



**Universitat de les
Illes Balears**

Facultat de Ciències

Memòria del Treball de Fi de Grau

**Comportament temporal d'ones MHD ràpides i
lentes dins un plasma sotmès a processos
d'escalfament/refredament: efecte de diferents
funcions radiatives.**

Llorenç Melis Sánchez

Grau de Física

Any acadèmic 2018-19

Treball tutelat per José Luís Ballester Mortes.
Departament de Física.

S'autoritza la Universitat a incloure aquest treball en el Repositori Institucional per a la seva consulta en accés obert i difusió en línia, amb finalitats exclusivament acadèmiques i d'investigació	Autor		Tutor	
	Sí	No	Sí	No
	X		X	

Paraules clau del treball:

Plasma, magnetohidrodinàmica (MHD), ionització, escalfament, refredament, esmorteïment, ones ràpides, ones lentes.

Índex

1	Introducció	4
1.1	El Sol	4
1.2	Equacions de la magnetohidrodinàmica	5
1.2.1	Equació de continuïtat	6
1.2.2	Equació d'estat del gas ideal	6
1.2.3	Equació del moment	6
1.2.4	Equació d'inducció	7
1.2.5	Equació d'energia	8
1.2.6	Llei de Gauss	10
1.3	Ones magnetohidrodinàmiques	10
1.3.1	Ones d'Alfvén	10
1.3.2	Ones magnetoacústiques	10
1.4	Equació de Saha	11
1.5	Objectiu del treball	11
1.6	Configuració inicial	12
1.7	Estructura del problema	13
2	Estudi del problema	14
2.1	Linealització de les equacions MHD	14
2.2	Perfils de temperatura	15
2.3	Ones ràpides	16
2.3.1	Solució numèrica	16
2.3.2	Dissipacions resistives i tèrmiques	17
2.4	Ones lentes	18
2.4.1	Solució numèrica	18
2.4.2	Solució WKB	18
2.4.3	Període	23
2.5	Energia	23
3	Conclusions	28
4	Referències	29

1 Introducció

1.1 El Sol

El Sol és l'estrella més estudiada. Està compost per plasma, que és un estat d'agregació de la matèria. Un plasma està format principalment per ions i electrons que interactuen, tot i haver-hi també partícules neutres.

El sol és una estrella del tipus espectral G2V, per tant és una estrella de la seqüència principal. La seva composició és d'un 74% d'hidrogen, un 24% d'heli i un 2% d'elements pesats. Per la seva proximitat a la terra el seu estudi és el punt central per comprendre el comportament de les estrelles i del plasma còsmic en general.

Les principals propietats físiques del Sol són:

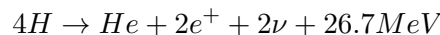
Magnitud Absoluta	4.8
Edat	4.5×10^9 anys
Massa, M_{\odot}	1.99×10^{30} kg
Radi, R_{\odot}	6.96×10^8 m
Densitat mitjana	1.4×10^3 kg m ⁻³
Distància mitjana a la Terra	$1UA = 1.50 \times 10^{11}$ m
Gravetat superficial, g_{\odot}	274 m s ⁻²
Velocitat d'escapament	618 km s ⁻¹
Lluminositat, L_{\odot}	3.86×10^{26} W
Període de rotació equatorial	26 dies
Moment angular	1.7×10^{41} kg m ² s ⁻¹
Rati de pèrdua de massa	10^9 kg s ⁻¹
Temperatura efectiva	5785 K

Taula 1: Propietats físiques principals del Sol [1].

Estructura interna del Sol

L'interior del Sol està dividit en tres parts: el nucli, la zona radiativa i la zona convectiva. L'interior del Sol està protegit de la nostra vista, per tant només podem veure la superfície amb deteniment.

El nucli s'estén des del centre del sol fins a un radi de $0.25R_{\odot}$ amb una temperatura de 1.5×10^7 K i una densitat de 1.6×10^5 kg m⁻³, magnituds suficientment elevades per produir reaccions termonuclears. El nucli conté la meitat de la massa solar però produeix el 99% de l'energia. Els nuclis d'heli són construïts a partir de 4 àtoms d'hidrogen, principalment pels cicles p-p però també a partir dels cicles CNO. A la fi d'aquests cicles els nuclis d'hidrogen s'han convertit en un nucli d'heli a partir de la següent reacció.



On e^+ representa els positrons i ν els neutrins.

La zona radiativa o intermèdia es situa entre els $0.25R_{\odot}$ i els $0.7R_{\odot}$. En aquesta zona la temperatura i la densitat varien entre els 2×10^6 i 7×10^6 K i els 2000 i 2000 kg m⁻³ respectivament. L'energia del nucli és transportada lentament a la zona radiativa mentre s'absorbeixen i emeten els fotons múltiples cops. A causa que l'interior del sol és molt opac un fotó triga més de 5×10^5 d'anys en arribar a la superfície.

A la zona convectiva, els gradients de temperatura són molt elevats per romandre en equilibri hidrostàtic. La convecció transporta energia, ja que una bombolla individual de plasma transporta calor a mesura que puja i, a continuació, allibera part abans de caure i recollir-ne més. En aquesta zona l'opacitat s'incrementa ràpidament a causa del H^- i els fotons poden ser absorbits amb més facilitat. La temperatura superficial es situa en 5800 K i la densitat té un valor de $8 \times 10^{-5}\text{ kg m}^{-3}$.

Estructura de l'atmosfera solar

L'atmosfera solar està dividida en tres parts: la fotosfera, la cromosfera i la corona.

La fotosfera és una capa superficial visible extremadament prima. Està definida com la regió on la majoria de la llum solar escapa. La fotosfera no és uniforme ja que està coberta amb granulacions que cobreixen tot el Sol. Aquests grànuls representen la part superior de les cèl·lules convectives que estan superant la zona de convecció. El camp magnètic fotosfèric consisteix en petits elements magnètics que es barregen i evolucionen amb força rapidesa. Aquestes estructures s'organitzen en patrons de gran escala de diferents tipus, com les taques solars o les 'plages'.

Per damunt la fotosfera es situa la cromosfera. La cromosfera és una capa no uniforme, ja que l'emissió de la línia de calci revela que la xarxa de les fronteres supergranulades tenen un patró molt irregular. La cromosfera pot ser vista com una massa de raigs de plasma coneguts com a espícules. Aquestes espícules són probablement provocades per la interacció del plasma amb els camps intensos a les fronteres supergranulars. De la cromosfera emergeixen les denominades protuberàncies solars, que són grans estructures gasoses que s'estenen fins a arribar a la corona solar.

La capa més alta és la corona. En aquesta zona la densitat mitjana d'electrons és de l'ordre de 10^{14} m^{-3} . Aquesta densitat disminueix ràpidament quan s'allunya de la superfície solar, essent de l'ordre de 10^{12} m^{-3} a $1R_{\odot}$, 10^{11} m^{-3} a $4R_{\odot}$ i menys de 10^{10} m^{-3} a $10R_{\odot}$. A la corona hi ha estructures importants com poden ser les 'coronal streamers', que són estructures pràcticament radials o els bucles coronals.

1.2 Equacions de la magnetohidrodinàmica

El comportament macroscòpic d'un plasma en presència d'un camp magnètic pot ser descrit usant la teoria magnetohidrodinàmica (MHD). Les equacions MHD poden ser derivades de diverses formes. La primera començaria amb la teoria cinètica de Boltzmann combinada amb les equacions de Maxwell de l'electromagnetisme tenint en compte les aproximacions i propietats del plasma. El segon mètode seria combinar les equacions fonamentals de la mecànica de fluids amb les equacions de Maxwell considerant el plasma com un fluid de partícules carregades impregnades per camps elèctrics i magnètics. La darrera aproximació començaria amb les equacions fonamentals de la mecànica de fluids i l'electromagnetisme, juntament amb la descripció general d'un plasma parcialment ionitzat compost per diverses espècies, essent les equacions de cada espècie després combinades. Les equacions de fluid únic de la MHD per un plasma parcialment ionitzat es justifica a l'atmosfera solar quan el temps de col·lisió entre diferents espècies del plasma és molt més curt que el temps d'escala dels fenòmens estudiats.

Les equacions del fluid únic són l'equació de continuïtat, l'equació dels gasos ideals, l'equació del moment, l'equació de l'energia no adiabàtica, l'equació d'inducció i la llei de Gauss [2].

1.2.1 Equació de continuïtat

El plasma pot ser tractat com un medi continu, per tant l'equació de conservació de la massa ha de ser satisfeta. L'equació de continuïtat té la següent forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.1)$$

D'aquesta equació podem concloure que la densitat a un punt s'incrementa si la massa flueix a la regió del seu entorn, i decreix quan hi ha una divergència en comptes d'una convergència del flux de massa.

1.2.2 Equació d'estat del gas ideal

La pressió del gas està determinada per una equació d'estat, que es pot assumir que és la dels gasos perfectes:

$$P = \frac{R}{\tilde{\mu}} \rho T \quad (1.2)$$

On ρ és la densitat total del fluid. Aquesta densitat ve donada per:

$$\rho = \rho_e + \rho_i + \rho_N = m_e n_e + m_i n_i + m_N n_N \quad (1.3)$$

On e , i , N es refereix als electrons, ions i àtoms neutres respectivament i n_j i m_j són respectivament la densitat numèrica i la massa de les partícules.

