



**Universitat de les
Illes Balears**

Facultad de Ciencias

Memoria del Trabajo de Fin de Grado

Acoplamientos viscosos y elásticos en cadenas de osciladores sobreamortiguados.

Iván Marqués Campillo

Grado de Física

Año académico 2018-19

Trabajo tutelado por Oreste Piro Perusín

*Departamento de Física

Se autoriza a la Universidad a incluir este trabajo en el Repositorio Institucional para su consulta en acceso abierto y difusión en línea, con finalidades exclusivamente académicas y de investigación	Autor		Tutor	
	Sí	No	Sí	No
	X		X	

Palabras clave del trabajo:

Acoplamiento, viscosidad, oscilador, sobreamortiguado, operador.

Índice

1. Introducción	1
1.1. Motivación	2
2. Dinámica sobreamortiguada	3
3. Acoplamiento viscoso y elástico	4
4. Análisis matemático preliminar	5
4.1. Diagonalización de la matriz de interacción a próximos vecinos	5
4.2. Tratamiento del operador W	7
4.2.1. Expresión analítica para W	8
4.2.2. Comportamiento de W para distintos límites	10
4.3. Relación entre ambas interacciones	13
5. Modelo: osciladores armónicos acoplados	14
5.1. Resolución del modelo	15
5.1.1. Aplicación de C.I.	16
5.2. Caso extremo: entorno sumamente viscoso	17
5.3. Representación y análisis de distintos regímenes	18
6. Conclusiones	24

1. Introducción

El objetivo de este trabajo es contribuir a comprender el impacto sobre la dinámica de cadenas de osciladores mecánicos operando en régimen de sobreamortiguamiento, de los posibles acoplamientos de naturaleza también mecánica entre primeros vecinos de dicha cadena. Por régimen de sobreamortiguamiento entendemos a aquel en el cual las fuerzas de inercia son muy débiles y, por ende, se pueden despreciar; y por posibles acoplamientos mecánicos entendemos los proporcionados por interacciones elásticas o debidas a la fricción viscosa entre primeros vecinos.

En los modelos más familiares que involucran dinámica espacio-temporal, por ejemplo los que apuntan a la formación de patrones (Turing, Complex Ginzburg-Landau Equation, etc.) se da por sentada una dinámica de reacción-difusión, esto es, una en la que la variación temporal de las variables dinámicas viene dada localmente por una ecuación de reacción (ley de acción de masas en el caso de reacciones químicas, tasas de natalidad y muerte en dinámica de poblaciones, etc.), y el acoplamiento entre distintos puntos del espacio resulta, naturalmente, difusivo: la segunda variación espacial, de dicha variable dinámica.

$$\frac{\partial A}{\partial t} = F(A) + D\Delta^2 A \quad (1)$$

Figura 1: Ecuación reacción-difusiva genérica siendo A una variable dinámica, $F(A)$ una función arbitraria, D una constante que determina la magnitud de la difusión y Δ^2 el operador de interacción centrada a vecinos contiguos.

Esto, que resulta físicamente plausible en aquel tipo de modelos donde la difusión forma parte natural del proceso dinámico, debe examinarse con más cuidado en el caso en que las variables dinámicas sean de tipo mecánico: posición, velocidad, etc, y la dinámica venga descrita por fuerzas de la misma naturaleza mecánica. En estos casos, la ley que describe la dinámica es la segunda ley de Newton: las fuerzas equilibran la inercia, y en el lado de las fuerzas, se deben incluir todas las que actúan sobre la partícula mecánica bajo consideración. Pero cuando estas partículas son pequeñas y están inmersas en un medio fluido viscoso de tales características que las fuerzas de resistencia ejercidas por el medio puedan considerarse lineales con la velocidad, es muy común recurrir a la aproximación de sobreamortiguamiento, en la que la ley de Newton resulta ahora en equilibrio entre velocidades (en vez de aceleraciones) y fuerzas.

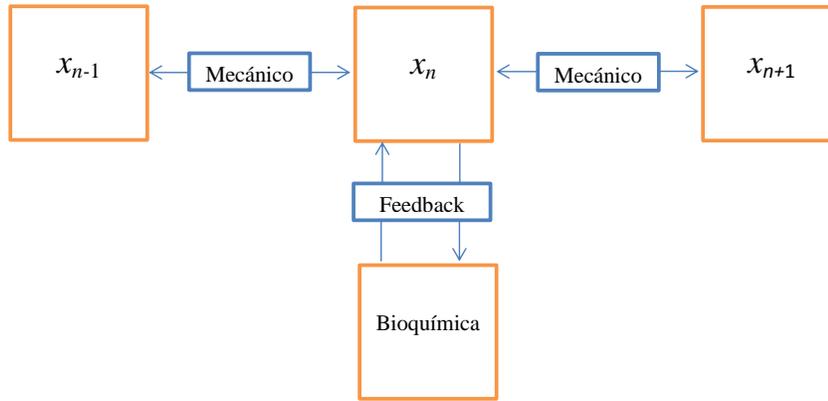


Figura 2: Esquema simplificado del modelo a considerar, siendo x_n el desplazamiento mecánico del n -ésimo oscilador. Se puede observar como existe un acoplamiento mecánico entre cada miembro y su contiguo y, a su vez, hay un proceso de retroalimentación bioquímica para cada individuo

En esta aproximación es, pues, crucial remarcar que si el acoplamiento entre vecinos es también de naturaleza viscosa (fuerzas proporcionales a la velocidad relativa entre próximos), esto da lugar a un tipo de sistema dinámico de estructura muy diferente a la mencionada antes, en la que la interacción espacial es global (abarca mayor dominio que el de los individuos contiguos) y, consecuentemente, viene especificada por un operador de mayor complejidad. En este trabajo nos concentraremos en la descripción detallada de este operador y las consecuencias que ocasiona esta dinámica en el caso más sencillo de una secuencia de osciladores armónicos sobreamortiguados.

1.1. Motivación

La motivación principal de estudiar este tipo de acoplamientos y este régimen sobreamortiguado es tratar de modelar el sistema biológico de la papila basilar de algunas especies de lagarto. Esta se encuentra en el sistema auditivo y está formada por una matriz, aproximadamente rectilínea, de células ciliares mecánica y bioquímicamente sensibles acopladas a sus vecinos de alguna forma compleja.

Cabe destacar que el sistema está inmerso en un fluido semejante en viscosidad al agua y, dadas sus dimensiones y las masas de cada individuo, que cualquier perturbación se adaptará casi inmediatamente a las fuerzas mecánico-disipativas.

Asimismo, está comunmente aceptado que, dada la fisiología de la célula per se, existe algún tipo de proceso activo de retroalimentación bioquímico, como se puede observar en la figura (2), que convierte cada sección de la papila en un oscilador au-

tosustentado. Estas secciones se encuentran acopladas mecánicamente entre sí como se ve en la misma figura y, además, puede existir algún tipo de distribución espacial no trivial de frecuencias naturales de cada componente (posiblemente espacialmente exponencial), resultando así una cadena tonotópica. Sin embargo, en este estudio, nos concentraremos en el efecto del acoplamiento de naturaleza viscosa sobre una dinámica “sobreamortiguada” lineal y pospondremos el estudio de la tonotopía a una siguiente etapa.

