso, como ocurrió cuando se implementó la misma propuesta didáctica sin los recursos visuales, pero con las nuevas metodologías programadas. De esta forma, se confirmó que los laboratorios virtuales potencian la formulación de conjeturas y hacen que la comprensión sea mayor, dándose un mayor aprendizaje significativo (Romero, 2014; Valverde et al. 2010). En los cursos escolares donde no se trabajó por medio de las TIC (antes de nuestra investigación así como durante la misma, en uno de los cursos escolares) los resultados, en cuanto a aprendizaje significativo se refieren, fueron peores.

Todo lo expuesto se desarrolló por medio de un entorno flexible en donde, implementando un modelo b-learning (González, 2011), se han potenciado las características positivas de la enseñanza tradicional junto con las que posee el e-learning. Era conveniente, para un mayor aprovechamiento de los recursos TIC, una plataforma virtual (Córdoba et al. 2015), cuyos beneficios fueron los señalados por Juárez et al. (2003), Navarro (2004): eliminación de las distancias físicas, la disposición de los recursos on-line multimedia, el desarrollo de la autonomía... De los distintos modelos de aprendizaje citados por Prendes (2009), el uso de la plataforma por parte de los profesores es para la distribución de materiales y para la realización de actividades, sean individuales y/o grupales obligatorias, fomentando el trabajo colaborativo, también de forma obligatoria.

Se tuvo siempre presente, para el diseño y la elección de los recursos así como de la plataforma, las características propuestas por Marquès (1999, 2000), Morales et al... (s.f.), entre otros. Estas fueron: el planteamiento pedagógico, la bidireccionalidad, la calidad del entorno visual y auditivo, la calidad y cantidad de los contenidos, las actividades instructivas, la facilidad de uso, la ausencia de publicidad, la reusabilidad, la significatividad lógica del conjunto presentado. De igual modo se cumplió con lo anunciado en el apartado del diseño de experiencias educativas con TIC, en el capítulo tercero de nuestra

investigación. Es decir, se buscó un material que liberase al alumno de cálculos tediosos, que hiciese representaciones gráficas, sin que fuese complicado en cuanto a su funcionamiento, que crease espacio para el debate y que retroalimentase el trabajo del alumno.

En relación de modo más concreto con los resultados obtenidos tras la recogida de datos y su análisis (detallados en el capítulo cinco), se ponen de manifiesto las siguientes evidencias. Por una parte, nuestros resultados en general están en concordancia con los obtenidos por Escobar (2016), Cuesta et al. (2015), Morales et al. (2015) y López (2003). Señalamos aquellas afirmaciones sobre el trabajo por medio de las TIC que nuestro estudio también ha constatado:

- Se ha creado un escenario de aprendizaje.
- Se ha fomentado la interactividad entre los discentes.
- Los programas informáticos nos han transformado nociones abstractas en modelos figurativos, facilitando su aprendizaje y comprensión.
- El uso de ordenadores en la escuela ha aproximado el entorno escolar a otros entornos del alumno, facilitando la transferencia de aprendizajes de unos contextos a otros.
- Los procesos formativos han sido más abiertos y flexibles, pudiéndose recapacitar más sobre las ideas trabajadas.
- El proceso de enseñanza-aprendizaje ha sido más personalizado.
- Los alumnos han interactuado con la información.
- Han facilitado la formación permanente durante toda la unidad formativa, ya sea de manera síncrona o asíncrona.
- Han hecho que el interés y la motivación de los alumnos aumentase.
- El acceso a la información es más ágil y rápido pudiéndose interactuar con repositorios de conocimientos.

En referencia a las conclusiones aportadas por Barroso (2009), nuestro trabajo ha llegado a las mismas, respecto de las siguientes afirmaciones:

- Han ofrecido ambientes enriquecidos para la experimentación.
- Han potenciado el aprendizaje por descubrimiento.
- Se ha visto incrementada la autonomía de los discentes.

Las ideas expresadas por Marquès (s.f.,b) sobre el software en educación han sido las mismas que las que se han puesto de manifiesto en nuestro trabajo durante la implementación de medios TIC de la propuesta didáctica, desarrollándose por medio de éstos (como indica dicho autor) la función instructiva, la motivadora, la investigadora y la diversificadora.

También indicamos que los medios tecnológicos han hecho que gran parte de nuestros discentes superen la resistencia que mostraban a la reflexión y asimilación de esta materia, como ya demostraba García (2013).

La comunidad virtual y las estrategias colaborativas han contribuido en la formación (Martínez y Prendes, 2008) aunque han sido un medio, no un fin (Prendes, 2006).

Whitin (1989) también destacaba que el uso de las TIC fomenta que el alumno aprenda más, al explicar, al resto de la comunidad educativa de su entorno, los procesos seguidos y al favorecer la participación y el aprendizaje comunitario. Con estas afirmaciones estamos de acuerdo. Con la que presentamos cierta confrontación es con la idea de que siempre se fomenta la confianza del alumnado, pues nos hemos encontrado con algunos casos que no se sentían seguros delante del ordenador.

Hay otra conclusión con las que no podemos decir que nuestro trabajo mantenga su línea. De entre las señaladas por Escobar (2016), Cuesta et al. (2015), Morales et al. (2015) y López (2003) comentamos:

- El incremento de la comunicación no se ha dado en referencia, sobre todo, a la que se establece entre el profesor y el alumno. La que se da entre los discentes, el uso de las TIC han hecho que se comunicasen más entre ellos, pero no por medio del canal o de las TIC.

Es debido a que no se utilizaron los recursos que tenía la plataforma para tal fin.

Centrándonos en los resultados aportados por Gómez (2002) sobre los trabajos colaborativos, los presentados en su informe y en el nuestro son muy parecidos, destacando que nosotros sí hemos tenido alumnos que no han contestado a alguna de las preguntas. Observamos una desviación en cuanto a que en la investigación presente se ha obtenido un porcentaje mayor de alumnos que no les ha gustado trabajar de manera colaborativa, pero están muy por debajo de los que respondían que sí. Este hecho no se daba en la de Gómez (2002) en el que el porcentaje de respuestas que señalaban que les había gustado más era muy superior al nuestro.

Por último hacemos referencia al doctorado de Reverte (2014). En su tesis señala que un porcentaje de aproximadamente el 60% de alumnos no había utilizado los entornos durante su investigación, en cambio en nuestro estudio casi ningún alumno o ninguno (dependiendo del año académico de la implementación) no han usado la plataforma y los recursos digitales. Sí que mantenemos la información sobre los tiempos dispares que los alumnos han utilizados las TIC propuestas. También mantenemos la concordancia en referencia a:

- Satisfacción general de los alumnos del uso del ambiente enriquecido mediante TIC.
- Deseo, por parte de los alumnos, de implementar este tipo de enseñanza en otros momentos de su proceso de e-a.
- Afirmación de los estudiantes sobre que el material TIC del que han podido disponer les ha ayudado a repasar los contenidos trabajados.

4. LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN.

Al valorar los resultados hemos de tener en cuenta que la experiencia fue tan solo para una unidad formativa, por lo que quizá resulta algo limitada en el tiempo.

Una de las mejoras que se podría llevar a cabo es en referencia a la aplicación Geogebra, en donde el discente pueda mover las rectas directamente sin tener que cambiar los coeficientes, es decir, que el proceso sea también inverso, en la actualidad cambias los coeficientes y se modifica la recta.

Otro de los procesos que se pueden mejorar es aquel que se podría desarrollar en relación al grupo de discusión referente a la “encuesta final”. Se considera que sería más apropiado hacerlo por medio de un cuestionario. Además, se podría ampliar el número de respuestas, incluso se cree oportuno que se fusionase en uno solo junto con el que se desarrolló tras la “implementación de la propuesta didáctica”.

Destaca, como gran deficiencia, que en la actualidad el uso de Java está cayendo en desuso, lo que hace que algunas máquinas presenten problemas en el uso de algunos de los materiales utilizados. Señalar que Geogebra ya oferta al mercado, una versión para “android”, que abre un gran abanico para que el discente pueda trabajarla desde los dispositivos actuales.

Señalar que no se pusieron en práctica todas las herramientas que ofrece Moodle. Es el caso de los foros, que no se abrieron para que los alumnos pudiesen trabajar de manera colaborativa entre ellos. El motivo de que se quedaran sin uso, fue que en el diseño de la investigación no se llegó a plantearlos.

En referencia a las limitaciones de la investigación, también se pueden señalar las propias de un estudio de casos. Por ejemplo, no se pueden extrapolar los datos (aunque no era nuestro objetivo), dado que todos los individuos no actúan de manera igual, cada niño tiene sus conductas, sus procesos...

5. FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN.

Tras el término de la presente investigación sería conveniente estudiar, en trabajos posteriores, si los cambios de la actitud de los discentes y en los aprendizajes que se han desarrollado, junto a todas las peculiaridades que hemos observado, son debidos al efecto novedad-motivación, y si este interés mostrado por ellos, también en los grupos de discusión, decrece a lo largo de más experiencias de la misma índole o de mayor duración en el tiempo.

En un principio, la investigación se deseó que fuese más ambiciosa, proponiendo también el idear un juego, basado en las TIC, para el aprendizaje de las matemáticas. Finalmente, se focalizó de manera más concreta, limitándose al estudio desarrollado. La idea de sustentar, por medio de un marco teórico, el aprendizaje a través del juego, en este caso electrónico, continúa seduciendo a la investigadora. Tras esta primera parte, el diseño, la creación y la implementación de la experiencia, podría ser un gran estudio para la rama del saber y de esta ciencia. Indispensablemente, para poder programar aplicaciones distintas y que una sola fuese el hilo conductor de todas ellas, sería necesario una mayor formación en programación.

Se ha dejado abierta otra línea de investigación, ya no relacionada con las TIC sino con las capacidades cognitivas que posee un alumno y el desarrollo de sus destrezas en la clase de matemáticas, que sin duda podría ampliarse por medio del estudio durante más cursos, así como concretando cada capacidad cognitiva con una rama de las matemáticas.

6. REFLEXIONES PERSONALES.

En primera persona expreso que llevar a cabo esta experiencia ha sido muy positivo, tanto en el terreno personal como en el laboral, pues se ha comprobado cómo el gran esfuerzo que se hacía era seguido por los alumnos que, de manera muchas veces inconsciente, iban aumentando su motivación y su interés por las matemáticas. Hemos observado que al incorporar de forma organizada y planificada las TIC hemos conseguido, entre otros aspectos, que los alumnos presenten una gran disposición del trabajo en el aula y también que trabajen de manera reflexiva usando la lógica y el razonamiento y no sólo los procesos memorísticos.

BIBLIOGRAFÍA

- Aliaga, J. y Pecho J. (2000). Evaluación de la actitud hacia la Matemática en estudiantes secundarios. *Revista Paradigmas*.
- Alsina C. Burgués C. y Fortuny J. (1988). *Materiales para construir la geometría*. Madrid. Síntesis
- Amos J. (1983). *Didáctica Magna*. La Habana. Pueblo y Educación.
- Aragón J. (2001) *Psicología I año E.M.D.P*. Ediciones CO-BO. Caracas. Venezuela.
- Arnal, J., del Rincón, D. y Latorre, A. (1992). *Investigación educativa. Fundamentos y metodología*. Barcelona. Labor.
- Astolfi J.P. (1999). *El error un medio para enseñar*. Colección: investigación y enseñanza nº 15. Sevilla. Editorial Diada.
- Ausubel D, Novak P y Hanesian J.D. (1989). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*. México. Editorial Trías. Traducción al español, de Mario Sandoval P., de la segunda edición de *Educational psychology: a cognitive view*.
- Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitarias*. Bilbao. Mensajero.
- Baroody, J. (1997). *Técnicas para contar, Desarrollo del número y Aritmética informal, en el pensamiento matemático de los niños. Un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial*, Genís Sánchez Barberán (trad.), 3ª ed., Madrid, Visor (Aprendizaje, 42), pp. 87-106, 107-126 y 127-148.
- Barroso J. Cabero J. (2010). *La investigación educativa en TIC. Visiones prácticas*. Madrid: Síntesis
- Bell A. (1976). *The Learning of General Mathematical Strategies*. Doctoral Dissertation. Shell Center for Mathematical Education. University of Nottingham.
- Bell E.T. (2004). *Historia de las matemáticas*. Fondo de cultura económica. USA.
- Boears Van Oosterum (1990) *Understanding of variables and their uses acquired by students in traditional and computer intensive Algebra*. Ph D. diss. University of Maryland College Park.
- Bronowski J (1990). *Science and Human Values*. Nueva York: HarperCollins Publishers Inc.
- Brown J. (1982). *Diagnostic Models for Procedural Bugs in Basic Mathematics Skills*. *Cognitive Science* 2.
- Buendía, L., Colás, P. y Hernández, F. (1998). *Métodos de Investigación en Psicopedagogía*. Madrid: McGraw-Hill
- Cabezas M, Casillas S y Hernández A. (2016) *A Case Study on Computer Supported Collaborative Learning in Spanish Schools*. *Journal of Information Technology Research (JIRT)* 9 (2), 89-102.

- Carrillo B. (2009). Dificultades en el Aprendizaje Matemático. Revista Digital: Innovación y Experiencias Educativas. Nº 16 Marzo 2009.
- Carrillo M. (2012). Uso de las nuevas tecnologías para la mejora de la enseñanza de álgebra en 3º de la ESO. Universidad de las Islas Baleares. Trabajo fin de máster universitario de tecnología educativa: elearning y gestión del conocimiento. Documento inédito.
- Castro, E. (2001). Didáctica de las matemáticas en Ed. Primaria. Madrid. Síntesis.
- Chamorro C. (1992). El Aprendizaje Significativo en el Área de Matemáticas. Madrid. Pearson Educación.
- Chamorro M.C. (2011). Didáctica de las Matemáticas para Primaria. Madrid: Pearson.
- Colás M.P. y Buendía, L. (1994). Investigación educativa. Sevilla. Alfar.
- Coll C., Marchesi A y Palacios J.(1992) Desarrollo Psicológico y Educación. Madrid. Alianza Editorial.
- Deci, E.L. (1975). Intrinsic motivation. New York: Plenum Press.
- Di Blasi Regner, M. y Otros (2003). Dificultades y Errores: Un estudio de caso. Comunicación breve presentada en el II Congreso Internacional de Matemática Aplicada a la Ingeniería y Enseñanza de la Matemática en Ingeniería (Buenos Aires, Diciembre 2003).
- Díaz V. (1994) Una Evaluación de la Resolución de Tipos de Problemas en Cálculo Diferencial. Tesis de Magister. Universidad de Playa Ancha de Ciencias de la Educación. Chile.
- Díaz F. y Hernandez G. (2002). Estrategias Docentes para un aprendizaje significativo: Una interpretación Constructivista. México D.F. McGrawHill
- Dienes Z (1987). Selective Attention. Relevance to hypnosis and hypnotizability. Thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for Master of Arts (Hons), School of Behavioural Sciences. Australia. Macquarie University.
- Dimova, V. (1981). La organización óptima del contenido de la enseñanza, en Dimova, Venera; Malamov, Dobromir, y Chalykov, Venelin: Revista La Educación Superior Contemporánea, 4 (36) Pp. 165-177
- Dunham y Dick (1994). Research on Graphic Calculators. Mathematics Teacher. 87 (6). Pp. 440-445.
- Eisenberg, T. (1994). On understanding the reluctance to visualize. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 26(4), 109-113.
- Eisenberg y Dreyfus (1990). On the reluctance to visualize in Mathematics. In visualization in Teaching and Mathematics. (Zimmermann W. & Cunningham S. Editors), MMA Series. USA
- Elliot, J. (1990). La Investigación-Acción en Educación. Madrid. Morata.
- Fernández M.F, Llopis A.M. Pablo C.(1979): Niños con dificultades para las matemáticas. CEPE. Madrid
- Freudenthal, H.(1991). Revisiting Mathematics Education. Kluwer Academic Publishers.
- Gallego D. y Peña A. (2011). Las TIC en geometría. Una nueva forma de enseñar. Sevilla. Eduforma.
- García M. y Puig M. (1997). Aprender a cooperar: Enseñanza Primaria. Dialnet. Cuadernos de pedagogía. Nº263. Universidad de La Rioja. Pp 62-65
- García, J. y Bertrán, C. (1988). Geometría y experiencias. Madrid: Editorial Alhambra.
- Gelman R. y Gallistel C.(1978). The Child's understanding of number. Cambridge, Mass: Harvard University Press.

- Ginsburg H. y Oppen S. (1982). Piaget y la teoría del desarrollo intelectual. Ed. Prentice.
- Gómez (2004). Análisis Didáctico y uso de tecnología en el aula de matemáticas. En Peñas M. Moreno A, Lupiáñez J.L: (Eds) Investigación en el aula de matemáticas: tecnologías de la información y la comunicación. Granada. SAEM Thales.
- Gómez S, García E, Masa C y Villar N. (2012). Los nuevos modelos de aprendizaje basados en tecnologías de información y comunicación en los grados de Administración y Dirección de Empresas y su aplicación en la Universidad CEU San Pablo. Revista de comunicación Vivat Academia febrero 2012. Pp. 629-642
- Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. Revista EMA, 7(3), pp. 251-193.
- Gómez, P. (2004). Análisis didáctico y uso de tecnología en el aula de matemáticas. En Peñas, M; Moreno, A.; Lupiáñez, J.L. (Eds.) Investigación en el aula de matemáticas: tecnologías de la información y la comunicación. SAEM Thales, Granada.
- Guárdia, L. (2000). El Diseño formativo: Un enfoque del diseño pedagógico de los materiales didácticos en soporte digital. En J. M. Duart y A. Sangrà (Comp.): Aprender en la virtualidad. Barcelona: GEDISA,
- Gutiérrez, G. y Beltramino, I.; Viano, I. (2015). Políticas de Formación Docente en TIC: La experiencia desde un sindicato docente (2000-2015). Virtualidad, Educación y Ciencia, 10 (6), pp. 24-37. Handbook of Research on Teacher Education. New York. MacMillan.
- Hernández, P (1990). Imagen y sonido. Madrid. Editorial Alhambra.
- Hernández F. y Soriano E. (1999). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria. Madrid. La muralla.
- Hopkins, D. (1989). Investigación en el aula. Guía del profesor. Barcelona. Promociones y Publicaciones Universitarias.
- James B, Alcott V. y Ruiz P. (2015). Sinopsis de Psiquiatría. Ed. Lippincott Williams and Wilkins Wolters Kluwer Health.
- Jarret J.A. (1998). A study of the differential effects of three levels of instruction in estimation on fifth and sixth grade pupils. (Doctoral dissertation, University of Iowa) Dissertation Abstracts International 41/04, 1452 A (DA8022038)
- Johnson y Johnson (1997). Joining Together. Group Skills. Needham Heights, MA: Allyn y Bacon.
- Kemmis y McTaggart (1988). Cómo planificar la investigación-acción. Barcelona. Laertes.
- Kieran C (1998). Complexity and Insight. Journal for Research in Mathematics Education, vol 29. 5. Pp 595-601.
- Kitchener (1986). Piaget's Theory of Knowledge. New Heaven. Yale University Press.
- Lepper, M. R. (1983). Extrinsic reward and intrinsic motivation: Implications for the classroom. In J. M. Levine & M. C. Wang (Eds.), Teacher and student perceptions: Implications for learning (pp. 281-317). Hillsdale, NJ: Erlbaum
- López P. y Prendes M.P. (2013). Espacios virtuales colaborativos en la enseñanza secundaria: evaluación de la plataforma Eduagora. Aula Abierta Vol 41, número 3, pp 61-78. ICE. Universidad de Oviedo.
- Lupiáñez J.L. y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. PNA, 3(1), pp. 35-48.
- Mañas (s.f.). Asignatura: Delincuencia y responsabilidad moral del menor.

- Marchesi, A. y Martín, E. (eds.) (2003). Tecnología y aprendizaje. Investigación sobre el impacto del ordenador en el aula. Madrid: Editorial SM.
- Marín (2007). Contar las matemáticas para enseñar mejor, *Matematicalia: revista digital de divulgación matemática de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 3, Nº. 4-5.
- Marín, N., Benarroch, A. Y Jiménez Gómez, E. (2000). What is the relationship between Social Constructivism and Piagetian Constructivism? An analysis of the characteristics of the ideas within both theories. *International Journal of Science Education*, 22(3), pp. 225-238
- McKernan, J. (1999). Investigación-acción y currículum. Madrid, Morata.
- McNiff, J., (1992). Action research: principles and practice. Cánada. Routledge.
- Méndez D y Méndez M. (2014). El profesorado de ciencias y matemáticas y la comunicación a través de las TIC. *Historia y Comunicación Social*. Vol. 19. Núm. Especial enero. Págs. 315-326.
- Millis J. (1996). Materials presented at the University of Tennessee at Chattanooga Instructional Excellence Retreat.
- Morales M., Trujillo J.M, y Raso F. (2015). Percepciones acerca de la integración de las TIC en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la universidad. *Píxel-Bit. Revista de Medios y Educación*. Nº 46. Enero 2015. pp 103-117.
- Muñoz J.M. (2016). Encuentro Enseñar matemáticas con GeoGebra. *Entorno abierto*, 8, 6-7.
- Nardi, E. & Iannone, P. (2003). Mathematicians on concept image construction: Single 'landscape' vs 'your own tailor-made brain version'. In N. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zillox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference*, 3, 365-372.
- NCTM (National Council of Teacher Mathematics) (1991). Professional Standards for Teaching Mathematics. Reston, VA: Reston. Virginia.
- NCTM Nacional Council of Teacher Mathematics (2000). Principles and Standars for School Mathematics. Reston. Virginia. NCTM.
- Nelson K.E. (1977). Facilitating children's syntax acquisition. *Development Psychology* 13, 101-107.
- Olivares R. (2011). El juego de las siete notas. *Exedra: Revista Científica*, nº Extra 2, 289-308
- Oller A. M. (2012). Proporcionalidad aritmética: una propuesta didáctica para alumnos de secundaria, Tesis Doctoral, Universidad de Valladolid. Documento inédito.
- Parzysz, B. (1999). Visualization and modeling in problem solving: From algebra to geometry and back. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd. PME International Conference*, 1, 212-219.
- Peinado, P. y Navarro, D. (2014). Aumento de la motivación mediante el uso de redes sociales. *Didáctica, innovación y multimedia*, 29, 1-15
- Piaget J. (1969). *Psicología y Pedagogía*. Madrid. Ed. Crítica.
- Piaget, J. (1971). *Psicología de la inteligencia*. Buenos Aires: Psique.
- Pozo J.I. (2006). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Madrid: Morata.
- Pozo J.I. (2009). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Madrid: Morata.
- Pozo, J.I. (1989). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Madrid: Morata.
- Prendes M.P. (1998). Las imágenes en los libros de texto. *Comunicación y pedagogía. Nuevas tecnologías y recursos didácticos*. Nº151

- Prendes M.P. (2003). Trabajo colaborativo en espacios virtuales. Medios y herramientas de comunicación para la educación universitaria Panamá. Edutec. pp. 193-206
- Prendes M.P. (2005). Los nuevos medios de comunicación y el aprendizaje en colaboración. Aula Abierta. Volumen 84. 127-146.
- Prendes M.P. (2006). Herramientas para el trabajo colaborativo en red. Comunicación y Pedagogía. Volumen 21. 39-44. Barcelona.
- Prescott S (1996). Cooperative Learning and College Teaching Newsletter, 6.
- Pribram k.H.(1991). Brain and perception: holonomy and structure in figural processing. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.
- Puerto y Lilia (2004) Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. Revista Iberoamericana de educación.
- Race P. (1994). The open Learning Handbook. Kogan Page. London.
- Radatz H (1980). Students' errors in the mathematical learning process: a survey. For the Learning of Mathematics, V. 1, N° 1, pp. 16 – 20.
- Radford, L., Bardini, C., Sabena, C., Diallo, P., & Simbagoye, A. (2005). On embodiment, artifacts, and signs: A semiotic-cultural perspective on mathematical thinking. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), Proceedings of the 29thPME International Conference, 4, 113-120.
- Reigeluth Ch. M. y Frick, T. W. (1999). Investigación formativa: una metodología para crear y mejorar teorías de diseño. En C. M. Reigeluth (Ed.) Diseño de la instrucción. Teorías y modelos. Un nuevo paradigma de la teoría de la instrucción (Parte II, 181-100). Madrid: Aula XXI. Santillana.
- Reigeluth C. M., y Frick, T. W. (1999). Formative research: A methodology for creating and improving design theories», en C. M. Reigeluth (Ed.), Instructional design theories and models: A new paradigm of instructional theory, págs. 5 a 29. Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates.
- Relloso G. (2000). Psicología. Ediciones Cobo. Caracas.
- Reverte, J.M, (2014). Diseño, implementación y validación de un ambiente enriquecido con TIC para el aprendizaje del álgebra en 3º de ESO, Tesis Doctoral, Universidad Palma de Mallorca. Documento inédito
- Rico L. (1995). Conocimiento numérico y formación del profesorado. Universidad de Granada.
- Rico L. (1997). Bases Teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria. Síntesis. Madrid.
- Rico, L., Marín, A., Luipáñez, J.L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en Secundaria. El caso de los números naturales. Suma, 58, pp. 7-23.
- Rivière A. (1990). Problemas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: Una perspectiva cognitiva, capítulo 9, en Desarrollo psicológico y educación, III. Necesidades educativas especiales y aprendizaje escolar, pp 155-182. Editorial Alianza. Madrid.
- Romero J.F. y Lavigne (2005). Dificultades en el aprendizaje: unificación de criterios diagnosticados. Materiales para la práctica orientadora. Volumen 1. Junta de Andalucía. Consejería de educación. Dirección general de participación y solidaridad educativa.
- Romero M. y Quesada A (2014). Nuevas tecnologías y aprendizaje significativo de las ciencias. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas. Vol 32. N°1

- Rosich N., Nuñez J. M. y Fernández J. E. (1996). Matemáticas y deficiencia sensorial. Educación matemática en secundaria. Ed. Síntesis
- Ruiz J.M. (2008). Problemas actuales de la enseñanza aprendizaje de la matemática. Revista iberoamericana de Educación, nº47/3.
- Rusell y Ginsburg (1984). Cognitive Analysis of Children's Mathematics Difficulties. Gognition and Instruction. Pp 217-244
- Salinas J y Marín V.I. (2016). Trajectory of an Institutional PLE in Higher Education Based on an e-Portfolios System. Utilizing Virtual and Personal Learning Environments for Optimal Learning. Pp 132-156.
- Salinas J.(1994). Nuevas Tecnologías en la Formación Ocupacional: Perspectivas didácticas. Jornadas sobre Itinerarios de la formación hacia el futuro.
- Salinas, J. (2005). La gestión de los entornos virtuales de formación. Seminario Internacional: La calidad de la formación en red en el Espacio Europeo de Educación Superior. Tarragona, 19-22 septiembre.
- Sanabria, A. & Hernández, C.M (2011). Percepción de los estudiantes y profesores sobre el uso de las TIC en los procesos de cambio e innovación en la enseñanza superior. Revista de Psicología, 29, pp. 273-290.
- Sánchez (1996). Diccionario de la Filosofía. Madrid. Alderabán.
- Sánchez-López, M.C., García-Sánchez, F.A., Martínez-Segura, M.J. & Mirete Ruíz, A. (2012). Aproximación a la valoración que el alumnado hace de recursos online utilizados para la docencia universitaria. Píxel-Bit. Revista de Medios y Educación, 40, pp 35-45
- Santaella E., Pérez J.L., Contreras I, Pérez S., Uriondo J.L., Lobo B., Fernández I., García G. (2012). Matemáticas 2º ESO. Proyecto Adarve. Madrid. Oxford Educación.
- Santaella E., Pérez J.L., Contreras I, Pérez S., Uriondo J.L., Lobo B., Fernández I., García G.. (2011). Matemáticas 3º ESO. Proyecto Adarve. Madrid. Oxford Educación.
- Santaella E., Pérez J.L., Contreras I, Pérez S., Uriondo J.L., Lobo B., Fernández I., García G. (2012). Matemáticas 4º ESO. Opción A. Proyecto Adarve. Madrid. Oxford Educación.
- Santaló L.A.(1975). La Educación Matemática, Hoy. Ed.Teide.
- Santamaría P, Arribas D, Pereña J. y Seisdedos N. (2014). Evaluación Factorial de las Aptitudes Intelectuales (EFAI) Madrid. TEA Ediciones.
- Segura S.M. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: Una secuencia didáctica. Relime Vol.7 pp. 49-78
- Serrano, J.M. y otros (1997). Aprendizaje cooperativo en el aula de matemáticas. Murcia, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Murcia.
- Siegel, L. S., & Heaven, R. (1986). Categorization of learning disabilities. In S. J.Ceci (Ed.), Handbook of cognitive, social, and neurological aspects of learning disabilities (Vol. 1, pp. 229-238). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Siegel, L. S., & Ryan, E. B. (1989). Subtypes of developmental dyslexia: The influence of definitional variables. Reading and Writing, 1, 257-287.
- Skemp R.R. (1980). Psicología del aprendizaje de las matemáticas. Madrid: Editorial: Ediciones Morata.
- Skinner, B. F. (1957). Verbal behavior. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el enfoque Lógico Semiótico. Investigación en educación matemática XI, pp. 19-52.

- Stake, R. (1994). Case studies. En Denzin, N. y Lincoln, Y. (Eds.): Handbook of Qualitative Research. Sage Publications, California.
- Steiner, H. G., (1985). Theory of mathematics education (TME): An introduction. For the Learning of Mathematics, 5 (2)
- Tarpy (2000). Aprendizaje: Teoría e Investigación Contemporáneas. McGraw Hill.
- Threlfall J. y Pool P. (2007). Implicit aspects of paper and pencil mathematics assessment that come to light through the use of the computer. Matthew Homer and Bronwen Swinnerton Educational Studies in Mathematics Vol. 66, No. 3 (November, 2007), pp. 335-348
- Toeplitz (1963). The Calculus: A Genetic Approach.
- UNESCO (2001). Declaración Universal de la UNESCO sobre la Diversidad Cultural.
- UNESCO (2003). Aprender a vivir juntos: ¿hemos fracasado? UNESCO: Oficina Internacional de Educación.
- UNESCO (2005). Informe de Seguimiento de la Educación para Todos en el Mundo. El imperativo de la calidad.
- Valverde J.; Garrido M^a.C. y Sosa-Díaz, M^a.J. (2010). Políticas educativas para la integración de las TIC en Extremadura y sus efectos sobre la innovación didáctica y el proceso enseñanza-aprendizaje: la percepción del profesorado, Revista de Educación, 352, 99-124.
- Van den Akker (1999). Principles and methods of development research. In J. van den Akker, R. M. Branch, K. Gustafson, N. Nieveen, & T. Plomp (Eds.), Design approaches and tools in education and training (pp. 1–14). Boston: Kluwer Academic.
- Vera, J.A., Torres, L.E. & Martínez, E.E. (2014). Evaluación de competencias básicas en TIC en docentes de educación superior en México. Píxel-Bit. Revista de Medios y Educación, 44, 143
- Walker R (1992) Métodos de investigación para el profesorado. Técnicas de Evaluación. Morata
- Wang F. y Hannafin M.J.(2005). Design-based research and technology-enhanced learning environments. Educational Technology Research and Development. Vol.53 Pp.5-23
- Weist (2001) The role of computers in Mathematics teaching and learning. In Using Information Technology in Mathematics Education. Binghampton. Haworth Press.
- Whitin (1989)
- Yerushalmy, M., Shternberg, G., & Gilead, S. (1999). Visualization as a vehicle for meaningful problem solving in algebra. In O. Zaslavsky (Ed.), Proceedings of the 23rd PME International Conference, 1,197-211.
- Zabalza, M.A. (2008), Diarios de clase. Un instrumento de investigación y desarrollo profesional. Madrid: Narcea.
- Zemelman S, Danies H. y Hyde A.(1998). Best Practice: New Standards for Teaching and Learning in America's Schools. Heinemann Educational Books,U.S.
- Zimmermann, W. (1990). Visual Thinking in Calculus. In Visualization in Teaching and Mathematics (Zimmermann W. & Cunningham S. Editors), MAA, nº 19.