A l'equació R representa la constant universal dels gasos i $\tilde{\mu}$ és el pes atòmic mitjà. Aquesta quantitat està definida per:

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{1 + \xi_i} \quad (1.4)$$

On ξ_i és la densitat relativa dels ions ($\xi_i = \rho_i / \rho$). A un plasma totalment ionitzat $\xi_i=1$ i $\tilde{\mu}=0.5$, i per un gas neutre $\xi_i=0$ i $\tilde{\mu}=1$. Per tant podem utilitzar $\tilde{\mu}$ com un indicador del grau de ionització del plasma.

$\tilde{\mu}$ també es pot definir com la massa mitjana per partícula lliure en unitats de massa d'hidrogen. El valor de $\tilde{\mu}$ depèn de la composició química:

$$\frac{1}{\tilde{\mu}H} = \frac{\sum_j N_j}{\sum_j N_j m_j} = \frac{\sum_j X_j}{\sum_j A_j H}$$

On X_j és la fracció en massa dels àtoms, on X correspon a l'hidrogen, Y a l'heli i Z als elements pesats; i $A_j = m_j/H$ on $H=1$ u.a.m.

1.2.3 Equació del moment

L'equació del moviment per una espècie j té la següent forma:

$$\rho_j \frac{D\vec{v}_j}{Dt} = -\vec{\nabla} P_j + \vec{F}_{Lorentz} + \vec{F}_{gravitatoria} + \vec{F}_{viscosa} - \sum_{j' \neq j} \mathcal{R}_{jj'} \quad (1.5)$$

On els termes de la dreta representen el gradient de pressió, la força de Lorentz, la força gravitatòria, la força de viscositat i les col·lisions entre partícules.

La força de Lorentz ve determinada per:

$$\vec{F}_{Lorentz} = Z_j n_j e (\vec{E} + \vec{v}_j \times \vec{B}) \quad (1.6)$$

On \vec{E} i \vec{B} són els camps elèctric i magnètic respectivament, e és la càrrega de l'electró, n_j és la densitat numèrica i Z_j té un valor de 1 en el cas dels ions, -1 en el cas dels electrons i 0 en el cas dels àtoms neutres.

La força de Lorentz també es pot escriure en funció de la densitat de corrent.

$$\vec{F}_{Lorentz} = \vec{j} \times \vec{B} = \frac{1}{\tilde{\mu}} \left[(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - \frac{1}{2} \vec{\nabla} (|\vec{B}|^2) \right] \equiv \frac{1}{\tilde{\mu}} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - \vec{\nabla} p_m \quad (1.7)$$

On p_m és la pressió magnètica.

La força gravitatòria té la següent forma:

$$\vec{F}_{gravitatoria} = \rho_j \vec{g} \quad (1.8)$$

La força de la viscositat s'escriu com:

$$\vec{F}_{viscosa} = -\vec{\nabla} \cdot \Pi_j \quad (1.9)$$

On Π_j són les components del tensor de viscositat.

La variable $\mathcal{R}_{jj'}$ representa el terme de les col·lisions entre les espècies j i j' . Es pot escriure com:

$$\mathcal{R}_{jj'} = \alpha_{jj'} (\vec{v}_j - \vec{v}_{j'}) \quad (1.10)$$

On $\alpha_{jj'}$ és el coeficient de fricció entre les espècies j i j' .

Si sumam les equacions pels ions, electrons i àtoms neutres l'equació del moviment total serà:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} P + \frac{1}{\tilde{\mu}} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} - \rho \vec{g} - \vec{\nabla} \cdot \Pi_j \quad (1.11)$$

El terme de les col·lisions s'anul·la ja que es considera que les col·lisions són elàstiques.

1.2.4 Equació d'inducció

Per obtenir l'equació d'inducció hem de combinar les equacions de Maxwell amb l'expressió apropiada de la llei d'Ohm per un plasma parcialment ionitzat. La forma general de l'equació d'inducció per un plasma parcialment ionitzat és:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = & \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) - \vec{\nabla} \times (\eta \vec{\nabla} \times \vec{B}) - \vec{\nabla} \times [\eta_H (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}] \\ & + \vec{\nabla} \times [\eta_A [(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}] \times \vec{B}] - \vec{\nabla} \times [\tilde{\Xi} \vec{G} \times \vec{B}] \end{aligned} \quad (1.12)$$

On els termes són, respectivament d'esquerra a dreta: el terme advection, la difusió d'Ohm, la difusió de Hall, la difusió ambipolar i el terme de corrent diamagnètic.

η és la resistivitat d'Ohm descrita com:

$$\eta = 5.2 \times 10^7 T^{-3/2} (30.5 - 1.15 \log(n_e) + 3.45 \log(T)) \quad (1.13)$$

η_H és la resistivitat de Hall, descrita com:

$$\eta_H = \frac{1}{\mu_o e n_e} \left(1 - 2 \xi_N \frac{\alpha_{en}}{\alpha_n} \right) \quad (1.14)$$

$\tilde{\Xi}$ representa el coeficient de corrent diamagnètic, que ve donat per:

$$\tilde{\Xi} = \frac{\xi_N}{\alpha_n} \quad (1.15)$$

η_A és la difusió magnètica ambipolar, que es pot expressar en funció de la resistivitat d'Ohm (η) i la de Cowling (η_c):

$$\eta_A = \frac{\xi_N^2}{\tilde{\mu} \alpha_n} = \frac{\eta_c - \eta}{|\vec{B}|^2} \quad (1.16)$$

La resistivitat de Cowling ve determinada per:

$$\eta_c = \eta + \frac{\xi_N^2 B_o^2}{\mu_o \alpha_n} \quad (1.17)$$

Essent α_n el coeficient de fricció neutre total. En un plasma d'hidrogen ve donat per:

$$\alpha_n = 0.5 (\xi_N \xi_i) \frac{\rho^2}{m_n} \sqrt{\frac{16 k_B T}{\pi m_i}} \Sigma_{iN}$$

On k_B és la constant de Boltzman, Σ_{iN} és la secció eficaz de les col·lisions entre ions i neutres i ξ_N és la densitat relativa de neutres, que ve donada per $\xi_N = 1 - \xi_i$.

Per últim \vec{G} és la funció de pressió, definida per:

$$\vec{G} = \xi_N \vec{\nabla} (p_e + p_i) - \xi_i \vec{\nabla} p_n \quad (1.18)$$

1.2.5 Equació d'energia

L'equació de l'energia no adiabàtica té la següent forma:

$$\rho \frac{De}{Dt} - \frac{P}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\mathcal{L} \quad (1.19)$$

On e representa l'energia interna per unitat de massa. L'energia s'escriu com:

$$e = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{\chi_i}{H} \xi_i \quad (1.20)$$

On γ és el coeficient adiabàtic i χ_i és el potencial d'ionització. El primer terme de la fórmula està relacionat amb la pressió, mentre que el segon ho està amb el grau de ionització.

En aquesta equació \mathcal{L} representa la funció de pèrdua d'energia. Aquesta funció pot ser escrita com la quantitat d'energia perduda menys l'energia guanyada. \mathcal{L} s'escriu com:

$$\mathcal{L} = \vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \rho L - \vec{j} \cdot \vec{E}^* - Q_v \quad (1.21)$$

On \vec{q} és el flux de calor causat per la conducció tèrmica, L és la funció calor-pèrdua que equilibra les pèrdues radiatives amb una entrada de calor externa i arbitrària, $\vec{j} \cdot \vec{E}^*$ és el terme de l'efecte Joule generalitzat i Q_ν és l'escalfament provocat per la viscositat.

El vector de conductivitat tèrmica ve donat per:

$$\vec{q} = -\kappa \vec{\nabla} T \quad (1.22)$$

On κ és el tensor de conductivitat tèrmica. Per conveniència la divergència del flux de calor es separa en les components paral·leles i perpendiculars de les línies del camp magnètic com:

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{q} = \vec{\nabla}_{\parallel} \cdot (\kappa_{\parallel} \vec{\nabla}_{\parallel} T) + \vec{\nabla}_{\perp} \cdot (\kappa_{\perp} \vec{\nabla}_{\perp} T) \quad (1.23)$$

On κ_{\parallel} i κ_{\perp} són les components escalars del tensor de conductivitat tèrmica paral·lela i perpendicular al camp magnètic respectivament.

La funció calor-pèrdua ve determinada per:

$$L(T, \rho) = C(T, \rho) - \mathcal{H}(T, \rho) \quad (1.24)$$

Assumint que el plasma és òpticament prim, l'expressió funcional en el cas d'un plasma parcialment ionitzat és:

$$C(T, \rho) = \rho \chi^* T^\alpha$$

On χ^* i α són funcions dependents de la temperatura.

Per una altra banda el processos involucrats en l'escalfament de l'atmosfera solar són poc coneguts. Una expressió comú per la funció de calor és:

$$\mathcal{H}(T, \rho) = \tilde{h} \rho^\alpha T^b$$

On els exponents a^* i b^* poden ser escollits en funció dels diferents escenaris d'escalfament i \tilde{h} és un paràmetre constant el valor del qual és escollit per satisfer la condició de balanç d'energia.