2. Dinámica sobreamortiguada

Debido a esta configuración del sistema privada de inercia en la cual las fuerzas externas se acoplan a las velocidades, las ecuaciones diferenciales se verán ligeramente alteradas suponiendo esto una colección de soluciones inusuales en las cuales la interacción aparentemente local del acoplamiento viscoso evoluciona a una global que será estudiada posteriormente.

Definimos x como un vector cuyas componentes corresponden al desplazamiento mecánico de los osciladores, es decir:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$$

Este tipo de dinámica obedecerá ecuaciones diferenciales del siguiente estilo:

$$\hat{F} \left[x, \frac{dx}{dt}, y \right]_n = m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} \approx 0 \quad (2)$$

$$\frac{dy_n}{dt} = \hat{\gamma} [x, y]_n \quad (3)$$

Donde \hat{F} es un operador compuesto, habitualmente constituido por dos sectores, uno local y otro de acoplamiento entre unidades. Además, y_n es una componente intrínseca del oscilador n ésimo debido a la retroalimentación bioquímica, cuya dinámica viene descrita por el operador $\hat{\gamma}$.

En la aproximación de Stokes, la fuerza de fricción es proporcional a la velocidad y, por ello, podemos formular nuestro operador local de la siguiente forma:

$$\hat{F}_{local} \left[x, \frac{dx}{dt}, y \right]_n = -\gamma \frac{dx_n}{dt} + f(x_n) + g(x_n, y_n) \quad (4)$$

sabiendo que $f(x_n)$ es una función que representaría las fuerzas de restauración elásticas, eventualmente no lineales, y $g(x_n, y_n)$ el *feedback* bioquímico.

3. Acoplamiento viscoso y elástico

La parte no local del operador \hat{F} proviene del acoplamiento mecánico entre osciladores vecinos. Como adelantamos anteriormente, este acoplamiento puede deberse a interacciones de naturaleza elástico o hidrodinámica. A continuación, analizaremos las diferencias primordiales entre ambos tipos. En primer lugar, para el acoplamiento puramente elástico, tenemos típicamente una situación en la cual cada oscilador mecánico está conectado a sus vecinos mediante un resorte siguiendo la ley de Hooke.

Matemáticamente se puede expresar de la siguiente forma:

$$F_{el.}|_n \propto (x_{n+1} - x_n) + (x_{n-1} - x_n) = x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = \Delta^2 [x]_n \quad (5)$$

Donde Δ^2 es el operador de interacción centrada de cada individuo a ambos vecinos.

En el caso de acoplamiento viscoso cada ejemplar interactúa con sus semejantes más cercanos a través de sus velocidades relativas. Esta diferencia cualitativa introduce un comportamiento notoriamente distinto el cual puede ser figurado si imaginamos la cadena de osciladores sumergida en un fluido y, por el hecho de la existencia de movimiento relativo, un individuo podría generar un flujo neto que afecta a sus vecinos adyacentes. Esta es una conducta idealizada que da lugar, como veremos posteriormente, a una transmisión instantánea de la información.

Para esta interacción tenemos:

$$F_{visc.}|_n \propto \frac{dx_{n+1}}{dt} - 2\frac{dx_n}{dt} + \frac{dx_{n-1}}{dt} = \Delta^2 \left[\frac{dx}{dt} \right]_n \quad (6)$$

La dinámica implícita en la ecuación (2) puede escribirse como:

$$\left[\frac{dx}{dt} \right]_n = f(x_n) + g(x_n, y_n) + \alpha \Delta^2 [x]_n \quad (7)$$

para el caso elástico y como:

$$\left[\frac{dx}{dt} \right]_n = f(x_n) + g(x_n, y_n) + \beta \Delta^2 \left[\frac{dx}{dt} \right]_n \quad (8)$$

para el caso viscoso. Donde γ ha sido absorbido en la escala temporal y los parámetros α, β indican la intensidad de los correspondientes acoplamientos.

A fin de expresar la ecuación (8) en la forma usual de un sistema dinámico, con las derivadas temporales aisladas en un lado de la ecuación, el término de interacción viscosa debe agruparse junto con el de la velocidad $\frac{dx_n}{dt}$ como sigue:

$$(1 - \beta \Delta^2) \left[\frac{dx}{dt} \right]_n = f(x_n) + g(x_n, y_n)$$

que, suponiendo existencia de inversa, podemos reescribirlo como:

$$\left[\frac{dx}{dt} \right]_n = (1 - \beta \Delta^2)^{-1} [f(x) + g(x, y)]_n \quad (9)$$

Es por ello que se define el operador

$$W = (1 - \beta \Delta^2)^{-1} \quad (10)$$

que es el protagonista principal de este trabajo. Como se verá posteriormente, se trata de un operador que describe acoplamientos globales (cada individuo recibe la influencia de todos los de la cadena) pese a que su definición proviene de una interacción a primeros vecinos.

En la próxima sección se estudiará en detalle la estructura de W .

4. Análisis matemático preliminar

En los siguientes apartados daremos expresiones analíticas que ayudarán a entender las características distintivas de ambos tipos de acoplamiento mencionado anteriormente.

4.1. Diagonalización de la matriz de interacción a próximos vecinos

Definiremos la matriz Δ^2 y, para simplificar los cálculos, procederemos a diagonalizarla.

$$\Delta^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & & 0 \\ 0 & & & & & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Se ha supuesto una dimensión arbitraria (en nuestro problema coincidiría con el número de osciladores) y, como se puede observar, se han introducido condiciones de contorno periódicas, las cuales se pueden entender como si trabajáramos en un dominio con forma de “anillo”. A continuación consideramos si existe algún vector e para el cual la matriz aplicada a este sea proporcional al mismo:

$$\Delta^2 e = \lambda e \quad (11)$$

donde λ es la constante de proporcionalidad (autovalor).

Aplicando e en (11) nos queda:

$$e_{n+1} - 2e_n + e_{n-1} = \lambda e_n \quad (12)$$

con e_n la componente n -ésima de e . Se puede comprobar que las condiciones de contorno periódicas ($e_0 = e_N$) hacen que la expresión (12) sea análoga a (11).

Las soluciones a (12) ofrecen una base completa de vectores y, mediante las condiciones en los límites, podemos extraer información acerca de los autovalores asociados a estos. A partir de resolver nuestra relación de recurrencia obtenemos los valores de λ asociados, que son:

$$\lambda^l = -4 \sin^2 \frac{\pi l}{N} \quad (13)$$

De igual forma, los autovectores resultan ser:

$$e_n^l = A_l \exp \frac{2\pi i l n}{N} + B_l \exp -\frac{2\pi i l n}{N} \quad (14)$$

con $1 \leq l \leq N$ y A_l, B_l constantes a determinar.

Nuestra base es ortogonal debido a que Δ^2 es simétrica y es conveniente, para facilitar el álgebra, que esté normalizada. Para ello, se ha de cuantificar la relación entre las constantes para que se cumpla:

$$\langle e^l, e^p \rangle = \delta^{l,p} \quad (15)$$

Al imponer (15), la restricción resultante es: $A_l^2 + B_l^2 = \frac{1}{N}$

Para simplificar impondremos que $B_l = 0$ para $l \in [1, 2, \dots, N]$, obteniendo así la expresión final para las componentes de los vectores ortonormales de nuestra nueva base:

$$e_n^l = \sqrt{\frac{1}{N}} \exp \frac{2\pi i l n}{N} \quad (16)$$

De esta forma, nuestra ecuación (11) puede escribirse teniendo en cuenta todos los vectores de la base de la siguiente manera:

$$\Delta^2 X = X \Lambda \quad (17)$$

con

$$X = \begin{pmatrix} e_1^1 & e_1^2 & \dots \\ \vdots & \ddots & \\ e_N^1 & & e_N^N \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda^1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda^N \end{pmatrix}$$

Cabe destacar que nuestra matriz X es ortonormal, entonces $X^\dagger = X^{-1}$. Además es simétrica, por ende $X^\dagger = X^*$.