Fuentes electrónicas

- Anónimo (s.f) . Las estrategias y técnicas didácticas en el rediseño: Aprendizaje significativo, Universidad de Monterrey. Recuperado el 9 de Abril de 2016 de: http://sitios.itesm.mx/va/dide2/tecnicas_didacticas/ac/Colaborativo.pdf

- Abrate, R.; Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). Errores y dificultades en matemática. Recuperado el 17 de Mayo de 2016.
<http://unvm.galeon.com/Libro1.pdf>
- Acuña Castroviejo D.(2006) Informe Científico Sobre el Efecto de los Campos Electromagnéticos en el Sistema Endocrino Humano y Patologías Asociadas. Recuperado el 15 de agosto de 2014 de:
<http://cuadrodemandando.unizar.es/informesp.pdf>
- Alonso M^aC (2011) Variables del aprendizaje significativo para el desarrollo de las competencias básicas. Recuperado el 15 de septiembre de 2016 de
<http://www.aprendizajesignificativo.es/mats/Variables%20del%20aprendizaje%20significativo%20para%20el%20desarrollo%20de%20las%20competencias%20basicas.pdf>
- Alonso L. Gutiérrez P. Yuste R. Arias J. Cubo S. y Diogo A. (2014). Usos de aulas virtuales en educación superior. Píxel-Bit. Revista de Medios y Educación. N^o 45. pp 203-215. Recuperado el 16 de noviembre de 2014 de
<http://www.redalyc.org/pdf/368/36831300013.pdf>
- Álvarez, S., Cuéllar, C., López, B., Adrada, C. Anguiano, R., Bueno, A., Comas, I. & Gómez, S. (2011). Actitudes de los profesores ante la integración de las TIC en la práctica docente. Estudio de un grupo de la Universidad de Valladolid. EDUTEC, Revista Electrónica de Tecnología Educativa, 35. Recuperado el 15 de Mayo de 2016
http://edutec.rediris.es/Revelec2/Revelec35/pdf/Edutec-e_n35_Alvarez_Cuellar_Adrada_Anguiano_Bueno_Comas_Gomez.pdf
- Antoraz (2015) ¿Cómo Mantener al Alumnado Motivado? Uso de las Tic en el Aula E/Le: “Blendspace y Goanimate” Recuperado el 15 de agosto de 2014 de:
http://cvc.cervantes.es/ensenanza/biblioteca_ele/aepe/pdf/congreso_49/congreso_49_13.pdf
- Area M y Adell J (2009) e-Learning: Enseñar y Aprender en Espacios Virtuales. Recuperado el 10 de marzo de 2016 de:
<http://tecedu.webs.ull.es/textos/eLearning.pdf>
- Arias (2013) Construcciones dinámicas con GeoGebra para el aprendizaje-enseñanza de la matemática. Recuperado el 20 de Agosto de 2012 de:
<http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/297-547-1-DR-T.pdf>
- Ballestas M^a F. y Monsalve C.O. (2014) Influencia de las TIC'S como estrategia didáctica en la motivación interna de los estudiantes. Universidad del Atlántico. Barranquilla. Recuperado el 16 de noviembre de 2015 de
<https://es.slideshare.net/MafesitaPortillo/proyecto-carlos-y-mafe-final-pdf>
- Barab S y Squire K. (2004) Design-Based Research: Putting a Stake in the Ground. Recuperado el 20 de Agosto de 2012 de:
<https://website.education.wisc.edu/kdsquire/manuscripts/jls-barab-squire-design.pdf>
- Barroso, C (2007). Con el ordenador también aprendemos. Recuperado el 20 de Agosto de 2012 de:
http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_19/CARLOS_BARROSO_2.pdf
- Barroso, C (2009). Con el ordenador también aprendemos. Recuperado el 20 de Agosto de 2012 de:
http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_19/CARLOS_BARROSO_2.pdf

- Bartolomé, A. (2004). La red como instrumento de formación. Blenden learning. Conceptos básicos. Recuperado el 16 de Septiembre de 2016: http://www.sav.us.es/pixelbit/pixelbit/articulos/n23/PIXEL_BIT_23.pdf
- Bazán, J.L., Espinosa, G. y Farro, Ch. (2001). Rendimiento y actitudes hacia la Matemática en el sistema escolar peruano. Recuperado el 21 de marzo de 2013 de <https://www.ime.usp.br/~jbazan/download/13c.pdf>
- Belloch C (s.f.) Las Tecnologías de la Información y Comunicación en el Aprendizaje. Recuperado el 21 de marzo de 2013 de <http://www.uv.es/bellochc/pedagogia/EVA1.pdf>
- Belloch (2013). Evolución TIC. Recuperado el 10 de marzo de 2016 de: <https://prezi.com/epiiuhta13yk/evolucion-tic/>
- Bedoya E. (2002). Formación inicial de profesores de Matemáticas: La Enseñanza de funciones, sistemas de representación y calculadoras graficadoras. Tesis Doctoral, Universidad de Granada. Recuperado el 21 de marzo de 2016 de http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/ver_detalle/5501/descargar/
- Bracho R. (2007). Metamorfosis matemática en la aventura TIC andaluza. Recuperado el 20 de Abril de 2012 de: <http://es.scribd.com/doc/45006510/revistaN%C2%BA-09>
- Boaler J, Chen L, Williams C Cordero M (s.f.). Seeing as Understanding: The Importance of Visual Mathematics for our Brain and Learning. Recuperado el 15 de septiembre de 2016 de: <https://bhi61nm2cr3mkgk1dtaov18-wpengine.netdna-ssl.com/wp-content/uploads/2016/04/Visual-Math-Paper-vF.pdf>
- Bossolasco y Storni (2012). ¿Nativos digitales? Una reflexión acerca de las representaciones docentes de los jóvenes –alumnos como usuarios expertos de las nuevas tecnologías. Recuperado el 14 de Junio de 2016. <http://www.um.es/ead/red/30/bossolasco.pdf>
- Broitman, C; Itzcovich, H. (2001). Orientaciones didácticas para la enseñanza de la geometría en E.G.B. Recuperado el 21 de marzo de 2016 de: <http://servicios2.abc.gov.ar/docentes/capacitaciondocente/plan98/pdf/geometria.pdf>
- Brousseau (1998). Théorie des Situations Didactiques, Grenoble, La Pensée Sauvage. Recuperado el 10 de Febrero de 2016: <https://educationdidactique.revues.org/1005>
- Calderone M y González A.(2016) Materiales didácticos. Una metodología para su producción en la era de las TIC. Recuperado el 10 de Febrero de 2017 <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/vesc/article/view/16204/16081>
- Carvajal A. (2009). II Jornada Documat: digitalizaciones y documentación matemática (26-11-2009) Recuperado el 10 de marzo de 2016 de: <http://eprints.ucm.es/9745/>
- Castañeda, L. y López, P. (2007). Entornos virtuales de Enseñanza Aprendizaje Libre: Moodle para profesores. Recuperado el 25 de Abril de 2012, de: <http://digitum.um.es/xmlui/bitstream/10201/13417/1/moodle.pdf>
- Castro E. (1994). Exploración De Patrones Numéricos Mediante Configuraciones Puntuales. Estudios con Escolares de Primer Ciclo de Secundaria (12-14 años) Tesis Doctoral. Universidad de Granada. Recuperado el 25 de febrero de 2016. <http://digibug.ugr.es/handle/10481/25009#.WNRoCTs1-Uk>

- Chiarani M.(2016). Promover los Recursos Educativos Abiertos desde la Universidad Pública. Recuperado el 20 de mayo de 2016 de:
<http://docplayer.es/31883730-Promover-los-recursos-educativos-abiertos-desde-la-universidad-publica.html>
- Cobb P, Confrey J, DiSessa A, Lehrer R. y Schauble L. (2003). Design Experiments in Educational Research. American Educational Research Association. Recuperado el 10 de septiembre de 2016 de:
<http://journals.sagepub.com/doi/abs/10.3102/0013189X032001009>
- Cobo P. y Molina M.A. (2014). ¿Pueden nuestros estudiantes construir conocimientos matemáticos? Recuperado el 20 de marzo de 2016 de:
http://www.sinewton.org/numeros/numeros/85/Articulos_04.pdf
- Colegio Hispania. Portal educativo del Colegio Hispania de Cartagena. Centro concertado en Educación Infantil, Primaria y Secundaria Obligatoria y privado de Bachillerato.
www.colegiohispania.net
- Collazos C, Guerrero L y Vergara A (s.f.) Aprendizaje Colaborativo: un cambio en el rol del profesor. Recuperado el 20 de mayo de 2016 de:
https://www2.sepdf.gob.mx/proesa/archivos/proyectos/guia_general/aprendizaje_colaborativo.pdf
- Collins A, Joseph D & Bielazac K. (2004) Design Research: Theoretical and Methodological Issues. Journal of the Learning Sciences. Recuperado el 25 de Abril de 2012 de:
http://dx.doi.org/10.1207/s15327809jls1301_2
- Coll C. (2008) Aprender y enseñar con las TIC: expectativas, realidad y potencialidades. Boletín de la Institución Libre de Enseñanza. N°72 Pp.17-40. Recuperado el 10 de noviembre de 2016.
<https://www.educ.ar/recursos/70819/aprender-y-ensenar-con-las-tic-expectativas-realidad-y-potencialidades>
- Coloma C.R. y Tafur R. (1999). El Constructivismo y sus Implicancias en Educación. Recuperado el 25 de Abril de 2012 de:
<https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5056798.pdf>
- Córdoba J.M, René R. y Cortez J. (2015). Desempeño del trabajo en equipo y plataformas virtuales educativa. Recuperado el 14 de Junio de 2016.
<http://produccioncientificaluz.org/index.php/opcion/article/view/20651/20555>
- Cuesta H. Aguiar M.V. Marchena M.R (2015). Desarrollo de los razonamientos matemático y verbal a través de las TIC: Descripción de una experiencia educativa. Píxel-Bit. Revista de Medios y Educación. N° 46. Enero 2015. Pp 39-50. Recuperado el 10 de febrero de 2016 de:
<http://acdc.sav.us.es/pixelbit/images/stories/p46/03.pdf>
- Decreto n.º 220/2015, de 2 de septiembre de 2015, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia. Recuperado el 10 de febrero de 2016 de:
<http://www.borm.es/borm/documento?obj=anu&id=735576>
- Dettori (s.f.) Introducing ICT in Mathematics Education: Prospects for Curriculum Revision and Teacher Training. Recuperado el 14 de Noviembre de 2016.
https://www.researchgate.net/publication/235887914_Introducing_IT_in_mathematics_education_Prospects_for_curriculum_revision_and_teacher_training
- Díaz, F. y Hernández, G. (2002). Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista. Segunda edición. México: Mc Graw Hill.0 Recuperado el 14 de Noviembre de 2014.

- <https://jeffreydiaz.files.wordpress.com/2008/08/estrategias-docentes-para-un-aprendizaje-significativo.pdf>
- Domínguez G, Jaén A. y Ceballos M.J.(2017). Educar la virtualidad. Recuperado el 10 de Febrero de 2017
<http://acdc.sav.us.es/ojs/index.php/pixelbit/article/view/896/814>
- Edelson D.C. (2002). Design Research: What We Learn When We Engage in Design. The Journal of the Learning Sciences, Vol.11 No. 1 Pp.105-121. Recuperado el 14 de enero de 2015.
https://www.jstor.org/stable/1466722?seq=1#page_scan_tab_contents
- Elber J.(2010). Estimulación Cognitiva. Recuperado el 14 de octubre de 2015.
<https://es.scribd.com/doc/57146952/Libro-Estimulacion-Cognitiva-Completo>
- Fernández I.(2010). Matemáticas en Educación Primaria. Revista Digital Eduinnova. Recuperado el 10 de febrero de 2016 de:
<http://www.eduinna.es/sep2010/09matematica.pdf>
- Engler A, Gregorini M^a I, Muller D, Vranken S. y Hecklein M. (s.f.) Los Errores en el Aprendizaje de la Matemática. Recuperado el 14 de Noviembre de 2016.
<http://www.soarem.org.ar/Documentos/23%20Engler.pdf>
- Escobar Y. (2016). Las tic en los procesos de enseñanza de los docentes de la institución educativa Antonio Roldán Betancur del municipio de Briceño (Antioquia). Recuperado el 3 de Enero de 2017.
<https://repository.upb.edu.co/bitstream/handle/20.500.11912/2919/Informe%20Final%20YONEISER%20DAVID%20ESCOBAR.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Feliz, T. (2012). Análisis del contenido de la comunicación asíncrona en la Educación Universitaria. Recuperado el 14 de Noviembre de 2015 de:
<http://www.mecd.gob.es/dctm/revista-de-educacion/articulos-re358/re35814.pdf?documentId=0901e72b8128267e>
- Ferrer S. (s.f.) Teorías del Aprendizaje y TICs. Recuperado el 10 de septiembre de 2016 de:
<http://ardilladigital.com/DOCUMENTOS/TECNOLOGIA%20EDUCATIVA/TICs/T4%20TEORIAS/04%20TEORIAS%20DEL%20APRENDIZAJE%20Y%20TICs.pdf>
- Fornons y Palau (2016). Flipped Classroom en la asignatura de matemáticas de 3^o de Educación Secundaria Obligatoria Edutec-e. Recuperado el 15 de enero de 2017 de:
<http://www.edutec.es/revista/index.php/edutec-e/article/view/284>
- García C, J.A. (s.f). La didáctica de las Matemáticas: una visión general. Recuperado el 25 de Abril de 2012, de:
<http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/rtee/didmat.htm#inicio>
- García, M^a.T. (2013). El aprendizaje cooperativo en matemáticas en los dos primeros cursos de la ESO. Recuperado el 14 de septiembre de 2015 de:
http://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/1723/2013_03_04_TFM_ESTUDIO_DEL_TRABAJO.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- García J.A. (1992) Aprendizaje por descubrimiento frente a aprendizaje por recepción: la teoría del aprendizaje verbal significativo. Recuperado el 14 de Noviembre de 2015 de:
<http://didacticaeduinf2014.blogspot.com.es/2014/02/aorendizaje-por-descubrimiento-frente.html>
- García M. (2012). El aprendizaje cooperativo de las matemáticas en el s.XXI. Recuperado el 21 de mayo de 2016 de:
<https://upcommons.upc.edu/handle/2099.1/17719?locale-attribute=es>

- García M^a.T. (2013).El aprendizaje cooperativo en matemáticas en los dos primeros cursos de la ESO. Recuperado el 21 de mayo de 2016 de:
<http://reunir.unir.net/handle/123456789/1723>
- García, D.J. (2013). PLE en el aula: historias sobre tutorías en secundaria. Recuperado el 5 de noviembre de 2015 de:
<https://digitum.um.es/xmlui/handle/10201/38068>
- García P (2012). Estado actual de los sistemas e-learning. Recuperado el 23 de Mayo de 2014:
http://campus.usal.es/~teoriaeducacion/rev_numero_06_2/n6_02_art_garcia_p_enalvo.htm
- García, Portillo, Romo y Benito (s.f.). Nativos digitales y modelos de aprendizaje. Recuperado el 21 de Enero de 2017.
<https://www.businessintelligence.info/assets/varios/nativos-digitales.pdf>
- Godino (2004). Didáctica de las matemáticas para maestros. Granada. Dpto. de la didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Recuperado el 16 de Septiembre de 2015.
http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf
- Godino, Batanero y Font (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje para maestros. Recuperado el 27 de julio de 2015.
http://www.pucrs.br/famat/viali/tic_literatura/livros/fundamentos.pdf
- Gómez P.(2002 a). Estudio teórico, desarrollo, implementación y evaluación de un entorno de enseñanza colaborativa con soporte informático (CSCL) para matemáticas. Recuperado el 3 de abril de 2015 de:
[_http://eprints.ucm.es/tesis/edu/ucm-t26874.pdf](http://eprints.ucm.es/tesis/edu/ucm-t26874.pdf)
- González M.E (2015). El b-learnig como modalidad educativa para construir conocimiento. Recuperado el 14 de Junio de 2016.
<http://produccioncientificaluz.org/index.php/opcion/article/view/20403/20316>
- González, V (2011). Blended Learning. Recuperado el 8 de Agosto de 2013:
<http://es.scribd.com/doc/80669759/11/VENTAJAS-E-INCONVENIENTES-DEL-B-LEARNING>
- Guerrero J.I, Castillo E.J.S., Chamorro H.G. y de Gil G.I.(2013).El error como oportunidad de aprendizaje desde la diversidad en las prácticas evaluativas. Recuperado el 14 de Noviembre de 2015 de:
<https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4757466.pdf>
- Grau M.J.(s.f.) Las Tic en la Ley de Educación y los Centros de Secundaria. Recuperado el 25 de Abril de 2016, de:
<http://atlante.eumed.net/tic-ley-educacion-centros-secundaria/>
- Gutiérrez (2008) Usando Objetos de Aprendizaje en Enseñanza Secundaria Obligatoria. Recuperado el 20 de mayo de 2015, de:
<http://www.edutec.es/revista/index.php/edutec-e/article/view/462>
- Guzmán, M. (1994). Tendencias Innovadoras en Educación Matemática. Recuperado el 30 de Julio de 2012.
<http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/migueldeguzman/legado/educacion/tendenciasInnovadoras#arriba>
- Hitt F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes de tecnología. Recuperado el 25 de Abril de 2012, de:
<http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/fernandoHitt.pdf>
- Hiriart-Urruty (2012). El papel de las conjeturas en los avances de las matemáticas. Revista Suma. Marzo 2012. Recuperado el 5 de junio de 2016:
<https://www.math.univ-toulouse.fr/~jbhu/Conjeturas-6-mayo.pdf>

- Johnson, C. (1993, 1998). Aprendizaje Colaborativo, referencia virtual del Instituto Tecnológico de Monterrey, México Recuperado el 22 de Mayo de 2014 de:
<http://campus.gda.itesm.mx/cite>
- Joubert M (2008). The Impact of ICT in Mathematics Concepts. Recuperado el 25 de Abril de 2012.
<http://www.bsrlm.org.uk/wp-content/uploads/2016/02/BSRLM-IP-28-2-03.pdf>
- Juárez, Mengual, Vercher y Peydro (2013) Las TIC en la formación online. Recuperado el 15 de Septiembre de 2016.
[https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/37566/3C%20TIC David TIC-en-formaci%C3%B3n-online1.pdf?sequence=2&isAllowed=y](https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/37566/3C%20TIC%20David%20TIC-en-formaci%C3%B3n-online1.pdf?sequence=2&isAllowed=y)
- Jubany (2010). La utilización de nuevos recursos digitales en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Recuperado el 10 de abril de 2014:
<http://revistasuma.es/IMG/pdf/65/043-046.pdf>
- López J.C. (2003). La integración de las TIC en Matemáticas. Recuperado el 15 de Septiembre de 2016.
<http://eduteka.icesi.edu.co/articulos/Editorial18>
- López Rúa P. (2015). Posibilidades y limitaciones del aprendizaje cooperativo en el EEES: análisis de una experiencia en el aula de inglés. Recuperado el 10 DE Febrero de 2016.
http://www.ugr.es/~portalin/articulos/PL_numero24/12PAULA.pdf
- Marquès P. (s.f.). El software educativo. Recuperado el 5 de Mayo de 2015 de:
http://www.lmi.ub.es/te/any96/marques_software/
- Marquès P. (1999). Entornos virtuales multimedia: elementos, plantillas de evaluación/criterios de calidad. Recuperado el 5 de Diciembre de 2014.
<http://peremarques.pangea.org/calidad.htm>
- Marquès P. (2000). Criterios de calidad para los espacios web de interés educativo. Recuperado el 5 de Diciembre de 2014.
<http://peremarques.pangea.org/caliweb.htm>
- Martín S. (2012) “Una propuesta didáctica con materiales manipulativos para la educación Primaria” Recuperado el 10 de mayo de 2015 de:
<https://revistasuma.es/IMG/pdf/69/021-029.pdf>
- Martinelli (2016). Construcción de la ciudadanía y Tecnologías de la Información y la Comunicación. Recuperado el 20 de enero de 2017.
<https://revistas.unc.edu.ar/index.php/vesc/article/view/16205/16082>
- Martínez K. y Torres L.(2017). Estrategias que ayudan al docente universitario a conocer, apropiar e implementar las TIC en el aula. Mesa de innovación. Recuperado el 20 de febrero de 2017.
<https://idus.us.es/xmlui/bitstream/handle/11441/51924/414-2822-1-PB.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Martínez F. y Prendes M.P. (2008) Estrategias y espacios virtuales de colaboración para la enseñanza superior. Revista Internacional de Ciencias Sociales y Humanidades, SOCIOTAM.vol XVIII nº2 pp 59-90 Recuperado el 6 de marzo de 2014 de:
<http://www.redalyc.org/pdf/654/65411193004.pdf>
- Massachs, Camrubi y Naudi (2005). El aprendizaje significativo en la resolución de problemas matemáticos. Recuperado el 5 de junio de 2016:
<http://www.unne.edu.ar/unnevieja/Web/cyt/com2005/9-Educacion/D-013.pdf>
- Meneses Díaz, G. (2007). La orientación educativa y las aporías de la sociedad del conocimiento. Odiseo, revista electrónica de pedagogía, 4, (8). Recuperado el 22 de abril de 2014 de:

- <http://www.odiseo.com.mx/2007/01/meses-orientacion.html>
- Mora C.D. (2003). Estrategias para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Recuperado el 10 de mayo de 2014 de: http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0798-97922003000200002
- Morales, García y Barrón (s.f.) Análisis comparativo de instrumentos de evaluación de objetos de aprendizaje. Recuperado el 5 de Diciembre de 2014 de: http://www.web.upsa.es/spdece08/contribuciones/161_SPDECEElaetal%5C'08.pdf
- Murcia Y, Tejedor M.L. y Lancheros D. (2017). Impacto de una herramienta multimedial en el proceso de enseñanza aprendizaje de la historia en el aula. Recuperado el 20 de febrero de 2017. <https://idus.us.es/xmlui/bitstream/handle/11441/52079/904-2826-1-PB.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Navarro, M (2004). Evaluación de plataformas de e-learning de licencia pública. Recuperado el 8 de Agosto de 2012. <http://www.uv.es/ticape/docs/nabuen/pfcarrera.pdf>
- NCYT Amazings (2017). Noticias de la Ciencia y la Tecnología. Recuperado el 21 de febrero de 2017 de: <http://noticiasdelaciencia.com/not/22737/definen-habilidades-cognitivas-que-favorecen-el-aprendizaje-de-las-matematicas-en-edades-tempranas/>
- Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, Anexo I por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. Recuperado el 10 de enero de 2016 de: https://www.boe.es/diario_boe/txt.php?id=BOE-A-2015-738
- Osalde M.E. (2015). El aprendizaje colaborativo y el aprendizaje cooperativo en el ámbito educativo. Recuperado el 10 de Febrero de 2016. http://unimex.edu.mx/Investigacion/DocInvestigacion/El_aprendizaje_colaborativo_y_el_aprendizaje_cooperativo_en_el_ambito_educativo.pdf
- Ospina, A. (s.f.). Evaluación por competencias. Cambio conceptual hacia la enseñabilidad de la economía. Recuperado el 20 de enero de 2017 de: <http://www.afadeco.org.co/content/download/351/2240/file/Armando%20Gil%20UCP.pdf>
- Pachón (2009). ¿Dónde Están Los Niños? Rastreado La Mirada Antropológica Sobre La Infancia. Recuperado el 5 de diciembre de 2016 de: <http://www.dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4862298.pdf>
- Palmer R. y Cebrián J.S. (2008). Implantación de Moodle en un centro de secundaria. Recuperado el 10 de febrero de 2014 de: <http://www.mondragon.edu/mooteuskadi08/viewpaper.php?id=13>
- Paredes J., Dias De Arruda, R. (2012). La motivación del uso de las TIC en la formación del profesorado en educación ambiental. En Ciencia & Educación, V. 8. Recuperado el 10 de noviembre de 2016 de: <http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v18n2/a08v18n2.pdf>
- Pincas, A. (2003). Gradual and Simple Changes to incorporate ICT into the Classroom. Recuperado el 10 de noviembre de 2016 de: <http://www.elearningeuropa.info/doc.php?lng=4&id=4519&doclng=1&sid=afc84088c986a1e2b2ba961f559e39a2&p1=1&p4=1>

- Peijnenborgh, J., Hurks, P., Aldenkam, A., Vles, J. & Hendriksen, J. (2015). Efficacy of working memory training in children and adolescents with learning disabilities: A review study and meta-analysis. Recuperado el 15 de diciembre de 2016 de: <http://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/09602011.2015.1026356>
- Peña (2012). "Las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría en la ESO" Recuperado el 5 de junio de 201 de: <https://revistasuma.es/IMG/pdf/69/037-048.pdf>
- Prendes M.P. (2004). Los nuevos medios de comunicación y el aprendizaje en colaboración. ICE Universidad de Oviedo. Aula Abierta. Pp. 127-146. Recuperado el 5 de diciembre de 2016 de: <https://digitum.um.es/jspui/bitstream/10201/3559/1/aula%20abierta%202005.pdf>
- Prendes, M. P. (2009). Herramientas Telemáticas Para La Enseñanza Universitaria En El Marco Del Espacio Europeo De Educación Superior. Grupo de Investigación de Tecnología Educativa. Universidad de Murcia. Recuperado el 10 de mayo de 2013 de: <http://ocw.um.es/transversales/herramientas-telematicas-para-la-ensenanza>
- Presmeg N.(s.f.). Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics. Recuperado el 10 de junio de 2016 de: <http://www.kaputcenter.umassd.edu/downloads/symcog/bib/pmeVisualizationFinalAPA.pdf>
- Programación de la editorial Oxford, proyecto Adarve, para la región de Murcia, recuperado el 1 de mayo de 2012 de: <http://www.oupe.es/es/mas-areas-educacion/secundaria/Matematicas/proyadarvematematicasnacional/Paginas/proyadarvematematicasnacional.aspx>
- Real Decreto 1007/1991, de 14 de junio, por el que se establecen los objetivos correspondientes a la etapa de Educación Secundaria y a las distintas áreas que en la misma se han de impartir, así como los contenidos y los criterios de evaluación correspondientes a cada una de ellas, junto con el horario escolar mínimo que debe dedicarse al desarrollo de dichos contenidos (Vigente hasta el 06 de Enero de 2007) Recuperado el 15 de febrero de 2016 de: http://noticias.juridicas.com/base_datos/Admin/rd1007-1991.html
- Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Recuperado el 15 de enero de 2016 de: <http://www.feteugtcyl.es/content/real-decreto-16312006-de-29-de-diciembre-por-el-que-se-establecen-las-enseñanzas-minimas-correspondientes-la-educacion-s>
- Real M. (2010) "Estudio y práctica del álgebra matricial con una aplicación TIC didáctica y sencilla" Recuperado el 10 de julio de 2013de: <http://revistasuma.es/IMG/pdf/65/057-067.pdf>
- Real M. (2010) "Tratamiento de la información y competencia digital en el área de Matemáticas" Recuperado el 5 de noviembre de 2015 de: <https://revistasuma.es/IMG/pdf/64/071-080.pdf>
- Rios y Yañez (2016) Las competencias TIC y su relacion con las habilidades para la solución de problemas de matemáticas Recuperado el 10 de enero de 2017 de: <http://www.edutec.es/revista/index.php/edutec-e/article/view/760>
- Rocha (2004) Descartes y el significado de la filosofía mecanicista. Recuperado el 10 de octubre de 2016 de: <http://www.revista.unam.mx/vol.5/num3/art19/art19.htm>.

- Rodríguez M.L. (2013) La teoría del aprendizaje significativo en la perspectiva de la psicología cognitiva Recuperado el 8 de mayo de 2016 de:
<http://cmc.ihmc.us/papers/cmc2004-290.pdf>
- Rangel Baca, A. & Peñalosa Castro, E.A. (2013). Alfabetización digital en docentes de educación superior: construcción y prueba empírica de un instrumento de evaluación. *Píxel-Bit. Revista de Medios y Educación*, Recuperado el 2 de Febrero de 2015 de: <http://acdc.sav.us.es/pixelbit/images/stories/p43/01.pdf>
- Rico L (s.f., a). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Recuperado el 5 de Marzo de 2016
<http://funes.uniandes.edu.co/486/1/RicoL95-100.PDF>
- Rico L. (s.f., b). Propuesta de desarrollo de la geometría en educación infantil y primaria. Recuperado el 5 de diciembre de 2016 de:
<http://cpazuaga.juntaextremadura.net/competencias/mates/primaria/Geometr%C3%ADa.pdf>
- Rojano S. López M^a. López G. (1996) Desarrollo de tecnologías de la información y la comunicación para reforzar los procesos de enseñanza y aprendizaje en ciencias en el grado de maestro/a en educación infantil de la Universidad de Málaga. Recuperado el 5 de diciembre de 2016 de:
<http://educacionquimica.info/include/downloadfile.php?pdf=pdf1645.pdf&download=1>
- Romero M (2014). Nuevas Tecnologías y Aprendizaje Significativo de las Ciencias. Enseñanza las Ciencias. Recuperado el 5 de diciembre de 2016 de:
<http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/287510>
- Romero M. y Quesada A. (2014). Nuevas tecnologías y aprendizaje significativo de las ciencias. Recuperado el 4 de Mayo de 2015.
<http://www.dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.433>
- Rubin A. (2000). Technology meets math education: Envisioning a practical future forum on the future of technology in education. Recuperado el 15 de abril de 2016 de:
<http://www.air-dc.org/forum/abRubin.htm>
- Salinas J. (s.f) Herramientas para la formación del profesorado. Recuperado el 12 de Noviembre de 2014.
<http://gte.uib.es/pape/gte/sites/gte.uib.es.pape.gte/files/herramientas%20para%20la%20formacion%20del%20profesorado.pdf>
- Sánchez J.M y Sarmiento A. (2004). Los errores como motivación para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. XII Jornadas ASEPUMA. Recuperado el 27 de Enero de 2016.
http://www.uv.es/asepuma/XII/comunica/sanchez_sarmiento_seijas.pdf
- Serrano J.L. (2013) Herramientas telemáticas en aulas hospitalarias. Una experiencia educativa en la Región de Murcia. Tesis Doctoral. Recuperado el 11 de marzo de 2016.
<https://digitum.um.es/jspui/bitstream/10201/35643/1/tjss1de1.pdf>
- Téliz F. (2015). Uso didáctico de las TIC en las buenas prácticas de enseñanza de las matemáticas. Estudio de las opiniones y concepciones de docentes de educación secundaria en el departamento de Artigas. Cuadernos de Investigación. Educ. vol.6, 2, Montevideo. Recuperado el 10 de Septiembre de 2016.
http://www.scielo.edu.uy/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1688-93042015000200002

- Temporelli W. (2012). Las TIC'S y su aporte al cambio conceptual. Virtualidad, Educación y Ciencia. Recuperado el 10 de enero de 2017 de:
<https://revistas.unc.edu.ar/index.php/vesc/article/view/3010>
- Sarmiento M (2004). La enseñanza de las matemáticas y las Ntic. Una estrategia de formación permanente Recuperado el 10 de mayo de 2016 de:
<http://www.tesisenred.net/handle/10803/8927;jsessionid=9F1F0AC9EB72B4>
- Unigarro M.A.y Rondón M.(2005). Tareas del docente en la enseñanza flexible (el caso de UNAB Virtual) Recuperado el 10 de diciembre de 2014 de:
<http://www.uoc.edu/rusc/dt/esp/unigarro0405.html>
- Vaillant D. (2013). Formación Inicial del Profesorado en América Latina: Dilemas Centrales y Perspectivas. Recuperado el 4 de Mayo de 2015 de:
http://denisevaillant.com/articulos/2013/Formacion_inicial_profesorado_America_Latina.pdf
- Villareal G. (2005). La Resolución de Problemas en Matemáticas y el uso de las TIC: Resultados de un estudio en Colegios de Chile. Recuperado el 5 de marzo de 2013 de:
<http://www.edutec.es/revista/index.php/edutec-e/article/view/524>
- Young, J.F. (2002). 'Hybrid' teaching seeks to end the divide between traditional and online instruction. [Online]. En The Chronicle of Higher Education. Recuperado el 16 de septiembre de 2016 de:
<http://chronicle.com/free/v48/i28/28a03301.htm>

ANEXOS

Anexo I: Los sistemas de ecuaciones lineales en las leyes de educación.

Señalamos los contenidos que se expresan en la legislación LOE, que ya no está vigente, y que hacen referencia a los sistemas lineales de dos ecuaciones e incógnitas:

- Segundo curso:
 - El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y expresar relaciones.
 - Obtención del valor numérico de una expresión algebraica.
 - Transformación de ecuaciones en otras equivalentes.
 - Utilización de las ecuaciones para la resolución de problemas. Interpretación de las soluciones.
 - Gráficas cartesianas. Elaboración de una gráfica a partir de una tabla de valores o de una expresión algebraica sencilla que relacione dos variables.
 - Descripción local y global de fenómenos presentados de forma gráfica.
- Tercer curso:
 - Resolución algebraica de ecuaciones de primer grado y de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
 - Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones
 - Relaciones funcionales. Distintas formas de expresar una función.
 - Construcción de tablas de valores a partir de enunciados, expresiones algebraicas o gráficas sencillas.
 - Estudio gráfico y algebraico de las funciones constantes, lineales y afines.
 - Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.
- Cuarto curso:
 - Resolución algebraica y gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

La última ley educativa, LOMCE, concreta, en menor medida, los contenidos a desarrollar. Introduce el tema de los sistemas un curso anterior, en segundo, aunque podríamos discutir si se debe desarrollar pues no está recogido como evaluable.

➤ Segundo curso:

- Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representan situaciones reales, al algebraico y viceversa.
- El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones.
- Operaciones con expresiones algebraicas sencillas. Transformación y equivalencias. Identidades notables. Operaciones con polinomios en casos sencillos.
- Ecuaciones de primer grado (método algebraico y gráfico) y de segundo (método algebraico). Resolución. Interpretación de soluciones.
- Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Métodos algebraicos de resolución y método gráfico. Resolución de problemas.
Destacar que está como contenido pero no como estándar de aprendizaje evaluable.
- Funciones lineales. Cálculo, interpretación e identificación de la pendiente de una recta. Representación de la recta a partir de la ecuación y obtención de la ecuación a partir de una recta.

➤ Tercer curso:

- Ecuaciones de segundo grado con una incógnita (método algebraico y gráfico).
- Transformación de expresiones algebraicas. Igualdades notables. Operaciones elementales con polinomios.
- Resolución de ecuaciones sencillas de grado superior a dos.
- Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.
Destacar que como criterio de evaluación se indica en referencia a las ecuaciones y sistemas “aplicando técnicas de manipulación algebraica, gráficas o recursos tecnológicos, valorando y contrastando los resultados obtenidos.
- Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.
- Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.
- Expresiones de la ecuación de la recta.
Este contenido aparece en tercero con la nueva legislación.

➤ Cuarto curso:

- Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.

Anexo II: Las matemáticas en la legislación.