Per tant l'expressió general de la funció calor-pèrdua és:

$$L = \rho \chi^* T^\alpha - \tilde{h} \rho^\alpha T^b \quad (1.25)$$

Per un plasma parcialment ionitzat l'efecte Joule generalitzat s'escriu com:

$$\vec{j} \cdot \vec{E}^* \approx \frac{1}{\sigma} |\vec{j}_{\parallel}|^2 + \frac{1}{\sigma_c} |\vec{j}_{\perp}|^2 \quad (1.26)$$

On σ i σ_c són les conductivitats d'Ohm i Cowling, respectivament.

Finalment l'expressió per l'escalfament viscos es pot escriure en termes del tensor de viscositat (Π_{mn}) i la velocitat:

$$Q_\nu = \sum_{m,n} \Pi_{mn} \frac{\partial v_m}{\partial x_n} \quad (1.27)$$

On x_n és la n-coordenada

1.2.6 Llei de Gauss

La llei de Gauss per al magnetisme té la següent expressió:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.28)$$

D'aquesta expressió es conclou que les línies del camp magnètic són tancades i, com a conseqüència no existeixen els monopols magnètics.

1.3 Ones magnetohidrodinàmiques

En un plasma magnetitzat com el de l'atmosfera solar tenint en compte la tensió i les pressions magnètica i hidrostàtica existeixen tres tipus d'ona: les ones d'Alfvén i les ones magnetoacústiques, que poden ser ràpides o lentes. Cada una d'aquestes ones té la seva relació de dispersió. Aquestes relacions són obtingudes a través de la linealització de les equacions MHD i amb l'anàlisi de Fourier.

1.3.1 Ones d'Alfvén

Aquest tipus d'ones no estan relacionades amb les variacions de la pressió, densitat o temperatura del plasma. Si la pertorbació és incompressible la seva relació de dispersió ve donada per:

$$\omega = k_x V_A \cos(\theta) \quad (1.29)$$

On k_x és el vector d'ona, θ és l'angle entre el vector d'ona i el camp magnètic i V_A és la velocitat d'Alfvén, que ve determinada per $V_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}}$.

1.3.2 Ones magnetoacústiques

La relació de dispersió de les ones magnetoacústiques pren la següent forma:

$$\omega^4 - (V_A^2 + c_s^2)^2 k^2 \omega^2 + V_A^2 c_s^2 k^4 \cos^2 \theta = 0 \quad (1.30)$$

On $k^2 = k_x^2 + k_z^2$, $\theta = \arctg(k_x/k_z)$ i c_s és la velocitat del so, que ve donada per $c_s = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}$.

Resolent l'equació obtenim la freqüència angular:

$$\omega^2 = \frac{k^2}{2} \left[(V_A^2 + c_s^2) \pm \sqrt{(V_A^2 + c_s^2)^2 - 4V_A^2 c_s^2 \cos^2 \theta} \right] \quad (1.31)$$

El mode d'altres freqüències es denomina ona magnetoacústica ràpida i la de baixes freqüències es diu ona magnetoacústica lenta. La velocitat de fase de les ones d'Alfvén es situa entre les ones ràpides i lentes, per tant les ones d'Alfvén es poden denominar com a modes intermedis.

Les dues ones magnetoacústiques poden ser vistes com a ones de so modificades pel camp magnètic. Si la velocitat del so és menor que la d'Alfvén l'ona lenta és una ona acústica modificada pel camp magnètic i la ràpida és una ona magnètica propagada per la pressió magnètica. En el cas que la velocitat del so és major que la d'Alfvén la situació és la contrària.

En el nostre estudi les ones ràpides estan influenciades tant per les components tèrmiques com per les magnètiques, mentre que les ones lentes estan únicament influenciades per les components tèrmiques.

1.4 Equació de Saha

La relació entre la ionització i la temperatura ve donada per l'equació de Saha:

$$\frac{n_i^2}{n_N} = \left(\frac{2\pi m_e k_B}{h^2} \right)^{3/2} T^{3/2} e^{-\frac{\chi_i}{k_B T}} \quad (1.32)$$

On h és la constant de Planck, k_B és la constant de Boltzman i χ_i és el potencial d'ionització.

La densitat relativa dels ions està relacionada amb la densitat numèrica mitjançant:

$$n_i = \frac{\rho \xi_i}{m_i} \quad (1.33)$$

Anàlogament la densitat relativa dels neutres ve determinada per:

$$\xi_N = \frac{\rho_N}{\rho} = \frac{n_N m_N}{\rho} \rightarrow n_N = \frac{\rho \xi_N}{m_N}$$

Amb les relacions obtingudes reescrivim l'equació (1.32):

$$\frac{n_i^2}{n_N} = \frac{\xi_i^2}{\xi_N} \frac{\rho}{m_i} \rightarrow \frac{\xi_i^2}{\xi_N} = \frac{m_i}{\rho} \left(\frac{2\pi m_e k_B}{h^2} \right)^{3/2} T^{3/2} e^{-\frac{\chi_i}{k_B T}}$$

Utilitzant la relació entre les densitats relatives ($\xi_N = 1 - \xi_i$) obtenim una expressió per ξ_i :

$$\xi_i = \frac{1}{2} M(T) \left(\sqrt{1 + \frac{4}{M(T)}} - 1 \right)$$

On $M(T)$ es defineix com:

$$M(T) \equiv \frac{m_i}{\rho} \left(\frac{2\pi m_e k_B}{h^2} \right)^{3/2} T^{3/2} e^{-\frac{\chi_i}{k_B T}}$$

Mitjançant la relació (1.4) obtenim el resultat de ξ_N i $\tilde{\mu}$:

$$\xi_N = 1 - \frac{1}{2} M(T) \left(\sqrt{1 + \frac{4}{M(T)}} - 1 \right)$$

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} M(T) \left(\sqrt{1 + \frac{4}{M(T)}} - 1 \right)}$$

1.5 Objectiu del treball

L'objectiu del treball és estudiar el comportament temporal de les ones magnetoacústiques ràpides i lentes dins un plasma fred on la temperatura varia amb el temps. A més s'estudiarà l'esmoreïment provocat pels diversos efectes tèrmics i per les resistivitats, en concret la resistivitat de Cowling. El grau de ionització del plasma, com es comprova a l'expressió (1.4) depèn de la densitat relativa de ions que varia amb la temperatura a causa dels processos de ionització i recombinació. Llavors, si la temperatura té dependència temporal, $T(t)$, també tindrà variacions temporals el grau de ionització $\xi_i(t)$, el pes molecular $\tilde{\mu}(t)$, totes les funcions d'energia i les resistivitats, així com la velocitat del so $c_s(t)$.

L'estudi es realitza per aquest tipus de plasma ja que a l'atmosfera solar existeixen plasmes parcialment ionitzats com la cromosfera o les protuberàncies solars, que es suposa estan sotmesos a processos d'escalfament i refredament. El fet que s'utilitzin diverses funcions de radiació és per obtenir els perfils de temperatura durant l'escalfament i refredament i estudiar-ne els esmoreïments que causen a les ones.

1.6 Configuració inicial

A l'estudi que es durà a terme suposam un plasma d'hidrogen infinit inicialment en repòs $\vec{v}_0 = 0$, amb densitat $\rho_0 = \text{cte.}$, en un camp magnètic també constant, $\vec{B}_0 = B_0 \hat{i}$ i amb pressió i temperatura amb dependència temporal, $T_0 = T_0(t)$ i $p_0 = p_0(t)$.

Com que es tracta d'un plasma d'hidrogen la densitat numèrica dels electrons és idèntica a la dels ions, $n_e = n_i$. També podem suposar que la massa dels ions i de les partícules neutres és pràcticament igual i molt major que la dels electrons, $m_i \simeq m_N \gg m_e$. Per concloure s'assumeix un fort acoblament tèrmic tal que $T_e = T_i = T_N = T$.

Amb les condicions inicials, a partir de l'equació del moviment (1.11) amb $\vec{v}_0 = 0$ s'obté:

$$\vec{\nabla} p_o = 0 \quad (1.34)$$

Per altra banda l'equació d'estat (1.2) tindrà dependència temporal ja que la temperatura $T_0(t)$ i el pes molecular $\tilde{\mu}(t)$ depenen del temps.

$$p_0(t) = \frac{\rho_0 R T_0(t)}{\tilde{\mu}(t)} \quad (1.35)$$

Finalment com que la densitat és constant el segon terme de l'equació d'energia (1.19) s'anul·la. Per tant la derivada substancial de l'energia queda com:

$$\frac{De}{Dt} = \frac{\partial e}{\partial t} + e \vec{\nabla} e \rightarrow 0$$

Feim la derivada de l'energia respecte el temps usant l'equació (1.20):

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{1}{(\gamma - 1)\rho} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\chi_i}{H} \frac{\partial \xi_i}{\partial t}$$

A partir de l'equació d'estat (1.2) feim la derivada de la pressió:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \rho R \left[\frac{1}{\tilde{\mu}} \frac{\partial T_o}{\partial t} + T_o \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\tilde{\mu}} \right) \right]$$

D'aquesta forma, l'equació d'energia (1.19) pren la següent forma:

$$\rho_o \left[R \left(\frac{1}{\tilde{\mu}} \frac{\partial T_o}{\partial t} + T_o \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\tilde{\mu}} \right) \right) + \frac{2}{3} \frac{\chi_i}{H} \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \right] = -\frac{2}{3} \mathcal{L} \quad (1.36)$$

A la funció de pèrdua d'energia (1.21) no hi ha efecte Joule ja que $\vec{j} = 0$, a més de no considerar viscositat. La conductivitat tèrmica es fa zero a causa que depèn del gradient de la temperatura. Per tant la funció de pèrdua s'escriu com:

$$\mathcal{L} = \rho^2 \chi^* T^\alpha - \tilde{h} \rho^{\alpha+1} T^b \quad (1.37)$$

On la constant \tilde{h} ve determinada per la condició d'equilibri $\mathcal{L} = 0$:

$$\tilde{h} = \frac{\chi^* T^{\alpha-b}}{\rho^{\alpha-1}} \quad (1.38)$$

En aquest estudi els paràmetres a i b són nuls ja que l'escalfament es realitzarà a volum constant.