Esto da pie a representar nuestra matriz de interacción de la siguiente manera:

$$\Delta^2 = X \Lambda X^\dagger \quad (18)$$

4.2. Tratamiento del operador W

El operador W , es definido como:

$$W = [\mathbb{1} - \beta \Delta^2]^{-1} \quad (19)$$

donde β es un parámetro en el que están presentes no solo la viscosidad del fluido y la geometría de los osciladores (grosso modo depende de su superficie S), sino también la distancia entre cada individuo a . Esto es: $\beta \propto \frac{S}{a^2}$.

Es preciso enfatizar que W es fundamental para el análisis de la dinámica lineal en un régimen sobreamortiguado con acoplamiento viscoso¹.

¹Esto es debido, como se advertirá posteriormente, a que, operacionalmente, la primera derivada temporal es proporcional a W en este escenario.

Partiendo de la base de que $[\mathbb{1} - \beta\Delta^2]W = \mathbb{1}$ y disponiendo del desarrollo del subapartado anterior, podemos realizar el siguiente tratamiento:

$$[\mathbb{1} - \beta\Delta^2]W = X[\mathbb{1} - \beta\Lambda]X^\dagger W = \mathbb{1} \quad (20)$$

que, invirtiendo pautadamente, nos queda:

$$W = X[\mathbb{1} - \beta\Lambda]^{-1}X^\dagger \quad (21)$$

o, escrito en componentes:

$$W_{s,l} = \sum_{n=1}^N e_n^s \lambda^n (e_n^l)^* = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\exp(\frac{2\pi i n}{N}(s-l))}{1 + 4\beta \sin^2 \frac{n\pi}{N}} \quad (22)$$

Se puede demostrar que la matriz W es simétrica y se observa que únicamente depende de la relación $d = s - l$, cosa que denota invarianza translacional. Se introduce la notación $W_{s,l} = W_d$.

4.2.1. Expresión analítica para W

Una vez está definido W_d , procedemos a realizar el siguiente cálculo:

$$\frac{W_{d+1} + W_{d-1}}{2} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\cos \frac{2\pi n}{N}}{1 + 4\beta \sin^2 \frac{n\pi}{N}} \exp(\frac{2\pi i n d}{N}) \quad (23)$$

que, operando, se puede simplificar para obtener:

$$W_{d+1} - 2\sigma W_d + W_{d-1} = \frac{-1}{\beta N} \sum_{n=1}^N \exp(\frac{2\pi i n d}{N}) = -\frac{\delta_{d,0}}{\beta} \quad (24)$$

con $\sigma = 1 + \frac{1}{2\beta}$. Dado que el dominio para el índice d es $|d| < N$, la suma deriva a una delta de Kronecker $\delta_{d,0}$. Para resolver la relación de recurrencia para W_d , dividimos esta en tres regiones de la siguiente forma:

$$W_d = \begin{cases} W_d^+ & d > 0 \\ W_0 & d = 0 \\ W_d^- & d < 0 \end{cases}$$

De esta manera, la correspondiente expresión para W_d^\pm vendrá dada por la ecuación (24) con $\delta_{d,0} = 0$. Suponiendo una solución tipo $W_d^\pm = C^\pm r^d$, siendo C^\pm un parámetro independiente de d , y resolviendo para r se tiene que:

$$r = \sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 1} = \exp(\pm\phi) \quad (25)$$

con $\cosh \phi = \sigma$. Hay que resaltar que ϕ es una variable real ya que $\sigma = 1 + \frac{1}{2\beta} > 1$. De esta forma, nuestra expresión para W_d es:

$$W_d = \begin{cases} A^+ \exp(d\phi) + B^+ \exp(-d\phi) & d > 0 \\ W_0 & d = 0 \\ A^- \exp(d\phi) + B^- \exp(-d\phi) & d < 0 \end{cases}$$

Una vez llegados a este punto, toca imponer las condiciones que determinen las constantes.

En primer lugar y al margen de la expresión (22), nuestra función es simétrica o, de otro modo, $W_d = W_{-d}$. También, hay que esperar que W_d sea continua y, en especial, para $d = 0$ se visualiza que $W_0 = W_0^+ = W_0^-$.

Como segundo punto, hay que enfatizar la periodicidad, es decir $W_0 = W_N$.

Por último, se ha de tener en cuenta la restricción que ofrece (24) si evaluamos esta en $d = 0$, o sea: $W_1^+ - 2 \cosh \phi W_0 + W_{-1}^- = -2(\cosh \phi - 1)$

Aplicando el primer condicionamiento, se llega a que $A^+ = B^-$ y que $B^+ = A^-$. Empleando las restantes restricciones y tras un pequeño cálculo, se llega a que el valor de los parámetros es:

$$\begin{pmatrix} A^+ \\ B^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^- \\ A^- \end{pmatrix} = \frac{\tanh(\frac{\phi}{2})}{2 \sinh(\frac{N\phi}{2})} \begin{pmatrix} \exp(-\frac{N\phi}{2}) \\ \exp(\frac{N\phi}{2}) \end{pmatrix}$$

El resultado final es:

$$W_d = \tanh\left(\frac{\phi}{2}\right) \frac{\cosh\left(\left(|d| - \frac{N}{2}\right)\phi\right)}{\sinh\left(\frac{N\phi}{2}\right)} \quad (26)$$

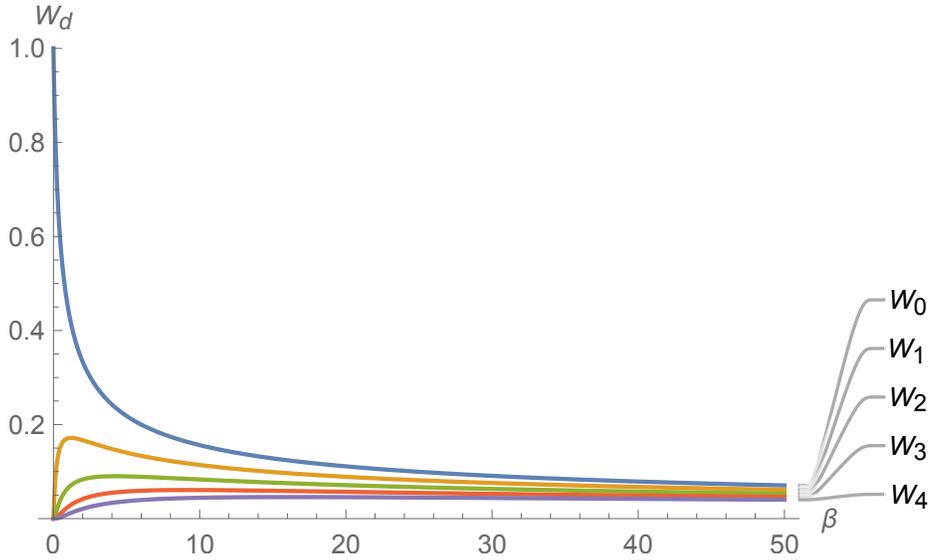


Figura 3: Representación de las componentes diagonales consecutivas del operador $W = (1 - \beta\Delta^2)^{-1}$ para $N = 10$. Se puede visualizar como la componente de interacción sobre sí mismo, W_0 , tiene un decrecimiento monótono, sugiriendo así una mayor distribución de su energía a los demás individuos a medida que β crece. Se aprecia como los demás constituyentes parten de 0 para $\beta = 0$ (no hay interacción), pasan por un máximo y, finalmente, convergen junto a W_0 hacia un el valor $\frac{1}{N}$.