A continuación hacemos un recorrido por las leyes educativas, destacando las menciones que hace la legislación sobre aspectos tales como los beneficios de las matemáticas, los escenarios para su aprendizaje, las ideas metodológicas, así como la definición de esta ciencia y los aspectos a desempeñar por medio de la misma. Las leyes en las que basamos nuestro estudio son:

- La Ley Orgánica 2/2006 de Educación (LOE):
 - Real Decreto 1513/2006, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la educación primaria.
 - Real Decreto 1631/2006, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la educación secundaria obligatoria.
 - Orden ECI/2211/2007, establece el currículo y regula la ordenación de la educación primaria.
 - Orden ECI/2220/2007, establece el currículo y regula la ordenación de la educación secundaria obligatoria.
 - Decreto 286/2007, por el que se establece el currículo de la educación primaria de la CARM
 - Decreto 286/2007 de la C.A.R.M. (MATEMÁTICAS)
 - Definición de Matemáticas.
 - Beneficios de las Matemáticas.
 - Escenario para la enseñanza de las matemáticas.
 - Contribución al desarrollo de las Competencias Básicas.
 - Bloques en los que se dividen las matemáticas para su enseñanza.
 - Decreto 291/2007, por el que se establece el currículo de la educación secundaria obligatoria de la CARM
 - Decreto 291/2007 de la CARM (MATEMÁTICAS)
 - La historia de las Matemáticas
 - Finalidad de las Matemáticas
 - Consejos metodológicos para el aula (trabajo en grupo, recursos manipulativos, desarrollo tecnológico, presentación de la materia...).
 - Contribución al desarrollo de las Competencias Básicas.
 - Bloques en los que se dividen las matemáticas para su enseñanza.
- Anteproyecto de Ley Orgánica de mejora de la calidad educativa (2012)
- La Ley Orgánica de Educación 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE).
 - Real Decreto 126/2014 por el que se establece el currículo básico para la educación primaria.
 - Real Decreto 1105/2014 por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la educación secundaria obligatoria y el bachillerato.
 - Decreto 198/2014 por el que se establece el currículo en la educación primaria de la CARM.
 - Decreto 198/2014 de la C.A.R.M (MATEMÁTICAS).

- Introducción.
- Bloques de contenidos.
- Orientaciones metodológicas.
- Contenidos, criterios de evaluación, estándares de aprendizaje evaluables.
- Orden ECD/1361/2015, establece el currículo y se regula la ordenación de la educación secundaria obligatoria.
- Orden ECD/65/2015, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación.
- Decreto 220/2015, por el que se establece el currículo de la educación secundaria obligatoria de la CARM.
 - Decreto 220/2015 de la C.A.R.M (MATEMÁTICAS).
 - Introducción.
 - Bloques de contenidos.
 - Orientaciones metodológicas.
 - Contenidos, criterios de evaluación, estándares de aprendizaje evaluables.

Todas las últimas leyes de educación, coinciden en la importancia del entendimiento sobre la memorización, por lo que deberemos siempre destacar el razonamiento de los procesos que se lleven a cabo en esta área.

Además de lo ya comentado en el bloque I sobre las competencias, en el Diseño Curricular Base (MEC, 1989, citado por Godino, Batanero y Font, 2004, 94) ya se señalaba la importancia de esta materia así como el uso de nuevas tecnologías:

Reconoce que las matemáticas constituyen hoy un conjunto amplio de modelos y procedimientos de análisis, cálculo, medida y estimación, útiles para establecer relaciones espaciales, cuantitativas y de otros tipos entre diferentes aspectos de la realidad. A semejanza de otras disciplinas, constituyen un campo en continua expansión y de creciente complejidad, lo que tiene también consecuencias sobre la educación en matemáticas, que si bien ha estado presente tradicionalmente en la enseñanza, puede y merece ser enseñada con procedimientos distintos de los tradicionales. La misma introducción y aplicación de nuevos medios tecnológicos en matemáticas obliga a un planteamiento diferente tanto en los contenidos como en la forma de su enseñanza.

En la legislación se resalta que el currículo siempre se diseña teniendo como base el desarrollo cognitivo y emocional, sus posibilidades en el desarrollo del conocimiento y pensamiento, caminando hacia la abstracción de los conceptos.

1.1. Definición y finalidad de “Matemáticas y su Área”. Aspectos a desempeñar.

Según el BORM-Decreto nº286/2007 de 7 de Septiembre, por el que se establece el currículo de la educación primaria de la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia, las matemáticas

Son un conjunto de conocimientos asociados en una primera aproximación a los números y formas, que se van progresivamente completando hasta constituir un modo valioso para analizar situaciones. Permiten estructurar el conocimiento que se obtiene de la realidad, analizarla y lograr una información nueva para conocerla mejor, valorarla y tomar decisiones.

Pasamos a destacar del Decreto BORM 291/2007 los pilares que creemos que, aunque la legislación señala, quedan en el olvido en el proceso de enseñanza-aprendizaje, en la realidad cotidiana del aula pues se tiende a transmitir unas matemáticas “vacías”, llenas fundamentalmente de algoritmos y cálculos:

- En consecuencia, la finalidad de la enseñanza de las Matemáticas es no sólo su aplicación instrumental, sino también, el desarrollo de las facultades de razonamiento, de abstracción y de expresión. Las Matemáticas, tanto histórica como socialmente, forman parte de nuestra cultura, y los individuos deben ser capaces de apreciarlas. El dominio del espacio y del tiempo, la organización y optimización de recursos, formas y proporciones, la capacidad de previsión y control de la incertidumbre o el manejo de la tecnología digital, son sólo algunos ejemplos. La toma de decisiones requiere comprender, modificar y producir mensajes de todo tipo, y en la información que se maneja aparece, cada vez con más frecuencia.
- El uso de las Matemáticas debe servir para interpretar y transmitir ideas e información con precisión y rigor, utilizándolas como un lenguaje con distintas vertientes: verbal, gráfica, numérica y algebraica. Por ello, es importante habituar a los alumnos a expresarse de forma oral, por escrito y gráficamente en situaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente, mediante la adquisición y el manejo de un vocabulario específico de notaciones y términos matemáticos.

El artículo 4 del Decreto BORM 198/2014, “Asignaturas troncales” indica los contenidos comunes, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables de las áreas troncales de la Educación Primaria, recogidas en el primero de sus anexos. Veamos cómo define las Matemáticas dicho anexo.

Las matemáticas permiten conocer y estructurar la realidad, analizarla y obtener información para valorarla y tomar decisiones; son necesarias en la vida cotidiana, para aprender a aprender, y también por lo que su aprendizaje aporta a la formación intelectual general, y su

contribución al desarrollo cognitivo. El uso de las herramientas matemáticas permite abordar una gran variedad de situaciones.

Las matemáticas son un conjunto de saberes asociados a los números y a las formas, y constituyen una forma de analizar diversas situaciones, se identifican con la deducción, la inducción, la estimación, la aproximación, la probabilidad, la precisión, el rigor, la seguridad, etc., nos ayudan a enfrentarnos a situaciones abiertas, sin solución única y cerrada; son un conjunto de ideas y formas que nos permiten analizar los fenómenos y situaciones que se presentan en la realidad, para obtener informaciones y conclusiones que no estaban explícitas y actuar, preguntarnos, obtener modelos e identificar relaciones y estructuras, de modo que conlleven no sólo utilizar cantidades y formas geométricas sino, y sobre todo, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas. ...

Esta misma ley nos indica que:

La finalidad de las Matemáticas en Educación Primaria es conseguir que todo el alumnado, al acabar la etapa, sea capaz de describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones, expresar verbalmente de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema, y utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. El área de Matemáticas debe construir los fundamentos del razonamiento lógico en los niños y niñas de esta etapa, y no sólo del lenguaje simbólico matemático. De esta manera se desarrollarán sus funciones formativa (desarrollando las capacidades de razonamiento y abstracción), instrumental (permitiendo posteriores aprendizajes tanto en el área de Matemáticas como en otras áreas) y funcional (posibilitando la comprensión y resolución de problemas de la vida cotidiana).

1.2. Beneficios de las Matemáticas.

Es importante señalar que aunque en muchas ocasiones el alumnado no logra ver qué ventajas tiene el estudio de las matemáticas, esta materia presenta muchas que incluso se reflejan en algunas de las leyes de educación, (BORM 286/2007):

Se entienden así las Matemáticas como un conjunto de ideas y formas de actuar que conlleva no solo utilizar cantidades y formas geométricas, sino, y sobre todo, hacerse preguntas, obtener modelos e identificar relaciones y estructuras, de modo que, al analizar los fenómenos y situaciones que se presentan en la realidad, se pueden obtener informaciones y conclusiones que inicialmente no estaban explícitas.

Concebidas de esta forma, las Matemáticas incorporan las características que le han sido tradicionalmente asignadas y que se identifican con la deducción, la precisión, el rigor, la seguridad, etc., pero son y aportan mucho más de lo que se deduce en estos términos. También son inducción, estimación, aproximación, probabilidad y tentativa, y mejoran la capacidad de enfrentarse a situaciones abiertas, sin solución única y cerrada.

Se aprenden Matemáticas porque son útiles en otros ámbitos (en la vida cotidiana, en el mundo laboral, para aprender otras cosas, etc.) y, también, por lo que su aprendizaje aporta a la formación intelectual general, en concreto a las destrezas susceptibles de ser utilizadas en una amplia gama de casos particulares, y que contribuyen, por sí mismas, a potenciar capacidades cognitivas de los alumnos.

1.3. Escenario para la enseñanza de las matemáticas. Aprendizajes matemáticos.

El docente puede saber de manera explícita qué escenarios debe usar (BORM 198/2014):

Las matemáticas están en todo lo que nos rodea. Forman parte de la vida cotidiana como herramienta necesaria que permite desenvolverse en la complejidad de la sociedad actual. Además, con las matemáticas podemos analizar la realidad y obtener información para valorarla y tomar decisiones, por lo que su aprendizaje contribuye a aprender a aprender y al desarrollo cognitivo para una formación intelectual general

Los aprendizajes matemáticos se logran cuando el alumnado elabora abstracciones matemáticas a partir del análisis de la información obtenida, observar propiedades, establecer relaciones y resolver problemas concretos. Para ello, es necesario traer al aula situaciones cotidianas que supongan desafíos matemáticos atractivos y el uso habitual de recursos variados y materiales didácticos para ser manipulados por el alumnado. Sólo después de haber comprendido el concepto, es adecuado presentar al alumnado el símbolo que lo representa y que empiece a practicar para alcanzar el dominio de los mecanismos que rigen su representación simbólica. No debe darse por conocido y dominado un concepto, propiedad o relación matemática por el hecho de haber logrado presentar al alumnado el dominio mecánico de su simbología.

1.4. Ideas metodológicas para el proceso de e-a.

Señalamos también algunos aspectos metodológicos y acerca de los recursos que dicha ley también menciona.

- El trabajo en grupo, y ante problemas que estimulen la curiosidad y la reflexión, enseña a los alumnos a desarrollar estrategias para defender sus argumentos frente a los de sus compañeros, y a comparar criterios distintos para encontrar las respuestas más adecuadas.
- Asimismo, se deberá seguir cuidadosamente el método de estudio de los alumnos, cuidando que éstos desarrollen el grado de confianza en sí mismos necesario para sumergirse en el estudio de esta disciplina.
- La utilización de recursos manipulativos que sirvan de catalizador del pensamiento del alumno es siempre aconsejable, pero cobra especial importancia en geometría donde la abstracción puede ser construida a partir de la reflexión sobre las ideas que surgen de la experiencia adquirida de la observación de objetos físicos. Especial interés presentan los programas de geometría dinámica, ya que permiten a los estudiantes actuar sobre las figuras y sus elementos característicos, facilitando la posibilidad de analizar propiedades, explorar relaciones, formular conjeturas y validarlas. El estudio de las relaciones entre variables y su representación mediante tablas, gráficas y modelos matemáticos es de gran utilidad para describir, interpretar, predecir y explicar fenómenos diversos de tipo económico, social o natural. Los contenidos de este bloque se mueven entre las distintas formas de representar una situación: verbal, numérica, geométrica o a través de una expresión literal y las distintas formas de traducir una expresión de uno a otro lenguaje. Asimismo, se pretende que los estudiantes sean capaces de distinguir las características de determinados tipos de funciones con objeto de modelizar situaciones reales.
- En los últimos años, hemos presenciado un vertiginoso desarrollo tecnológico. El ciudadano del siglo XXI no podrá ignorar el funcionamiento de una calculadora o de un ordenador, con el fin de poder servirse de ellos. Estos instrumentos permiten concentrarse en la toma de decisiones, la reflexión, el razonamiento y la resolución de problemas. En este sentido, la calculadora y las herramientas informáticas son hoy dispositivos que el ciudadano utiliza comúnmente en la vida cotidiana. Pero se les debe dar un trato racional que evite la indefensión del alumno ante la necesidad, por ejemplo, de realizar un cálculo sencillo cuando no tiene a mano su calculadora. Su uso indiscriminado en los cursos primero y segundo impedirá, por ejemplo, que los alumnos adquieran las destrezas de cálculo básicas que necesitan en cursos posteriores. Por otra parte, ciertos programas informáticos resultan ser recursos investigadores de primer orden en el análisis de propiedades y relaciones numéricas y gráficas, y, en este sentido, debe potenciarse su empleo. El profesor decidirá cuándo y cómo plantea la utilización de la calculadora, la hoja de cálculo y otros programas informáticos como herramienta instrumental básica para el estudio de las Matemáticas.

La norma vigente española dice, expresamente (RD 220/2015):

La materia de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas contribuye al desarrollo de las siete competencias establecidas en el presente decreto, ya que en los procesos de resolución e investigación de un problema interdisciplinar están involucradas todas ellas, aunque es en la competencia matemática y en las competencias en ciencia y tecnología donde más incidencia tienen los estándares de aprendizaje de esta materia. Además desde esta materia se contribuye para que el alumnado pueda seguir con éxito sus estudios posteriores.

Para lograr los aprendizajes matemáticos se hace necesario traer al aula situaciones cotidianas suficientemente atractivas para los alumnos y el uso de herramientas tecnológicas y materiales didácticos diversos.

Resaltamos que, tras la lectura y estudio de la legislación durante esta investigación, se decide que cualquier modificación en el proceso de enseñanza que queramos desarrollar, tendrá como pilares estos que acaban de ser mencionados y que sin ser, en algunos casos, objetivos propios del tema elegido, se deberá valorar su consecución tras la finalización del estudio, dada la importancia que tienen.

Anexo III: La competencia digital.

A continuación hacemos un recorrido legislativo sobre la competencia digital. En 2006, la ley educativa LOE (Real Decreto 1513/2006) es la que le da un papel destacado pudiendo leerse:

En el Preámbulo podemos leer “la Unión Europea y la UNESCO se han propuesto mejorar la calidad y la eficacia de los sistemas de educación y de formación, lo que implica (...) desarrollar las aptitudes necesarias para la sociedad del conocimiento, garantizar el acceso de todos a las tecnologías de la información y la comunicación”.

En la Educación Secundaria los aspectos tecnológicos se describen como uno de los elementos culturales básicos que deberán adquirir los alumnos, especificando en el objetivo e) del artículo 23 referido a los Objetivos de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) que “en esta etapa los alumnos deberán desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación”.

El artículo 24 de la LOE incluye las Tecnologías en los cursos primero, segundo y tercero y “sin perjuicio de su tratamiento específico en algunas de las materias de la etapa (...) las tecnologías de la información y la comunicación (...) se trabajarán en todas las áreas” (artículo 24.7).

El artículo 157 versa sobre los recursos para la mejora de los aprendizajes y apoyo al profesorado y nos indica que se establecerán “programas de refuerzo del aprendizaje de las tecnologías de la información y la comunicación”. (Grau s.f., 7,8).

En nuestra legislación estatal, una vez aprobado el real decreto 1631/2006 en el que se establecen las enseñanzas mínimas para la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, se enumeran las competencias básicas que debe adquirir el alumno, agrupándolas alrededor de ocho ejes:

1. Competencia en comunicación lingüística.
2. Competencia matemática.
3. Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.
4. Tratamiento de la información y competencia digital.
5. Competencia social y ciudadana.
6. Competencia cultural y artística.
7. Competencia para aprender a aprender.
8. Autonomía e iniciativa personal.

Según el trabajo de Grau (s.f.) que estudia la competencia referida a nuestro estudio, tenemos:

Respecto del tratamiento de la información y la competencia digital nos indica que consiste en disponer de “habilidades para buscar, obtener,

procesar y comunicar información, y para transformarla en conocimiento”.

Está asociada con la “búsqueda, selección, registro y tratamiento o análisis de la información, utilizando técnicas y estrategias diversas para acceder a ella según la fuente a la que se acuda y el soporte que se utilice (oral, impreso, audiovisual, digital o multimedia)

Requiere el dominio de lenguajes específicos básicos (textual, numérico, icónico, visual, gráfico y sonoro) y de sus pautas de decodificación y transferencia, así como aplicar en distintas situaciones y contextos el conocimiento de los diferentes tipos de información, sus fuentes, sus posibilidades y su localización, así como los lenguajes y soportes más frecuentes en los que ésta suele expresarse”.

Pero nos previene “disponer de información no produce de forma automática conocimiento” Para transformar la información en conocimiento se exigen destrezas para “organizarla, relacionarla, analizarla, sintetizarla y hacer inferencias y deducciones de distinto nivel de complejidad; (...). Significa, asimismo, comunicar la información y los conocimientos adquiridos.

Por lo que ser competente en la utilización de las TIC como instrumento de trabajo intelectual “incluye utilizarlas en su doble función de transmisoras y generadoras de información y conocimiento”.

La competencia digital incluye utilizar las TIC “extrayendo su máximo rendimiento” Supone “identificar y resolver los problemas habituales de software y hardware” (...) analizar la información “de forma crítica mediante el trabajo personal autónomo y el trabajo colaborativo, tanto en su vertiente sincrónica como diacrónica” (...). También “conseguir objetivos y fines de aprendizaje, trabajo y ocio” (...).”

En definitiva, “la competencia digital comporta hacer uso habitual de los recursos tecnológicos disponibles para resolver problemas reales de modo eficiente”. También “evaluar y seleccionar nuevas fuentes de información e innovaciones tecnológicas a medida que van apareciendo”.

En síntesis, “el tratamiento de la información y la competencia digital implican ser una persona autónoma, eficaz, responsable, crítica y reflexiva al seleccionar, tratar y utilizar la información y sus fuentes, así como las distintas herramientas tecnológicas”. También implica “tener una actitud crítica” contrastando la información disponible y respetar las normas de conducta en el uso de las TIC. (Grau s.f., 9,10).

Centrándonos en la última ley educativa (LOMCE) las competencias pasan a ser (Real Decreto 220/2015 del 2 de septiembre de 2015, 30732):

- a) Comunicación lingüística.
- b) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- c) Competencia digital.

- d) Aprender a aprender.
- e) Competencias sociales y cívicas.
- f) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.
- g) Conciencia y expresiones culturales.

Encontrándose en el Anexo I de la orden ECD/65/2015 la explicación de las mismas. Centrando nuestra atención en la referida a la tecnología, se explica que por medio de esta se pretende trabajar en el desarrollo de las destrezas necesarias para ser capaces de manipular herramientas y máquinas tecnológicas.

Anexo IV: Ilustraciones de los errores cometidos con frecuencia por parte de los discentes.

1. Resuelve por el método que te resulte más cómodo e indica la solución del sistema:

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \left. \begin{array}{l} 3x - 5y = 27 \\ -6x + 10y = -54 \end{array} \right\} : 2 \rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x - 5y = 27 \\ -3x + 5y = 27 \end{array} \right\} \\
 \hline
 0y = 0 \\
 y = \infty \quad x = 0 \quad \text{Mal}
 \end{array}$$

¡UPS!

Ninguna variable puede tomar valor infinito.

El alumno desea indicar que tanto x como y pueden tener infinitos valores

2. La edad de María es el doble que la edad de Julia. Hace diez años la suma de las edades de las dos era igual al cuádruplo de la edad actual de María. ¿Cuáles son las edades actuales de María y Julia?

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} x = 2y \\ (x - 10y) + (y - 10) = 5x \end{array} \right\} \rightarrow 2y - 10 + y - 10 = 4 \cdot 2y \\
 2y + y - 10 - 10 = 8y \\
 3y - 20 = 8y \\
 -5y = 20 \\
 y = -4 \rightarrow \text{Julia} \\
 x = 2 \cdot (-4) = -8 \rightarrow \text{María} \\
 \text{¡Edades negativas!}
 \end{array}$$

El alumno plantea y resuelve bien el sistema y da como respuesta al problema la solución del mismo sin darse cuenta que dichas soluciones no pueden ser reales. Debería indicar que el problema no tiene solución

3. Clasifica los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \left. \begin{array}{l} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{array} \right\} \\
 \left. \begin{array}{l} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{array} \right\} \\
 \hline
 5x = 10 \\
 x = \frac{10}{5} \\
 x = 2 \\
 y = \frac{-6 - 3x}{-4} \\
 y = \frac{-6 - 3 \cdot 2}{-4} = \frac{-6 - 6}{-4} = 3 \\
 \boxed{x = 2} \quad \boxed{y = 3} \\
 \text{Sistema Compatible } \boxed{\text{¿Solo?}}
 \end{array}$$

$$b) \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ -2x + 2y = 2 \end{cases}$$

$0y = 0 \rightarrow$ Infinitas soluciones

↓
Sistema Compatible Indeterminado

Aún estando bien el resultado, el alumno ha resuelto algebraicamente el sistema sin pararse a pensar y darse cuenta que ambas ecuaciones eran equivalentes.

$$c) \begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0y &= 9 \\ y &\rightarrow \nexists \text{ Solución} \end{aligned}$$

Siendo la misma pendiente y teniendo distinta ordenada en el origen, se sabe que las rectas son paralelas, por lo que se conoce que no tiene solución.

Anexo V: Búsqueda de recursos TIC para el aprendizaje de los sistemas lineales.

La búsqueda fue dividida en diversos bloques.

- Bloque A: Investigación de los pasos a estudiar para implementar la aplicación concreta de Geogebra.
- Bloque B: Distintas páginas sobre recursos TIC tales como wikisaber (www.wikisaber.com), totemguard (www.totemguard.com), escuela 2.0 (www.escuela20.com).

Influenciados por otras investigaciones estudiamos estos enlaces pero no encontramos un material que se ajustase a nuestras pretensiones.

- Bloque C: blogs sobre enseñanza de las matemáticas
 - <http://i-matematicas.com/blog/>
 - http://nlvm.usu.edu/en/nav/topic_t_3.html
 - <http://bordematica.blogspot.com.es/p/pizarra-digital-interactiva.html>
 - <http://matenomia.blogspot.com.es/>
 - <http://aprender-ensenyar-matematicas.blogspot.com.es/2010/11/aplicaciones-tic-para-ensenar.html>

Si bien estas lecturas nos ayudaban en el desarrollo de nuestras ideas, no destacamos consejos especialmente relevantes para nuestra investigación.

- Bloque D: video educativos
 - <https://www.youtube.com/watch?v=BCh4xA9czTs>
 - <https://www.youtube.com/watch?v=ITRANviJWEY>
 - <https://www.youtube.com/watch?v=ieiRIATCOUI>
 - <https://www.youtube.com/watch?v=zl1UV88LXLs>

Fueron muchos los videos visionados pero no encontrábamos los apropiados por varios motivos:

1.-Contenían anuncios, por lo que no los veíamos apropiados.

2.-La temática aún siendo sobre sistemas, no era lo que buscábamos, pues eran referentes a la resolución de los mismos por los métodos tradicionales, pero no mediante razonamiento sobre los coeficientes. Eran clases tradicionales on-line pero sin nuevas metodologías.

- Bloque E: programas educativos y juegos lúdicos:
 - Colección Master Blaster (PC-3Cds): por medio de relatos que desarrollan una historia que guía como hilo conductor el jugador tiene que resolver problemas matemáticos y desarrollar el pensamiento lógico. Está diseñado para edades comprendidas entre los 6 a 12 años, de 8 a 13 y de 11 a 15.
 - Juega con las matemáticas (Mac-PC): incluye problemas matemáticos para que los niños aprendan a través del juego. Está recomendado para edades comprendidas entre los 7 y 11 años.
 - El alucinante viaje de los Zoombinis (Mac-PC): se trabaja el álgebra la formulación de hipótesis, teoría de conjuntos, razonamientos visual y lógico.... A partir de 8 años.

- El profesor Layton (Nintendo DS): con él se trabaja la lógica, el cálculo... Diferentes edades y grados de dificultad.

Se encontraron muchos juegos y programas que trabajaban las matemáticas y las capacidades cognitivas que éstas desarrollan, pero fueron descartados por varios motivos:

- 1.- No eran adecuados para la edad de nuestros discentes
- 2.- No se trabajan de manera explícita los sistemas de ecuaciones lineales, objetivo de nuestra investigación.

Se pensó en la posibilidad de crear un trivial matemático, para trabajarlo por medio de Moodle, pensando que sería más fácil de implementar que el Jeopardy. Finalmente se descartó, pues el investigador tenía que invertir demasiado tiempo en la programación del mismo, para un solo tema de la materia. Se pospuso para trabajos futuros con una temática más abierta.

- Bloque F: páginas y recursos de distintas editoriales o centros educativos, portales para la educación, Ministerio de Educación, páginas variadas sobre matemáticas...
 - <http://www.ceiploreto.es/>
 - http://www.educa.madrid.org/web/cp.iplacea.alcala/recursos_educativos.htm
 - <http://www.educa.jcyl.es/es>
 - <http://www.educarex.es/>
 - <http://www.mecd.gob.es/portada-mecd/>
 - <https://eu.ixl.com/>
 - <http://www.infoymate.es/>
 - <http://aprendiendomatematicas.com/>

Se consultaron muchas webs que hicieron que nuestra idea cada vez estuviese más definida, pero no destacamos consejos especialmente relevantes para nuestra investigación.

- Bloque G: utilización del buscador Google, Google Académico con palabras clave como:
 - 1.- Matemáticas y TIC
 - 2.- Sistemas de ecuaciones
 - 3.- Algebra 3º ESO
 - 4.- Actividades interactivas para el aula de matemáticas
 - 5.- Ect...

De este modo se encontraron, entre otras, las siguientes webs:

- http://www.amolasmates.es/pdf/cidead/3_eso/apuntes/teoria%20funciones%20lineales.pdf
- <http://rincones.educarex.es/matematicas/index.php/funciones-3eso/webquests-funciones-3eso>
- <http://www.x.edu.uy/lineal.htm>
- <http://www.librosvivos.net/smtc/homeTC.asp?TemaClave=1067>
- <http://conteni2.educarex.es/mats/11816/contenido/>

- o <http://conteni2.educarex.es/>

Tras todo lo estudiado comprobamos que podíamos dividir todos los recursos encontrados según varios criterios:

- Libros digitalizados
Consistía en el mismo libro que existía en papel pero utilizando como soporte de visualización el ordenador.

- Repositorio de apuntes

Sin ser libros, tenían la misma finalidad que estos, pero de nuevo estaban digitalizados sin tener ninguna herramienta nueva.

- Libros interactivos

Destaca el hecho de que este grupo estaban formado fundamentalmente por los libros de distintas editoriales que se están actualizando siendo un híbrido entre el tradicional y en verdad una nueva enseñanza. Tan solo contienen algún enlace interactivo con videos explicativos, pero no cuentan con un gran número de recursos ni de actividades interactivas (en muchas ocasiones, ninguna). Cuando se habla con dichas editoriales responden que están trabajando en ello.

- Repositorio de actividades

- Predomina un gran número de listados (o de ediciones escritas en la propia web) que se encuentran en formato tradicional, con o sin solución, pero que no permiten la interacción del alumno por ningún medio nuevo, ni la corrección de los ejercicios que resuelve.

- Ejercicios interactivos, pero no de nuestra temática y siempre de contenidos de nivel de primaria.

- Herramientas TIC

- Wiris
- Geogebra
- Hotpotatoes
- ...

Anexo VI: Búsqueda de experiencias en revistas educativas para la enseñanza del álgebra, la geometría y las funciones.

Se llevó a cabo una búsqueda muy amplia, pudiendo resaltar las siguientes revistas:

- Lull: versa sobre investigación en todas las ramas de las ciencias.
- American Mathematical Monthly: centrada en nuestra rama pero cuyos artículos matemáticos son de carácter general y accesibles al público matemático no profesionalizado.
- Mathematics Magazine, de la Mathematical Association of America: es una revista con vocación divulgativa para esta ciencia.
- Mathematical Intelligencer: también con enfoque divulgativo sobre los progresos de las matemáticas.
- Suma: revista para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
- La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española: tiene dos secciones, una versa sobre historia de las matemáticas y otra recoge contenidos para educación secundaria.
- Revista de Educación: tiene como objetivo ser la línea del tiempo que señale los avances que se dan en la educación (investigación-innovación), tanto desde la vertiente nacional como internacional.
- Revista latinoamericana de ciencias sociales, niñez y juventud: revista interdisciplinar que trata temáticas como la neurociencia, la psicología, la sociología, la antropología, la pedagogía, la lingüística, la historia y la filosofía.
- Pixel-Bit: Revista de medios y educación: posee carácter científico-académico y divulgativo, centrada en la rama de los medios audiovisuales, informática y tecnologías avanzadas para ser aplicadas al terreno educativo y de formación.
- Virtualidad, educación y ciencia: publicación académica enfocada a trabajos que incluyan las tecnologías de la información y la comunicación integradas a los procesos de enseñanza y aprendizaje, tanto en modalidad a distancia como presencial o semipresencial.
- Aula Abierta: tiene como objetivo la contribución a la difusión de experiencias empíricas o teóricas que traten sobre la investigación educativa de calidad que se realiza en España.
- Revista Edutec: revista electrónica de tecnología educativa.
- Historia y Comunicación Social: revista que publica trabajos sobre los fenómenos de la comunicación en las sociedades humanas desde el punto de vista diacrónico. Tiene una sección miscelánea con artículos sobre Historia Contemporánea, Historia del Pensamiento y fundamentalmente Historia de los Medios de Comunicación.

Anexo VII: Contenidos y objetivos de nuestra unidad didáctica.

CONTENIDOS TERCER CURSO

BLOQUE 3. Álgebra.

- Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas. Interpretación crítica de las soluciones.

BLOQUE 4. Geometría.

- Revisión de la geometría del plano.
- Estudio de formas, configuraciones y relaciones geométricas.

BLOQUE 5. Funciones y gráficas

- Relaciones funcionales. Distintas formas de expresar una función.
- Construcción de tablas de valores a partir de enunciados, expresiones algebraicas o gráficas sencillas.
- Uso de las tecnologías de la información para el análisis y reconocimiento de propiedades de funciones.
- Formulación de conjeturas sobre el fenómeno representado por una gráfica y sobre su expresión algebraica.
- Estudio gráfico y algebraico de las funciones constantes, lineales y afines.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS DEL CURRÍCULUM

1. Aumentar la motivación del alumnado por medio del uso de las nuevas tecnologías hacia la materia de las matemáticas.
2. Aprender las relaciones funcionales, las distintas formas de expresar una función.
3. Obtener los puntos de una gráfica para la realización de las tablas de valores, por medio de la representación gráfica de funciones.
4. Estudiar las gráficas y el desarrollo algebraico de las funciones constantes lineales y afines.
5. Formular conjeturas sobre el fenómeno representado por una gráfica y su expresión algebraica.
6. Comprender la relación entre los distintos coeficientes, ya sean naturales, enteros o racionales, que intervienen en las ecuaciones de las rectas.
7. Utilizar modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.
8. Obtener sistemas equivalentes a uno dado.
9. Identificar el tipo de sistema según su número de soluciones.
10. Interpretar de manera crítica las soluciones de un sistema.
11. Resolver problemas mediante la utilización de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.

Los objetivos específicos que presenta el Real Decreto 219/2007, relacionado con los hábitos, actitudes y valores que los alumnos deben desarrollar en esta etapa y que creemos que con el programa se pueden potenciar al mismo tiempo que se trabajan algunas de las capacidades propias del curso, son los siguientes:

1. Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos o científicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana, con el fin de comunicarse de manera clara, concisa y precisa.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
4. Actuar ante los problemas que se plantean en la vida cotidiana de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
5. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito y adquirir un nivel de autoestima adecuado, que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las Matemáticas.
6. Adquirir, desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
7. Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos, así como una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.
8. Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, para planificar, para tomar decisiones y para asumir responsabilidades, valorando el esfuerzo con la finalidad de superar las dificultades.

Dado que el diseño se lleva a cabo antes del cambio legislativo, se estudia si hay cambios significativos en los contenidos, criterios..., expuestos hasta el momento.

Anexo VIII: Estudio de la unidad didáctica/formativa presente en el libro de texto Oxford, proyecto Adarve, Serie Trama.


Todas las imágenes mostradas en este anexo pertenecen a los libros de segundo, tercero y cuarto del mencionado proyecto y editorial.

1.1. Metodología

En esta sección vamos a analizar la metodología seguida por los autores a la hora de presentar los contenidos. Nos centraremos primero en la organización estructural de los contenidos.

Los temas estudiados mantienen el mismo esquema en los tres cursos (salvo algún pequeño detalle). La organización general de los temas es la siguiente:

- 1) El tema comienza con una doble página. En la página de nuestra izquierda hay una "ilustración" que sirve para sustentar las actividades de carácter introductorio. Sobre dicha ilustración se podrá leer un texto que desde una perspectiva histórica o conceptual plantea interrogantes matemáticos sobre la temática que se estudiará en esa unidad didáctica. En la página de al lado "recuerda y resuelve" el alumno puede observar varios recuadros que resaltan los conocimientos de unidades o cursos anteriores necesarios para el estudio de la unidad presente. Junto a estos se presentan unas actividades para que se practiquen dichos saberes.