D'aquesta forma l'equació (1.19) s'escriu com:

$$\rho_o R \left[\frac{1}{\tilde{\mu}(t)} \frac{\partial T_o}{\partial t} + T_o(t) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\tilde{\mu}} \right) \right] + \frac{2}{3} \left[\frac{\chi}{H} \frac{\partial \xi_i(t)}{\partial t} + \rho^2 \chi^* T_o(t)^\alpha - \tilde{h} \rho_o \right] = 0 \quad (1.39)$$

Finalment, a l'equació d'inducció (1.12) només s'han considerat els termes advection, resistivitat d'Ohm i difusió ambipolar.

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) - \vec{\nabla} \times (\eta \vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{\nabla} \times \left[\eta_A [(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}] \times \vec{B} \right] \quad (1.40)$$

1.7 Estructura del problema

L'esquema seguit per desenvolupar l'estudi és el següent:

1. *Linealització de les equacions MHD per obtenir les equacions diferencials de les ones ràpides i lentes.* Consideram propagació en direcció x i z per ones lentes i ràpides, respectivament.
2. *Obtenció dels perfils de temperatura.* Consideram un plasma parcialment ionitzat que es refreda de 9000 a 4000 K o s'escalfa de 4000 a 9000 K . Per obtenir els perfils d'escalfament o refredament resollem de forma conjunta les equacions d'energia (1.39) i de Saha (1.32). Per a cada cas la constant \tilde{h} s'obté a partir de l'equació (1.38) suposant que a l'equilibri, $\mathcal{L} = 0$, s'assoleix la temperatura final. El procés es realitzarà per a cada funció radiativa considerada a la *Taula 2*.

<i>Parametrització</i>	χ^*	α
Hildner	1.76×10^{-13}	7.40
Chianti	2.02×10^{-15}	8.06
Klimchuk-Raymond (K-R)	3.91×10^9	2.00

Taula 2: Paràmetres del terme radiatiu en unitats MKS.

3. *Resolució de les equacions diferencials per a les ones ràpides i lentes.* Es durà a terme la resolució de les equacions diferencials mitjançant una resolució numèrica i, per un cas particular, una analítica amb l'aproximació WKB.
4. *Estudi del període i l'energia.* S'estudiarà l'evolució temporal de l'energia i el període en cada un dels casos d'escalfament i refredament i funció radiativa.

2 Estudi del problema

2.1 Linealització de les equacions MHD

Per estudiar l'evolució temporal de les ones ràpides i lentes, es pertorben les equacions MHD i s'obté una equació diferencial per a cada tipus d'ona.

La pertorbació consisteix en realitzar un petit desplaçament a les variables que es troben a l'equilibri. El tractament pertorbació es durà a terme per la temperatura ($T_1 \ll T_0$), la pressió ($p_1 \ll p_0$), la densitat ($\rho_1 \ll \rho_0$), el camp magnètic ($\vec{B}_1 \ll \vec{B}_0$) i la velocitat ($\vec{v}_1 \ll \vec{v}_0$). Per tant les pertorbacions tenen la següent forma:

$$T = T_0 + T_1$$

$$p = p_0 + p_1$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$$

Feim una anàlisi de Fourier a l'espai assumint propagació en les direccions x i z . Les propagacions es descriuen com:

$$T_1(x, z, t) = T_1(t)e^{ik_x x} e^{ik_z z}$$

$$p_1(x, z, t) = p_1(t)e^{ik_x x} e^{ik_z z}$$

$$\rho_1(x, z, t) = \rho_1(t)e^{ik_x x} e^{ik_z z}$$

$$\vec{B}_1(x, z, t) = \vec{B}_1(t)e^{ik_x x} e^{ik_z z}$$

$$\vec{v}_1(x, z, t) = \vec{v}_1(t)e^{ik_x x} e^{ik_z z}$$

Introduïm les pertorbacions a les equacions de continuïtat (1.1), d'estat del gas (1.2), del moviment (1.11), d'inducció (1.40), de l'energia (1.39) i la llei de Gauss (1.28), assumint que no hi ha força gravitatòria ni viscosa. Les equacions linealitzades queden com:

- Equació de continuïtat linealitzada:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -i\rho_0(k_x v_{1x} + k_z v_{1z}) \quad (2.1)$$

- Equació d'estat linealitzada:

$$p_1 = \frac{R}{\bar{\mu}}(\rho_0 T_1 + T_0 \rho_1) \quad (2.2)$$

- Equacions del moviment linealitzades:

$$\frac{\partial v_{1x}}{\partial t} = -i \frac{k_x p_1}{\rho_0} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial v_{1z}}{\partial t} = -i \frac{k_z p_1}{\rho_0} - i \frac{B_0}{\mu_0 \rho_0} (k_z B_{1x} + B_{1z} k_x) \quad (2.4)$$

- Equacions d'inducció linealitzades:

$$\frac{\partial B_{1x}}{\partial t} = -B_{1x}(k_x^2 \eta + k_z^2 \eta_c) - (\eta - \eta_c) k_x k_z B_{1z} - i B_0 k_z v_{1z} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial B_{1z}}{\partial t} = -B_{1z}(k_x^2 \eta_c + k_z^2 \eta) - (\eta - \eta_c) k_x k_z B_{1x} - i B_0 k_x v_{1z} \quad (2.6)$$

- Equació d'energia linealitzada:

$$\begin{aligned} & \rho_0 \left[\frac{1}{\tilde{\mu}} \frac{\partial T_1}{\partial t} + T_1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\tilde{\mu}} \right) \right] + \rho_1 \left[\frac{1}{\tilde{\mu}} \frac{\partial T_0}{\partial t} + T_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\tilde{\mu}} \right) \right] + \frac{\rho_0 T_0}{\tilde{\mu}} (\gamma - 1) (ik_z v_{1z} + ik_x v_{1x}) + \\ & + \rho_1 (\gamma - 1) \frac{\chi}{RH} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\tilde{\mu}} - 1 \right) = -\frac{\gamma - 1}{R} ([k_e k_x^2 + k_n (k_x^2 + k_z^2) + \rho_0 L_T] T_1 + (L + \rho_0 L_\rho) \rho_1) \end{aligned} \quad (2.7)$$

- Llei de Gauss linealitzada:

$$k_x B_x + k_z B_z = 0 \quad (2.8)$$

En el cas de les ones ràpides usam $k_x = 0$, mentre que a les ones lentes usam $k_z = 0$. Per obtenir les equacions de les ones ràpides i lentes derivam respecte el temps les equacions (2.4) per les ones ràpides i (2.3) per les ones lentes i substituïm les derivades dels segons membres amb la resta de les equacions.

Per les ones ràpides l'equació diferencial és:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v_{1z}}{\partial t^2} + (c_s^2 + V_A^2) k_z^2 v_{1z} = (\gamma - 1) \left[\frac{\rho_1 \chi}{\rho_0 H} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\tilde{\mu}} - 1 \right) \right] ik_z + \\ & + (\gamma - 1) \left[\frac{(k_n k_z^2 + \rho_0 L_T) T_1}{\rho_0} + \frac{(L + \rho_0 L_\rho) \rho_1}{\rho_0} \right] ik_z + ik_z V_A^2 \frac{B_x}{B_0} \eta_c k_z^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Per les ones lentes l'equació diferencial és:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v_{1x}}{\partial t^2} + c_s^2 k_x^2 v_{1x} = (\gamma - 1) \left[\frac{\rho_1 \chi}{\rho_0 H} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\tilde{\mu}} - 1 \right) \right] ik_x + \\ & + (\gamma - 1) \left[\frac{k_e k_x^2 + (k_n k_x^2 + \rho_0 L_T) T_1}{\rho_0} + \frac{(L + \rho_0 L_\rho) \rho_1}{\rho_0} \right] ik_x \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.2 Perfils de temperatura

Per poder resoldre el sistema d'equacions tant per a les ones ràpides com per a les lentes, primer hem d'obtenir els perfils de temperatura de l'escalfament i el refredament. Aquests perfils s'obtenen amb la resolució conjunta de l'equació d'energia (1.39) i l'equació de Saha (1.32). El rang de temperatures es situa entre 4000 i 9000 K , el qual es troba dins el límit de plasma parcialment ionitzat. Per un plasma d'hidrogen a 4000 K la densitat relativa de ions és $\xi_i = 0.0004$, per tant es pot considerar un plasma pràcticament neutre; mentre que a 9000 K la densitat és $\xi_i = 0.9994$, considerant-se com un plasma pràcticament ionitzat.

Per una banda quan un plasma parcialment ionitzat es refreda de 9000 a 4000 K els ions i els electrons es recombinen per formar àtoms, fent que la densitat relativa de neutres augmenti, obtenint una dependència temporal de la temperatura. Els perfils de temperatura venen donats per la *Figura 1*.