Como se puede observar en la figura (3), existe un valor del parámetro β para el cual la interacción a $|d|$ vecinos es máxima. Visto de otra forma, esto implica que para un sistema dado (viscosidad del fluido y geometría de cada miembro) existe una relación entre la distancia entre cada ejemplar y su adyacente d para la cual W_d es máximo.

Cabe resaltar que en el límite $\beta \rightarrow \infty$, todas las componentes tienden al valor $\frac{1}{N}$. Esto se debe a que en este régimen la interacción afecta a todos los individuos por igual, repartiendo el efecto equitativamente (la contribución total $\sum_{d=1}^N W_d$ siempre es 1).

4.2.2. Comportamiento de W para distintos límites

Recordando que a fue definida como la distancia entre cada individuo y L como el dominio de nuestra estructura, a continuación analizaremos tres casos:

1. ($N \rightarrow \infty$, $L \rightarrow \infty$, a finito):

Puesto que $L = a \cdot N$ y $a \neq 0$, el hecho de que $N \rightarrow \infty$ implica automáticamente que $L \rightarrow \infty$. Esto es, una representación ideal de una cadena circular de osciladores cuyo perímetro es de tal extensión que puede considerarse inexistencia de interacción entre vecinos N -ésimos. Es a causa de esto que hay que recalcar que en estas circunstancias es más interesante calcular explícitamente los valores de los máximos de acoplamiento a d contiguos.

Dado que se cumple que $W_{|d|} = W_{N-|d|}$ para todo el dominio de d , podemos analizar este límite considerando únicamente $|d| < \frac{N}{2}$ ya que las otras componentes se obtienen a través de la biyección $|d| \rightarrow N - |d|$.

Para ello, retomando la expresión (26) y con $|d| < \frac{N}{2}$, obtenemos:

$$W_d = \lim_{N \rightarrow \infty} \tanh\left(\frac{\phi}{2}\right) \frac{\cosh\left(\left(|d| - \frac{N}{2}\right)\phi\right)}{\sinh\left(\frac{N\phi}{2}\right)} = \tanh\left(\frac{\phi}{2}\right) \exp(-|d|\phi) \quad (27)$$

Se observa un decrecimiento exponencial en la magnitud de la interacción entre vecinos d -ésimos, haciendo relevantes exclusivamente los miembros más inmediatos.

El conjunto de valores ϕ, d que maximizan W_d cumplen:

$$|d| \sinh(\phi) = 1 \quad (28)$$

2. ($N \rightarrow \infty$, L finito, $a \rightarrow 0$):

Para analizar este caso, es necesario introducir la dependencia explícita de nuestro parámetro de viscosidad con la distancia de la red. Esto es:

$$\beta = \frac{\beta'}{a^2}$$

siendo β' un coeficiente que depende de la viscosidad del fluido y de la geometría de los osciladores. Además, al estar adentrándonos en el ámbito continuo todos los índices discretos j pasan a ser representados por $s = a \cdot j$, donde s es la variable continua.

Partiendo de que en el límite $a \rightarrow 0$ las sumas resultan ser integrales, entonces debe existir un isomorfismo entre W y el operador correspondiente en el

continuo. Esto se puede representar de la siguiente manera:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\frac{L}{a}} a \frac{W_{i,n}}{a} \rightarrow \int_{s=0}^L ds' W(s, s') \quad (29)$$

con $a \rightarrow ds$.

Se puede deducir que

$$W(s, s') = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{W_{i,n}(a)}{a} \Big|_{i=\frac{s}{a}, n=\frac{s'}{a}}$$

Una vez definidos los conceptos se puede encontrar la expresión para esta entidad. El resultado es:

$$W(s, s') = \frac{1}{2\sqrt{\beta'}} \frac{\cosh\left(\frac{|s-s'| - \frac{L}{2}}{\sqrt{\beta'}}\right)}{\sinh\left(\frac{L}{2\sqrt{\beta'}}\right)} \quad (30)$$

que coincide con la función de *Green* de nuestro operador con condiciones de contorno periódicas. Esto es:

$$[\mathbb{1} - \beta' \frac{d^2}{ds^2}] W(s, s') = \delta(s - s')$$

3. ($N \rightarrow \infty, L \rightarrow \infty, a \rightarrow 0$):

En esta circunstancia, podemos derivar la expresión con sus respectivos límites, o bien a partir de (27), o bien de (30). Se puede concluir que la función de *Green* con condiciones de contorno “convergentes”, esto es $\lim_{s \rightarrow \infty} W(\pm s, s') = 0$, es:

$$W(s, s') = \frac{1}{2\sqrt{\beta'}} \exp\left(-\frac{|s - s'|}{\sqrt{\beta'}}\right) \quad (31)$$

Finalmente, es importante resaltar que, tanto de la expresión (28) haciendo el límite de a siendo infinitesimal como de la (31) calculando explícitamente sus extremos, se puede deducir la relación entre s, s' y β que maximizan $W(s, s')$, como se aprecia seguidamente:

$$|s - s'| = \sqrt{\beta} \quad (32)$$

cuyo correspondiente valor de W es:

$$W_{max} = \frac{1}{2e\sqrt{\beta}} = \frac{1}{2e|s - s'|} \quad (33)$$

Esto será de vital importancia a la hora de representar nuestra solución en un medio continuo ya que se podrá intuir en qué región, para un determinado valor de β , existen fenómenos que sean de una apreciabilidad mayor. Consecuentemente, más adelante se hará más hincapié en este remarcable suceso.

4.3. Relación entre ambas interacciones

Una vez definidas las fuerzas de interrelación viscosas y elásticas, se procede a investigar si existe algún tipo de isomorfismo entre estas.

Examinemos el caso en el que las fuerzas de restauración son lineales (oscilador armónico sobreamortiguado) y el acoplamiento es puramente elástico. En esta situación obtenemos un análogo a las ecuaciones de reacción-difusión con un término local lineal. El tratamiento se analizará operacionalmente.

Para el caso puramente elástico:

$$\frac{d}{dt} = -\omega\mathbb{1} + \alpha\Delta^2 \quad (34)$$

donde ω es la frecuencia natural de cada oscilador, $\mathbb{1}$ es la identidad y α es un parámetro constante que indica la intensidad del acoplamiento elástico.