7 Sistemas de ecuaciones

Laura ha mostrado tanto interés por la pintura que sus padres han decidido pasar sus vacaciones en París para visitar el museo del Louvre. En la agencia de viaje les han hecho un presupuesto total de 1420 €. Laura, al ser menor de edad, disfruta de un descuento de 110 €.

¿Serías capaz de calcular qué parte del precio global del viaje corresponde a Laura y cuál a cada uno de sus padres? Para averiguarlo, debes seguir estos pasos:

- Escribe una ecuación con dos incógnitas (x = precio del viaje para Laura, y = precio para un adulto) que represente que el precio total del viaje son 1420 €.
- Escribe otra ecuación con las mismas incógnitas donde se refleje que el viaje de Laura es 110 € más barato que el de uno de sus padres.
- Despeja x de que te ha costado a Laura el viaje en ambas ecuaciones e iguala luego en una ecuación las dos expresiones que has obtenido para el precio del viaje de Laura.
- Resuelve la ecuación obtenida en la cuestión anterior. ¿Cuál es el precio del viaje de uno de sus padres?
- Utiliza una de las ecuaciones iniciales y el precio ya conocido para saber cuánto cuesta el viaje de Laura.

Recuerda y resuelve

● **Cómo se representan rectas en el plano.**

Para representar la recta $y = 2x + 1$ en el plano, construimos una tabla de valores y a partir de la representación de dos de sus puntos, se traza la recta que pasa por ambos.

x	y
-1	-1
2	5

$y = 2x + 1$ $2 \cdot (-1) + 1 = -1$ $2 \cdot 2 + 1 = 5$

1 Construye una tabla de valores para las siguientes funciones:

- $y = 2x + 4$
- $y = x - 1$
- $y = x + 3$
- $y = -x + 2$
- $y = -2x - 3$

2 Representa en el plano las siguientes rectas:

- $y = x - 3$
- $y = 4x - 1$
- $y = -2x - 2$
- $y = -x + 3$
- $y = -9x - 1$

● **Qué son las soluciones de una ecuación.**

Las soluciones de una ecuación son los valores que toman las incógnitas para que se cumpla la igualdad.

Por ejemplo:

- $2x + 1 = 5$; $x = 2$ es solución: $2 \cdot 2 + 1 = 5$.
- $x + y + z = 4$; $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$ son soluciones: $1 + 1 + 2 = 4$. También son soluciones $x = 2$, $y = 1$, $z = 1$, ya que $2 + 1 + 1 = 4$.

3 Comprueba si $x = 1$ e $y = 0$ son soluciones de las siguientes ecuaciones:

- $y + x = 1$
- $3x - (-4y) = 3$
- $2x^2 + 4y = 3$
- $(x - y) \cdot (y^2 - x^2) = -1$

4 Encuentra dos soluciones de cada una de estas ecuaciones:

- $x + y = 5$
- $x + y + z = 5$
- $x^2 + y = 3$
- $x^2 = 1$

● **Qué son las ecuaciones compatibles e incompatibles.**

Una ecuación es compatible si tiene solución e incompatible en caso contrario.

Por ejemplo:

- $x + 1 = 0$ es compatible, ya que $x = -1$ es su solución.
- $x^2 = -1$, es incompatible porque ningún número al cuadrado es negativo.

5 Estudia la compatibilidad de las siguientes ecuaciones:

- $x + 5x = 1$
- $x + y = 0$
- $2x^2 - x + 4 = 0$
- $2x - 3y = -1$

Sistemas de ecuaciones 107

- 2) Durante todo el tema se podrá observar el mismo esquema.
 - a. Se respetan unos márgenes laterales muy grandes (con la idea, según la propia editorial, de que el discente pueda

tomar anotaciones en los mismos si lo necesita). En dichos márgenes también se pueden encontrar ciertos cuadros con ideas que se quieren resaltar, ampliaciones y observaciones de los contenidos que se exponen en la parte central de las páginas, destacando los errores más frecuentes, el cálculo mental o con la calculadora. Tan sólo en alguna ocasión también serán utilizados para planteamiento de alguna actividad (ejercicio).

1 Ecuaciones lineales con dos incógnitas

Observa y resuelve

Ana tiene en su casa, entre perros y gatos, 10 animales.
¿Podemos saber el número de animales de cada especie que tiene?

Ten en cuenta

Cuando resolvemos un problema mediante una ecuación, todas las soluciones de la ecuación no lo son necesariamente del problema.

Tenemos que comprobar que las soluciones se adaptan al contexto. En nuestro ejemplo las incógnitas representan un número de animales y, por tanto, no tienen sentido los números negativos o los números decimales, como, por ejemplo, $x = -2$, $y = 12$ o $x = 1,5$, $y = 8,5$.

Llamamos x al número de perros y y al número de gatos, tenemos que:

$$x + y = 10$$

Para resolverla se despeja una de las incógnitas, $y = 10 - x$, y se le da valor a la otra:

x	-2	1,5	2	4	6	8
$y = 10 - x$	12	8,5	8	6	4	2

Observa que podemos obtener infinitas soluciones que cumplan la ecuación. Por lo que no podemos saber el número de animales de cada especie que tiene.

- Una **ecuación lineal con dos incógnitas** es una ecuación polinómica de primer grado que se puede expresar en la forma $ax + by = c$, donde a , b y c son números reales.
- Una **solución** de una ecuación lineal con dos incógnitas es un par ordenado (x_0, y_0) que satisface la ecuación, es decir que cumple $ax_0 + by_0 = c$.
- Una ecuación lineal con dos incógnitas tiene **infinitas soluciones**.

EJERCICIOS RESUELTOS

1 Determina si las siguientes ecuaciones con dos incógnitas son lineales.

a) $x + y + z = 0$. No lo es porque posee tres incógnitas.

b) $2x - 2 = y \Rightarrow 2x - y = 2$. Es una ecuación lineal con dos incógnitas.

c) $x^2 + y = 1$. No lo es porque no es lineal; la incógnita x aparece al cuadrado.

2 Encuentra cinco soluciones a la ecuación $\frac{x}{2} + y = 5$.

x	-2	0	2	4	10
$y = 5 - \frac{x}{2}$	6	5	4	3	0
Solución	$x = -2, y = 6$	$x = 0, y = 5$	$x = 2, y = 4$	$x = 4, y = 3$	$x = 10, y = 0$

Actividades

1 • Expresa mediante una ecuación:

a) La edad de Felipe es la mitad que la de su padre.

b) Entre chicos y chicas somos 30 en clase.

c) Necesito el doble de mi paga más el triple de la tuya para comprar dos entradas a un concierto que cuestan 50 €.

d) Marcos se ha gastado 97 € en comprar pantalones y camisetas en las rebajas.

2 • Busca cinco soluciones de cada una de estas ecuaciones:

a) $2x - 3y = 0$

b) $x - y = 0$

c) $\frac{x}{3} + 2y = 5$

d) $10x + 30y = 10$

3 • Determina si las siguientes ecuaciones son lineales:

a) $3(x + y) = x$

b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$

108
UNIDAD 7

1 Ecuaciones con dos incógnitas

1.1. Ecuaciones lineales con dos incógnitas

Piensa y deduce

Dos amigos pagan 9 € por 1 bocadillo y 3 refrescos iguales.

- Con estos datos, ¿se puede saber con certeza el precio de un bocadillo y el de un refresco?
- Propón distintas soluciones a la siguiente pregunta: «¿Cuáles son los respectivos precios de un bocadillo y de un refresco?».

Si traducimos al lenguaje algebraico el enunciado «un bocadillo y tres refrescos cuestan 9 €», tenemos una ecuación en la que aparecen dos incógnitas: b , el precio de un bocadillo, y r , el precio de un refresco:

$$b + 3r = 9$$

La ecuación anterior tiene infinitas soluciones; basta con dar un valor a r o a b y resolver la ecuación resultante para averiguar el valor de la otra incógnita. Así, por ejemplo, para $r = 1$:

$$b + 3 \cdot 1 = 9 \xrightarrow{\text{Despejando } b} b = 9 - 3 = 6$$

Tenemos, por tanto, que el par de valores $r = 1$ y $b = 6$ es una solución de la ecuación $b + 3r = 9$.

Lógicamente, para cada valor que demos a r , por el mismo procedimiento, podemos obtener el valor de b , y viceversa.

Una **ecuación lineal con dos incógnitas** es una ecuación de primer grado con dos incógnitas. Su expresión general es:

$$ax + by = c$$

Donde a , b y c son cantidades conocidas y $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Este tipo de ecuaciones tiene infinitas soluciones, ya que para cada valor que se le dé a x , se obtiene el correspondiente de y , y viceversa.

1.2. Sistemas de ecuaciones

Si al enunciado «un bocadillo y tres refrescos cuestan 9 €», añadimos que «la diferencia entre el precio de un bocadillo y el de un refresco es 1 €», tenemos que el precio del bocadillo, b , y el de un refresco, r , tienen que cumplir dos ecuaciones simultáneamente:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ bocadillo y 3 refrescos cuestan } 9 \text{ €} \\ \text{La diferencia entre el precio de 1 bocadillo} \\ \text{y el de 1 refresco es } 1 \text{ €} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow b + 3r = 9 \\ \rightarrow b - r = 1 \end{array}$$

Un **sistema de dos ecuaciones de primer grado** con dos incógnitas está formado por dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que se tienen que verificar para los mismos valores de las incógnitas. Es de la forma:

$$\left. \begin{array}{l} ax + by = 0 \\ a'x + b'y = 0 \end{array} \right\}$$

3.2. Método de igualación

El método de igualación consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e **igualar** las expresiones obtenidas. Fíjate en los pasos que hay que seguir para aplicar este método en la resolución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x + 5y = -2 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

1. Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones.

Elegimos la y porque eso simplifica los cálculos:

$$y = \frac{-2 - 3x}{5} \quad y = 1 - 2x$$

2. Se igualan las dos expresiones obtenidas en el paso anterior y se obtiene una ecuación con una incógnita.

$$\frac{-2 - 3x}{5} = 1 - 2x$$

3. Se resuelve la ecuación obtenida en el paso anterior. Se halla así el valor de una de las incógnitas.

$$-2 - 3x = 5 - 10x \Rightarrow 7x = 7 \Rightarrow x = 1$$

4. Para calcular el valor de la otra incógnita, se sustituye el valor obtenido en la expresión del primer paso en que aparece la incógnita despejada.

$$y = 1 - 2x \Rightarrow y = 1 - 2 \cdot 1 \Rightarrow y = -1$$

5. Se expresa la solución del sistema y se comprueba en el sistema de ecuaciones original.

Así, la solución es $x = 1$ e $y = -1$. Finalmente se comprueba la solución:

$$\begin{cases} 3x + 5y = -2 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) = -2 \\ 2 \cdot 1 + (-1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 - 5 = -2 \\ 2 - 1 = 1 \end{cases}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

- 5 Resuelve por igualación:

$$\begin{cases} x - 2(1 - y) + 7 = 0 \\ \frac{x+2}{5} + y = -3 \end{cases}$$

Para empezar, se eliminan los paréntesis y los denominadores en las ecuaciones a fin de expresar el sistema en la forma habitual:

$$\begin{cases} x - 2 + 2y + 7 = 0 \\ x + 2 + 5y = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = -5 \\ x + 5y = -17 \end{cases}$$

1. Se despeja la x en ambas ecuaciones: $x = -5 - 2y$; $x = -17 - 5y$
2. Se igualan las expresiones obtenidas: $-5 - 2y = -17 - 5y$
3. Se resuelve: $5y - 2y = -17 + 5 \Rightarrow 3y = -12 \Rightarrow y = -4$
4. Se sustituye el valor de y para calcular el de x :
 $x = -5 - 2y \Rightarrow x = -5 - 2 \cdot (-4) \Rightarrow x = 3$
5. Las soluciones son, por tanto, $x = 3$ e $y = -4$.

Compruébalo ahora tú sustituyendo en las ecuaciones originales.

Ten en cuenta

Es conveniente que elijas como incógnita para despejar aquella que simplifique los cálculos. Fíjate, por ejemplo, en este sistema:

$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 4x + y = 3 \end{cases}$$

Si se despeja la x , se obtiene:

$$x = \frac{4 - y}{3}; x = \frac{3 - y}{4}$$

y la ecuación que hay que resolver será:

$$\frac{4 - y}{3} = \frac{3 - y}{4}$$

Por el contrario, si se despeja la y , tenemos que:

$$y = 4 - 3x; y = 3 - 4x$$

y la ecuación que se ha de resolver será:

$$4 - 3x = 3 - 4x$$

Como vemos, en este caso, elegir la incógnita y para despejar simplifica el proceso.

Actividades

16. Resuelve los siguientes sistemas por igualación:

a) $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 3y = -15 \\ x + 5y = 17 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ 2x + 5y = 13 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2(x - 3) - 3(y - 1) = 0 \\ \frac{x}{6} - y = 1 \end{cases}$

1.2. El desarrollo del cuerpo central de las páginas es el lugar donde se exponen los contenidos propios del currículo. Tras el título de cada apartado, se podrán encontrar sub-apartados. Además de la teoría y explicaciones, la editorial plantea unos recuadros bien enmarcados, denominados “Piensa y deduce” u “observa y resuelve”, planteados como herramientas para promover la actitud crítica y reflexiva de los alumnos. Este proyecto (Adarve) de la editorial Oxford, intenta trabajar de este modo una línea constructivista del aprendizaje combinada con la exposición teóricatradicional. En las explicaciones teóricas enmarcan, con cuadros de fondos azulados, los puntos teóricos más importantes e intercala ejercicios resueltos, para que el alumno pueda aprender con la lectura de los mismos.

2. Sistemas de ecuaciones lineales

Resolución gráfica

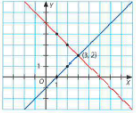
Al representar gráficamente las dos ecuaciones de un sistema, la solución del sistema son los puntos que tengan en común las dos rectas. Por ejemplo:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$$

Otendremos varias soluciones de las ecuaciones lineales dándole valores a la x :

x	1	2	3
y	4	3	2

x	1	2	3
y	0	1	2



El punto que tienen en común ambas rectas es el (1, 2); por tanto, la solución del sistema es $x=1, y=2$.

Observa y resuelve

Representa las siguientes ecuaciones en un mismo plano:

a) $x+y=1$
b) $x-y=0$

¿Qué tienen en común?

Las dos ecuaciones tienen un punto en común $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, que es el punto de corte de las dos rectas y representa la solución a un sistema de ecuaciones formado por ambas ecuaciones.

Dos ecuaciones lineales forman un sistema de ecuaciones lineales cuando se pretende hallar las soluciones que tienen en común:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

Una solución de un sistema de ecuaciones lineales es un par (x_0, y_0) que es solución de ambas.

EJERCICIOS RESUELTOS

3 Comprueba si alguno de los pares de soluciones (5, 25) y (20, 10) es solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y=30 \\ x-2y=0 \end{cases}$$

Sustituimos las posibles soluciones en las ecuaciones del sistema:

1. (5, 25) $\Rightarrow x_0=5$ e $y_0=25$:
 $x+y=30 \Rightarrow 5+25=30$. Es solución de la primera ecuación.
 $x-2y=0 \Rightarrow 5-2 \cdot 25 = -45$. No es solución de la segunda ecuación.
 El par (5, 25) no es solución del sistema.

2. (20, 10) $\Rightarrow x_0=20$ y $y_0=10$:
 $x+y=30 \Rightarrow 20+10=30$. Es solución de la primera ecuación.
 $x-2y=0 \Rightarrow 20-2 \cdot 10=0$. Es solución de la segunda ecuación.
 El par (20, 10) es solución del sistema.

Actividades

1 Di cuál de los siguientes sistemas constituye un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

a) $2x-y=8z$ b) $4x^2-5y=6$ c) $-2x-x=5^2$
 $7x+3y=5$ $2x-4y=-1$ $5x+8y=1$

2 Representa gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones y encuentra su solución:

a) $5x+3y=-1$ b) $2x-y=-3$
 $5x-y=3$ $x+3y=-5$

110 UNIDAD 7

2.1. Sistemas equivalentes

Comprueba cómo los siguientes sistemas tienen la misma solución, $x=1$ e $y=2$:

$$\begin{cases} x-y=-1 \\ y-3x=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=3 \\ y=2x \end{cases}$$

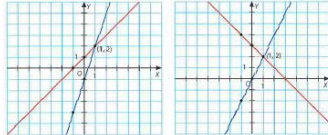
Por eso, ambos sistemas son equivalentes.

Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si tienen la misma solución.

Si representamos gráficamente los sistemas anteriores mediante una tabla de valores, tenemos:

$x-y=-1$	x	-1	0	1	
	y	$x+1$	0	1	2
$y-3x=-1$	x	-1	0	1	
	y	$3x-1$	-4	-1	2

$x+y=3$	x	-1	0	1	
	y	$3-x$	4	3	2
$y=2x$	x				
	y	$2x$	-2	0	2



Las rectas que representan a estos sistemas equivalentes son distintas y se cortan en el mismo punto (1, 2), que es la solución a los dos sistemas.

Existen distintas técnicas para obtener un sistema equivalente a uno dado:

- Se puede sustituir una de sus ecuaciones por otra equivalente a ella. Por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x+2y=8 \\ 3x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ 3x-y=1 \end{cases}$$

Se divide entre dos los dos miembros de la 1ª ecuación.
- Es posible también sustituir una de sus ecuaciones por el resultado de sumar miembro a miembro las dos ecuaciones. Por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x-y=1 \\ 3x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=1 \\ 5x=5 \end{cases}$$

Se suma la 2ª ecuación por la suma de la 1ª más la 2ª.
- Se sustituye una incógnita en una ecuación por la expresión resultante de despejar esa misma incógnita en la otra ecuación. Por ejemplo:

$$\begin{cases} -x+y=3 \\ 3x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-3 \\ 3(y-3)-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-3 \\ 2y=10 \end{cases}$$

Se despeja x en la 1ª ecuación y se sustituye en la 2ª.

Actividades

1 ●●● Dos pares de sistemas son equivalentes. Averigua qué transformaciones se han realizado:

a) $6x-5y=8$ $6x=3+5y$
 $-4x+2y=10$ $-2x+y=5$

b) $x-4y=8$ $x-4y=-8$
 $7x+y=3$ $8x-3y=-5$

c) $10x-7y=4$ $10x-35+14y=4$
 $2x+y=5$ $y=5-2x$

2 ● Comprueba si $x=3$ e $y=-2$ es solución de:

a) $2x+y=4$ $x-4y=13$
 $9x+7y=13$

b) $-5x-10y=5$
 $-4x-4y=1$

c) $8x-y=0$
 $4x+6y=1$

d) $-2x+y=-8$
 $-x+6y=-15$

Sistemas de ecuaciones 111

1.3. Funciones mediante su expresión algebraica

Piensa y deduce

Una compañía telefónica cobra 90 céntimos por establecimiento de llamada y 5 céntimos por minuto.

Escribe una fórmula que relacione la variable independiente *duración de la llamada* (x) y la variable dependiente *coste de la llamada* (y).

La manera matemática por excelencia de expresar una función es mediante su expresión algebraica, en la cual aparece por lo general la variable dependiente despejada y al otro lado del igual una expresión que utiliza la variable independiente.

Diremos que y está en función de x y lo expresamos así: $y=f(x)$.

Para un valor cualquiera x , diremos que $f(x)$ es su imagen.

EJERCICIOS RESUELTOS

3 Para calcular el precio de venta al público de un artículo, un comerciante A duplica el precio de coste y posteriormente le suma 3 €. Otro comerciante, B, duplica el precio de coste después de aumentarle 3 €. Calcula la expresión algebraica de ambas funciones y los precios de venta al público de un artículo que tenga un coste de 10 €.

Llamamos x al precio de coste e y al precio de venta al público.

Para el comerciante A tendríamos: $y=2x+3$ o también $f(x)=2x+3$.

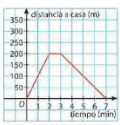
Para el comerciante B tendríamos: $y=2(x+3)$ o también $g(x)=2(x+3)$. Utilizamos la letra g para no confundir esta función con la función f .

Para el comerciante A, el precio de venta al público de un artículo con un precio de coste de 10 € sería $f(10)=2 \cdot 10+3=23$ €.

Para el comerciante B sería $g(10)=2(10+3)=26$ €.

Actividades

1 ●●● Lucía sale de su casa, camina hasta un puesto de periódicos cercano, compra una revista y regresa a su casa. La gráfica representa la distancia a la que Lucía se encuentra de su casa durante el recorrido descrito.



a) Indica cuál es la variable dependiente y cuál la variable independiente.

b) ¿A qué distancia de su casa se encontraba Lucía al cabo de 1 min, 3 min, 5 min y 7 min?

c) ¿A qué distancia de la casa de Lucía está el puesto de periódicos? ¿Cuánto tiempo se entretuvo comprando?

2 ●●● Calcula $f(-2)$, $f(0)$, $f(0.5)$ y $f(3)$ para cada función:

a) $f(x)=3x$ b) $f(x)=2x^2-1$ c) $f(x)=\frac{2}{x-1}$

3 ●●● Se pretende llenar un depósito de 500 l de gasolina con una manguera, conectada a un camión cisterna, cuyo caudal se puede regular con una llave de paso:

a) ¿Es la relación *caudal de la manguera-tiempo de llenado* una función?

b) Construye una tabla de valores en la que se refleje el tiempo de llenado para los siguientes caudales: 10 L/min, 25 L/min, 50 L/min y 100 L/min.

4 ●●● Haz la gráfica aproximada de la función *caudal-tiempo de la actividad 3*.

5 ●●● Se desea acotar una zona rectangular con una cuerda de 50 m.

a) Indica las dimensiones de cinco posibles rectángulos.

b) Escribe la expresión algebraica que permite calcular la altura de uno de esos rectángulos en función de la base y haz la representación gráfica de dicha función.

Dos ecuaciones lineales forman un sistema de ecuaciones lineales cuando se pretende hallar las soluciones que tienen en común:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Una solución de un sistema de ecuaciones lineales es un par (x_0, y_0) que es solución de ambas.

1.3. Funciones mediante su expresión algebraica

Piensa y deduce

Una compañía telefónica cobra 90 céntimos por establecimiento de llamada y 5 céntimos por minuto.

Escribe una fórmula que relacione la variable independiente *duración de la llamada* (x) y la variable dependiente *coste de la llamada* (y).

La manera matemática por excelencia de expresar una función es mediante su expresión algebraica, en la cual aparece por lo general la variable dependiente despejada y al otro lado del igual una expresión que utiliza la variable independiente.

Diremos que y está en función de x y lo expresamos así: $y = f(x)$.

Para un valor cualquiera x , diremos que $f(x)$ es su imagen.

EJERCICIOS RESUELTOS

3 Para calcular el precio de venta al público de un artículo, un comerciante A duplica el precio de coste y posteriormente le suma 3 €. Otro comerciante, B , duplica el precio de coste después de aumentarle 3 €. Calcula la expresión algebraica de ambas funciones y los precios de venta al público de un artículo que tenga un coste de 10 €.

Llamamos x al precio de coste e y al precio de venta al público.

Para el comerciante A tendríamos: $y = 2x + 3$ o también $f(x) = 2x + 3$.

Para el comerciante B tendríamos: $y = 2(x + 3)$ o también $g(x) = 2(x + 3)$. Utilizamos la letra g para no confundir esta función con la función f .

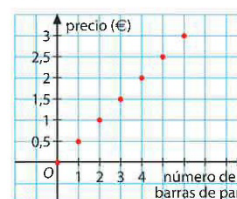
Para el comerciante A , el precio de venta al público de un artículo con un precio de coste de 10 € sería $f(10) = 2 \cdot 10 + 3 = 23$ €.

Para el comerciante B sería $g(10) = 2(10 + 3) = 26$ €.

Ten en cuenta

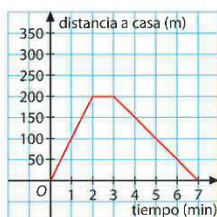
Si la variable independiente no admite ningún decimal, la gráfica de esta función serán puntos aislados que no se pueden unir entre sí.

Por ejemplo, en la siguiente gráfica el número de barras de pan no puede ser decimal:



Actividades

1 ● Lucía sale de su casa, camina hasta un puesto de periódicos cercano, compra una revista y regresa a su casa. La gráfica representa la distancia a la que Lucía se encuentra de su casa durante el recorrido descrito.



a) Indica cuál es la variable dependiente y cuál la variable independiente.

b) ¿A qué distancia de su casa se encontraba Lucía al cabo de 1 min, 3 min, 5 min y 7 min?

c) ¿A qué distancia de la casa de Lucía está el puesto de periódicos? ¿Cuánto tiempo se entretuvo comprando?

2 ● Calcula $f(-2)$, $f(0)$, $f(0,5)$ y $f(3)$ para cada función:

a) $f(x) = 3x$ **b)** $f(x) = 2x^2 - 1$ **c)** $f(x) = \frac{2}{x-1}$

3 ● Se pretende llenar un depósito de 500 L de gasóleo con una manguera, conectada a un camión cisterna, cuyo caudal se puede regular con una llave de paso:

a) ¿Es la relación *caudal de la manguera-tiempo de llenado* una función?

b) Construye una tabla de valores en la que se refleje el tiempo de llenado para los siguientes caudales: 10 L/min, 25 L/min, 50 L/min y 100 L/min.

4 ●● Haz la gráfica aproximada de la función *caudal-tiempo* de la actividad 3.

5 ●●● Se desea acotar una zona rectangular con una cuerda de 50 m.

a) Indica las dimensiones de cinco posibles rectángulos.

b) Escribe la expresión algebraica que permite calcular la altura de uno de esos rectángulos en función de la base y haz la representación gráfica de dicha función.

3.1. Método de sustitución

El método de sustitución consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y **sustituirla** en la otra ecuación. Veamos a continuación los pasos que hay que seguir para aplicar este método en la resolución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 5y = 6 \end{cases}$$

1. Se despeja una incógnita cualquiera en una de las ecuaciones.

Despejamos la x de la 2.ª ecuación: $x = 6 - 5y$

2. Se sustituye en la otra ecuación la incógnita despejada en el paso anterior y se obtiene así una ecuación con una incógnita.

Sustituimos en la 1.ª ecuación la x por la expresión $6 - 5y$:

$$2(6 - 5y) - 3y = -1$$

3. Se resuelve la ecuación obtenida en el paso anterior. Así determinamos el valor de una de las incógnitas.

$$2(6 - 5y) - 3y = -1 \Rightarrow 12 - 10y - 3y = -1 \Rightarrow -13y = -13 \Rightarrow y = 1$$

4. Para hallar el valor de la otra incógnita, se sustituye el valor obtenido en la expresión en que aparece la incógnita despejada del primer paso.

Sustituimos el valor de y obtenido previamente en la expresión del paso 1:

$$x = 6 - 5y \Rightarrow x = 6 - 5 \cdot 1 \Rightarrow x = 1$$

5. Se expresa la solución del sistema y se comprueba en el sistema.

Por tanto, la solución es $x = 1$ e $y = 1$. Comprobamos la solución:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 5y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = -1 \\ 1 + 5 \cdot 1 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 3 = -1 \\ 1 + 5 = 6 \end{cases}$$

- b. Cada uno de los epígrafes concluye con una serie de actividades en las que se trabajan los contenidos explicados, que se gradúan en tres niveles atendiendo a su dificultad. Símbolo distinto llevan las que están planteadas para el trabajo del cálculo mental. Lo mismo ocurre con las que se deben hacer con la calculadora.

Actividades

119 • Dada la ecuación $3x - 5y = 2$, añade una ecuación para que el sistema resultante sea:

- a) Compatible determinado.
- b) Incompatible.
- c) Compatible indeterminado.

120 • Indica el número de soluciones que tienen los siguientes sistemas de ecuaciones.

- | | |
|--|---|
| a) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ | d) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$ |
| b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$ | e) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$ |
| c) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x + 2y = 4 \end{cases}$ | f) $\begin{cases} x + y = 3 \\ -x - y = 3 \end{cases}$ |

Comprueba, a continuación, tu respuesta representando las rectas que determina cada ecuación.

121 • Escribe un sistema compatible indeterminado que tenga el par $(0, 0)$ entre sus soluciones.

122 • Escribe un sistema compatible determinado que tenga el par $(-2, -3)$ como solución.

123 •• Copia en tu cuaderno y completa estos sistemas para que sean del tipo que se indica:


- a) Compatible determinado: $\begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ -10x - \square y = -2 \end{cases}$
- b) Compatible indeterminado: $\begin{cases} -6x + 2y = 10 \\ \square x + y = \square \end{cases}$
- c) Incompatible: $\begin{cases} 4x - 3y = -1 \\ 2x + \square = \square \end{cases}$

Actividades

E28 • Halla dos números que sumen 125 y cuya diferencia sea 55.

E29 • Encuentra dos números cuya suma sea 150 y cuya diferencia sea el triple del menor de ellos.

E30 • Raúl compra chucherías en su tienda favorita y paga 2,30 € con monedas de 50 cent y de 10 cent. Si entrega al dependiente 11 monedas en total, ¿cuántas monedas de cada valor ha utilizado?

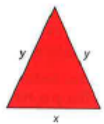


E31 • Se han vendido 4800 entradas para un concierto. La localidad de pie vale 12 € y la de asiento cuesta 18 € más. Si se han recaudado 109800 €, ¿cuántas localidades de cada tipo se han vendido?

E32 • En una fábrica se empaquetan chicles de dos en dos y de diez en diez. Se han introducido 9000 chicles en 4200 paquetes; ¿cuántos paquetes de cada clase se han utilizado?

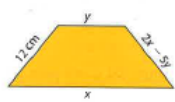
E33 • Las dos cifras de un número suman 14. Halla dicho número, sabiendo que, si se invierte el orden de sus cifras, aumenta en 18 unidades.

E34 • En un triángulo isósceles, cada uno de los lados iguales mide 3 cm menos que el doble del lado desigual, y su perímetro es igual a 39 cm. Calcula la medida de cada lado.



E35 • La diferencia entre las longitudes de las bases mayor y menor de un trapecio isósceles es igual a 6 cm, su altura mide 8 cm, y el área, 72 cm². Halla la medida de las bases.

E36 • Halla la longitud de las bases del siguiente trapecio isósceles, sabiendo que su perímetro mide 49,6 cm.



E37 • En un número de dos cifras, la de las unidades menos la tercera parte de la de las decenas es igual a cero. Si se invierten las cifras, la diferencia entre los dos números es 54. Calcula el número inicial.

E38 • Si se incrementa en 3 m el ancho de un campo rectangular y en 6 m su largo, el área aumenta en 474 m²; en cambio, si se reduce su ancho en 2 m y su largo en 5 m, el área del campo se reduce en 340 m². Calcula sus dimensiones.


E39 • Yolanda y Jesús se han comprado cada uno un disco rebajado. A Yolanda le han hecho un 15% de descuento, y a Jesús, un 18%. Si han pagado por los dos discos 29,15 € en vez de los 35 € que hubieran costado sin descuento, ¿qué precio tiene cada disco después de la rebaja?

E40 • En una tienda venden té de canela a 50 €/kg y té de manzana a 40 €/kg. En la misma tienda podemos adquirir una mezcla de ambos por 43 €/kg. ¿Qué proporción de cada tipo de té contiene la mezcla?

E41 • En un viaje de estudios, 64 estudiantes se alojan en un albergue que tiene habitaciones de 6 y 8 plazas. Se han acomodado en 9 habitaciones; ¿cuántas han ocupado de cada tipo?

E42 • En un cajero automático hay billetes de 20 € y de 50 €. Si en total hay 5250 € y 165 billetes, ¿cuántos billetes hay de cada clase?

E43 • Un grupo de 75 alumnos y alumnas de 3.º de ESO van al Museo de Ciencias acompañados por 4 de sus profesores. El precio total de las entradas es de 249 €. ¿Cuánto cuesta cada tipo de entrada sabiendo que cada estudiante paga por la suya la mitad que cada profesor?



E44 • Supongamos dos números tales que cinco veces el primero más el doble del segundo es igual a trece y que quince veces el primero más seis veces el segundo es igual a treinta.

a) Plantea un sistema de ecuaciones para resolver el problema y compara los coeficientes y los términos independientes. ¿Cómo son? ¿Cuál será su solución?

b) Modifica los términos independientes para que el sistema tenga infinitas soluciones.

E45 • Cristina y Jorge están contando sus libros. Se percatan de que la décima parte de la diferencia es igual a 3 libros y de que si Cristina le da 10 libros a Jorge entonces solo tendrá 10 más que él. ¿Cuántos libros tiene cada uno?

Sistemas de ecuaciones **119**

3) La parte teórica del tema finaliza con el apartado “Estrategias para resolver problemas” en el que se exponen las habilidades necesarias para la resolución de problemas. Esta sección siempre va en página propia, que termina con varios enunciados de problemas, del mismo estilo al planteado, para que el alumno pueda practicar la estrategia explicada.

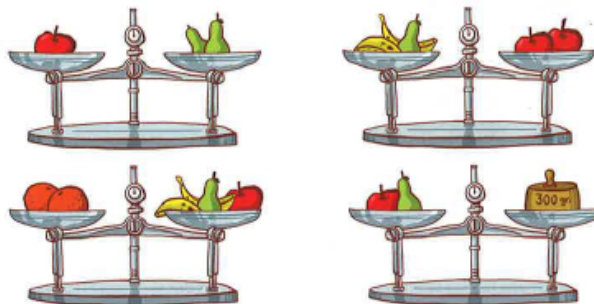
Estrategias para resolver problemas

Traducir el enunciado al lenguaje algebraico

Una forma de resolver un problema es traducir al lenguaje algebraico la situación de partida.