El procés de refredament és lent a causa que els àtoms i els electrons es recombinen, el plasma absorbeix l'energia trigant més temps en refredar-se. Inicialment les tres funcions radiatives tenen el mateix perfil, baixant ràpidament de 9000 a 7000 K . A partir d'aquest punt el perfil de K-R baixa amb el mateix ritme però els perfils Chianti i Hildner s'alenteixen. D'aquesta forma el perfil K-R arriba a 4000 K en pocs segons, mentre que Hildner tarda uns 25000 segons i Chianti uns 9000 segons.

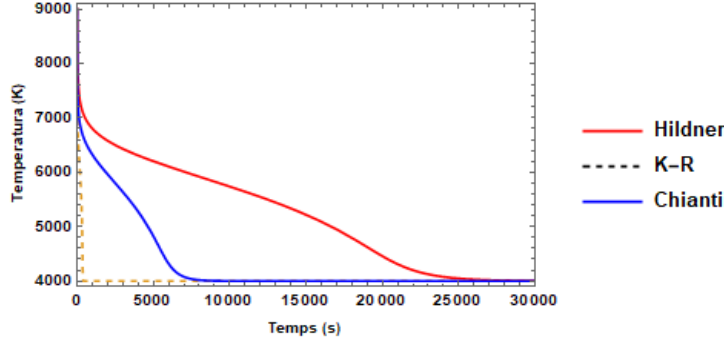


Figura 1: *Perfils de temperatura pel refredament.*

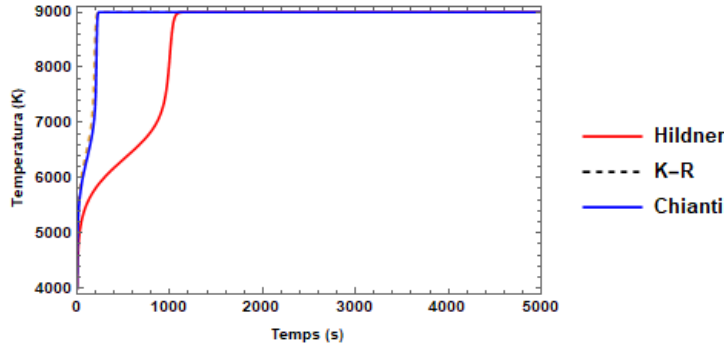


Figura 2: *Perfils de temperatura per l'escalfament.*

Per l'altra banda l'escalfament es produeix quan el plasma passa de 4000 a 9000 K. Quan la temperatura augmenta, el grau de ionització s'incrementa. Per tant quan el plasma arriba a 9000 K està pràcticament ionitzat. Els perfils de temperatura venen donats per la *Figura 2*.

A diferència del refredament, la variació de temperatura es realitza en un temps molt menor. Durant l'escalfament part de l'energia donada al plasma s'inverteix en la ionització i l'altra en pujar la temperatura. Els perfils de Chianti i K-R són molt similars i assoleixen la temperatura final en 500 segons aproximadament, mentre que Hildner tarda el doble.

2.3 Ones ràpides

2.3.1 Solució numèrica

Amb els perfils de temperatura podem resoldre el sistema d'equacions diferencials linealitzades (2.1)-(2.7).

La solució numèrica del sistema d'equacions s'ha realitzat amb el llenguatge simbòlic Mathematica. En aquest estudi tenim un plasma parcialment ionitzat de densitat constant $\rho_0 = 5 \times 10^{-11} \text{ kg/m}^3$ dins un camp magnètic $B_0 = 10^{-3} \text{ T}$. El nombre d'ona de les ones ràpides és $k_z = 10^{-6} \text{ m}^{-1}$ i com a condicions inicials s'utilitzarà $v_{1z}(0) = 1$, $v_{1x}(0) = 0$, $\rho_1(0) = 0$, $T_1(0) = 0$, $B_{1x}(0) = 0$, $B_{1z}(0) = 0$.

Refredament

La *Figura 3* representa el comportament temporal de la velocitat pertorbada v_z . Pel cas de Hildner a la *Figura 3a* l'esmoreïment és lent perquè la resistivitat de Cowling triga molt en

pujar i els efectes tèrmics són dominants. Pel cas de K-R a la *Figura 3b*, contràriament, la velocitat s'esmorteïx en menys de 1000 segons ja que la resistivitat creix de forma instantània. El cas de Chianti a la *Figura 3c* es situaria en un terme intermedi.

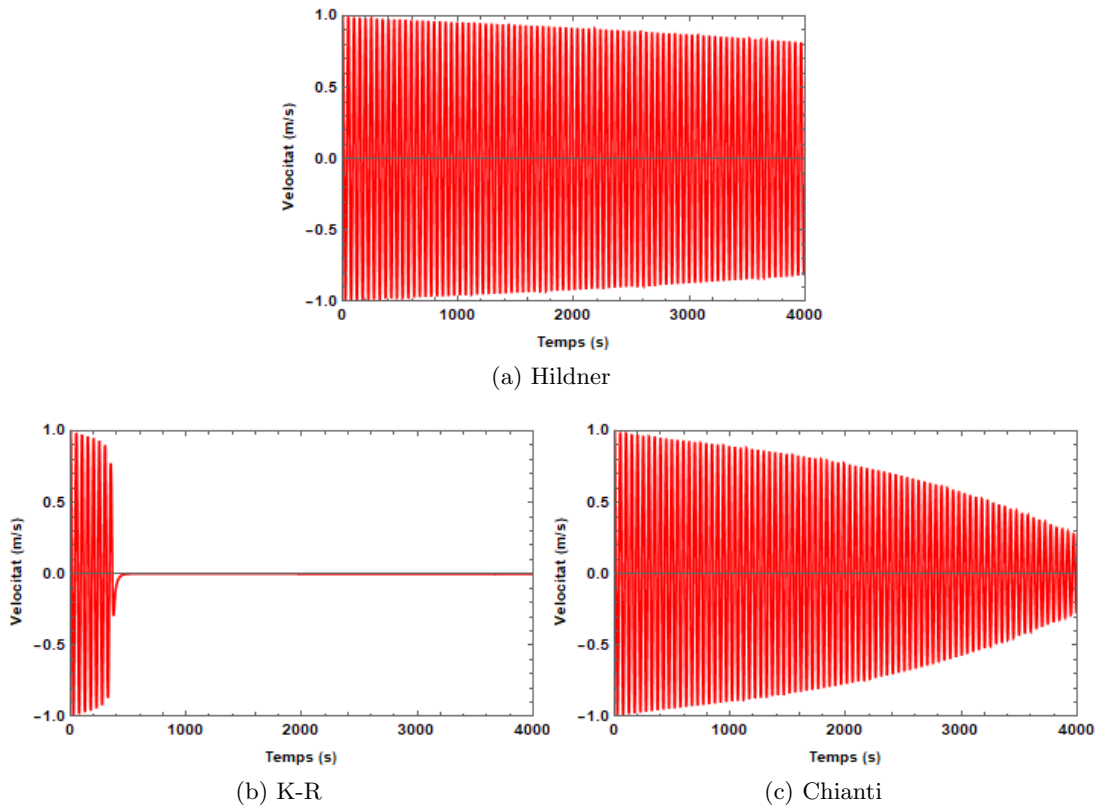


Figura 3: Ones ràpides: velocitat perturbada $v_z(t)$ en el cas del refredament.

Escalfament

La pertorbació de la velocitat v_z ve donada per la *Figura 4*. Per una banda per la resistivitat de Cowling a la *Figura 4a* provoca un fort esmorteïment al començament, mentre que després s'esmorteïx de forma més lenta pels efectes tèrmics. Per l'altra banda les funcions K-R i Chianti a les *Figura 4b* i *4c* respectivament, fan un esmorteïment més gradual per les contribucions dels efectes tèrmics i la resistivitat de Cowling, essent el de K-R més gran que el de Chianti per les contribucions dels efectes tèrmics i la resistivitat de Cowling.

2.3.2 Dissipacions resistives i tèrmiques

Les ones ràpides tenen dos tipus de dissipacions: la contribució de la resistivitat de Cowling i els efectes tèrmics. L'equació (2.9) pot ser resolta anul·lant o bé la resistivitat de Cowling o els efectes tèrmics. D'aquesta forma podem analitzar l'esmorteïment produït per les contribucions per separat.

Refredament

En el cas del refredament representat a la *Figura 5* la contribució de la resistivitat de Cowling té tendència a dominar l'esmorteïment de les ones ràpides, ja que a les *Figura 5a*, *5c* i *5e* els esmorteïments són considerablement majors que en els altres casos.