Para el caso exclusivamente viscoso:

$$\frac{d}{dt} = -\omega\mathbb{1} + \beta\Delta^2 \frac{d}{dt} \quad (35)$$

De igual forma, aislando nuestra primera derivada temporal se obtiene:

$$\frac{d}{dt} = -\omega[\mathbb{1} - \beta\Delta^2]^{-1} = -\omega W \quad (36)$$

Si, haciendo uso de la expresión (27) para dar con las componentes W_d , suponemos que $\beta \ll 1$ (implica $\phi \gg 1$), se observa que, a causa del decrecimiento exponencial, prevalecen especialmente los miembros más cercanos a la diagonal. Esto puede representarse de la siguiente forma:

$$W_d \approx \tanh\left(\frac{\phi}{2}\right)\delta_{d,0} + \tanh\left(\frac{\phi}{2}\right)\exp(-\phi)(\delta_{d,1} + \delta_{d,-1})$$

Si queremos parangonar ambos acoplamientos conviene acomodar la expresión anterior en función de Δ^2 :

$$W_d \approx \tanh\left(\frac{\phi}{2}\right)(1 + 2\exp(-\phi))\delta_{d,0} + \tanh\left(\frac{\phi}{2}\right)\exp(-\phi)(\delta_{d,1} - 2\delta_{d,0} + \delta_{d,-1})$$

que, escrito de forma matricial y deshaciendo el cambio $(\phi(\beta))$, para $\beta \ll 1$, queda:

$$W \approx (1 - 4\beta^2)\mathbb{1} + (\beta - 2\beta^2)\Delta^2 \quad (37)$$

Se aprecia que a primer orden en β , la expresión anterior coincide con el desarrollo en serie del operador original $[\mathbb{1} - \beta\Delta^2]^{-1}$.

Podemos concluir que, en el ámbito de poco acoplamiento viscoso, la dinámica viene regida por:

$$\frac{d}{dt} \approx -\omega(1 - 4\beta^2)\mathbb{1} - \omega(\beta - 2\beta^2)\Delta^2 \approx -\omega\mathbb{1} - \omega\beta\Delta^2 \quad (38)$$

Se observa como una primera aproximación de la interacción viscosa da lugar a una especie de acoplamiento elástico inverso (análogo a ecuación de anti-difusión con término fuente), fenómeno causado por una aparentemente insignificante primera derivada temporal.

5. Modelo: osciladores armónicos acoplados

En este modelo lineal las fuentes de cambio provienen del propio acoplamiento y de la fuerza generada por un potencial harmónico.

$$\left[-\frac{d}{dt} + \beta\Delta^2\frac{d}{dt} + \alpha\Delta^2 - \omega\right]x = 0 \quad (39)$$

con $\alpha, \beta > 0$ para el caso de nuestro estudio.

Hay que resaltar que, debido a las condiciones de contorno periódicas establecidas sobre Δ^2 , la suma de las componentes de nuestro vector x tiene un decrecimiento

temporal exponencial. Definiendo $x_s = \sum_{n=1}^N x_n$, la dinámica de esta entidad puede demostrarse ser:

$$\frac{dx_s}{dt} = -\omega x_s$$

cuya solución es:

$$x_s(t) = x_s(0) \exp(-\omega t) \quad (40)$$

El destino final de esta variable dinámica es, pues, su total atenuación.

Si introducimos el cambio de variables $x' = \exp(t\frac{\alpha}{\beta})x$, podemos "transformar" la dinámica para que únicamente esté presente el acoplamiento viscoso. La ecuación resultante es, definiendo $\omega' = \omega - \frac{\alpha}{\beta}$, la siguiente:

$$[-\frac{d}{dt} + \beta\Delta^2 \frac{d}{dt} - \omega']x' = 0 \quad (41)$$

Esto hace referencia a la existencia de dos sistemas, uno en presencia de acoplamiento elástico x, ω y otro x', ω' en ausencia de este, entre los cuales existe una biyección.

En el siguiente subapartado se procederá a resolver el problema en este último marco.

5.1. Resolución del modelo

La ecuación en cuestión, (41), podemos escribirla de la siguiente forma²:

$$[\mathbb{1} - \beta\Delta^2] \frac{dx'}{dt} = -\omega' x'$$

o, sustituyendo Δ^2 por (18) y la identidad por $\mathbb{1} = XX^{-1} = XX^\dagger$, nos queda:

$$X[\mathbb{1} - \beta\Lambda]X^\dagger \frac{dx'}{dt} = -\omega' x'$$

²Es necesario realzar la situación en la cual $\omega' = 0$. Si esto sucede, en cierto modo los efectos viscosos y elásticos del acoplamiento se ven neutralizados. La solución a nuestra ecuación en este régimen es:

$$x(t) = \exp(-t\frac{\alpha}{\beta})x(0) \quad (42)$$

cuyo comportamiento es el mero atenuamiento de la condición inicial con frecuencia $w = \frac{\alpha}{\beta}$.

Invirtiendo X y haciendo el cambio $y = X^\dagger x'$, la ecuación (41) se nos transforma en:

$$[\mathbb{1} - \beta\Lambda] \frac{dy}{dt} = -\omega' y$$

o, escrita en función de sus componentes:

$$[1 + 4\beta \sin^2 \frac{\pi n}{N}] \frac{dy_n}{dt} = -\omega' y_n$$

Esta última ecuación diferencial es de solución inmediata:

$$y_n(t) = \exp\left(\frac{-\omega' t}{1 + 4\beta \sin^2 \frac{\pi n}{N}}\right) y_n(0)$$

Invirtiendo la relación ya tendríamos la solución para x' :

$$x'(t) = XQ(t)X^\dagger x'(0)$$

donde la matriz que contiene la información temporal es:

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{-\omega' t}{1+4\beta \sin^2 \frac{\pi}{N}}\right) & & & & \\ & \exp\left(\frac{-\omega' t}{1+4\beta \sin^2 \frac{2\pi}{N}}\right) & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \dots & \\ & & & & \exp(-\omega' t) \end{pmatrix}$$

5.1.1. Aplicación de C.I.

Supondremos una condición inicial, sin pérdida de generalidad debido a las condiciones de contorno, del estilo siguiente:

$$x(0) = x'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

esto es, una perturbación en la posición q -ésima. Nuestra solución es:

$$x'(t) = \sum_{m=1}^N \begin{pmatrix} Q^m(t) e_q^m (e_1^m)^* \\ Q^m(t) e_q^m (e_2^m)^* \\ \vdots \\ Q^m(t) e_q^m (e_N^m)^* \end{pmatrix}$$

que sustituyendo y representándolo a través de sus componentes es:

$$x'_n(t) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \exp\left(\frac{-\omega' t}{1 + 4\beta \sin^2 \frac{m\pi}{N}}\right) \exp\left(\frac{2\pi i m(q-n)}{N}\right) \quad (43)$$

Retomando nuestras variables originales:

$$x_n(t) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \exp\left(-t \frac{\omega + 4\alpha \sin^2 \frac{m\pi}{N}}{1 + 4\beta \sin^2 \frac{m\pi}{N}}\right) \exp\left(\frac{2\pi i m(q-n)}{N}\right) \quad (44)$$

5.2. Caso extremo: entorno sumamente viscoso

A continuación se estudiará el comportamiento del sistema físico cuando $\beta \rightarrow \infty$, mientras el resto de parámetros se mantienen finitos. Para ello, retomando (44) y realizando este límite, podemos apreciar que:

$$x_n^v(t) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} x_n(t) = \frac{\exp(-\omega t)}{N} + \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi i m(q-n)}{N}\right) = \delta_{n,q} - \frac{1 - \exp(-\omega t)}{N} \quad (45)$$

cuyo límite para $\omega t \gg 1$ es:

$$x_n^v = \delta_{n,q} - \frac{1}{N} \quad (46)$$

Asumiendo que la única variable en el parámetro β es la propia viscosidad del fluido, podemos atribuir a esta tal magnitud que cada oscilador interactúa con la misma intensidad instantáneamente con todos sus vecinos, haciendo así que la perturbación inicial en la posición q -ésima transfiera su energía al resto de individuos como si se tratara de una entidad casi compacta.