Problema

Ayuda a Carlos a resolver el pasatiempo que ha encontrado en el suplemento dominical del periódico:



¿Cuánto pesa cada pieza de fruta?

Resolución

1. Vamos a traducir al lenguaje algebraico la situación que expresa la ilustración.

Empecemos definiendo nuestras incógnitas:

x = peso de una manzana; y = peso de una naranja; z = peso de una pera; t = peso de una plátano

Traducimos al lenguaje algebraico lo que expresa cada balanza y tenemos que:

- Balanza 1: $x = 2z$
- Balanza 2: $z + 2t = 2x$
- Balanza 3: $2y = 2t + z + x$
- Balanza 4: $x + z = 300$

2. Como las cuatro balanzas están equilibradas, podemos agrupar en un sistema dos ecuaciones anteriores. Sin embargo, hay que agrupar dos ecuaciones que tengan las mismas incógnitas si queremos formar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Y, en efecto, las ecuaciones de la balanza 1 y la balanza 4 lo cumplen:

$$\begin{cases} x = 2z \\ x + z = 300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z \\ 2z + z = 300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z \\ 3z = 300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z \\ z = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 200 \\ z = 100 \end{cases}$$

3. Sustituimos en el resto de las ecuaciones los valores obtenidos:

$$\begin{aligned} z + 2t = 2x &\Rightarrow 100 + 2t = 400 \Rightarrow 2t = 300 \Rightarrow t = 150 \\ 2y = 2t + z + x &\Rightarrow 2y = 2 \cdot 150 + 100 + 200 \Rightarrow y = 300 \end{aligned}$$

4. Finalmente, redactamos la solución:

Una manzana pesa 200 g; una naranja, 300 g; una pera, 100 g, y un plátano, 150 g.



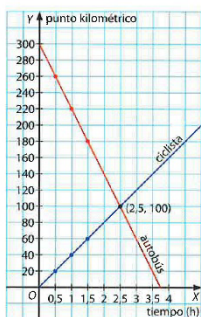
Otros problemas

- • Fíjate en las figuras de las balanzas del margen y averigua cuánto pesa cada figura.

Estrategias para resolver problemas

Representar gráficamente dos funciones

Una forma de resolver algunos problemas consiste en representar dos funciones en los mismos ejes de coordenadas y calcular el punto donde se cortan.



Problema

Entre dos ciudades A y B hay una distancia de 300 km. Desde A hasta B parte un ciclista a una velocidad constante de 40 km/h. Simultáneamente sale un autobús desde B hasta A a una velocidad de 80 km/h. Calcula a qué distancia de A se cruzan y el tiempo transcurrido.

Resolución

Escribimos las ecuaciones de las funciones que nos indican en qué punto kilométrico se encuentra cada vehículo a medida que transcurre el tiempo. Consideramos el tiempo la variable x y la distancia, la variable y .

Como tenemos que calcular la distancia desde A, fijamos el punto kilométrico 0 en A. La distancia recorrida en cada momento por el ciclista se calcula multiplicando la velocidad por el tiempo, es decir:

$$y = 40x$$

Como el autobús va en sentido contrario, al aumentar el tiempo debe disminuir la distancia que lo separa del kilómetro 0. Es decir, en el instante 0 estará a 300 km de A; al pasar una hora estará a $300 - 80 = 220$ km de A; al pasar dos horas, a $300 - 80 \cdot 2 = 140$ km, a las tres horas, a $300 - 80 \cdot 3 = 60$ km, etcétera.

En este caso, la función que relaciona la distancia a A con el tiempo es:

$$y = 300 - 80x$$

Representamos ambas funciones construyendo previamente una tabla de valores para cada vehículo:

CICLISTA		AUTOBÚS	
Tiempo (h)	Punto kilométrico	Tiempo (h)	Punto kilométrico
0,5	20	0,5	260
1	40	1	220
1,5	60	1,5	180

Observamos en el margen que ambas funciones se cortan en el punto (2,5, 100), es decir, cuando han pasado 2,5 h y en el punto kilométrico 100. Ese es el punto en el que el autobús y el ciclista se cruzarán.

Otros problemas

1 Luisa ha pedido dos presupuestos para arreglar su lavadora. La empresa Electrofácil le cobra 15 € por el desplazamiento más 30 €/h de mano de obra, mientras que la empresa Reparado cobra 10 € de desplazamiento y 40 €/h de mano de obra. Haz un estudio sobre cuál de las dos empresas resulta más barata según el tiempo de reparación.

2 Jorge tiene dos ofertas de trabajo como representante comercial. La empresa A le paga un sueldo fijo de 800 € más el 10% de sus ventas, mientras que la empresa B le ofrece un sueldo fijo de 1 200 € más el 5% de sus ventas. Haz un estudio sobre cuál de las dos empresas le ha hecho una oferta más interesante dependiendo de las ventas que consiga.

- 4) Al final de cada tema se presentan una serie de actividades (ejercicios y problemas) clasificados según los contenidos trabajados (no siempre siguiendo un idéntico desglose a los ítems del tema), que están marcados según el grado de dificultad de los mismos y con símbolos.
- 5) Los temas se cierran presentando una prueba llamada "Evaluación" que tiene como objetivo poder comprobar si los discentes han adquirido los contenidos y capacidades esperados en la unidad.

Ejercicios y problemas

34 ●● Halla un número de dos cifras tal que la suma de ambas sea 8 y que el doble del número sea 10 unidades menor que el número que se obtiene al invertir sus cifras.

35 ●● Al ir a repartirse unos bombones, unos amigos se dan cuenta de que, si cada uno coge 5 bombones, sobran 12, pero si cada uno coge 9, faltan 12. ¿Cuántos amigos son y cuántos bombones tienen para repartir?

36 ●●● Las cuatro cifras de un número capicúa suman 12. Si se intercambian las dos cifras de los extremos con las dos centrales, la diferencia entre el número resultante y el inicial es 1782. Calcula el número inicial.

37 ●●● El cociente exacto de dos números es igual a 4 y su producto es 676. Plantea un sistema y resuélvelo por sustitución.

38 ●●● Idea un problema que deba resolverse planteando un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de modo que:

a) Su solución sea $x = 20$ e $y = 30$.
 b) No tenga solución.
 c) Tenga infinitas soluciones.

39 ●●● El área de un rectángulo es igual a 15 cm^2 . Otro rectángulo tiene 6 cm de altura y una base igual a la suma de las dimensiones del primer rectángulo. Si el segundo rectángulo tiene 48 cm^2 de área, calcula las dimensiones del primero. Plantea un sistema y resuélvelo por sustitución.

40 ●●● Ángel y Carla acaban de tener un bebé. Ángel y el bebé pesan juntos 84 kg, y Carla y el bebé, 59 kg. Si Ángel y Carla juntos pesan 135 kg, ¿cuál es el peso de cada uno?

Evaluación

Identificas las soluciones de un sistema de ecuaciones

1 Comprueba cuál de los siguientes sistemas tiene por solución $x = -3$ e $y = 4$:

a) $\begin{cases} -3x - y = 5 \\ x + 5y = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 5y = -26 \\ -4x + 3y = 24 \end{cases}$

Averiguas si dos sistemas son equivalentes y obtienes sistemas equivalentes

2 Explica si los siguientes sistemas son equivalentes:

a) $\begin{cases} -5x + 3y = 12 \\ 2x - 4y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10x + 6y = 24 \\ 10x - 20y = 25 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -6x - 6y = 12 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = 2 \\ -4x - 5y = 12 \end{cases}$

3 Dado este sistema, escribe dos sistemas equivalentes que verifiquen lo que se indica en cada apartado:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ -9x + 6y = 3 \end{cases}$$

a) El coeficiente de x en una de las ecuaciones es igual a -7 .
 b) El coeficiente de y en una de las ecuaciones es 0.
 c) El término independiente en una de las ecuaciones es igual a 1.

Estudias la compatibilidad de un sistema sin resolverlo previamente y lo representas gráficamente

4 Estudia la compatibilidad de los siguientes sistemas sin resolverlos previamente. Comprueba luego tus respuestas representándolos gráficamente.

a) $\begin{cases} 8x - 12y = 4 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -3x - 9y = 6 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$

Resuelves sistemas de ecuaciones

5 Resuelve estos sistemas utilizando el método más apropiado en cada caso.

a) $\begin{cases} y = 2x \\ x + 3 = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ 3x + 5y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 3y - 3 \\ x = \frac{y-1}{3} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - 2y = 14 \end{cases}$

6 Resuelve estos sistemas e indica de qué tipo son:

a) $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ -5x + 3y = 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = y + 3 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x - 3y = 0 \\ 9x + 4y = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x + 10y = -5 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

7 Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} -(2x + y) + 3x - 4 = -7x - y \\ 3(x - y) + 2 = -4(x + 1) + y + 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x - y}{3} + \frac{x + 8}{6} - \frac{y}{2} = \frac{1}{8} \\ \frac{x - y}{2} - \frac{x - 2y}{2} = \frac{1}{4} \end{cases}$

Resuelves problemas planteando sistemas de ecuaciones

8 El curso anterior, un instituto tenía 60 alumnos menos en 4.º de ESO que el doble de los que tenía en 3.º. Este curso tiene en 3.º un 20% menos que el curso anterior, y en 4.º un 20% más. Si este año hay un total de 200 alumnos entre los dos niveles.

■ ¿Cuántos alumnos de cada nivel había el curso anterior en el instituto?

Sistemas de ecuaciones **123**

- 6) Tras cada bloque de unidades se encuentran varias dobles páginas que bajo el título “Evaluación de competencias”, se pretenden comprobar si el alumno ha adquirido las capacidades y competencias básicas del curso. Esto se llevará a cabo por medio de uno o varios textos sobre alguna historia, noticia, curiosidad... relacionada con la vida cotidiana y que sirve para poder plantear, más tarde, preguntas en relación con la materia dada en dicho bloque, pudiendo, por medio de las mismas, realizar la evaluación correspondiente.

Una vez descrita la estructura general bajo la que se organizan los temas, destacamos algunas características más generales que creemos relevantes sobre la metodología seguida para presentar los contenidos a los alumnos:

- Cada nuevo concepto se presenta tras invitar al alumno a la reflexión.
- Los ejercicios que se presentan resueltos intentan seguir el esquema explicado en la teoría.
- Las anotaciones hechas en los márgenes son de gran importancia.

1.3. Modelos de aprendizaje

Un modelo de aprendizaje es un entorno y metodología, creada por el profesor, con el objetivo de que el proceso de enseñanza aprendizaje concluya con éxito. Aunque el profesor, en la realidad estudiada, basa su enseñanza en un modelo supuestamente constructivista (el material al que recurre, libro de texto, fue diseñado basándose en esto puesto que la LOGSE y las leyes posteriores así lo marcaron), no logra que sea el propio alumno quien construya los conceptos matemáticos con los que se trabajan, partiendo de las reflexiones tras la manipulación de los ejemplos expuestos.

- El concepto de rectas está completamente oculto tras el método de cálculo.
- Destacan los conocimientos relativos a lo procedimental en detrimento de los de tipo conceptual (en ocasiones no son mencionados o si lo hacen aparecen referidos someramente, sin resaltar la importancia). Abundan los recuadros o explicaciones en los que se presentan métodos, fórmulas, procedimientos...
- A la hora de resolver los sistemas por el método de reducción, queda abandonada la idea de nuestro “objetivo” y se recurre siempre a que se tiene que “sumar”, en vez de enseñar al alumno que lo importante es hacer cero un coeficiente y para ello se multiplican, dividen una o dos ecuaciones por lo que sea necesario, para que coincida el valor absoluto del coeficiente y luego se suman o restan las ecuaciones.

Ten en cuenta

Cuando se multiplica una ecuación por un número, hay que multiplicar sus dos miembros. Por ejemplo, si multiplicamos por -2 la ecuación:

$$2x - 3y = 2$$

es un error común hacer:

$$-4x + 6y = 2$$

en lugar de:

$$-4x + 6y = -4$$

3.3. Método de reducción

El método de reducción consiste en obtener sistemas equivalentes para conseguir **reducir** el sistema a una ecuación con una incógnita. Estudiemos los pasos que hay que seguir para aplicar este método con el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$$

- Se multiplica, o se divide, por el número adecuado las ecuaciones para conseguir que los coeficientes de una misma incógnita sean opuestos.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ x + 3y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ -3x - 9y = -3 \end{cases}$$

Se multiplica por (-3) los dos miembros de la 2.ª ecuación.

- Se suma miembro a miembro las ecuaciones.

Sumamos obteniendo una ecuación:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ -3x - 9y = -3 \\ \hline -5y = 5 \end{cases}$$

- Se resuelve la ecuación obtenida en el paso anterior. Hallamos así el valor de una de las incógnitas.

$$-5y = 5 \Rightarrow y = -1$$

- Para hallar el valor de la otra incógnita, se sustituye el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones iniciales.

Falta por obtener el valor de x ; para ello, se sustituye el valor de y en una de las ecuaciones iniciales y se resuelve:

$$x + 3y = -1 \Rightarrow x + 3 \cdot (-1) = -1 \Rightarrow x - 3 = -1 \Rightarrow x = 2$$

- Se expresa la solución del sistema y se comprueba en el sistema de ecuaciones original.

La solución es $x = 2$ e $y = -1$. Se comprueba finalmente la solución:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ x + 3y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) = 2 \\ 2 + 3 \cdot (-1) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 - 4 = 2 \\ 2 - 3 = -1 \end{cases}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

6 Resuelve por reducción:

$$\begin{cases} 10x + 7y = -4 \\ 6x + 5y = -4 \end{cases}$$

- Si queremos reducir la variable x , dejaremos como coeficiente común el mínimo común múltiplo de 10 y 6, es decir 30:

$$\begin{cases} 10x + 7y = -4 \\ 6x + 5y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cdot 3 \\ \cdot (-5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30x + 21y = -12 \\ -30x - 25y = 20 \end{cases}$$

- A continuación, sumamos las ecuaciones y resolvemos:

$$-4y = 8 \Rightarrow y = -2$$

- Repetimos el procedimiento con la incógnita y :

$$\begin{cases} 10x + 7y = -4 \\ 6x + 5y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cdot 5 \\ \cdot (-7) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 50x + 35y = -20 \\ -42x - 35y = 28 \end{cases}$$

- Sumamos después las ecuaciones y resolvemos:

$$8x = 8 \Rightarrow x = 1$$

- Las soluciones son, por tanto, $x = 1$ e $y = -2$. Compruébalo ahora tú sustituyendo en las ecuaciones originales.

Actividades

17 • Resuelve los siguientes sistemas por reducción:

- $\begin{cases} 3x - 2y = 9 \\ 2x + 2y = 26 \end{cases}$
- $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ x + 2y = -12 \end{cases}$
- $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 10x + 7y = 16 \end{cases}$
- $\begin{cases} \frac{x-2}{3} + \frac{y-1}{2} = 3 \\ 3x - 7y = -6 \end{cases}$

116
UNIDAD 7

- Como se mencionaba en el apartado de metodología, en los recuadros de “piensa y deduce” y “observa y resuelve” primero se plantea la pregunta que en algunos de los casos no se resuelve o la respuesta no se presenta con un razonamiento, sino como “acabada y sin trabajo previo”.

María Carrillo García

323

3 Función de proporcionalidad directa

Piensa y deduce

La siguiente tabla muestra el precio de los kilos de tomates según la cantidad que compramos.

Kilos tomates (x)	1	2	3	4	5
Precio (y)	1,5	3	4,5	6	7,5

¿Puedes escribir la expresión algebraica que relaciona ambas variables?

¿Qué característica observas?

Si en una función tomamos cualquier par ordenado de valores x y y , al dividir la variable dependiente entre la variable independiente, nos resulta siempre el mismo número, nos encontramos ante una **función de proporcionalidad directa**. Decimos que la variable dependiente es directamente proporcional a la variable independiente.

- La expresión algebraica es del tipo $y = mx$, en donde m es la llamada constante de proporcionalidad directa.
- La gráfica de una función de este tipo es una recta que pasa siempre por el origen de coordenadas.

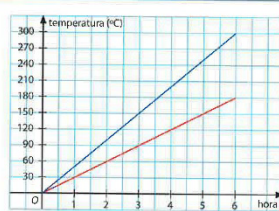
3.1. Pendiente de una recta

Piensa y deduce

La gráfica muestra el espacio recorrido por dos ciclomotores en diez minutos.

¿Cuál es la velocidad media de cada uno?

¿Quién es más rápido?

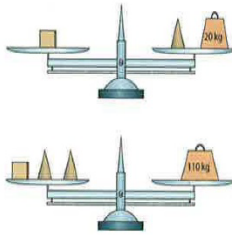


Al observar las gráficas de varias funciones lineales nos damos cuenta de que unas están más inclinadas que otras y que, por lo tanto, tienen distinta constante de proporcionalidad.

Cuando tratamos el aspecto gráfico, llamamos **pendiente** a la constante de proporcionalidad, que nos da información sobre el crecimiento de la recta.

- Si la pendiente es positiva, la recta es creciente. Dadas dos rectas, crece más rápidamente aquella que tenga mayor pendiente.
- Si la pendiente es negativa, la recta es decreciente. Dadas dos rectas, decrece más rápidamente aquella que tenga menor pendiente.
- La pendiente es la constante de proporcionalidad, luego la podemos calcular dividiendo la ordenada entre la abscisa de cualquier punto por el que pase la gráfica.

En otros casos la respuesta se encuentra como si fuese teoría, sin un espacio destacado, lo que hace que el alumno pierda la atención. Siendo esas explicaciones con frecuencia demasiado complicadas por lo que el discente no termina de leerlas.



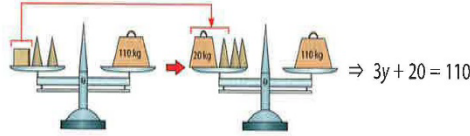
Piensa y deduce

Observa las dos balanzas del margen y deduce el peso del cubo y del cono.

Podemos considerar que las dos balanzas del *Piensa y deduce* constituyen el siguiente sistema lineal de dos ecuaciones, en el que x representa el peso del cubo e y , el del cono:

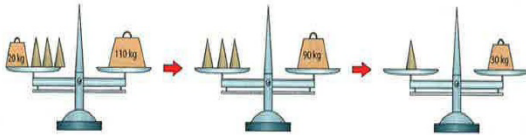
$$\left. \begin{aligned} x &= y + 20 \\ x + 2y &= 110 \end{aligned} \right\}$$

La primera balanza nos indica que un cubo pesa igual que un cono más 20 g. Por tanto, podemos sustituir el cubo de la segunda balanza por un cono y una pesa de 20 g:



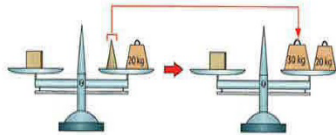
$\Rightarrow 3y + 20 = 110$

Ahora, calcular el peso de un cono es sencillo: basta con quitar 20 g en cada platillo y dividir entre 3 su contenido. En realidad se trata de resolver la ecuación $3y + 20 = 110$:



$3y + 20 = 110 \Rightarrow 3y = 110 - 20 = 90 \Rightarrow y = \frac{90}{3} = 30$

Por último, para calcular el peso del cubo, podemos sustituir el cono de la primera balanza por una pesa de 30 g:



$x = y + 20 \Rightarrow x = 30 + 20 = 50$

3

El nuevo concepto se intenta presentar por medio de estos ejemplos, que no suelen invitar al alumno a “descubrir” o “construir” el nuevo conocimiento por sí mismo.

1.4. Secuenciación de los contenidos

En este apartado vamos a presentar el orden en el que se disponen los contenidos y el espacio que ocupan (número de páginas) dedicado a cada uno de los epígrafes en los que se estructura el tema.

- El tema de “*Sistemas de Ecuaciones*” en segundo de Educación Secundaria Obligatoria se encuentra en el bloque de “Álgebra”, y el de “*Funciones*” en el de “Funciones y Estadística”.

En este curso se dedica un tema a aspectos relaciones con los sistemas de ecuaciones. En concreto se trata del décimo (de un total de dieciseis), titulado “Sistemas de ecuaciones”. Este tema se inserta justo después de los dedicados a las “Expresiones algebraicas” y

María Carrillo García

325

“Ecuaciones” y es el anterior al de “Funciones”. Los contenidos tratados en este tema (y el espacio dedicado a ellos) son los siguientes:

Tema 10: “Sistemas de Ecuaciones”:

- 1.- Ecuaciones con dos incógnitas (2 páginas)
 - 1.1 Ecuaciones lineales con dos incógnitas
 - 1.2 Sistemas de ecuaciones
- 2.- Resolución de un sistema de ecuaciones (4 páginas)
 - 2.1 Método de sustitución
 - 2.2 Método de igualación
 - 2.3 Método de reducción

- ❖ Estrategias para resolver problemas: Plantear un sistema de ecuaciones. (1 página):

Explica que “si en un problema intervienen dos incógnitas, suele resultar más cómodo resolver con un sistema de dos ecuaciones que mediante una única ecuación con una incógnita”.

Explica estos conceptos por medio de la resolución de un problema.

Ejercicios: Deja enunciados cinco problemas.

- ❖ Ejercicios y problemas. (3 páginas)
 - Ecuaciones de dos incógnitas
 - Actividades: 6
 - Problemas: 1
 - Sistemas de ecuaciones
 - Actividades: 13
 - Comprobación de las soluciones de un sistema: 1
 - Resolución de sistemas por el método de sustitución: 2
 - Resolución de sistemas por el método de igualación: 1
 - Resolución de sistemas por el método de reducción: 2
 - Resolución de sistemas por el método que se considere más adecuado: 4
 - Otros: 3
 - Problemas: 0
 - Problemas con sistemas de ecuaciones
 - Actividades: 0
 - Problemas: 19
 - Evaluación:
 - Actividades: 5
 - Problemas: 3

En este curso se dedica un tema a aspectos relacionados con las funciones. En concreto se trata del décimo primero (de un total de dieciséis), titulado “Funciones”. Este tema se inserta junto después de los dedicados al álgebra (ya mencionados) y es el anterior al de “Estadística”. Los contenidos tratados en este tema (y el espacio dedicado a ellos) son los siguientes:

Tema 11: “Funciones”:

- 1.- Concepto de función (2 páginas)
 - 1.1. Funciones mediante tablas
 - 1.2 Funciones mediante gráficas
 - 1.3 Funciones mediante su expresión algebraica
- 2.- Estudio gráfico de una función (2 páginas)
 - 2.1 Puntos de corte con los ejes
 - 2.2 Crecimiento. Máximos y mínimos.
- 3.- Función de proporcionalidad directa (2 páginas)
 - 3.1 Pendiente de una recta.
- 4.- Funciones lineales (2 páginas)
 - 4.1 Función lineal
 - 4.2 Función constante
- 5.- Funciones de proporcionalidad inversa. La hipérbola. (2 páginas)
 - 5.1 La hipérbola

- ❖ Estrategias para resolver problemas: Representar gráficamente dos funciones. (1 página)

Explica que “una forma de resolver algunos problemas consiste en representar dos funciones en los mismos ejes de coordenadas y calcular el punto donde se cortan”

Explica estos conceptos por medio de la resolución de un problema.

Ejercicios: Deja enunciados dos problemas.

- ❖ Ejercicios y problemas. (3 páginas)
 - Funciones: tablas. Gráficas y expresiones algebraicas
 - Estudio gráfico de una función
 - Funciones lineales, constantes y de proporcionalidad inversa
 - Evaluación

- El tema de “*Sistemas de Ecuaciones*” en tercero de Educación Secundaria Obligatoria se encuentra en el bloque de “Álgebra”, y el de “*Funciones*” y “*Función Lineal y Función Cuadrática*” en el de “Análisis, Estadística y Probabilidad”.

En este curso se dedica un tema a aspectos relaciones con los sistemas de ecuaciones. En concreto se trata del décimo primero (de un total de 16), titulado “Sistemas de ecuaciones”. Este tema se inserta junto después de los dedicados a los “Polinomios” y “Ecuaciones” y es el anterior al de “Lugares geométricos”. Los contenidos tratados en este tema (y el espacio dedicado a ellos) son los siguientes:

Tema 7: “Sistemas de Ecuaciones”:

- 1.- Ecuaciones con dos incógnitas (2 páginas)
 - 1.1 Representación gráfica
- 2.- Sistemas de ecuaciones lineales (4 páginas)
 - 2.1 Sistemas equivalentes

2.2 Número de soluciones de un sistema de ecuaciones

3.- Resolución de un sistema de ecuaciones (4 páginas)

3.1 Método de sustitución

3.2 Método de igualación

3.3 Método de reducción

4.- Resolución de problemas mediante sistemas (2 páginas)

- ❖ Estrategias para resolver problemas: Traducir al lenguaje algebraico”. (1 página)

Explica que “una forma de resolver un problema es traducir al lenguaje algebraico la situación de partida”.

Explica estos conceptos por medio de la resolución de un problema.

Ejercicios: Deja enunciado un problema.

- ❖ Ejercicios y problemas. (3 páginas)
 - Ecuaciones lineales con dos incógnitas
 - Actividades: 3
 - Problemas: 0
 - Resolución de sistemas de ecuaciones
 - Actividades: 5
 - Aplicación de métodos algebraicos (sustitución, igualación y reducción): 3 ejercicios
 - Clasificación de los sistemas dependiendo de las soluciones: 2
 - Resolución de problemas mediante un sistema de ecuaciones
 - Actividades: 0
 - Problemas: 28
 - Evaluación:
 - Actividades: 7
 - Problemas: 1

En este curso se dedican dos temas a aspectos relaciones con las funciones. En concreto se trata del décimo tercero y décimo cuarto (de un total de 16), titulados “Funciones” y “Función lineal y cuadrática”. Estos temas se insertan justo después de los dedicados a geometría y es el anterior al de “Estadística”. Los contenidos tratados en el primer tema son:

- 1.- Formas de expresar una función
- 2.- Dominio y puntos de corte
- 3.- Crecimiento. Máximos y mínimos
- 4.- Simetría, periodicidad y continuidad

Puesto que estos contenidos no son tratados exactamente en la temática de esta investigación, descartamos un estudio más profundo. En cambio, el otro tema de funciones sí.

Tema 14: “Función lineal y cuadrática”.

1. Función lineal (2 páginas)
 2. Pendiente y ordenada en el origen de una recta (2 páginas)
 3. Ecuación de una recta que pasa por dos puntos (2 páginas)
 4. Función cuadrática (2 páginas)
- ❖ Estrategias para resolver problemas: Examinar todas las posibilidades. (1 página)

Explica que “una forma de resolver un problema es explorar todas las posibles soluciones”

Explica estos conceptos por medio de la resolución de un problema.

Ejercicios: Deja enunciados dos problemas.

- ❖ Ejercicios y problemas. (3 páginas, incluida la “Evaluación”)

Destaca el hecho de que son muchos los ejercicios que buscan las relaciones de las expresiones algebraicas con las representaciones de las mismas, en los ejes de coordenadas.

- El tema de *Sistemas de Ecuaciones* en cuarto, opción B, de Educación Secundaria Obligatoria se encuentra en el bloque de “Álgebra”, y en de *Funciones* en el de “Funciones, Estadísticas y Probabilidad”.

En esta investigación llegados a este punto, en cuarto de la ESO no estudiaremos el tema de las Funciones (que además se divide en dos), pues los contenidos son de nivel superior a los necesarios para nuestro estudio (tan sólo se hace un pequeño repaso de las rectas para poder avanzar).

En el tema 4 “Sistemas de ecuaciones”, nos detenemos en el estudio de la resolución gráfica de sistemas de ecuaciones. Destaca el hecho de que intenta razonar el número de soluciones a través del estudio de las rectas (aunque no con el detalle que se podría).

3 Resolución gráfica de sistemas de ecuaciones

Piensa y deduce

La ecuación de primer grado $2x - y = 7$ tiene infinitas soluciones.

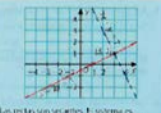
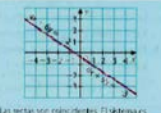
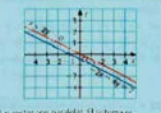
- Si representamos en el plano cartesiano los pares de valores (x, y) que son solución, ¿qué se obtiene?
- ¿Si representamos las soluciones de la ecuación $x - 2y = 1$, qué se obtiene?

Si en las ecuaciones hay tres incógnitas (x, y, z) , el conjunto de las soluciones se representa en el espacio con tres ejes de coordenadas.

Por eso no se resuelven gráficamente sistemas de ecuaciones con más de dos incógnitas.

Un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas se puede resolver gráficamente porque representa dos rectas en el plano.

Vamos a ver cuáles son las soluciones del sistema y, según sea la posición relativa de esas rectas, de qué tipo es dicho sistema.

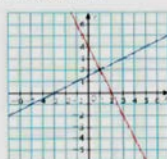
<p>Rectas secantes</p> <p>Las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas es el par de valores (x, y) que resuelve el sistema.</p> <p>Por tanto, el sistema tiene una solución: un sol; es compatible determinado.</p>	$2x - y = 7$ $x - 2y = 1$ <p>Puntos para representar $2x - y = 7$:</p> <ul style="list-style-type: none"> • $x = 2, y = 3 \rightarrow (2, 3)$ • $x = 1, y = 1 \rightarrow (1, 1)$ <p>Puntos para representar $x - 2y = 1$:</p> <ul style="list-style-type: none"> • $x = 1, y = 0 \rightarrow (1, 0)$ • $x = -1, y = -1 \rightarrow (-1, -1)$ 	 <p>Las rectas son secantes. El sistema es compatible determinado y tiene solución única: $x = 1, y = 1$.</p>
<p>Rectas coincidentes</p> <p>Tanto las ecuaciones como las rectas pertenecen a la misma recta que contiene a los puntos que verifican las ecuaciones. Tanto en ambas como en la gráfica coinciden los puntos.</p> <p>El sistema tiene infinitas soluciones y es compatible indeterminado.</p>	$4x + 4y = -2$ $4x + 5y = -3$ <p>Puntos para representar $4x + 4y = -2$:</p> <ul style="list-style-type: none"> • $x = 1, y = -1 \rightarrow (1, -1)$ • $x = 2, y = -2 \rightarrow (2, -2)$ <p>Puntos para representar $4x + 5y = -3$:</p> <ul style="list-style-type: none"> • $x = 1, y = -1 \rightarrow (1, -1)$ • $x = -2, y = 1 \rightarrow (-2, 1)$ 	 <p>Las rectas son coincidentes. El sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.</p>
<p>Rectas paralelas</p> <p>Las dos rectas no tienen ningún punto en común, ni en el plano ni en el espacio. Por tanto, el sistema no tiene solución y es incompatible.</p>	$-2x - 4y = 2$ $x + 2y = 0$ <p>Puntos para representar $-2x - 4y = 2$:</p> <ul style="list-style-type: none"> • $x = 1, y = -1 \rightarrow (1, -1)$ • $x = -2, y = 0 \rightarrow (-2, 0)$ <p>Puntos para representar $x + 2y = 0$:</p> <ul style="list-style-type: none"> • $x = 0, y = 0 \rightarrow (0, 0)$ • $x = 2, y = -1 \rightarrow (2, -1)$ 	 <p>Las rectas son paralelas. El sistema es incompatible y no tiene solución.</p>

Actividades

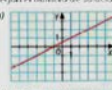
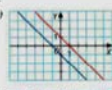
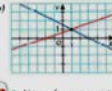
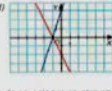
- 108** ● Calcula cuatro soluciones de cada ecuación y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

a) $2x - y = 3$	d) $\frac{3}{2}x - \frac{1}{3}y = 6$
b) $\frac{1}{5}x - 2y = -2$	e) $3x + 2y = 5$
c) $x + 3y = -1$	f) $-\frac{2}{3}x + 4y = -1$
- 109** ● Estudia gráficamente las posiciones relativas de los pares de rectas que representan estos sistemas:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ -10x + 4y = -6 \end{cases}$	d) $\begin{cases} 8x - 5y = 2 \\ -2x + 3y = 5 \end{cases}$
b) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 5x - 3y = 8 \end{cases}$	e) $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ 2x + 5y = -6 \end{cases}$
- 110** ● Encuentra la expresión algebraica del sistema de ecuaciones representado en esta gráfica.


- 111** ● Indica en cada caso cuánto debe valer a para que el punto A indicado pertenezca a la recta correspondiente.

a) $5x - 2y = 6$, $A(2, a)$	b) $3x + 4y = -4$, $A(a, -2)$
------------------------------	--------------------------------
- 112** ● ¿Cuáles son las soluciones de los sistemas de ecuaciones representados en las siguientes rectas? ¿Cuál es el número de soluciones?

a) 	c) 
b) 	d) 
- 113** ● Dada la recta $2x + y = 1$, escribe la ecuación de otra recta q , si es:
 - Paralela a ella.
 - Secante con ella en el punto $A(1, 1)$.
 - Perpendicular a ella.
 - Secante con ella en el punto $A(-1, -1)$.
- 114** ● Al transformar un sistema de ecuaciones en otro equivalente eliminando incógnitas, hemos obtenido en una ecuación $x = 3$.
 - ¿Cómo se representa gráficamente?
 - ¿Y cómo se representa $y = -2$?
- 115** ● Resuelve gráficamente los siguientes sistemas y comprueba las soluciones obtenidas aplicando el método de sustitución o reducción.


a) $\begin{cases} 2x + 11 = 5x \\ 3x + y = 6 \end{cases}$	d) $\begin{cases} x = 10 \\ x + y = 4 \end{cases}$
b) $\begin{cases} 3x = 1 \\ 2x = 0 \end{cases}$	e) $\begin{cases} 4x + y = 1 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$
- 116** ● Resuelve gráficamente los siguientes sistemas y obtén el número de soluciones que tengan.

a) $\begin{cases} 12x - 3y = 9 \\ 20x - 5y = 15 \end{cases}$	d) $\begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$
b) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 5x + y = 12 \end{cases}$	e) $\begin{cases} 6x + 2y = 1 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$

1.5. Resolución de problemas

La resolución de problemas es el eje vertebrador de las matemáticas. Nos centramos para este apartado simplemente en los problemas, que no en todas las actividades del tema. No volveremos a destacar la indicación que marcan los distintos niveles de dificultad que utilizan los autores, como ya hemos expuesto en apartados anteriores.