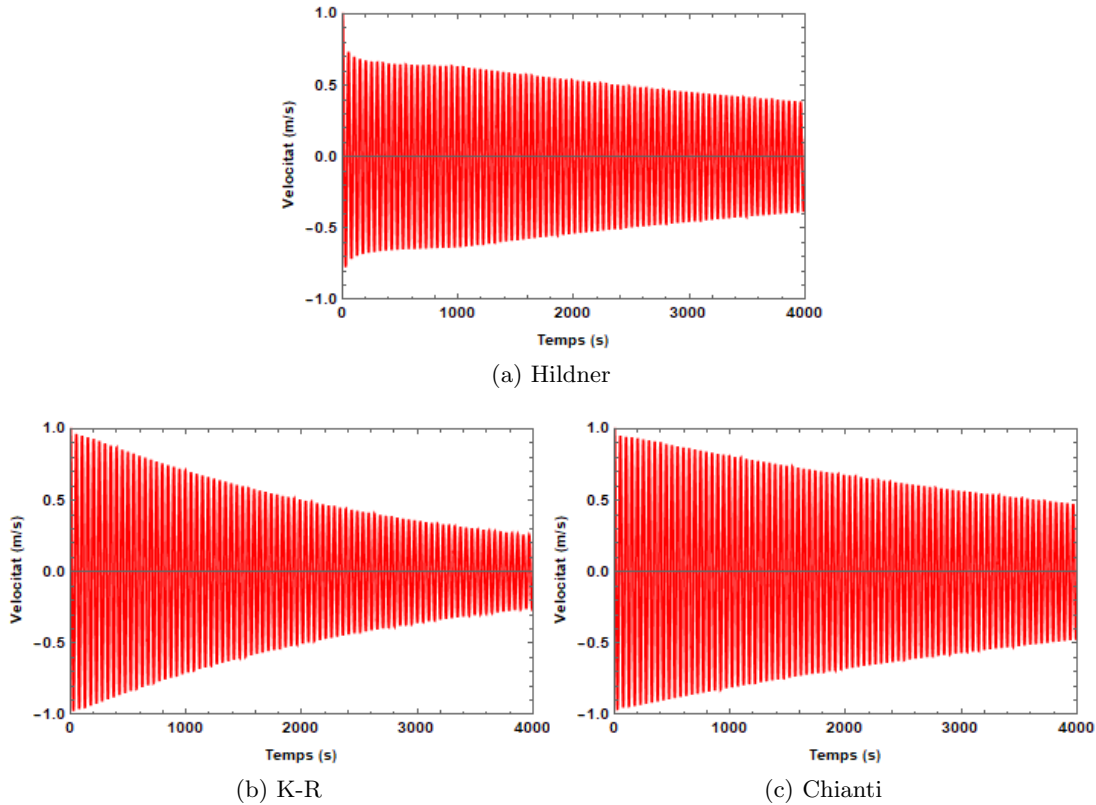


Figura 4: Ones ràpides: velocitat pertorbada $v_z(t)$ en el cas de l'escalfament.

Escalfament

A la *Figura 6* està representada l'evolució temporal de les ones ràpides en el cas de l'escalfament tenint en compte només una de les contribucions. A diferència del refredament, en aquest cas és la contribució radiativa la que domina l'esmoreïment de les ones.

2.4 Ones lentes

2.4.1 Solució numèrica

Amb els perfils de temperatura podem calcular el mateix que abans per a les ones lentes.

La solució numèrica s'ha realitzat de la mateixa forma que les ones ràpides amb $k_x = 10^{-6} m^{-1}$ i les condicions inicials són les mateixes que en el cas de les ones ràpides amb l'excepció de $v_{1x}(0) = 1$ i $v_{1z}(0) = 0$.

Refredament

La *Figura 7* representa la part real de la solució, que és la part no nul·la. En el cas de Hildner a la *Figura 7a* l'ona s'esmoreeix completament passats 3000 segons, mentre que en el cas de K-R a la *Figura 7b* el seu esmoreïment és més reduït i en el cas de Chianti a la *Figura 7c* presenta un esmoreïment semblant al cas de Hildner, tot i no esmoreir-se completament. Aquest fet és produït pels diferents perfils de temperatura i la seva influència sobre els termes tèrmics.

Escalfament

La pertorbació de la velocitat ve donada a la *Figura 8*. En el cas de Hildner a la *Figura 8a* la velocitat s'esmoreeix de forma gradual fins a arribar pràcticament a desaparèixer, mentre

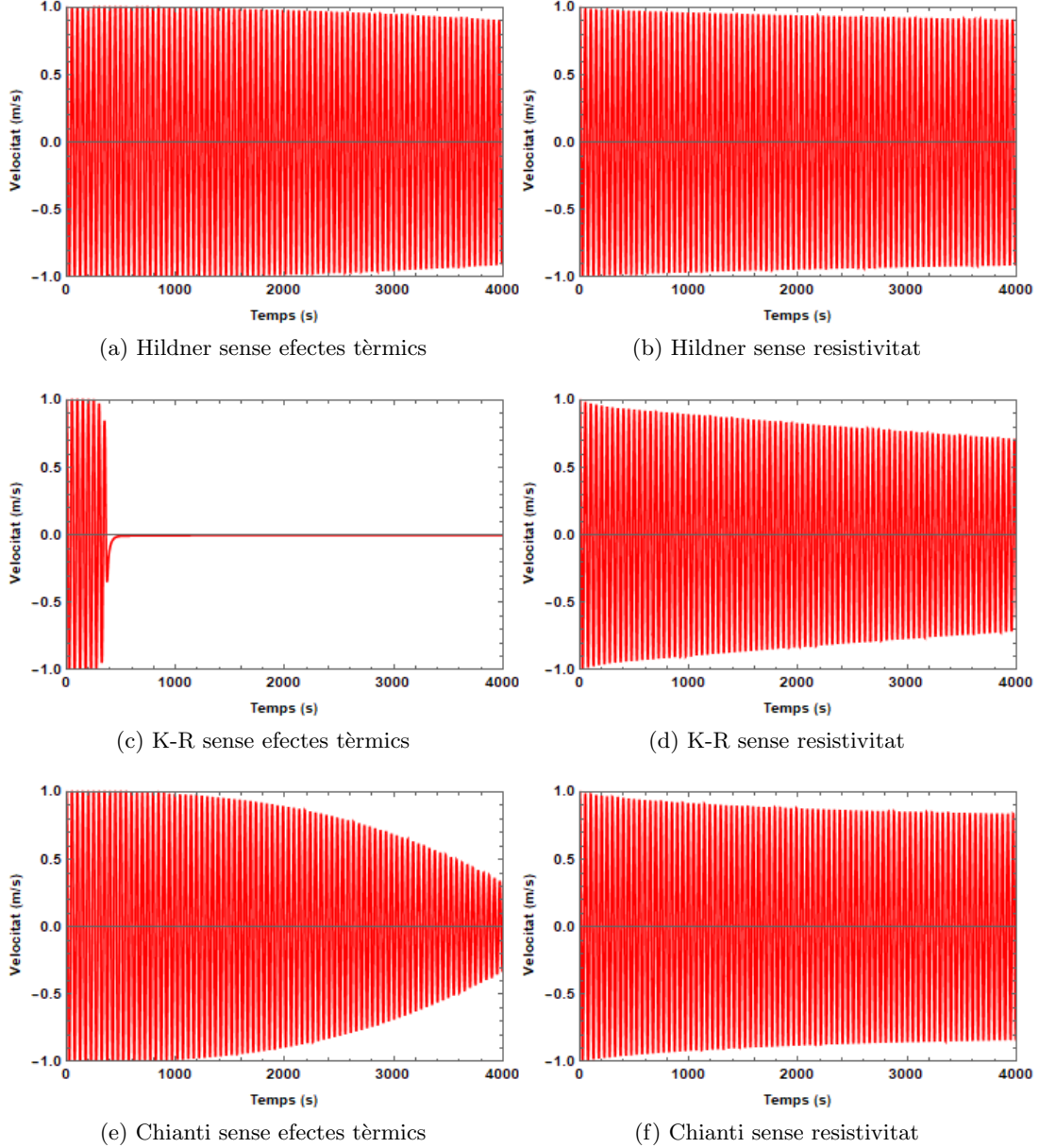


Figura 5: Contribucions tèrmiques i resistives en el cas del refredament.

que tant per el cas de K-R com a Chianti tai i com es poden observar a les *figures 8b* i *8c* més lentament. En general esmorteixen de forma diferent al cas del refredament.

2.4.2 Solució WKB

A més dels resultats numèrics de les seccions anteriors, en el cas de les ones lentes, vàrem fer el cas particular on les perturbacions de la densitat i la temperatura eren suficientment petites per negligir-les i així estudiar el comportament de $v_x(t)$. Cal destacar que per les ones ràpides no s'ha fet perquè no es produïa pràcticament esmorteïment al ser la velocitat de propagació la suma de la velocitat del so i la d'Alfvén, aquesta darrera és molt major que la velocitat del so i per tant la velocitat de propagació es pot considerar constant.