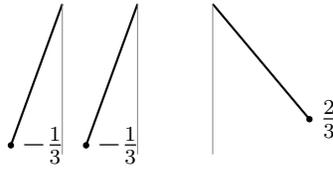


Figura 4: Situación estacionaria para el límite $\beta \rightarrow \infty$ con $N = 3$. Se observa como la posición de equilibrio corresponde a la situación en la cual el oscilador perturbado reparte equitativamente la energía necesaria para que la suma global de los desplazamientos sea, según la ecuación (40), nula.

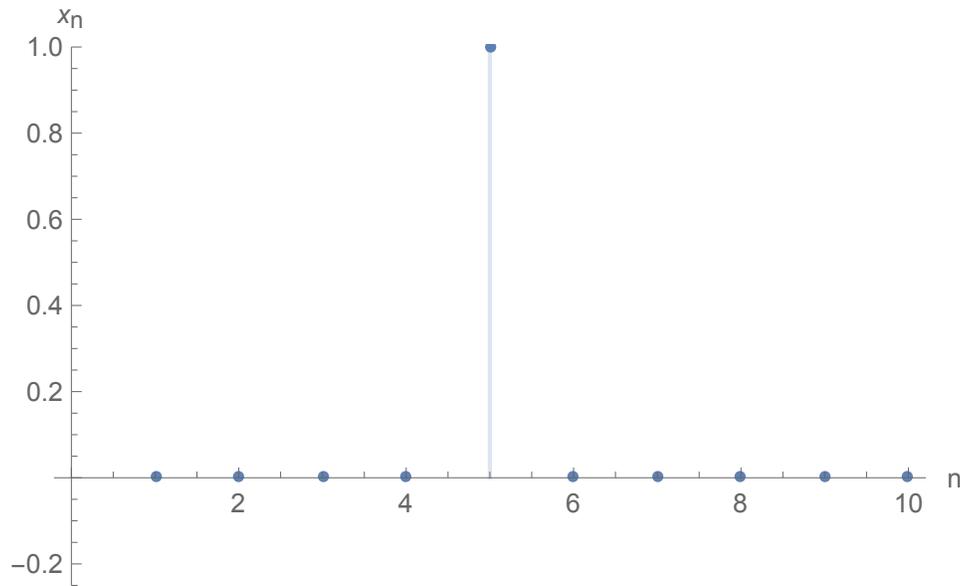


Figura 5: Representación de la C.I. de la variable dinámica x con $N = 10$ y $q = 5$.

5.3. Representación y análisis de distintos regímenes

Se considera $\omega = 1$ para examinar primordialmente los resultados en función de la relación entre el acoplamiento viscoso y el elástico $\Gamma = \frac{\beta}{\alpha}$. Por consiguiente, se analizarán las disposiciones en las cuales $\Gamma \ll 1$, $\Gamma \approx 1$ y $\Gamma \gg 1$.

1. Caso $\Gamma \ll 1$:

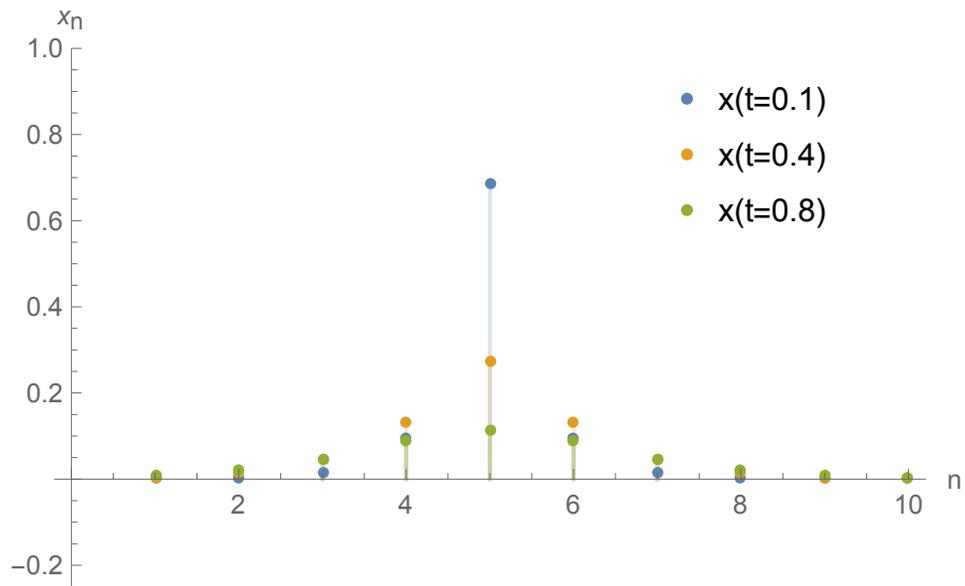


Figura 6: Representación de la variable dinámica x para distintos tiempos, indicados en la propia ilustración, con $\alpha = 2$ y $\beta = 0,1$

Se puede visualizar que este caso es análogo a la ecuación de reacción-difusión, donde el perfil formado en el transcurso temporal se asemeja al *Gaussiano*. Este entorno es bastante conocido y principalmente representa la perturbación de la posición natural que sufren los individuos a través de un hipotético resorte acoplado entre cada pareja de ellos. En definitiva, si nos fijamos en tres de estos miembros, cuánta mayor diferencia relativa de desplazamiento exista entre el del centro y el resto, mayor será el cambio en el siguiente paso de tiempo para el de en medio.

2. Caso $\Gamma \approx 1$:

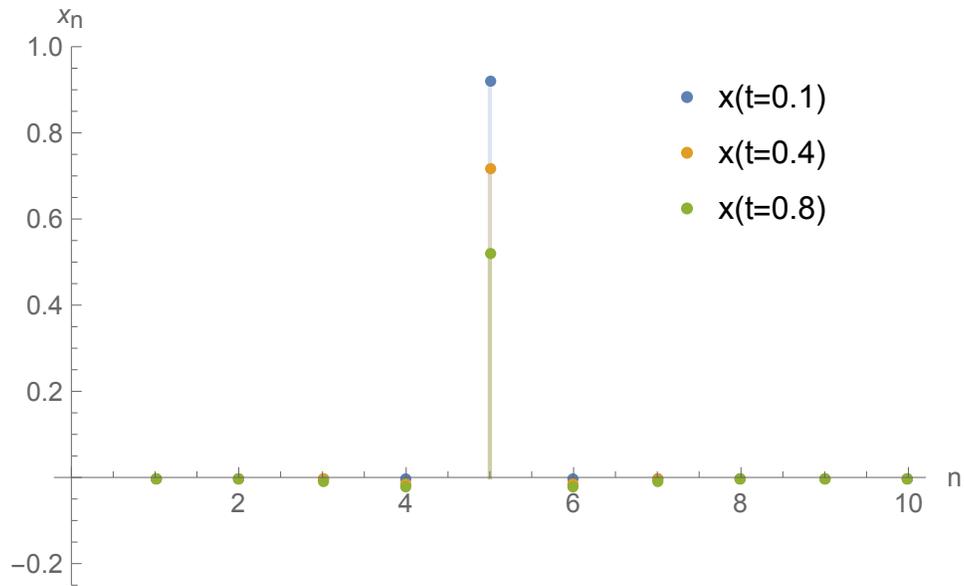


Figura 7: Representación de la variable dinámica x para distintos tiempos, indicados en la propia ilustración, con $\alpha = 1$ y $\beta = 1,4$

Como se ha comentado anteriormente, cuando ambos parámetros son relativamente parecidos, los efectos de acoplamiento tienden a cancelarse. De igual forma, se puede percibir como un mayor valor del coeficiente β hace que, netamente, la magnitud de la frecuencia disminuya y, de esta manera, la escala temporal de disipación sea mayor.