En el tercer curso destaca que un ítem del tema está destinado en exclusividad a los problemas.



4 Resolución de problemas mediante sistemas

Para resolver problemas más complejos en los que hay dos datos desconocidos, resulta más sencillo plantear un sistema de ecuaciones con dos incógnitas que expresar una incógnita a partir de la otra. Los pasos que se han de seguir son:

1. Tienes que leer el enunciado y comprender la situación planteada de modo que puedas:
 - Identificar los datos desconocidos nombrando las dos incógnitas.
 - Encontrar dos relaciones entre datos e incógnitas, que se convertirán en las dos ecuaciones del sistema.
2. Hay que traducir al lenguaje algebraico las relaciones halladas para plantear las dos ecuaciones.
3. Se resuelve el sistema de ecuaciones.
4. Por último se escribe la solución, comprobando que es válida en el contexto del problema.

EJERCICIOS RESUELTOS

7 En un vuelo Málaga-París viajan 180 pasajeros. Algunos de ellos han conseguido una tarifa reducida de 65 €, mientras que el resto ha pagado 120 € cada uno. Si la recaudación total del vuelo ha sido de 18 850 €, ¿cuántas personas viajaron con la oferta y cuántas con la tarifa normal?

1. Se definen las incógnitas:
 x = número de pasajeros con tarifa reducida
 y = número de pasajeros con tarifa completa
 Se establecen las dos relaciones entre datos conocidos e incógnitas:
 - El número de pasajeros es 180; es decir, si sumamos los pasajeros de tarifa reducida y los de tarifa normal hacen un total de 180 personas.
 - La recaudación es de 18 850 €, lo que significa que, si se suma el dinero obtenido por los billetes de tarifa reducida y el obtenido por los de tarifa normal, se obtendrá esa cantidad.
2. Se plantea el sistema de ecuaciones. Cada ecuación del sistema se corresponde a cada una de las relaciones anteriores:

$$\begin{cases} x + y = 180 \\ 65x + 120y = 18\,850 \end{cases}$$
3. Acto seguido, resolvemos el sistema por reducción:

$$\begin{cases} x + y = 180 \\ 65x + 120y = 18\,850 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -65x - 65y = -11\,700 \\ 65x + 120y = 18\,850 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -65x - 65y = -11\,700 \\ 65x + 120y = 18\,850 \\ \hline 55y = 7\,150 \Rightarrow \\ \Rightarrow y = \frac{7\,150}{55} = 130 \end{array}$$

$$x + y = 180 \Rightarrow x + 130 = 180 \Rightarrow x = 180 - 130 = 50$$
4. Así pues, 50 personas viajan con tarifa reducida y 130 con la tarifa normal.

118
UNIDAD 7

Y a continuación se presentan una gran cantidad de resultados para que el alumno pueda practicar.

El punto “estrategias para resolver problemas” trata esta temática.

Esta editorial destaca el estándar de la “resolución de problemas” pues en todos los temas los tratan de manera especial.

1.6. Reflexiones

Creemos importante señalar que, en los textos de todos los cursos, la editorial primero plantea el tema de sistemas de ecuaciones y más adelante el tema referente a funciones. Sería interesante valorar la permuta de algunos bloques (como ya se está haciendo, en algún curso escolar, en nuestro centro) para que el alumno entienda primero qué es una función y, en concreto, las funciones afines/lineales/constantes para que, conceptualmente, pueda adquirir mejor la idea de lo que se entiende

por solución de un sistema de ecuaciones lineales. Es más, la resolución gráfica no viene recogida en el curso de segundo, suponiendo que se debe a este motivo. Por lo que se les explica el tema “de manera abstracta y mecánica”, abandonando el conceptualismo y fomentando la memorización (pues sí que explica el concepto de infinitas, una única, y ninguna solución). En tercero, los autores consideran necesario recordar cómo se representan rectas en el plano, pues sí que estudian la representación gráfica de los sistemas. En cambio, no hace un repaso del estudio teórico (pendiente, ordenada en el origen...) de las funciones antes descritas, por lo que no hace estable una relación entre los coeficientes de las rectas y el tipo de sistema con el que nos encontramos (de nuevo no fomenta el carácter lógico y deductivo de esta materia). Destacamos el hecho de que en tercero sí tenemos un epígrafe del tema dedicado al número de soluciones de los sistemas y a su clasificación, diciendo cuando las rectas que le corresponden son secantes, coincidentes o paralelas, pero no razonando en ningún momento. Aunque sí que se pide cierto pensamiento deductivo para la resolución de algunas de las actividades que se plantean.

2.2. Número de soluciones de un sistema de ecuaciones

La solución de un sistema de dos ecuaciones lineales son los puntos que tienen en común las rectas asociadas a sus ecuaciones. Observa en el margen la posición relativa entre dos rectas. A partir de esto, ¿cuántas soluciones pueden tener en común dos ecuaciones lineales con dos incógnitas?

■ Sistemas compatibles indeterminados
 Observa el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Las ecuaciones son proporcionales; por tanto, son equivalentes. El sistema está formado por una ecuación, es decir, la misma ecuación repetida. Si representamos gráficamente el sistema mediante una tabla de valores, obtenemos:

x	$y = \frac{4x-2}{2}$	x	$y = 2x-1$
-1	-3	-1	-3
0	-1	0	-1
1	1	1	1

Las rectas son **coincidentes**: tienen todos sus puntos en común y todos son soluciones del sistema.

Un sistema de ecuaciones se denomina **compatible indeterminado** si tiene infinitas soluciones.

■ Sistemas incompatibles
 Observa el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

Las ecuaciones son contradictorias. Si $2x - y$ es igual a 2, no puede ser 5 a la vez, para los mismos valores de x e y . Ambas ecuaciones no pueden cumplirse de forma simultánea. Si representamos el sistema gráficamente, teniendo en cuenta la tabla de valores obtenemos:

x	$y = 2x-2$	x	$y = 2x-5$
-1	-4	-1	-7
0	-2	0	-5
1	0	1	-3

Las rectas son **paralelas**, no tienen ningún punto en común. El sistema no tiene solución.

Un sistema de ecuaciones se denomina **incompatible** si no tiene solución.

112 UNIDAD 7

■ Sistemas compatibles determinados
 Observa el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = -3 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$$

Las ecuaciones anteriores que forman el sistema no son proporcionales ni contradictorias.

Al representarlas gráficamente, tenemos que:

x	$y = \frac{-x-3}{2}$	x	$y = 2x+1$
-1	-1	-1	-1
-3	0	0	1
-5	1	-2	-3

Las rectas son **secantes**: tienen un punto en común $(-1, -1)$, que es la solución del sistema.

Un sistema de ecuaciones se denomina **compatible determinado** si tiene una única solución.

Podemos clasificar los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas en el siguiente cuadro:

Sistema	Número de soluciones	Posición de las rectas que lo representan	Ecuaciones que lo forman
Compatible determinado	1	Secantes	Ni proporcionales ni contradictorias
Compatible indeterminado	Infinitas	Coincidentes	Proporcionales
Incompatible	Ninguna	Paralelas	Contradictorias

Actividades

113 • Dada la ecuación $3x - 5y = 2$, añade una ecuación para que el sistema resultante sea:
 a) Compatible determinado.
 b) Incompatible.
 c) Compatible indeterminado.

114 • Indica el número de soluciones que tienen los siguientes sistemas de ecuaciones.
 a) $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+2y=10 \end{cases}$
 c) $\begin{cases} 2x+y=2 \\ 4x+2y=4 \end{cases}$

115 • Escribe un sistema compatible determinado que tenga el par $(-2, -3)$ como solución.
 116 • Copia en tu cuaderno y completa estos sistemas para que sean del tipo que se indica:
 a) Compatible determinado:
 $\begin{cases} 5x+3y=1 \\ -10x-\square y=-2 \end{cases}$
 b) Compatible indeterminado:
 $\begin{cases} -6x+2y=10 \\ \square x+y=\square \end{cases}$
 c) Incompatible:
 $\begin{cases} 4x-3y=-1 \\ 2x+\square y=\square \end{cases}$

Sistemas de ecuaciones 113

5 • Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya solución sea:

a) $x = 0, y = \frac{1}{6}$ c) $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$

b) $x = 2, y = -2$ d) $x = 0, y = 0$

En cuarto curso, nos encontramos con la misma situación pero ahora adentrándonos también en ecuaciones no lineales.

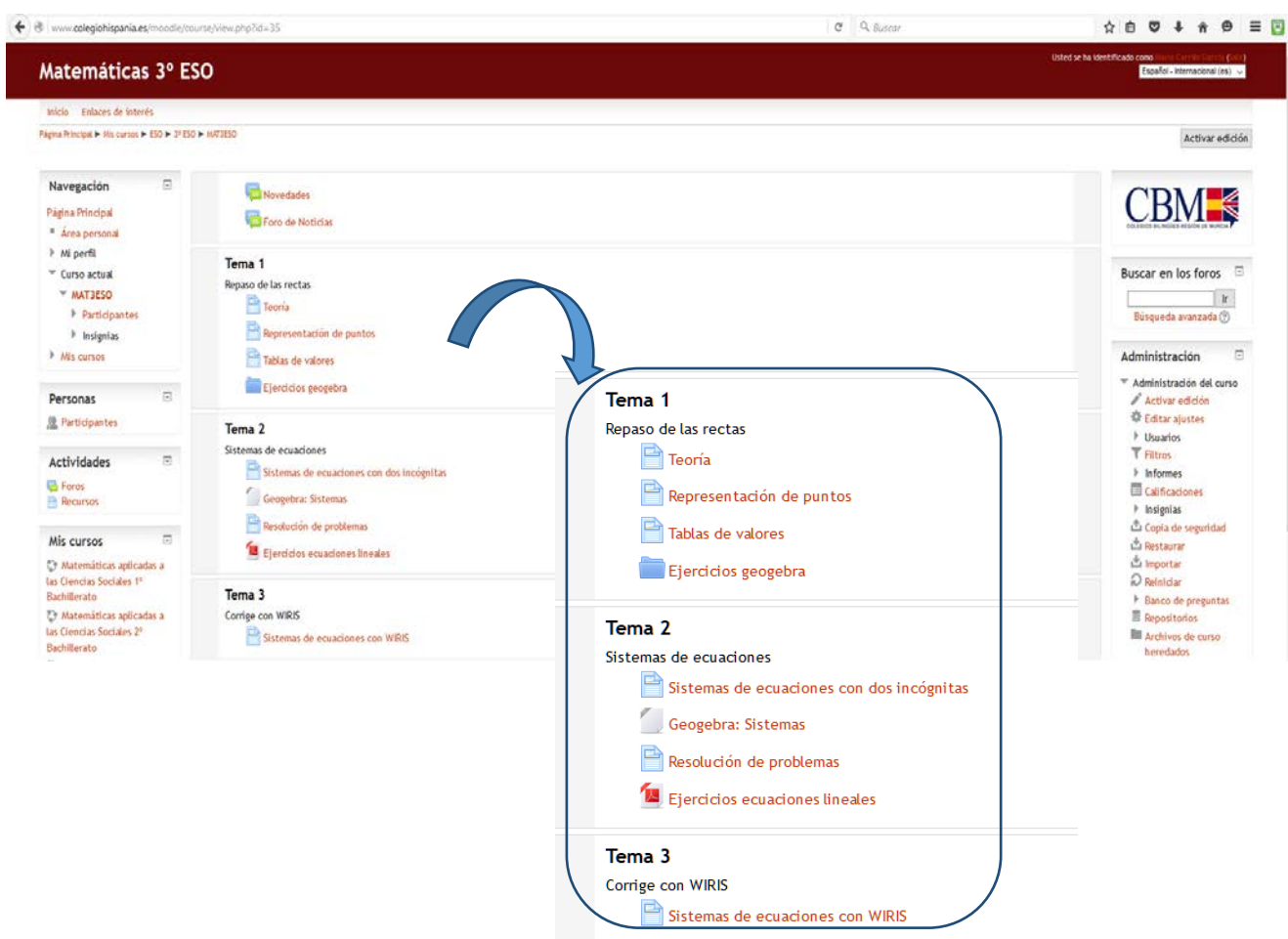
Los ejercicios están acompañados con una indicación según el grado de dificultad (de uno a tres cuadritos). Desconocemos los criterios seguidos por los autores para establecer dicha graduación, ni si la dificultad de cada uno de ellos es susceptible de ser cuantificada. Pero creemos que esta práctica puede hacer que algunos discentes no se atrevan a enfrentarse a la resolución de algunos pues son “difíciles” y que puede fomentar cierta frustración al ver que ha fallado uno “muy fácil”. Creemos que esta información puede ser buena que para el profesor y por tanto que él pueda acceder a ella y sea éste el que decida cuando se la trasmite a los alumnos.

Creemos fundamental tener en cuenta estas anotaciones así como las realizadas en los modelos de aprendizaje.

Anexo IX: Exposición de la propuesta didáctica realizada para la investigación.

Pasamos a exponer y explicar la propuesta por medio de algunas capturas de la pantalla del ordenador, que pueden hacer más fácil el entendimiento. Todas las imágenes que visualizamos en este anexo pertenecen a las capturas de pantalla que el investigador ha realizado de su trabajo.

En primer lugar, el alumno, tras acceder a la web del centro, a su aula virtual y al curso de tercero de la ESO (Matemáticas María Carrillo), encontraba esta presentación.



The screenshot shows a Moodle course interface for 'Matemáticas 3º ESO'. The main content area displays a list of topics and their associated resources:

- Tema 1**
 - Reparo de las rectas
 - Teoría
 - Representación de puntos
 - Tablas de valores
 - Ejercicios geogebra
- Tema 2**
 - Sistemas de ecuaciones
 - Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas
 - Geogebra: Sistemas
 - Resolución de problemas
 - Ejercicios ecuaciones lineales
- Tema 3**
 - Corrige con WIRIS
 - Sistemas de ecuaciones con WIRIS

A blue arrow points from the 'Teoría' resource under 'Tema 1' in the main list to a larger, rounded rectangular box that provides a detailed view of the resources for 'Tema 1', 'Tema 2', and 'Tema 3'. The detailed view lists the following resources:

- Tema 1**
 - Reparo de las rectas
 - Teoría
 - Representación de puntos
 - Tablas de valores
 - Ejercicios geogebra
- Tema 2**
 - Sistemas de ecuaciones
 - Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas
 - Geogebra: Sistemas
 - Resolución de problemas
 - Ejercicios ecuaciones lineales
- Tema 3**
 - Corrige con WIRIS
 - Sistemas de ecuaciones con WIRIS

La primera aplicación sobre puntos era aquella que los representaba tras escogerlos aleatoriamente.

Matemáticas 3º ESO

Representación de puntos

Repasemos la representación de Puntos:

COORDENADAS
Punto P (-1, 2)

x = -1 y = 2

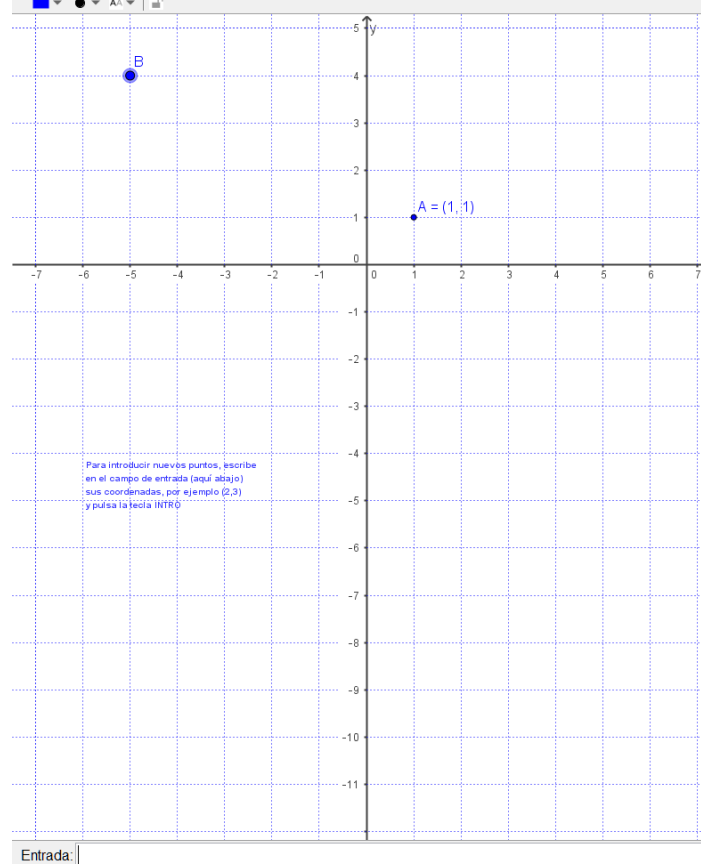
comenzar aquí 



A continuación podía acceder a una aplicación de Geogebra donde el alumno elegía los puntos a representar.

cartesianas-4.ggb

Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda



Para introducir nuevos puntos, escribe en el campo de entrada (aquí abajo) sus coordenadas, por ejemplo (2,2) y pulsa la tecla INTRO

Entrada: |

Finalizaba esta temática otra aplicación, que mostraba cómo crear tablas de valores a partir de una expresión algebraica dada.

Usted se ha identificado como **Maria Carrillo Garcia** (Salir)

Matemáticas 3º ESO

Tablas de valores

Y ahora que ya sabemos colocar los puntos, podemos hacer la gráfica de una función lineal. Con el botón "paso a paso" iremos construyendo juntos la gráfica de una recta. Cuando termines, con el botón "de nuevo" podrás hacer otra gráfica.

$f(x) = -x + 2$

¿Dónde va el punto colocado?

x	-1 · (x) + 2
-1	-1 · (-1) + 2 = 3
0	-1 · (0) + 2 = 2
1	-1 · (1) + 2 = 1
2	-1 · (2) + 2 = 0
3	-1 · (3) + 2 =

Cuando es $-1 \cdot x$ se acostumbra a no escribir el 1.
Se escribe sólo $-x$.

paso a paso **de nuevo**

Última modificación: sábado, 7 de febrero de 2015, 17:02

De los dos módulos de la aplicación de Geogebra que se diseñaron, para esta primera parte de temario se escogió éste que trabaja con una sola recta.

Con esta aplicación veremos como varía una recta dependiendo de los elementos con los que esta definida

Esta es la pendiente de la recta.
¿Cambias para ver que pasa?

$m = -2$

Ahora no cambiamos la pendiente.
¿Que es la t?
¿Como se esta modificando la recta?

$t = 0$

Da el valor que quieras para m :

Como la PENDIENTE es NEGATIVA, la recta es DECRECIENTE

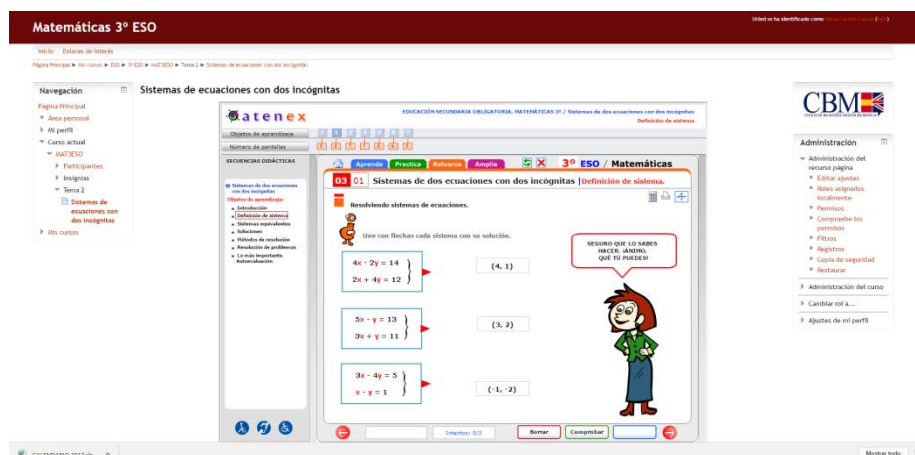
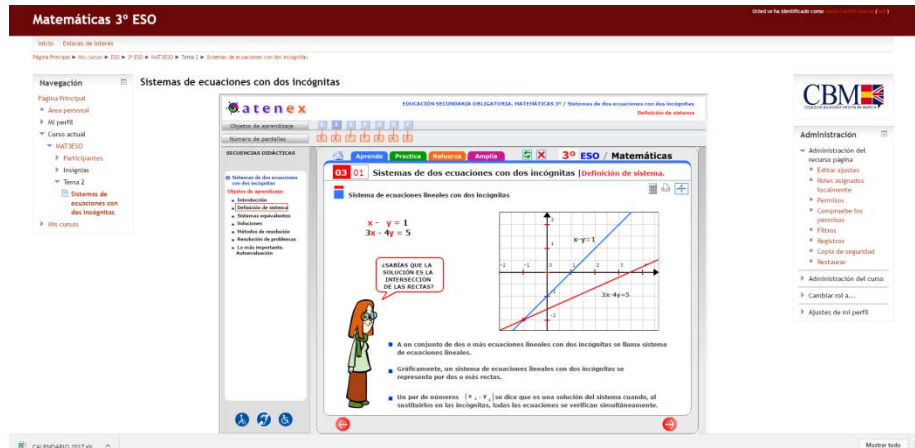
¿Os gusta?

Maria Carrillo Garcia, Creado con [GeoGebra](#)

El material teórico seleccionado explica los conceptos teóricos necesarios para avanzar en el entendimiento de los conceptos. Comienza con una portada:



Como se ha comentado, el material obliga al discente a interactuar, forzando a la reflexión y al razonamiento, Mostramos como ejemplo:



Última modificación: sábado, 7 de febrero de 2015, 14:03

Y además, cuenta con la ventaja de los mapas conceptuales.

La clasificación de los sistemas no sólo era expuesta de manera teórica, se trabajaba también por medio de aplicaciones prácticas.

atenex EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA. MATEMÁTICAS 3º / Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas **Lo más importante. Autoevaluación**

Objetos de aprendizaje: 1 2 3 4 5 6 7
Número de pantallas: 3 4 5 6 7 8 9

SECUENCIAS DIDÁCTICAS

- Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas
 - Introducción
 - Definición de sistema
 - Sistemas equivalentes
 - Soluciones
 - Métodos de resolución
 - Resolución de problemas
 - Lo más importante. Autoevaluación

03 06 Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas | Autoevaluación

Elige verdadero o falso según corresponda:

A $x + y = 3$
 $x + y = 2$

1 El sistema A no tiene solución. V F

B $2x - 2y = 2$
 $x + y = 3$

2 Los sistemas A y C son equivalentes. V F

C $2x - y = -6$
 $x - 3y = 11$

3 Los sistemas B y D tienen igual solución. V F

D $x + y = 3$
 $x - y = 1$

4 El sistema C tiene solución única. V F

Intentos: 0/3 **Borrar** **Comprobar**

atenex EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA. MATEMÁTICAS 3º / Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas **Soluciones**

Objetos de aprendizaje: 1 2 3 4 5 6 7
Número de pantallas: 3 4 5 6 7 8 9

SECUENCIAS DIDÁCTICAS

- Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas
 - Introducción
 - Definición de sistema
 - Sistemas equivalentes
 - Soluciones
 - Métodos de resolución
 - Resolución de problemas
 - Lo más importante. Autoevaluación

03 03 Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas | Sus soluciones

Discutir un sistema

Completa la tabla escribiendo en cada celda SÍ o NO según corresponda.

	Solución única	Infinitas soluciones	No tiene solución
$x + y = 3$ $x + y = 1$			
$-x + 3y = -1$ $3x + y = 3$			
$x - 3y = 2$ $-2x + 6y = -4$			

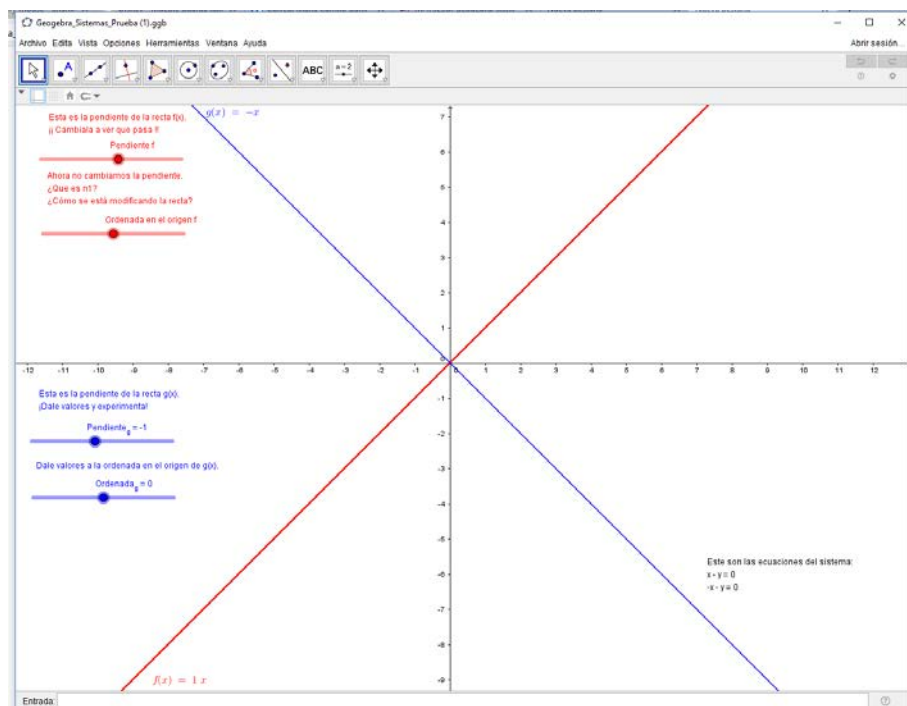
SEGURO QUE LO SABES HACER.

Intentos: 0/3 **Borrar** **Comprobar**

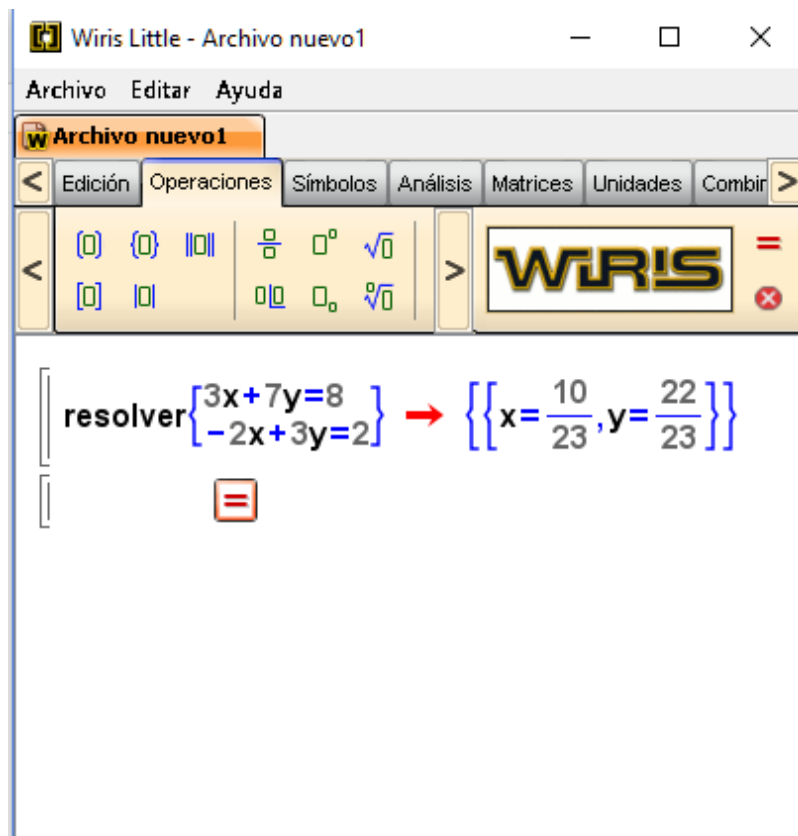
Presenta problemas, no solo ejercicios algebraicos.



De la aplicación de Geogebra para esta segunda parte del temario destacamos solo una imagen, pues está recogido con mayor detalle en el Anexo III.



A continuación mostramos un ejemplo de sistema resuelto con Wiris.



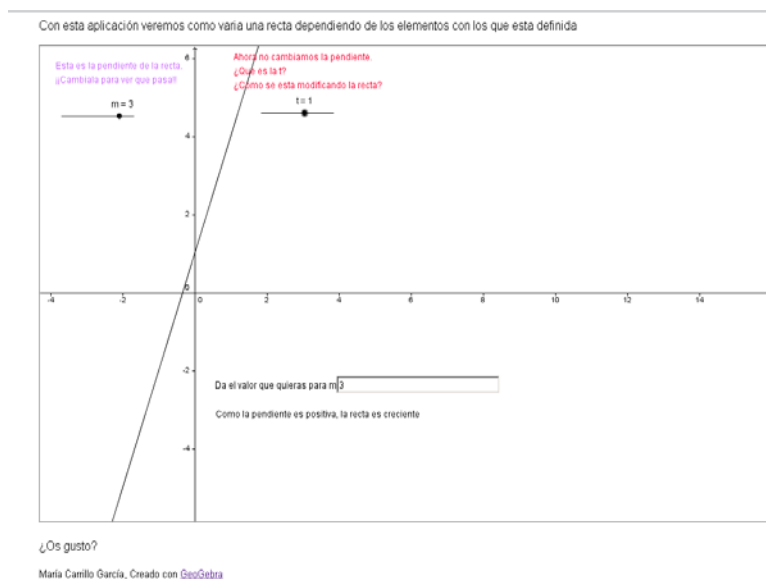
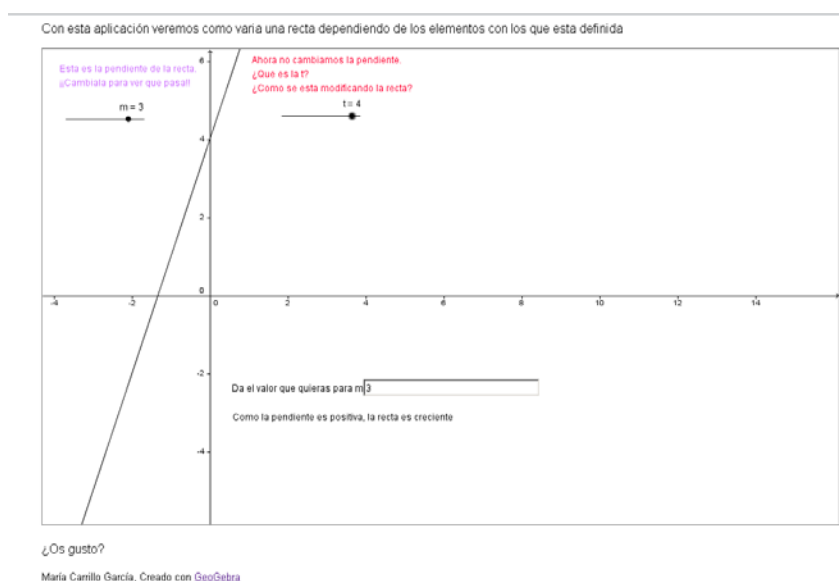
La hoja de ejercicios se encuentra en el Anexo XIX, pues ha sido referenciada en distintos momentos del trabajo.

Anexo X: Comparativa del primer programa y del segundo.

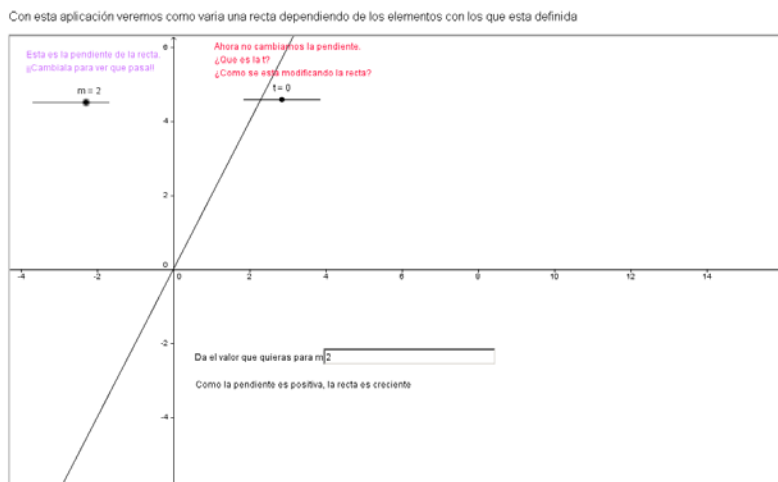
Creemos importante que se pueda observar algún ejemplo del software con el que hicimos la investigación. Recordamos que es una aplicación del programa libre Geogebra.

En primer lugar mostramos la primera aplicación realizada.