En canvi, per les ones lentes la velocitat de propagació és la del so, que no és constant en el temps i produeix una variació en període de l'ona. En aquest cas vàrem resoldre l'equació (2.10)

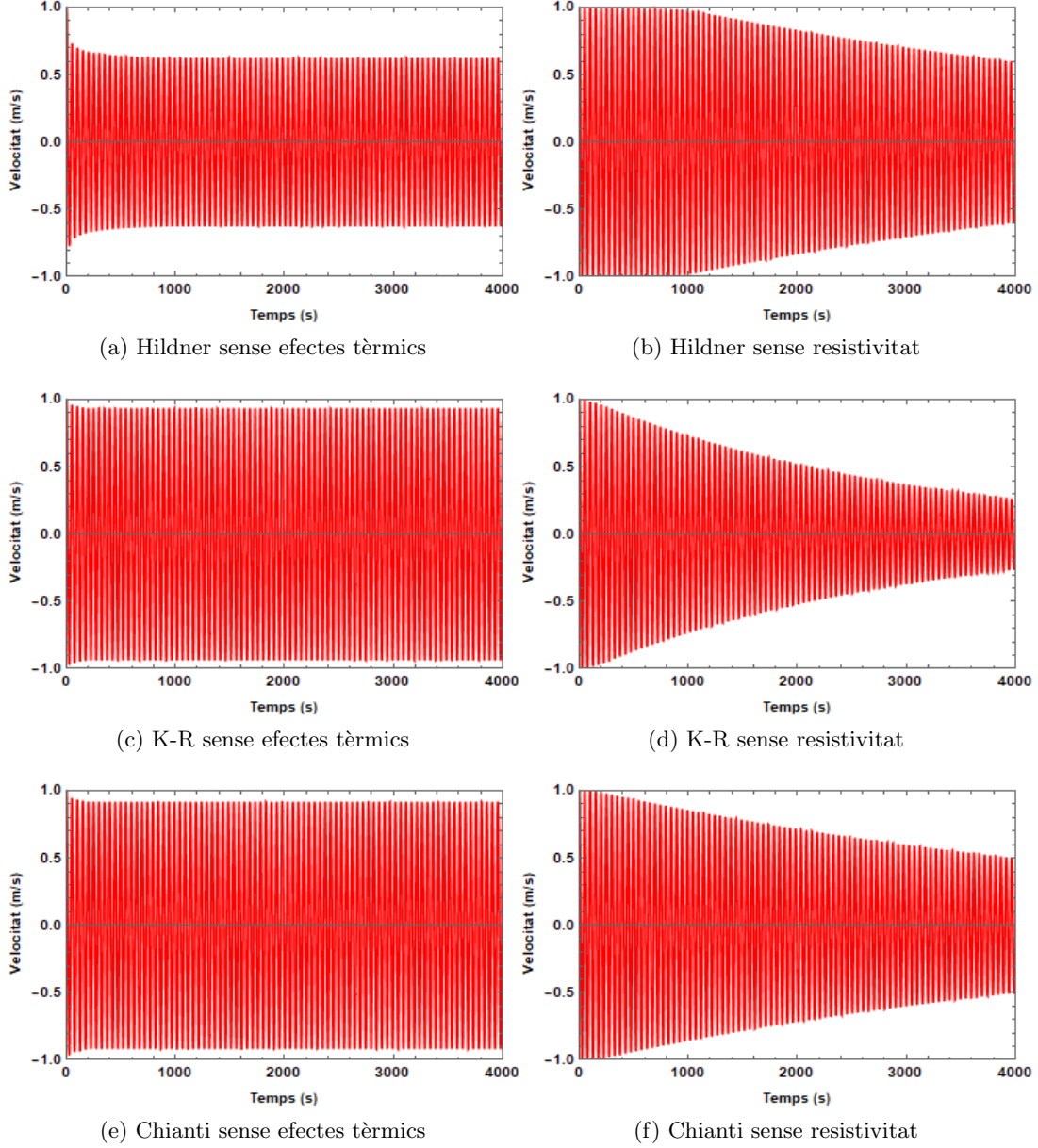


Figura 6: Contribucions tèrmiques i resistives en el cas de l'escalfament.

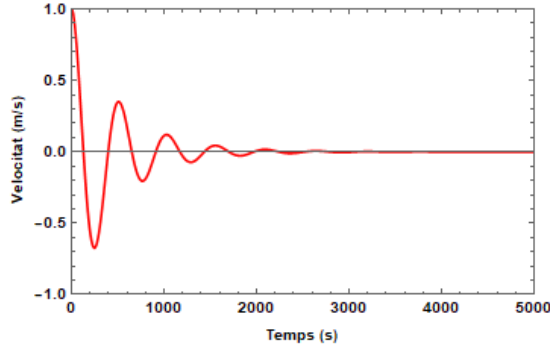
sense termes dissipatius de dues formes: una de forma numèrica com els casos anteriors i l'altra fent us de l'aproximació WKB. En aquest cas s'ha emprat $k_x = 10^{-6.3} \text{ m}^{-1}$.

Aproximació WKB

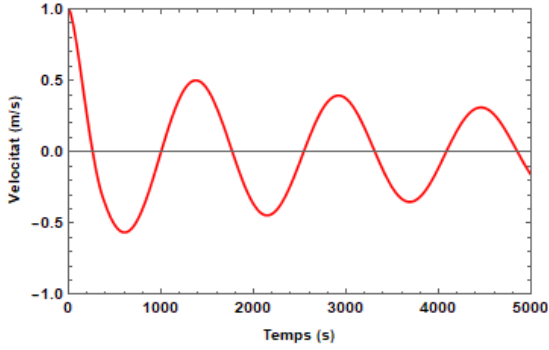
Per resoldre de forma analítica l'equació (2.10) sense termes dissipatius usarem l'aproximació WKB. Aquest mètode té la funció de resoldre de forma aproximada equacions diferencials amb coeficients no constant com pot ser la velocitat del so en aquest cas.

La solució d'aquesta equació vendrà determinada per la forma $v_{1x}(t) = V(t)e^{i\phi(t)}$. Fent les derivades pertinents obtenim la derivada segona respecte el temps:

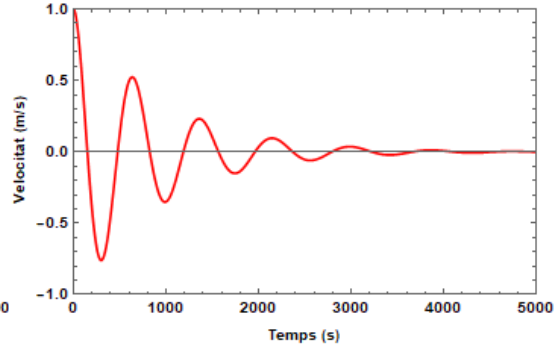
$$\frac{d^2 v_{1x}}{dt^2} = \left[\frac{d^2 V}{dt^2} + 2i \frac{d\phi}{dt} \frac{dV}{dt} + iV \frac{d^2 \phi}{dt^2} - V \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] e^{i\phi(t)} \quad (2.11)$$



(a) Hildner



(b) K-R



(c) Chianti

Figura 7: Ones lentes: velocitat pertorbada $v_x(t)$ en el cas del refredament.

Una vegada tenim la derivada segona de v_x introduïm l'equació (2.11) a l'equació (2.10) i separem les parts real i imaginària.

$$\left[\frac{d^2 v_{1x}}{dt^2} - V \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + k_x^2 c_s^2 V \right] + i \left[V \frac{d^2 \phi}{dt^2} + 2 \frac{d\phi}{dt} \frac{dV}{dt} \right] = 0$$

Igualam els dos termes a zero i a la part real dividim l'equació entre V menyspreant la derivada segona. Una vegada hem menyspreat aquest terme obtenim el valor per $\phi(t)$.

$$\phi(t) = \pm k_x \int c_s(t) dt + c_1 \quad (2.12)$$

Amb la part imaginària obtenim un resultat per $V(t)$.

$$V(t) = e^{-\frac{1}{2} \int \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} dt} \quad (2.13)$$

Fent la integral de l'exponencial i amb la fórmula (2.13) $V(t)$ ens queda com:

$$V(t) = c_2 \sqrt{\frac{c_s(0)}{c_s(t)}} \quad (2.14)$$

On c_1 i c_2 són constants arbitràries.

Refredament

Amb la fórmula de l'amplitud i la freqüència de l'aproximació WKB obtenim un conjunt de funcions que s'ajusten a les solucions numèriques sense termes radiatius. La funció de la fase té

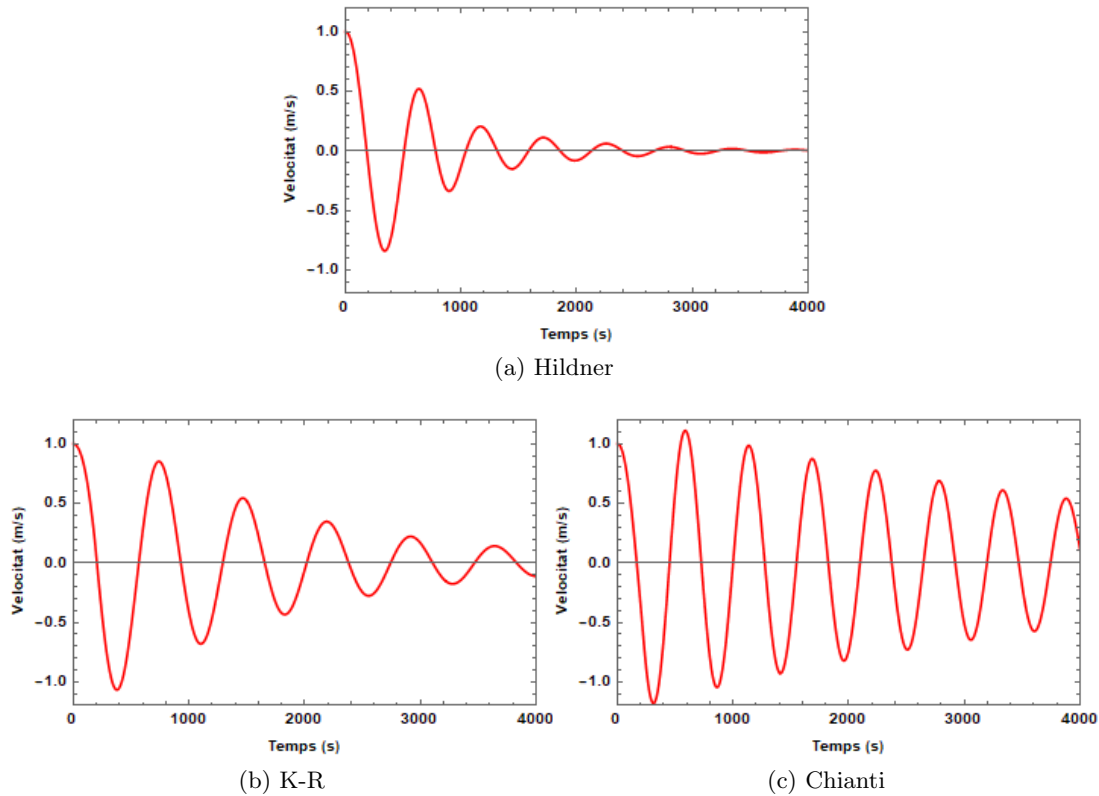


Figura 8: Ones lentes: velocitat pertorbada $v_x(t)$ en el cas de l'escalfament.

un comportament exponencial per aproximar-se a la gràfica de la velocitat del so. Els resultats numèrics i analítics del refredament són a la *Figura 9*.