3. Caso $\Gamma \gg 1$:

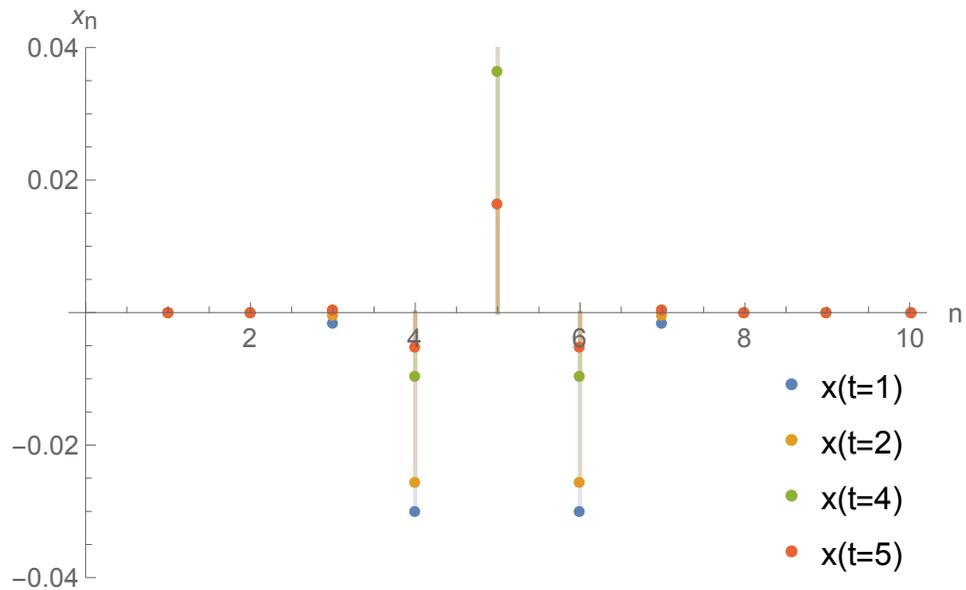


Figura 8: Representación de la variable dinámica x para distintos tiempos, indicados en la propia ilustración, con $\alpha = 0,001$ y $\beta = 0,1$

En la figura (8) se muestra cómo, en una situación en la cual predomina el acoplamiento viscoso pero aún así este es pequeño, la dinámica es análoga a la ecuación de reacción-antidifusión, de tal forma que los individuos interactúan, en primera aproximación, en mayor medida cuánto mayor sea el desplazamiento mecánico de sus vecinos. Así pues, esto se manifiesta a través de los primeros vecinos, mientras que el resto de osciladores no interactúan lo suficiente como para que el desplazamiento sea apreciable.

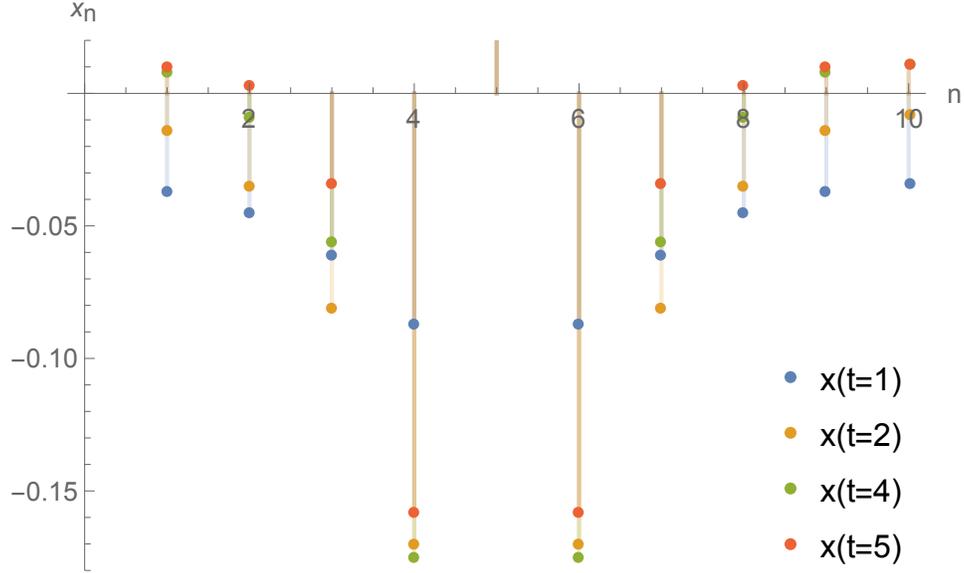


Figura 9: Representación de la variable dinámica x para distintos tiempos, indicados en la propia ilustración, con $\alpha = 0,1$ y $\beta = 10$

En el escenario de la figura (9) se puede observar como hasta $t = 4$ los vecinos inmediatos a la perturbación tienen una velocidad relativa negativa, cosa que, a su vez, induce un efecto viscoso a sus contiguos. De esta forma, los individuos más lejanos reúnen las características concretas para que empiecen a oscilar hasta el equilibrio.

El fenómeno del vaivén en los individuos no inmediatos es característico del acoplamiento viscoso y puede analizarse de mejor forma en la figura (10). En esta visualización se ha representado, en el ámbito continuo, dominio infinito y sin acoplamiento elástico, nuestra solución con condiciones iniciales $x(s, t = 0) = \delta(s)$, extraída a partir de la función de *Green* de la expresión (24). Para ello, se han obtenido términos de hasta orden 2 y, a continuación, se ha sustraído la perturbación de la C.I. y se ha generado el *plot* para t relativamente pequeño.