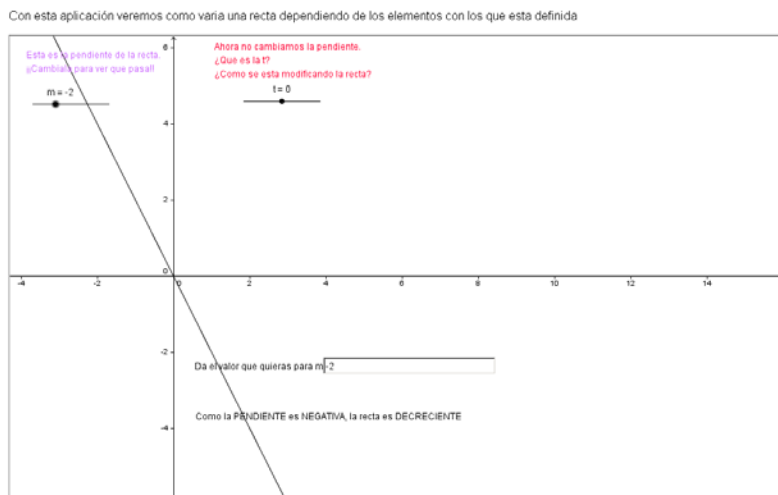
Con la aplicación ilustrada en las dos siguientes imágenes, el alumno observaba que, si mantenía la pendiente pero cambiaba la ordenada en el origen, las rectas que obtenía eran paralelas, sin ningún punto en común, por lo que al no existir punto de corte entre estas dos rectas, aprendía que con dos rectas que tuviesen el mismo coeficiente de la variable x y distintos terminos independientes, el sistema era incompatible.



Con la aplicación ilustrada por las dos imágenes que siguen, el estudiante veía que, al mantener la misma ordenada en el origen pero no la pendiente, las rectas cortaban al eje Y en el mismo punto, pero la inclinación era distinta. Al ver que tenían un punto en común interiorizaban que, para que las rectas compartiesen un punto, y por lo tanto fuesen secantes, tenía que coincidir un punto, la ordenada en el origen.

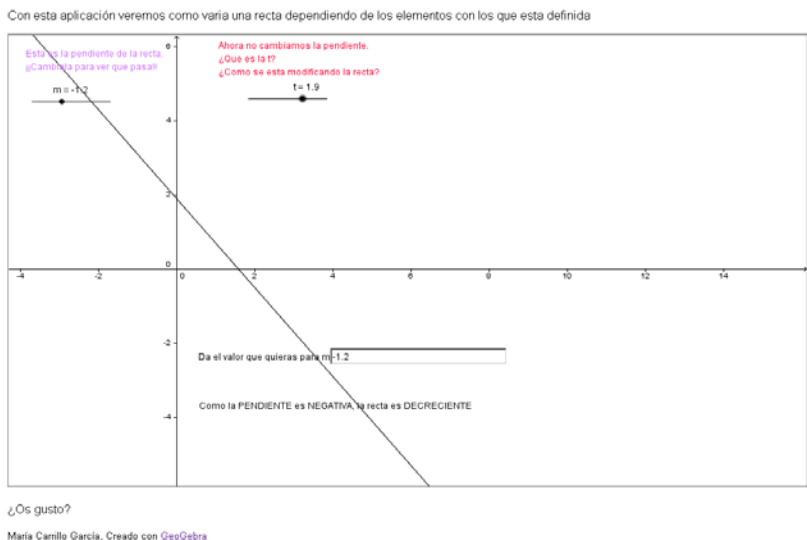


¿Os gusta?
 María Carrillo García, Creado con [GeoGebra](#)

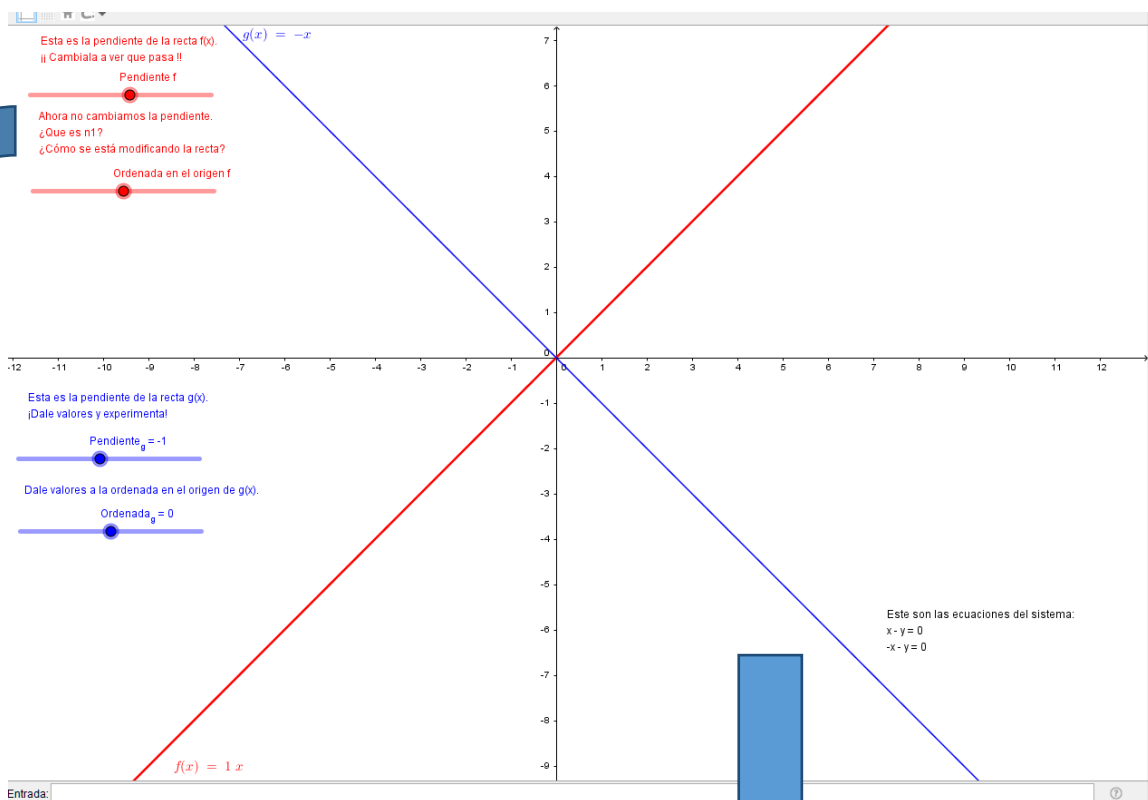


¿Os gusta?
 María Carrillo García, Creado con [GeoGebra](#)

Este último ejemplo nos sirve para que los alumnos interioricen que los coeficientes de las rectas, y por tanto, los números que intervienen en la expresión analítica de los sistemas, no tienen por qué ser enteros. De esta forma intentamos que los alumnos vean que los números decimales, las fracciones, también son posibles en este campo.



Pasamos a ver la segunda aplicación. Ésta fue mejorada cuando la investigación detectó que era necesario que no sólo vieran las rectas por separado, sino que sería conveniente verlas en un mismo plano (aplicación). Por medio de dos cursores, uno para cada una de las rectas, el alumno podía cambiar la pendiente y la ordenada en el origen de cada recta. Al hacerlo, las rectas se desplazaban, al mismo tiempo que en la parte izquierda de la pantalla se escriben de manera automática las ecuaciones de las mismas. También, para comodidad del alumno, junto a cada línea se escribía el nombre de la misma. Cada recta, y sus características, tenían un color distinto para que el estudiante supiese con claridad qué datos pertenecían a cada una de ellas.



Esta es la pendiente de la recta $f(x)$.
 ¡¡ Cambiala a ver que pasa !!

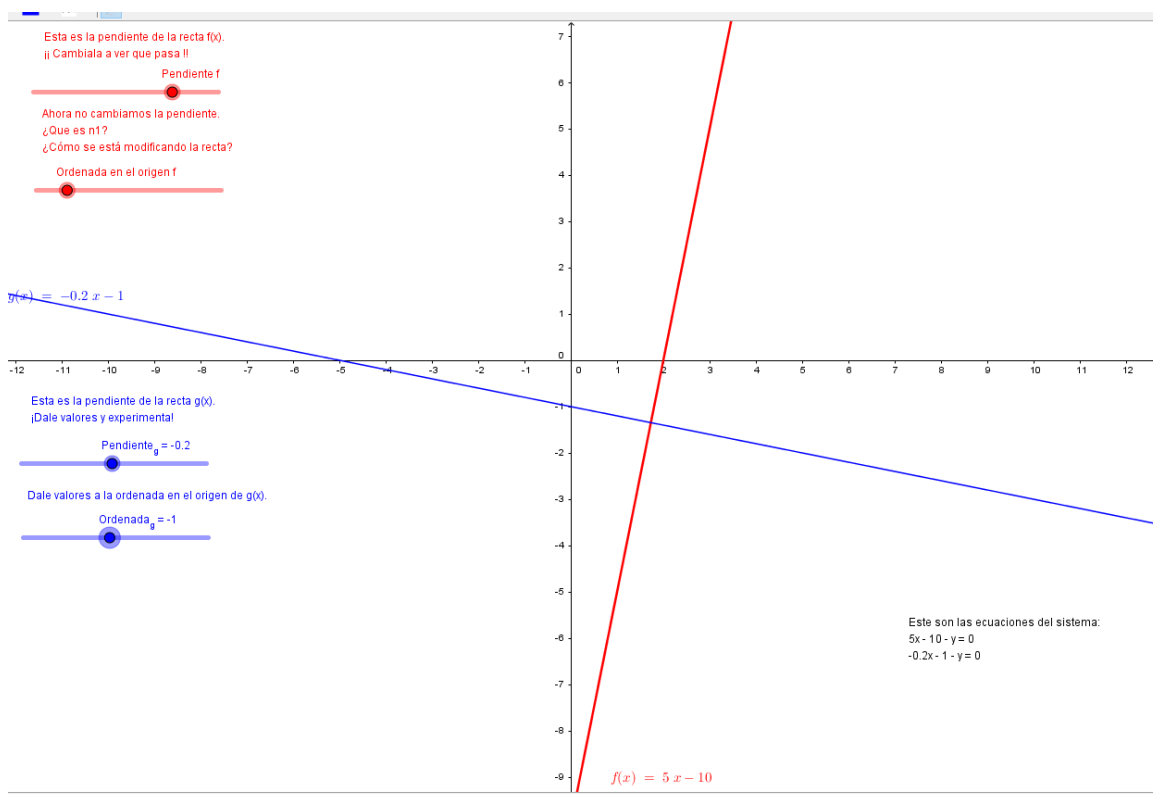
Pendiente f

Ahora no cambiamos la pendiente.
 ¿Que es $n1$?
 ¿Cómo se está modificando la recta?

Ordenada en el origen f

Este son las ecuaciones del sistema:
 $x - y = 0$
 $-x - y = 0$

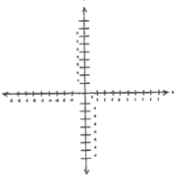
Este programa les ayudaba, por ejemplo, a estudiar qué pasaba con las pendientes y la ordenada en el origen para que las rectas fuesen secantes y perpendiculares.

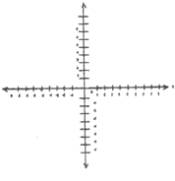


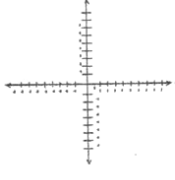
Podían estudiar todo lo expuesto con la anterior aplicación, pero ahora visualizaban las dos rectas, lo que hacía que la representación gráfica, la imagen visual, fuese más concreta y que con una sola gráfica pudiesen trabajar todos los coeficientes. De este modo, viendo de manera directa la relación causa-efecto en el sistema, identificaban la relación de los coeficientes con las soluciones.

Anexo XI: Cuestionario inicial de los sistemas.

Master: Nuevas Tecnologías aplicadas a la educación: e-learnig y gestión del conocimiento
 Trabajo de Campo: Cuestionario Rectas y Sistemas
 Curso _____ Colegio _____

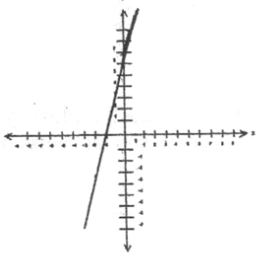
1. Dado el siguiente sistema, represéntalo y clasificalo: $\begin{cases} y = 3x + 5 \\ y = x + 3 \end{cases}$
 Señala la respuesta correcta: Secantes
 Paralelas
 Coincidentes 

2. Dado el siguiente sistema, represéntalo y clasificalo: $\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ 4x - 10y = 6 \end{cases}$
 Señala la respuesta correcta: Secantes
 Paralelas
 Coincidentes 

3. Dado el siguiente sistema, represéntalo y clasificalo: $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$
 Señala la respuesta correcta: Secantes
 Paralelas
 Coincidentes 

4. Dadas estas dos rectas que son coincidentes $y = 3x + 5$; $2y = 6x + 10$. ¿Qué deberíamos de hacer para que fuesen paralelas?

5. Dada la recta $y = 5x + 7$ dibujada mas abajo, ¿Cómo sería respecto de esta recta la recta $y = 5x + 8$? Razona tu respuesta.



6. Dadas las rectas $y = 3x + 8$ $y = -5x + 8$ ¿Se cortaran en algún punto, en cual y por que?

7. ¿Qué tendríamos que hacer para conseguir una recta paralela a $y = -3x + 2$?

Anexo XII: Cuestionario sobre las matemáticas en la enseñanza.

Doctorado: Nuevas tecnologías aplicadas a la educación: e-learning y gestión del conocimiento.
Trabajo de campo: Cuestionario Matemáticas en la Enseñanza.
Curso Colegio

1. ¿Te gusta la asignatura de Matemáticas?
 Mucho Regular Poco Nada

Expón el porqué de tu respuesta:

2. ¿Se te da bien la asignatura de matemáticas?
 Muy bien Bien Regular Mal

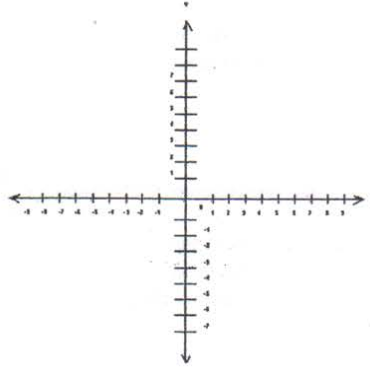
3. ¿Se pueden aprender matemáticas jugando? En caso afirmativo pon ejemplos
 Sí No

4. ¿De qué otra forma te gustaría poder trabajar la materia?
 Trabajando con los ordenadores
 Con juegos individuales y/o colectivos
 Otros
 No conozco otra manera de trabajarlas que no sea con "boli y papel"

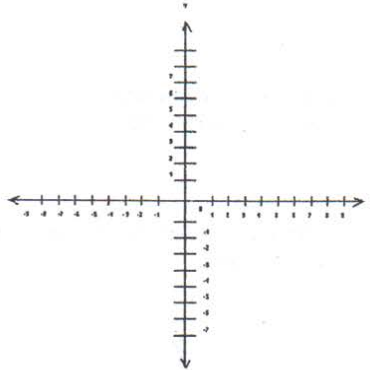
5. ¿Se pueden aprender matemáticas con los ordenadores? En caso afirmativo, expón alguna idea.
 Sí No

6. ¿Te apetecería intentar aprender matemáticas delante de un ordenador y no delante de la pizarra como hasta ahora?
 Sí No

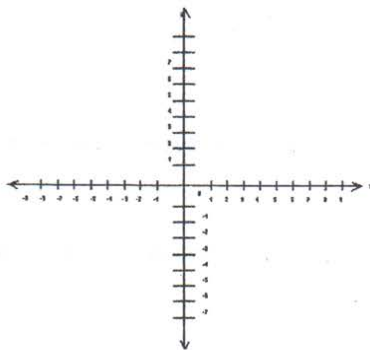
8. Dados los puntos de la recta r : $(0,8)$, $(-2,4)$ y estos dos puntos de la recta s : $(-4,-8)$ $(3,14)$; representa y di como son las rectas que se forman.



9. Dados los puntos de la recta r : $(0,5)$, $(5,0)$ y estos dos puntos de la recta s : $(0, 3/2)$ $(3/2, 0)$; representa y di como son las rectas que se forman.

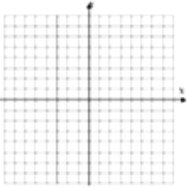
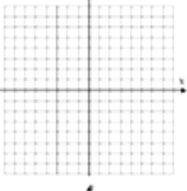
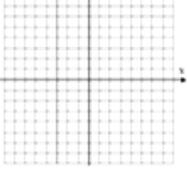


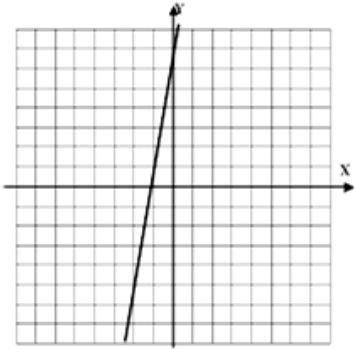
10. Dados los puntos de la recta r : $(-2,-2)$, $(4,4)$ y estos dos puntos de la recta s : $(1,1)$ $(2,2)$; representa y di como son las rectas que se forman.



Anexo XIII: Cuestionario sobre rectas y sistemas.

Doctorado: Nuevas Tecnologías aplicadas a la educación: e-learning y gestión del conocimiento.
 Trabajo de Campo: Cuestionario Rectas y Sistemas
 Curso Colegio

1. Dado el siguiente sistema, represéntalo y clasificalo: $\begin{cases} y = 3x + 5 \\ y = x + 3 \end{cases}$
 Señala la respuesta correcta: $\begin{cases} \text{Secantes} \\ \text{Paralelas} \\ \text{Coincidentes} \end{cases}$

2. Dado el siguiente sistema, represéntalo y clasificalo: $\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ 4x - 10y = 6 \end{cases}$
 Señala la respuesta correcta: $\begin{cases} \text{Secantes} \\ \text{Paralelas} \\ \text{Coincidentes} \end{cases}$

3. Dado el siguiente sistema, represéntalo y clasificalo: $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$
 Señala la respuesta correcta: $\begin{cases} \text{Secantes} \\ \text{Paralelas} \\ \text{Coincidentes} \end{cases}$

4. Dadas estas dos rectas que son coincidentes $y=3x+5$; $2y=6x+10$.
 ¿Qué deberíamos de hacer para que fuesen paralelas?
5. Dada la recta $y=5x+7$ dibujada más abajo,
 ¿Cómo sería respecto de esta recta la recta $y=5x+8$?
 Razona tu respuesta.



6. Dadas las rectas $y=3x+8$; $y=-5x+8$ ¿Se cortaran en algún punto, en cuál y por qué?
7. ¿Qué tendríamos que hacer para conseguir una recta paralela a $y=-3x+2$?
8. Diferencias y similitudes entre rectas coincidentes.
9. Diferencias y similitudes entre rectas secantes.
10. Diferencias y similitudes entre rectas paralelas.

Anexo XIV: Cuestionario sobre trabajo colaborativo.

Encuesta sobre trabajo colaborativo en el aula de matemáticas

1. Consideras que la actividad cooperativa que has realizado estos días...
 - a) Te ayudó a resolver los problemas.....
 - b) Te complicó la resolución de problemas.....
 - c) Ni me ayudó ni me complicó.....
 - d) NS/NC.....

2. Trabajar de este modo
 - a) Me gustó más.....
 - b) Me gustó menos.....
 - c) Ni más ni menos.....
 - d) NS/NC.....

3. El tiempo empleado en resolver los problemas...
 - a) Más que el habitual.....
 - b) Menos que el habitual.....
 - c) No hay diferencia sustancial.....
 - d) NS/NC.....

Anexo XV: Cuestionario EFAI.

Mostramos a continuación los ejemplos que se les da a los alumnos antes de comenzar a cumplimentar esta prueba.

INSTRUCCIONES Y EJEMPLOS

En esta prueba hay varios tipos de ejercicios. Para hacer un poco de práctica, intenta resolver los ejemplos E1 a E9 que vienen a continuación. En un tipo de ejercicios tendrás que poner a prueba tu capacidad de girar figuras mentalmente para resolver distintos puzzles. Mira los siguientes ejemplos:

En E1 tienes que buscar la figura de la derecha (A, B, C o D) que se halla oculta parcialmente por un cuadrado a la izquierda. Tienes que tener en cuenta que las figuras no se encuentran en la misma posición, es decir, que han sido giradas.

E1

¿Cuál de las cuatro figuras de la derecha (A, B, C o D) completa la figura de la izquierda?

E2

En otro tipo de problemas pondrás a prueba tu capacidad de trabajo con números. Para eso verás distintos tipos de ejercicios numéricos que deberás resolver. Mira algunos ejemplos:

E3 ¿Cuál de las siguientes respuestas es mayor?

A 2^2
B 3×2
C $5 - 3$
D $8 : 4$

E4 Juan tiene tres años más que María y ésta tiene dos años más que Elena. Si Elena tiene 14 años, ¿cuántos años tiene Juan?

A 9
B 16
C 17
D 19

E5 ¿Cuánto recorrerá una persona que dé una vuelta completa a este campo?

A 25 m.
B 12,5 m.
C 30 m.
D 20 m.

2

NO TE DETENGAS, CONTINÚA EN LA PÁGINA SIGUIENTE.

En otro tipo de ejercicios tendrás que resolver problemas descubriendo cuál es la regla que sigue una determinada secuencia de dibujos. Mira los siguientes ejemplos:

¿Qué reloj de la derecha continuaría la serie ocupando el lugar del interrogante?

E6

En muchos lugares las personas hacen COLA para entrar a un sitio o para comprar algo. En los ejercicios que vas a realizar las personas que hacen cola son distintas:

un niño es PEQUEÑO
un adulto es GRANDE

el hombre lleva PANTALÓN y
la mujer FALDA

con ropa BLANCA ○
con ropa AMARILLA ●
con ropa NARANJA ●

Y CADA UNO DE SUS BRAZOS (IZQUIERDO O DERECHO) PUEDE ESTAR:
ABAJO, como si dijera: ¡Qué puedo hacer!
EN CRUZ, como si dijera: ¿Cuándo me tocará?
ARRIBA, como si dijera: ¡Estoy harto!

Haz el ejemplo siguiente. Mira las personas de la cola (a la izquierda) y busca entre los de la derecha quién debería ir detrás (donde está el interrogante).

E7

Y en el último tipo de problemas tendrás que poner a prueba tu dominio del lenguaje. Para eso verás distintos tipos de ejercicios con palabras que deberás resolver. Mira algunos ejemplos:

E8 Completa la frase con el par de palabras que consideres más correcto, de forma que dé sentido y significado a la frase.

Una persona _____ es la que siempre llega _____

- A nerviosa - tarde
- B interesante - sencilla
- C amable - más temprano
- D puntual - a su hora

En el siguiente ejercicio, ¿qué par de palabras completa mejor la frase dotándola de sentido?

E9 MONEDA es a _____ como LLAVE es a _____

- A dinero-metal
- B hucha-cerradura
- C billete-maestra
- D fabricada-dentada

SOLUCIONES A LOS EJEMPLOS

- E1: A E2: B E3: B
- E4: D E5: A E6: B
- E7: D E8: D E9: B



DETÉNTE. NO PASES A LA PÁGINA SIGUIENTE HASTA QUE TE LO INDIQUEN.

3

Anexo XVI: Primera versión cuestionario disponibilidad tecnológica.

Doctorado: Nuevas tecnologías aplicadas a la educación: e-learning y gestión del conocimiento.
Trabajo de campo: Cuestionario de Equipación Tecnológica.
Curso Colegio

1. Edad. 16 15 14 13

2. Sexo. Masculino Femenino

3. ¿Cuántos ordenadores con conexión a internet hay en tu casa?
 0 1 2 3 4 5 >5

4. ¿Cuántos teléfonos móviles / i-phone (Smartphone) con conexión a internet hay en tu casa?
 0 1 2 3 4 5 >5

5. ¿Cuántas tablets / i-pads con conexión a internet hay en tu casa?
 0 1 2 3 4 5 >5

6. ¿Desde donde sueles acceder a internet?
 Desde mi casa. Desde la casa de amigos o familiares. Otros _____

7. En caso de no disponer de internet en tu domicilio, ¿tienes acceso en otro sitio si es necesario?
 Si No

8. ¿Qué dispositivos y con qué frecuencia utilizas para acceder a internet? (Puedes indicar más de uno)
 Ordenador de sobremesa. _____
 Ordenador portátil. _____
 Tableta electrónica. _____
 Teléfono móvil. _____

9. ¿Para qué utilizas principalmente internet?
 Estudiar / realizar tareas escolares.
 Buscar información / visitar páginas web sobre temas que te interesen.
 Chatear / estar en contacto con amigos/as.
 Ver / descargar música o vídeo.
 Jugar online.
 Otros, ¿Cuáles? _____

Doctorado: Nuevas tecnologías aplicadas a la educación: e-learning y gestión del conocimiento.
Trabajo de campo: Cuestionario de Equipación Tecnológica.
Curso Colegio

10. ¿Aproximadamente, por día, cuánto tiempo usas internet para divertirse (visitar páginas de tu interés, chatear, enviar/recibir correo electrónico, jugar online, ver o descargar videos y música...)?
- De 0 a 30 min/día. De 30 a 60 min/día. De 60 a 120 min/día. Más de 120 min/día.
11. ¿Aproximadamente, por día, cuánto tiempo usas internet para estudiar (buscar información educativa, utilizar programas educativos, realizar tareas escolares...)?
- De 0 a 30 min/día. De 30 a 60 min/día. De 60 a 120 min/día. Más de 120 min/día.
12. ¿Aproximadamente, por día, cuánto tiempo usas internet para comunicarte con tus compañeros de clase o profesores (por Messenger, chat, correo electrónico...)?
- De 0 a 30 min/día. De 30 a 60 min/día. De 60 a 120 min/día. Más de 120 min/día.
13. ¿Qué grado de utilidad le das a internet como herramienta en tu educación?
- Muy útil.
 Útil.
 Poco útil.
 Muy poco útil.
 No influye en mi educación.
14. ¿Utilizas internet para aprender las cosas que no te han quedado claras en clase?
- No.
 Sí ¿Qué haces?
- Buscar en Google.
 - Consultar en Youtube.
 - Páginas web.
 - Otros _____

Anexo XVII: Versión final cuestionario disponibilidad tecnológica.

Doctorado: Nuevas tecnologías aplicadas a la educación: e-learning y gestión del conocimiento.
Trabajo de campo: Cuestionario Equipación Tecnológica.
Curso Colegio

1. Edad
13 14 15 16

2. Sexo
 Masculino Femenino

3. ¿Desde donde sueles acceder a internet?

Desde el colegio
 De 0 a 30 min/día
 De 30 a 60 min/día
 De 60 a 120 min/día
 Más de 120 min/día

Desde mi casa
 De 0 a 30 min/día
 De 30 a 60 min/día
 De 60 a 120 min/día
 Más de 120 min/día

Desde la casa de amigos o familiares.
 De 0 a 30 min/día
 De 30 a 60 min/día
 De 60 a 120 min/día
 Más de 120 min/día

Otros _____
 De 0 a 30 min/día
 De 30 a 60 min/día
 De 60 a 120 min/día
 Más de 120 min/día

4. ¿Cuántos ordenadores con conexión a internet hay en tu casa?
0 1 2 3 4 5 >5

5. ¿Cuántos smartphone con conexión a internet hay en tu casa?
1 0 2 3 4 5 >5

6. ¿Cuántas tablets con conexión a internet hay en tu casa?
1 0 2 3 4 5 >5

7. En caso de no disponer de internet en tu domicilio, ¿tienes acceso en otro sitio si es necesario?
 Sí No

8. ¿Qué dispositivos y con qué frecuencia utilizas para acceder a internet? (Puedes indicar más de uno)

Ordenador de sobremesa.
 De 0 a 30 min/día

Doctorado: Nuevas tecnologías aplicadas a la educación: e-learning y gestión del conocimiento.
Trabajo de campo: Cuestionario Equipación Tecnológica.
Curso Colegio

- De 30 a 60 min/día
- De 60 a 120 min/día
- Más de 120 min/día

Ordenador portátil.

- De 0 a 30 min/día
- De 30 a 60 min/día
- De 60 a 120 min/día
- Más de 120 min/día

Tableta electrónica.

- De 0 a 30 min/día
- De 30 a 60 min/día
- De 60 a 120 min/día
- Más de 120 min/día

Teléfono móvil.

- De 0 a 30 min/día
- De 30 a 60 min/día
- De 60 a 120 min/día
- Más de 120 min/día

Otros

- De 0 a 30 min/día
- De 30 a 60 min/día
- De 60 a 120 min/día
- Más de 120 min/día

9. ¿Para qué utilizas principalmente internet?

- Estudiar / realizar tareas escolares.
- Buscar información / visitar páginas web sobre temas que te interesen.
- Chatear / estar en contacto con amigos/as.
- Redes sociales.
- Correo electrónico.
- Ver / descargar música o vídeo.
- Jugar online.
- Otros, ¿Cuáles? _____

10. ¿Aproximadamente, cuánto tiempo usas diariamente internet para divertirse (visitar páginas de tu interés, chatear, enviar/recibir correo electrónico, jugar online, ver o descargar vídeos y música...)?

- De 0 a 30 min/día
- De 30 a 60 min/día
- De 60 a 120 min/día
- Más de 120 min/día

11. ¿Aproximadamente cuánto tiempo usas diariamente internet para estudiar (buscar información educativa, utilizar programas educativos, realizar tareas escolares...)?

- De 0 a 30 min/día
- De 30 a 60 min/día
- De 60 a 120 min/día
- Más de 120 min/día

12. ¿Aproximadamente cuánto tiempo usas diariamente internet para comunicarte con tus compañeros de clase (por Messenger, chat, correo electrónico...)?

- De 0 a 30 min/día
- De 30 a 60 min/día
- De 60 a 120 min/día
- Más de 120 min/día

Doctorado: Nuevas tecnologías aplicadas a la educación: e-learning y gestión del conocimiento.
Trabajo de campo: Cuestionario Equipación Tecnológica.
Curso Colegio

13. ¿Aproximadamente cuánto tiempo usas diariamente internet para comunicarte con tus profesores (por Messenger, chat, correo electrónico...)?

- De 0 a 30 min/día
- De 30 a 60 min/día
- De 60 a 120 min/día
- Más de 120 min/día

14. ¿Es útil internet como herramienta en tu educación?

- Muy útil.
- Útil.
- Poco útil.
- Muy poco útil.
- No influye en mi educación.

15. ¿Utilizas internet para aprender los conceptos que no te han quedado claros en clase?

- No.
- Sí ¿Qué haces?
 - Buscar en Google.
 - Consultar en Youtube.
 - Páginas web.
 - Otros _____

Anexo XVIII: Validación cuestionario disponibilidad tecnológica.

INFORME DE VALIDACIÓN



Título: Enseñanza de los sistemas lineales en secundaria: una propuesta de mejora a través de la integración de tecnologías

Descripción: Se introducirá en el proceso de enseñanza aprendizaje una aplicación para el estudio de sistemas así como el uso de Moodle. Por medio de estas TIC se evaluarán distintos aspectos sobre el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales.

A continuación, se presenta el informe de validación emitido por el Panel Internacional de Investigación en Tecnología Educativa (PI2TE), según las tareas encomendadas por el investigador. Los comentarios de cada experto están marcados con una E y un número.

En su trabajo deberá indicar la procedencia de la validación de la siguiente forma:

"Este instrumento de investigación ha sido validado por el Panel Internacional de Investigación en Tecnología Educativa (PI2TE) en <http://gte2.uib.es/panel>".

Validación de Cuestionario sobre equipación tecnológica

CATEGORÍA	ÍTEMS	PERTENENCIA		ADECUACIÓN		ESTILO Y REDACCIÓN			ORDEN PRESENTACIÓN	OBSERVACIONES
		E1, E2, E3 y E4: Sí	€ No	E1, E2, E3 y E4: Sí	€ No	€ E1 1 :2 3	€ E2, E3 y E4: 4	€ E1, E2, E3 y E4:4		
Datos alumnos	1. Edad €16 €15 €14 €13	E1, E2, E3 y E4: Sí	€ No	E1, E2, E3 y E4: Sí	€ No	€ E1 1 :2 3	€ E2, E3 y E4: 4	€ E1, E2, E3 y E4:4	E1, E2, E3 y E4: Correcto € Incorrecto	E1: "Quizá empezaría la serie por el número más pequeño (13, 14, 15...) creo que es más natural "
	2. Sexo € Masculino € Femenino	E1, E2, E3 y E4: Sí	€ No	E1, E2, E3 y E4: Sí	€ No	€ € € 1 2 3	E1, E2, E3 y E4:4	€ E1, E2, E3 y E4: 4	E1, E2, E3 y E4: Correcto € Incorrecto	E1: "Tanto con la primera como con la segunda pregunta, entiendo que se busca algún tipo de relación entre la edad o el sexo y el resto de dimensiones".