Consecuentemente, se contemplan particularmente los efectos del sistema tras haber sido desequilibrado.

$$x(s, t) - \delta(s) \approx \left(-\frac{\omega t}{2\sqrt{\beta'}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega t}{2\sqrt{\beta'}}\right)^2(|s| + \sqrt{\beta'})\right) \exp\left(-\frac{|s|}{\sqrt{\beta'}}\right) \quad (47)$$

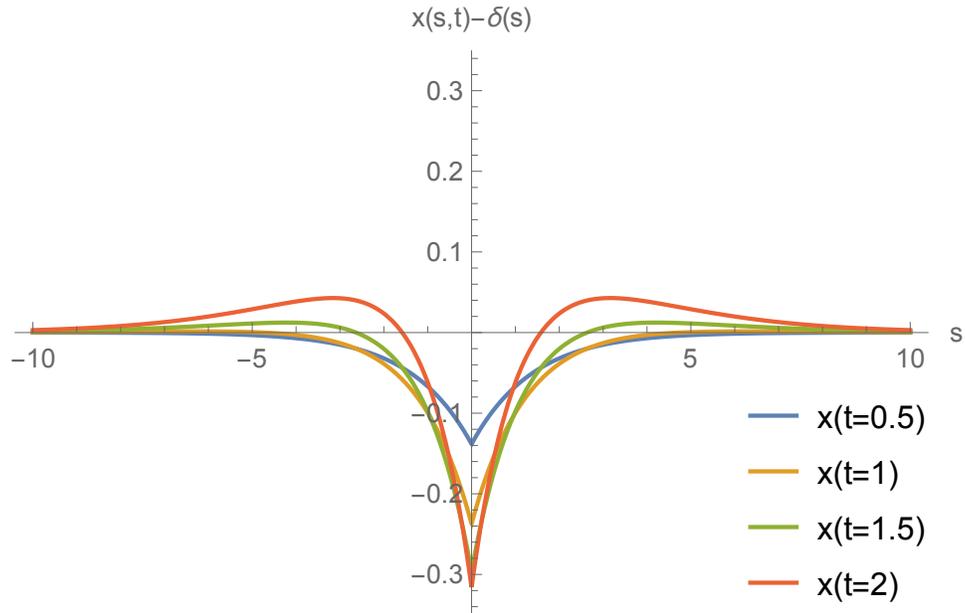


Figura 10: Representación de la variable dinámica $x(s, t) - \delta(s)$ para distintos tiempos, indicados en la propia ilustración, con $\alpha = 0$ y $\beta' = 2,5$. Se puede ver como existe una atenuación continua de la condición inicial (en $s = 0$), percibiendo así el reparto de su energía hacia el resto de osciladores. Además, debido a que una sucesión de individuos invierten de sentido su velocidad (se puede contemplar, sobretudo, alrededor de $s = 3$) para un tiempo dado (entre $t = 0,5$ y $t = 1,5$), se manifiestan colas en los alrededores de la perturbación. Cabe mencionar que la respuesta a la perturbación alcanza un máximo relativo que se puede asociar con la existencia de un efecto óptimo de W entorno a la posición $|s| = \sqrt{\beta}$ (siendo $s' \approx 0$ ya que la perturbación es en ese lugar), como se ha mostrado en la ecuación (32).

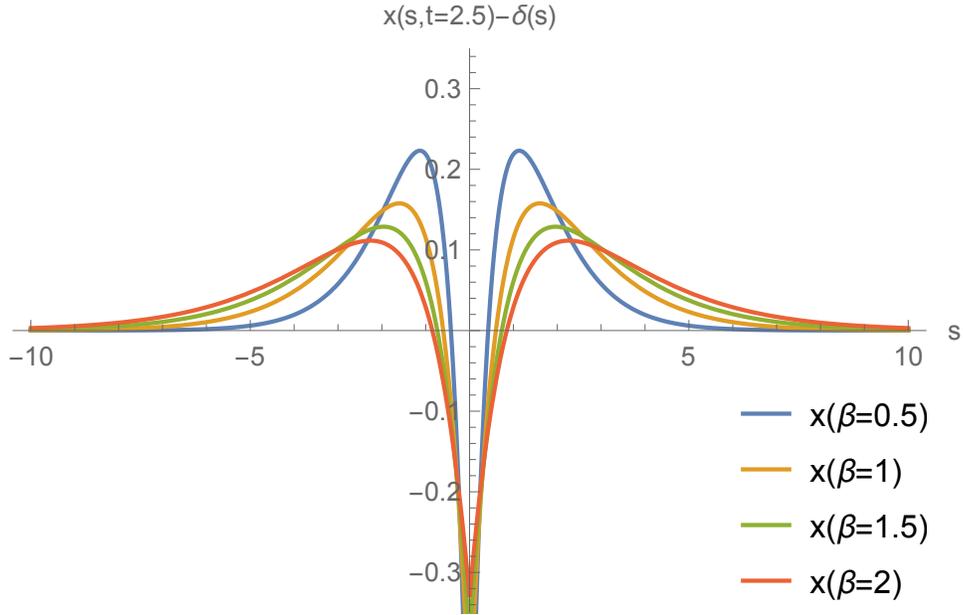


Figura 11: Representación de la variable dinámica $x(s, t = 2,5) - \delta(s)$ para distintos valores de β , indicados en la propia ilustración. La perturbación sufrida en $s = 0$ es posteriormente difundida y se contempla como la posición de los máximos tiene, en función de s , una tendencia aparentemente hiperbólica. Aunque existen efectos secundarios con el resto de osciladores, esto puede relacionarse con W , sabiendo que $W_{max} \propto \frac{1}{|s|}$ para $s' = 0$, promediando el acoplamiento como si fuera directamente la interacción entre la condición inicial y el individuo que está en la posición del máxima.

6. Conclusiones

La dinámica sobreamortiguada está regida por un compendio de características interesantes cuando se combina con el acoplamiento viscoso y elástico. La ausencia de inercia es la causante de la aparición del operador W , cuya interacción es no local e instantánea, en esta.

Asimismo, es interesante recalcar la presencia de un conjunto de valores determinados de β que maximizan el acoplamiento viscoso para un vecino contiguo dado, tal como se muestra en la figura (11). Esto podría resultar de vital interés para un estudio posterior de un modelo de mayor complejidad ya que da rienda suelta al desarrollo de nuestra solución entorno al lugar de mayor interacción $|s - s'| = \sqrt{\beta}$, siendo s' el

entorno de la perturbación ejercida al sistema. Sabiendo la conducta exponencial que tiene W en el decaimiento de la interacción, se han podido establecer aproximaciones a individuos próximos, sugiriendo así un tratamiento local de este.

En cuanto al modelo presenciado se ha podido comprobar, en primera instancia, como existe un isomorfismo entre ambos acoplamientos, viscoso y elástico, y únicamente viscoso. Posteriormente, se ha corroborado la presencia de una relación entre los parámetros α, β, ω que trivializa la dinámica, haciendo de esta una simple atenuación exponencial de la condición inicial. Si adimensionalizamos el tiempo, absorbiendo en este ω , esto es posible entenderlo como si la proximidad del régimen viscoso al elástico fueran los promotores de la disipación de los efectos típicos de estos aisladamente.

Igualmente, se ha tratado de profundizar en el régimen *ultraviscoso*, en el cual la viscosidad del fluido, la superficie del oscilador o la distancia entre cada próximo pueden considerarse de tal magnitud que la transmisión de la información interactiva de cada individuo a cualquier otro es instantánea. Por último, se han definido los rasgos fundamentales de esta interacción desde primer orden en β , observando cómo el proceso sufrido es semejante al establecido por la ecuación de reacción-antidifusión, hasta los fenómenos asociados a un régimen viscoso, junto con pequeñas oscilaciones en la cola de la cadena.

Referencias

- [1] Héctor Manuel Moya-Cessa, Francisco Soto-Equibar. Differential Equations: And Operational Approach.
- [2] Steven H. Strogatz. Strogatz - Nonlinear dynamics and chaos.
- [3] J.D. Murray. Murray J.D. Mathematical biology.. I. An introduction (3ed., Springer, 2002)(576s)
- [4] D.W. Jordan, P. Smith. Jordan - Nonlinear Ordinary Differential Equations 4e (Oxford, 2007)