Equipación tecnológica	3. ¿Cuántos ordenadores con conexión a internet hay en tu casa? €0 €1 €2 €3 €4 €5 €>5	E1, E2 y E3: Sí	€ No	E1, E2 y E3: Sí	€ No	€ € € E1, E2 1 2 3 y E3:4	E1, E2 y E3: Correcto € Incorrecto	
	4. ¿Cuántos teléfonos móviles / i-phone (Smartphone) con conexión a internet hay en tu casa? €0 €1 €2 €3 €4 €5 €>5	E1, E2 y E3: Sí	€ No	E1, E2 y E3: Sí	€ No	€ € E3 y 1 2 :3 E2: 4	E1, E2 y E3: Correcto € Incorrecto	E1: "No veo la necesidad de distinguir una marca de teléfono móvil frente al resto. Igual pondría smatphone y iphone entre paréntesis." E2: "Si escribe i-phone en el texto, está hablando de un Smartphone concreto. Sería más recomendable poner diferentes marcas o bien omitirlas." E3: "En ambos casos (ítem 4 y 5) hay que considerar no sólo los equipos que hay en su caso, sino los equipos a los cuales el alumno tiene acceso. El decir, el hecho de que hay equipos no indica

									de manera automática que al alumno le permiten utilizarlos". E4: "¿ES RELEVANTE EL NÚMERO DE ORDENADORES , teléfonos y tablets? (items 3, 4 y 5) ¿no sería suficiente conocer si tiene un ordenador/telefon o/tablet disponible?"
	5. ¿Cuántas tablets / i-pads con conexión a internet hay en tu casa? €0 €1 €2 €3 €4 €5 €>5	E1, E2 y E3: Sí	€ No	E1, E2 y E3: Sí	€ No	<p style="text-align: center;">E1 € € E3 y 1 2 :3 E2: 4</p> <p style="text-align: center;">E1 € E2 y € 1 :2 E3 4 :3</p>	E1, E2 y E3: Correcto € Incorrecto	E1: "Idem pregunta anterior" E2: " Si escribe i-pads en el texto, está refiriéndose a una tablet concreta. Sería más recomendable citar varias o bien omitirlas."	
	6. ¿Desde donde sueles acceder a internet? € Desde mi casa € Desde la casa de amigos o Familiares. € Otros _____	E1, E2, E3 y E4: Sí	€ No	E1, E2, E3 y E4: Sí	€ No	<p style="text-align: center;">€ € € E1, 1 2 3 E2, E3 y E4:4</p> <p style="text-align: center;">€ € E4 E1, 1 2 :3 E2 y E3:4</p>	E1, E2, E3 y E4: Correcto € Incorrecto	E2: " Podríamos haber concretado también el centro de estudios como uno de los campos de la cuestión." E3: " Recomiendo colocarlo antes de preguntar por el	

								conexión diaria (por ejemplo: <30min, 30-60 min....)..." E3: "Añadir la opción "Otro(s)". E4: "Ver observación ítem 6"
Usos de internet	9. ¿Para qué utilizas principalmente internet? € Estudiar / realizar tareas escolares. € Buscar información / visitar páginas web sobre temas que te interesen. € Chatear / estar en contacto con amigos/as. € Ver / descargar música o vídeo. € Jugar online. € Otros, ¿Cuáles? _____	E1, E2, E3 y E4: Sí	€ No	E1, E2, E3 y E4: Sí	€ No	€ € € 1 2 3 E1, E2, E3 y E4:4	E1, E2, E3 y E4: Correcto € Incorrecto	E4: "Quizás podría ser interesante añadir un ítem sobre redes sociales (poniendo algunos ejemplos) y el uso del correo electrónico"
	10. ¿Aproximadamente, por día, cuánto tiempo usas internet para divertirte (visitar páginas de tu interés, chatear, enviar/recibir correo electrónico, jugar online, ver o descargar vídeos y música...)? € De 0 a 30 min/día € De 30 a 60 min/día € De 60 a 120 min/día € Más de 120 min/día	E1, E2, E3 y E4: Sí	€ No	E1, E2, E3 y E4: Sí	€ No	€ € € 1 2 :3 E1, E2 y E4: 4	E1, E2, E3 y E4: Correcto € Incorrecto	E3: "¿Aproximadamente, cuánto tiempo usas diariamente internet...?"
	11. ¿Aproximadamente, por día, cuánto tiempo usas internet para estudiar (buscar información educativa, utilizar	E1, E2, E3 y	€ No	E1, E2, E3 y	€ No	€ € € 1 2 :3 E1, E2 y	E1, E2 y E4: Correcto	

	programas educativos, realizar tareas escolares...)? € De 0 a 30 min/día € De 30 a 60 min/día € De 60 a 120 min/día € Más de 120 min/día	E4: Sí		E4: Sí		E4: 4	€ Incorrecto	
						E1, E2 y E4: 4		
		€ € E3 1 2 :3						
	12. ¿Aproximadamente, por día, cuánto tiempo) usas internet para comunicarte con tus compañeros de clase o profesores (por Messenger, chat, correo electrónico...)? € De 0 a 30 min/día € De 30 a 60 min/día € De 60 a 120 min/día € Más de 120 min/día	E1, E2, E3 y E4: Sí	€ No	E1, E2, E3 y E4: Sí	€ No	E1, E2 y E4: 4	E1, E2, E3 y E4: Correcto € Incorrecto	E1: "Quizá podría ser interesante distinguir entre profesor y compañeros para conocer si existe comunicación real y habitual entre el docente de un grupo y sus alumnos."
						E1, E2 y E4: 4		
		€ € E3 1 2 :3						
	13. ¿Qué grado de utilidad le das a internet como herramienta en tu educación? € Muy útil. € Útil. € Poco útil. € Muy poco útil. € No influye en mi educación.	E1, E2, E3 y E4: Sí	€ No	E1, E3 y E4: Sí	€ No	E1, E2 y E4: 4	E1, E2, E3 y E4: Correcto € Incorrecto	E2: " Se podría haber puesto una escala Likert de 1 a 5, desde muy poco útil hasta muy útil." E3: "¿Cuán útil es internet para...?"
						E1, E2 y E4: 4		
		€ € E3 1 2 :3						
	14. ¿Utilizas internet para aprender los conceptos que no te han quedado claros en clase? € No.	E1, E2, E3 y E4: Sí	€ No	E1, E2, E3 y E4: Sí	€ No	E1, E2, E3 y E4:4	E1, E2, E3 y E4: Correcto € Incorrecto	
		€ € € 1 2 3						

	<input type="checkbox"/> Sí ¿Qué haces? <input type="checkbox"/> Buscar en Google. <input type="checkbox"/> Consultar en Youtube. <input type="checkbox"/> Páginas web. <input type="checkbox"/> Otros _____								
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

E4: "MÁS OBSERVACIONES: suponiendo que se trata de un cuestionario inicial quizás pueda resultarte útil conocer previamente si han utilizado Moodle alguna vez, para qué y qué herramientas, así como el nivel de dificultad que consideran que tiene su uso. Por otra parte puede ser interesante conocer la autopercepción que tienen sobre el grado de dominio y conocimientos en el uso de Internet en general."

Anexo XIX: Hoja de ejercicios.

HOJA DE EJERCICIOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

1. ¿Qué tendríamos que hacer para conseguir que dos rectas sean paralelas?

Escribe una recta paralela a cada una de las siguientes:

- $y = -3x + 2$
- $x = \frac{3}{2}y - 5$
- $5y - x = 8$
- $3x + y = 2$

2. ¿Qué tendríamos que hacer para conseguir que dos rectas sean secantes?

Escribe una recta secante a cada una de las siguientes:

- $-2x + 5y = 3$
- $\frac{2}{3}x - \frac{5}{4}y = 7$
- $x + y = 1$
- $x + 2y = 8$

3. ¿Qué tendríamos que hacer para conseguir dos rectas coincidentes?

Escribe una recta coincidente a cada una de las siguientes:

- $y = 3x - 1$
- $y = 3$
- $x = y$
- $5y = 3x$

4. ¿Qué tendríamos que hacer para conseguir dos rectas perpendiculares?

Escribe una recta perpendicular a cada una de las siguientes:

- $5x - y = 2$
- $-x + y = -1$
- $3x + \frac{2}{5}y = 8$
- $x - y = \frac{7}{8}$

5. Dados los siguientes sistemas clasificalos e indica si son rectas secantes, paralelas o coincidentes:

- $\begin{cases} y = 3x + 5 \\ y = x + 3 \end{cases}$
- $\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ 4x - 10y = 6 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{5}{3}y = 2 \\ 3x - 5y = 15 \end{cases}$

6. Dada la recta $y = 5x + 7$ dibujada más abajo, ¿cómo sería respecto de esta recta las rectas siguientes?

- $y = 5x + 8$
- $y = 3x + 7$
- $-3y = x + 7$
- $-3y = x + 8$



7. Responde:

- Dadas las rectas $y = 3x + 8$; $y = -5x + 8$ ¿Se cortan en algún punto, en cuál y porqué? Expón tu conclusión.
- Dadas las rectas $y = x - 1$; $3y = 3x - 9$ ¿Se cortan en algún punto? ¿Por qué? Expón tu conclusión.
- Dadas las rectas $y = 3x - 5$; $x + \frac{5}{3}y = 9$ ¿Se cortan en algún punto? ¿Por qué? Expón tu conclusión.
- Dadas las rectas $15y - x = 33$; $x - 15y = -33$ ¿Se cortan en algún punto? ¿Por qué? Expón tu conclusión.
- Dadas las rectas $y = \frac{5x+2}{2}$; $y = \frac{8x+5}{7}$ ¿Se cortan en algún punto? ¿Por qué? Expón tu conclusión.

8. Dada la recta $2x + y = 1$, escribe la ecuación de otra recta que sea:

- Paralela a ella.
- Secante con ella en el punto (0,1).
- Coincidente con ella.
- Secante con ella en el punto (2,-3).

Anexo XX: Examen

A continuación observamos algunas de las preguntas del examen sobre nuestra temática.

1. Resuelve y clasifica:

$$a) \left. \begin{array}{l} \frac{4x+6y}{2} - \frac{6x+3y}{3} = x + 1 \\ \frac{5(2x+4y)}{10} = 3 \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} 4x - 2y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{array} \right\}$$

2. Plantea los siguientes problemas:

- a) Halla un número de dos cifras tales que la suma de ambas sea 8 y que el doble del número sea 10 unidades menor que el número que se obtiene al invertir sus cifras.
- b) En un examen tipo test cada respuesta correcta vale un punto y cada respuesta incorrecta o en blanco resta $\frac{1}{3}$ de punto. Hay un total de 20 preguntas y un estudiante ha obtenido 12 puntos.
¿Cuántas respuestas fueron correctas?

3. Razona, sin resolverlos, por qué uno de estos dos sistemas no tiene solución, mientras que el otro tiene infinitas soluciones.

$$a) \left. \begin{array}{l} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 6 \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{array} \right\}$$

Anexo XXI: Ejemplo informe registro de la plataforma.

Con estas imágenes vemos qué información nos proporciona la misma plataforma sobre las acciones de cada alumno. En la primera imagen observamos el número de visitas realizadas para de cada apartado y la fecha de la última.

En la imagen segunda, un diagrama con los días y el tiempo que ha invertido.

Finalmente, el detalle de todas las acciones.

Navegación

- Página Principal
- Área personal
- Mi perfil
- Curso actual
 - MAT350
 - Participantes
 - Insignias
 - Mis cursos



Administración

- Administración del curso
 - Activar edición
 - Editar ajustes
 - Usuarios
 - Darme de baja en MAT350
 - Filtros
 - Informes
 - Calficaciones
 - Insignias
 - Copia de seguridad
 - Restaurar
 - Importar
 - Releiciar
 - Banco de

General

- Novedades
- Foro de Noticias

Tema 1

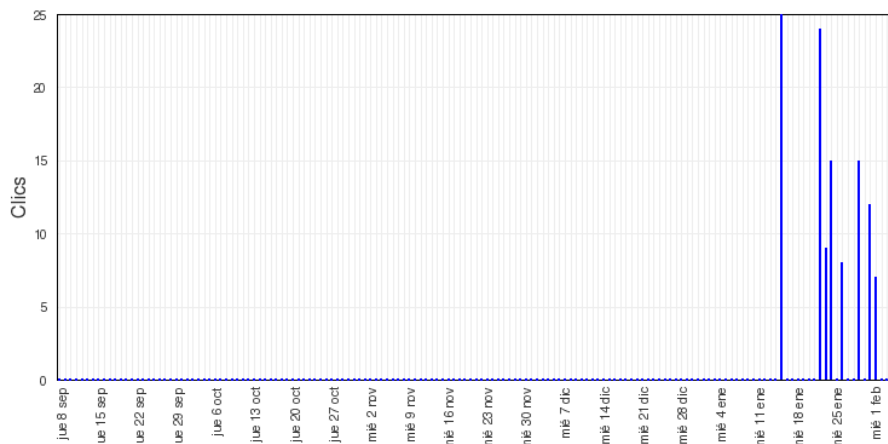
Teoría	18 vistas	martes, 24 de enero de 2017, 20:20 (11 días 2 horas)
Representación de puntos	5 vistas	lunes, 30 de enero de 2017, 09:19 (5 días 13 horas)
Tablas de valores	5 vistas	lunes, 23 de enero de 2017, 13:32 (12 días 9 horas)
Ejercicios geogebra	10 vistas	miércoles, 1 de febrero de 2017, 09:30 (3 días 13 horas)

Tema 2

Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas	11 vistas	jueves, 2 de febrero de 2017, 19:47 (2 días 3 horas)
Geogebra: Sistemas	2 vistas	martes, 24 de enero de 2017, 12:58 (11 días 10 horas)
Resolución de problemas	4 vistas	jueves, 2 de febrero de 2017, 21:44 (2 días 1 hora)
Ejercicios ecuaciones lineales	4 vistas	miércoles, 1 de febrero de 2017, 09:15 (3 días 13 horas)

Tema 3

- Sistemas de ecuaciones con WIRIS



Mostrando 115 registros

Página: 1 2 (Siguiente)

Hora	Dirección IP	Nombre completo del usuario	Acción	Información
jue 2 de febrero de 2017, 21:44	0.0.1	:araz	page view	Resolución de problemas
jue 2 de febrero de 2017, 21:44	0.0.1	:araz	course view	Matemáticas 3º ESO
jue 2 de febrero de 2017, 21:44	0.0.1	:araz	page view	Resolución de problemas
jue 2 de febrero de 2017, 19:48	0.0.1	:araz	page view	Resolución de problemas
jue 2 de febrero de 2017, 19:48	0.0.1	:araz	course view	Matemáticas 3º ESO
jue 2 de febrero de 2017, 19:47	0.0.1	:araz	page view	Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas
jue 2 de febrero de 2017, 19:46	0.0.1	:araz	course view	Matemáticas 3º ESO
mié 1 de febrero de 2017, 09:49	0.0.1	:araz	course view	Matemáticas 3º ESO
mié 1 de febrero de 2017, 09:49	0.0.1	:araz	course view	Matemáticas 3º ESO
mié 1 de febrero de 2017, 09:49	0.0.1	:araz	course view	Matemáticas 3º ESO
mié 1 de febrero de 2017, 09:49	0.0.1	:araz	course view	Matemáticas 3º ESO
mié 1 de febrero de 2017, 09:48	0.0.1	:araz	page view	Resolución de problemas
mié 1 de febrero de 2017, 09:48	0.0.1	:araz	course view	Matemáticas 3º ESO
mié 1 de febrero de 2017, 09:30	0.0.1	:araz	folder view	Ejercicios geogebra
mié 1 de febrero de 2017, 09:29	0.0.1	:araz	course view	Matemáticas 3º ESO
mié 1 de febrero de 2017, 09:15	0.0.1	:araz	resource view	Ejercicios ecuaciones lineales
mié 1 de febrero de 2017, 09:14	0.0.1	:araz	course view	Matemáticas 3º ESO
mié 1 de febrero de 2017, 09:02	0.0.1	:araz	page view	Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas
mié 1 de febrero de 2017, 09:02	0.0.1	:araz	course view	Matemáticas 3º ESO
lun 30 de enero de 2017, 14:26	0.0.1	:araz	course view	Matemáticas 3º ESO
lun 30 de enero de 2017, 12:45	0.0.1	:araz	page view	Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas
lun 30 de enero de 2017, 12:44	0.0.1	:araz	course view	Matemáticas 3º ESO
lun 30 de enero de 2017, 09:34	0.0.1	:araz	course view	Matemáticas 3º ESO
lun 30 de enero de 2017, 09:33	0.0.1	:araz	page view	Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas
lun 30 de enero de 2017, 09:32	0.0.1	:araz	page view	Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas

Anexo XXII: Ejemplo del diario de clase llevado a cabo para la propuesta didáctica.

Día 1:

- Plan previsto.

No se puede completar todo lo previsto para esta sesión. Se quedan trabajando por el punto “funciones cuya grafica es una recta”. Llevarán más trabajo para casa.

- Ejecución, aspectos actitudinales del alumnado, asistencia y segregación de los discentes.

Se trabaja según lo planificado. Los grupos son formados por dos/tres discentes. Cada grupo trabaja con un ordenador. Se les indica que en caso de que no les salga algún ejercicios pueden preguntarles al grupo de al lado. Se les hace hincapié en que no pueden pasar al siguiente apartado/ejercicio si todos los integrantes del grupo no han entendido la teoría y saben realizar la tarea, recordando que para ellos deben de ayudarse unos a otros.

Los alumnos tienen una actitud buena, y un comportamiento adecuado, aunque en ocasiones se les tiene que pedir que bajen el volumen (entre ellos hablan para resolver los ejercicios). También cuando el profesor, tras un periodo de trabajo de ellos, va a explicar de manera general al grupo-clase cuesta algún segundo, más que en la clase tradicional que vuelvan a un silencio absoluto.

Se les recuerda, dada la experiencia de este primer día, como deben comportarse durante el trasladado de su clase habitual al aula de informática, pues sin haber sido nefasta, es mejorable.

La asistencia es la habitual (una alumna es absentista y no acude). No falta ningún otro alumno.

Para la realización de los ejercicios de casa se les pide que o bien trabajen con los integrantes de sus grupos o de manera individual pero que no lo hagan con personas externas (profesores particulares, padres, vecinos...). Que deben ser ellos, por medio del razonamiento y el pensamiento los que logren trabajar, con las herramientas que hemos puesto a su alcance.

- Metodología y aspectos relacionados con la comprensión.

La metodología es la que se había diseñado. En referencia a las preguntas previstas tenemos las siguientes respuestas:

- ¿De qué depende que una recta sea creciente? Tan solo un alumno lo recordaba.
- ¿Podemos saber solo con la expresión analítica si pasa por el origen? Contestan casi todo que sí, pero no saben por qué ni cómo.
- Dada una gráfica: ¿Cómo podemos saber su expresión? Silencio...

Resaltamos que el diálogo es casi inexistente y que hay que explicarles y guiarles mucho.

- Valoración.

Es positiva, docente y alumnos están contestos.

- Toma de decisiones.
Las planificadas y las llevadas a cabo se consideran correctas.
- Incidencias con los ordenadores.
 - Un alumno tiene problemas para acceder al curso, en la plataforma virtual.
 - Un alumno no se ha dado de alta
 - Dos ordenadores dan problemas (el informático no había instalado los plugging que se necesitaban)
 - Tres ordenadores dan problemas pues van muy lentos, “se atascan”.

Se solucionan al tener más ordenadores en el aula que grupos formados.

Día 2:

- Plan previsto.
No se hacen los ejercicios de la página 113 del libro ni se les manda para casa leer lo indicado en el plan. Dado que hay un cambio de libro (nuevo plan) se le manda los ejercicios similares a los previstos que se encuentran en el nuevo (con otros números pero no hay grandes cambios que se tengan que resaltar).
- Ejecución, aspectos actitudinales del alumnado, asistencia y segregación de los discentes.
Se comentan aspectos generales sobre ejercicios. Se hacen las mismas preguntas que en la clase anterior y las respuestas empiezan a ser mejores y sobre todo hay un aumento considerable de alumnos que empiezan a “opinar”.
Se mantienen los grupos de trabajo. La actitud es buena (mejor que en la clase anterior). Se les felicita pues el comportamiento para llegar al aula de informática, ha sido mucho mejor que el día anterior.
- Metodología y aspectos relacionados con la comprensión.
La metodología es la que se había diseñado. Se trabaja con ellos el punto de “posición relativa de dos rectas” y se hacen más preguntas, a parte de las previstas, estas son:
 - ¿Cómo es la pendiente de la recta secante?
 - ¿Y cuando son secantes y perpendiculares?
 - ¿Qué pasa con la ordenada en el origen de las secantes?
- Valoración.
Es positiva, docente y alumnos están contestos.
- Toma de decisiones.
Las planificadas y las llevadas a cabo se consideran correctas.
- Incidencias con los ordenadores.

- Hay una alumna que no tiene ordenador en casa, comenta que la web del centro no le funciona en su teléfono (una pena que el centro no esté adaptado a los nuevos tiempos con el ritmo que debería).
- Algún ordenador falla, pero se cambia de terminal.

Día 3:

- Plan previsto.

Se desarrolla en el aula de informática pues así se fomentaría más el trabajo colaborativo, dejando las clases expositivas magistrales.

No se les manda de tarea que repasen los ejercicios interactivos pues no se han podido realizar los previstos pues no funcionó de manera correcta la aplicación que los contenía.

Se les indica que el próximo día se corregirá todo lo pendiente (de pensar) y que tienen que saber razonarlo.

Se les indica ejercicios que deben realizar para el próximo día dado que son el libro del plan antiguo y se les indica los ejercicios correspondientes a la parte explicada, que realizaran de manera tradicional, así como trabajar por medio del web el punto de método de resolución (no es necesario que relacen esos ejercicios).
- Ejecución, aspectos actitudinales del alumnado, asistencia y segregación de los discentes.

Todo correcto.
- Metodología y aspectos relacionados con la comprensión.

Aunque finalmente el profesor explica los métodos analíticos, de sustitución e igualación, con los que se pueden resolver los sistemas, no lo hace mediante una clase totalmente expositiva, sino interactuando con los estudiantes al ser métodos que ya conocían.
- Valoración.

Es positiva, docente y alumnos están contentos.
- Toma de decisiones.

Las planificadas y las llevadas a cabo se consideran correctas.
- Incidencias con los ordenadores.
 - Falla un ordenador.
 - Les tengo que abrir yo la aplicación Geogebra pues no logran aclararse. Esto puede ser debido a que el responsable de los medios informáticos del centro no siguió las indicaciones dadas por el investigador y docente, sugiriendo un cambio, otro camino para abrirlas. Se les preguntó a los alumnos, al día siguiente, si con el camino que se les indicó al principio tienen problema de la ejecución desde sus hogares.
 - No funciona la aplicación de la teoría. Esto es debido (según luego se descubre, hablando con el responsable de medios informáticos del centro) que las excepciones que investigador y

docentes le habían mandado para que incluyese en los ordenadores del centro, no las había puesto.

La profesora reconduce la clase y explica el método de sustitución e igualación y trabajan con Geogebra ejercicios tipo a los que tendrían que hacer en casa, preguntas dudas.

Día 4:

- Plan previsto.

Tan solo se les explica el método de reducción, interactuando con ellos por medio de varios ejemplos, de manera tradicional, sin el uso de los ordenadores.

Se trabaja todo lo demás, según programación prevista, añadiendo que trabajan todo el apartado del tema de sistemas, de manera interactiva. Me preguntan dudas matemáticas e informáticas (como que no les salía un ejercicio y que era por el tema de los espacios que había que marcar con la barra espaciadora).

No da tiempo a explicar Wiris.

Para casa se les manda que terminen este módulo interactivo y que se descarguen y realcen (con o sin la aplicación Geogebra) la hoja de ejercicios que encuentran en el aula virtual.

- Ejecución, aspectos actitudinales del alumnado, asistencia y segregación de los discentes.

Todo correcto. Los alumnos están muy motivados. Trabajan mucho entre ellos, apenas acuden para que les aclare dudas.

- Metodología y aspectos relacionados con la comprensión.

Sin aspectos relevantes que comentar.

- Valoración

Es positiva. Docente y alumnos están contentos.

- Toma de decisiones.

Las planificadas y las llevadas a cabo se consideran correctas.

- Incidencias con los ordenadores.

Solo hay dos ordenadores que no funcionen correctamente, los alumnos se cambian a otros.

Dado que el tema de teoría, en esta ocasión, esta embebido se les indica que para ver las diapositivas enteras pueden mover con los cursores la pantalla o alejar la imagen (por medio de la barra del navegador).

Día 5:

- Plan previsto.

Se lleva a cabo en el aula de los ordenadores. Se corrigen todos los ejercicios, interactivos, pues todavía no se había hecho.

Se corrige la hoja de ejercicios. Hasta el ejercicio 4 no hay problema. En el ejercicio 5, muchos alumnos dicen que no sabían hacerlo. Se les da alguna indicación y se les deja trabajar con la aplicación de Geogebra

para que puedan entenderlo. Les ayudo en todo lo que les hace falta. Finalmente lo entiende. Se les pide que terminen la hoja, que ahora ya saben cómo trabajarla cuando tengan alguna duda.

Se les indica que para el próximo día deben realizar unos ejercicios que se quedaron pendientes y que han de ponerse a trabajar en casa con el apartado de problemas interactivo.

- Ejecución, aspectos actitudinales del alumnado, asistencia y segregación de los discentes.
Todo correcto. Los alumnos están muy motivados y trabajadores.
- Metodología y aspectos relacionados con la comprensión.
Sin aspectos relevantes que comentar.
- Valoración
Es positiva, docente y alumnos están contentos.
- Toma de decisiones.
Las planificadas y las llevadas a cabo se consideran correctas.
- Incidencias con los ordenadores.
Un ordenador no funciona. El grupo se cambia a otro.

Día 7:

Se trabajan en la clase tradicional y en la pizarra la corrección de los ejercicios sobre resolución de los sistemas (ejercicios típicos). Se comentan que hay ejercicios de la parte interactiva que no sabían hacer pero se les responde que no se preocupe, que lo sigan intentando, pues el objetivo es aprender a pensar. Se les deja tiempo en clase para hacer los problemas previstos del libro y se les aclaran dudas de manera individual pero fomentando que se ayuden entre ellos.

Día 8 y 9:

Aunque el día último la clase no se emplea en su totalidad en estas actividades, se realizan todos los problemas de sus libros. Se terminan los ejercicios que se quedaron pendientes de la hoja de ejercicios del aula virtual. Se retoman los primeros que se mandaron de su libro que eran sobre la relación de los coeficientes, las soluciones, la clasificación... Ahora los entienden mucho mejor, incluso se auto-corrigen los fallos que tenían.

Anexo XXIII: Consecución de los objetivos/contenidos del currículo.

Pasamos a analizar la consecución de los objetivos que nos plantea la legislación y que no descuidamos a lo largo de la investigación. Para valorar esta consecución no vamos hacer la separación entre objetivos generales y específicos, puesto que creemos que lo más importante es analizar si los objetivos planteados eran realistas, o por el contrario, se han quedado lejos de poder alcanzarse, así como analizar cuál ha sido el motivo de ello, pues de este modo se podrá mejorar en futuros trabajos. Se ha de destacar que conforme avanzaba el estudio, vimos que había objetivos que se trabajan durante toda la enseñanza de la materia, en éste y otros niveles, y que no eran específicos de la inserción de las TIC, aunque con ellas se pudiesen también trabajar, pero no era la aplicación fundamental de este estudio y del uso del ordenador en el aula.

Pasamos pues a analizar la consecución de todos los objetivos que hemos tenido en la investigación:

- Aprender las relaciones funcionales, las distintas formas de expresar una función.
Cumplido pero en una fase inicial pues no era objeto del estudio todas las ecuaciones de la recta.
- Obtención de los puntos de una gráfica para la realización de las tablas de valores por medio de la representación gráfica de funciones.
Objetivo logrado en fase inicial, puesto que aunque aprendieron a reconocer de una gráfica los puntos que intervienen en ella y como poder hacer la tabla de valores, no se dedicó especial atención en la clase práctica.
- Estudio gráfico y algebraico de las funciones constantes lineales y afines.
Objetivo alcanzado por medio del nuevo escenario.
- Formulación de conjeturas sobre el fenómeno representado por una gráfica y su expresión algebraica.
Objetivo no cumplido de forma general, aunque se puede decir que se trabajó antes de usar el software, no se desarrolló con la profundidad que se debía y no se trabajó en la sala de los ordenadores.
- Relación entre los distintos coeficientes, ya sean naturales, enteros o racionales, que intervienen en las ecuaciones de las rectas.
Hemos de destacar que éste ha sido uno de los grandes progresos en el proceso de e-a. Gracias al programa, los alumnos han entendido la implicación de los coeficientes en la representación gráfica de funciones. Objetivo cumplido satisfactoriamente.

- Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.
Objetivo no cumplido dado que en la sesión de ordenador no se trabajaron situaciones reales, se basó en la abstracción de las rectas y en su representación sin hacer una correspondencia bidireccional de estas con fenómenos de la vida diaria.
- Obtener sistemas equivalentes a uno dado.
Mientras que usaban la aplicación informática, se trabajó en grupos este aspecto, para que pudiesen comprobar las creencias que estuviesen trabajando con el ordenador. De esta forma pudieron razonar y aprender por medio del ensayo-error cumpliendo con el objetivo propuesto positivamente.
- Identificar el tipo de sistema según su número de soluciones.
Objetivo cumplido por medio de las TIC.
- Interpretación crítica de las soluciones de un sistema.
Objetivo cumplido por medio de las TIC.
- Resolución de problemas mediante la utilización de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas
Objetivo en proceso pues aunque sabemos que es un objetivo muy trabajado durante el curso, dado que a los alumnos los problemas matemáticos les cuesta desarrollarlos de manera correcta, no siempre logra alcanzarse.
- Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos o científicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana, con el fin de comunicarse de manera clara, concisa y precisa.
De este objetivo, se trabajó la primera parte pues se mejoró mucho la capacidad reflexiva, puesto que los alumnos tenían que exponer los cambios que debían hacer en los coeficientes para modificar la recta así como las respuestas de los ejercicios...
- Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
Objetivo en proceso de cumplimiento sin el uso de las TIC puesto que se trabajó en el aula antes de la inserción de las TIC.
- Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.

Los alumnos utilizaron el ordenador y el programa sin presentar problemas y con una perfecta adaptación al mismo.

- Actuar ante los problemas que se plantean en la vida cotidiana de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

En proceso al tratarse de un objetivo de toda la materia, no sólo relacionado con el tema de los sistemas. Los profesores de esta materia siempre intentamos desarrollarla.

- Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito y adquirir un nivel de autoestima adecuado, que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las Matemáticas.

En proceso, es un objetivo de toda la materia, no sólo relacionado con el tema de los sistemas. Los profesores de esta materia siempre intentamos desarrollarla.

- Adquirir, desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.

En proceso, no solo es un objetivo propio de las matemáticas, sino de todas las áreas curriculares. Aunque los profesores de este departamento trabajamos para su adquisición.

- Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos, así como una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.

Se trabajaron los aspectos positivos del programa/propuesta didáctica así como, por medio de la comunicación directa y oral con los alumnos, las mejoras que se pueden llevar a cabo para la mejora del mismo.

- Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, para planificar, para tomar decisiones y para asumir responsabilidades, valorando el esfuerzo con la finalidad de superar las dificultades.

En proceso, es un objetivo de toda la materia, no sólo relacionado con el tema de los sistemas. Los profesores de esta materia siempre intentamos desarrollarla.

- Estándares de aprendizaje del bloque 1 de la nueva legislación: Métodos y actitudes matemáticas.

La mayoría en proceso, pues se tratan de objetivos de toda la materia, no sólo relacionado con el tema de los sistemas. Los profesores de esta materia siempre intentamos desarrollarla.

- Estándares de aprendizaje del bloque 2 de la nueva legislación: Números y álgebra.
Los relacionados con nuestra temática, ya comentados con todo lo expuesto con anterioridad.
Señalamos que no se han trabajado en este tema todas las ecuaciones de la recta y que se verá el momento oportuno para hacerlo.

Anexo XXIV: Certificado curso Moodle.



Región de Murcia
Consejería de Educación, Formación y Empleo

DIRECCIÓN GENERAL DE RECURSOS HUMANOS Y CALIDAD
EDUCATIVA

Centro de Profesores y Recursos Cartagena

D./Dña. Daniel Ángel Marcos Martí

DIRECTOR/A del Centro de Profesores y Recursos Cartagena

CERTIFICA:

Que, D./Dña. **MARIA CARRILLO GARCIA**

con documento nacional de identidad número 023035752-X HA SUPERADO la actividad de la modalidad CURSO, submodalidad PRESENCIAL denominada:

Aplicaciones Educativas con Moodle.

Celebrada en Cartagena del 03/10/2011 al 07/11/2011, con una duración de 20 horas, equivalente a 2 créditos.

Y para que conste, a los efectos oportunos, expide el presente certificado, que ha sido inscrito en el Registro General de Formación Permanente del Profesorado con el número: **30300002 - 0027 - 12 - 0008**

En Cartagena, a 07 de noviembre de 2011

Anexo XXV: Certificado curso Geogebra.

	
Región de Murcia Consejería de Educación, Formación y Empleo	
DIRECCIÓN GENERAL DE RECURSOS HUMANOS Y CALIDAD EDUCATIVA	
Centro de Profesores y Recursos Murcia II	
D./Dña. Antonio Gomariz Marín	
DIRECTOR/A del Centro de Profesores y Recursos Murcia II	
CERTIFICA:	
Que, D./Dña. MARIA CARRILLO GARCIA	
con documento nacional de identidad número 023035752-X HA SUPERADO la actividad de la modalidad CURSO, submodalidad PRESENCIAL denominada:	
Matemática Dinámica con Geogebra.	
Celebrada en Murcia del 09/11/2011 al 30/11/2011, con una duración de 20 horas, equivalente a 2 créditos.	
Y para que conste, a los efectos oportunos, expide el presente certificado, que ha sido inscrito en el Registro General de Formación Permanente del Profesorado con el número: 30300007 - 0037 - 12 - 0001	
En Murcia, a 30 de noviembre de 2011	
	
	Región de Murcia Consejería de Educación, Formación y Empleo Centro de Profesores y Recursos Murcia II