A diferència de la resta de casos, en el refredament sense forçaments radiatius les ones augmenten d'amplitud en els tres casos analitzats. Aquest augment es produeix perquè l'amplitud de la velocitat depèn de la variació de la velocitat del so respecte el seu valor inicial i en el cas del refredament la velocitat del so disminueix (Veure l'equació 2.14). El cas de Hildner a la *Figura 9a* l'augment de l'amplitud triga uns 20000 segons en arribar al màxim, mentre que el cas K-R de la *Figura 9b* arriba al màxim en pocs segons i el cas de Chianti a la *Figura 9c* tarda aproximadament 7000 segons.

Comparant les solucions numèrica i analítica, l'aproximació WKB s'ajusta de forma correcta a l'analítica quan l'amplitud de la velocitat ha augmentat fins arribar pràcticament al màxim. L'aproximació en el cas de Hildner s'ajusta únicament a partir de 20000 segons havent-hi un desfasament important al principi. En canvi l'aproximació en el cas de K-R s'ajusta a la solució numèrica durant pràcticament tot el rang de temps. Finalment el cas de Chianti té una variació de fase important i hi ha amplificació al començament però passats 7000 segons les solucions s'ajusten quasi completament.

Escalfament

Igual que en el cas del refredament, a l'escalfament la funció de la fase té forma exponencial per ajustar-se a l'amplitud de la velocitat. Les solucions numèrica i analítica per l'escalfament són a la *Figura 10*.

Les solucions numèriques presenten un esmoreïment en la seva evolució temporal. En el cas de Hildner l'amplitud de la velocitat s'esmoreeix durant 1000 segons fins arribar al valor mínim

com es mostra a la *Figura 10a*, mentre que els casos de K-R i Chianti de les figures *Figura 10b* i *Figura 10c* respectivament el temps d'esmoreïment és de 500 segons aproximadament.

L'aproximació WKB s'ajusta en gran mesura als tres casos analitzats, tot i diferir-ne al començament. Aquesta diferència és més notable en el cas de Hildner on hi ha un petit desfasament.

2.4.3 Període

Un fet que diferencia les ones lentes de les ràpides és que el període de les ones varia amb el temps, mentre que a les ones ràpides roman pràcticament constant. Aquesta diferència és per la variació temporal de la velocitat del so, la qual és la velocitat de propagació a les ones lentes, contrari a les ones ràpides on la velocitat de propagació és la suma de la velocitat d'Alfvén i la del so, amb la primera molt major que la segona i constant.

El període de les ones lentes ve donat aproximadament per la següent fórmula:

$$T \approx \frac{2\pi}{k_x c_s} = \frac{2\pi}{k_x \sqrt{\frac{\gamma R T_0(t)}{\bar{\mu}(t)}}} \quad (2.15)$$

Refredament

En el procés del refredament els períodes de cada funció radiativa varien de forma similar als perfils de temperatura, com ocorre a la *Figura 11a*. K-R arriba al període final en pocs segons mentre que Hildner triga 25000 segons en arribar-hi i Chianti es situa en un terme intermedi arribant a l'equilibri en 9000 segons. En aquest cas el període augmenta perquè la temperatura del plasma disminueix.

Escalfament

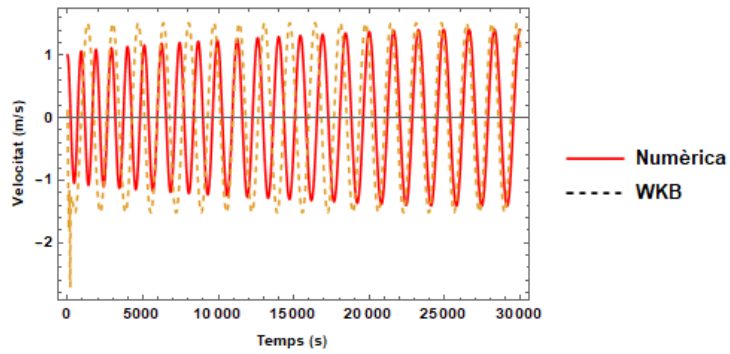
En el cas de l'escalfament els períodes dels casos K-R i Chianti varien de forma pràcticament idèntica i arriben al període final en molt pocs segons, mentre que el període de Hildner tarda 1000 segons aproximadament en arribar-hi. El període d'aquest cas disminueix perquè la temperatura augmenta i es produeix la ionització dels neutres. Cal destacar que el procés d'escalfament és més ràpid que el cas del refredament. Els períodes venen donats a la *Figura 11b*.

2.5 Energia

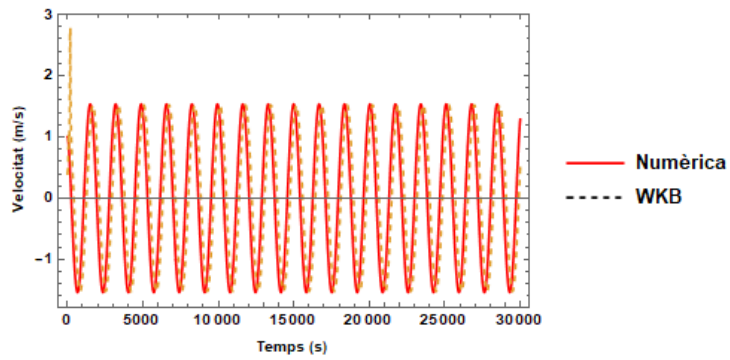
L'energia interna per unitat de massa ve donada per la fórmula (1.20). En aquesta fórmula hi intervenen un terme relacionat amb el grau de ionització del plasma i un altre relacionat amb la densitat i la pressió.

En el cas del refredament l'energia interna disminueix, ja que els dos termes de l'equació (1.20) decreixen. La *Figura 12a* representa l'evolució temporal de l'energia. El cas de Hildner és el que més tarda en assolir l'equilibri mentre que el cas de K-R ho fa en molt poc temps i en el cas de Chianti hi arriba en 6000 segons.

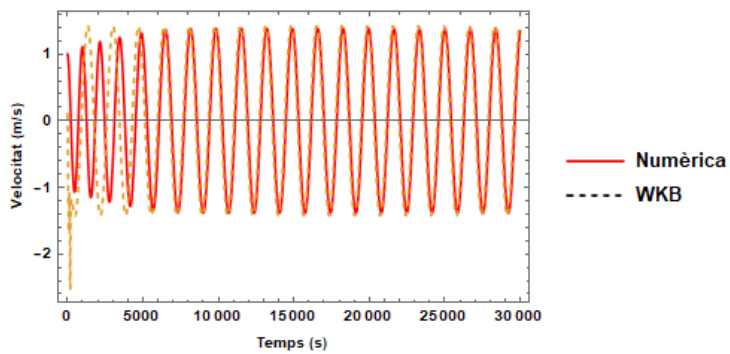
Contràriament al refredament, en el cas de l'escalfament l'energia interna augmenta a causa que els dos termes de l'equació (1.20) creixen. Els tres casos presenten una evolució similar en la forma, tot i que Chianti i K-R arriben a l'energia final en menys temps que Hildner, ja que el plasma s'escalfa més ràpid en aquests casos que en el cas de Hildner. Les energies pels tres casos es mostren a la *Figura 12b*.



(a) Hildner

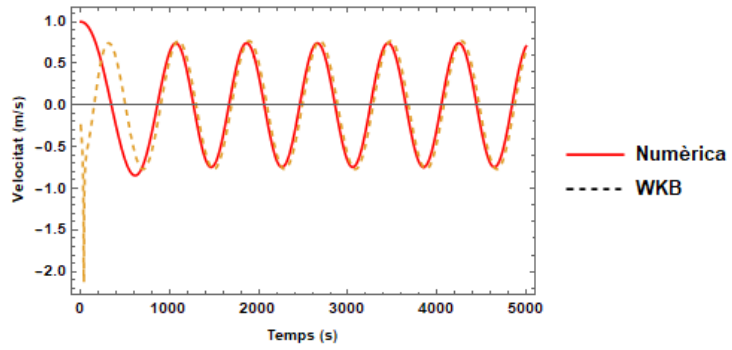


(b) K-R

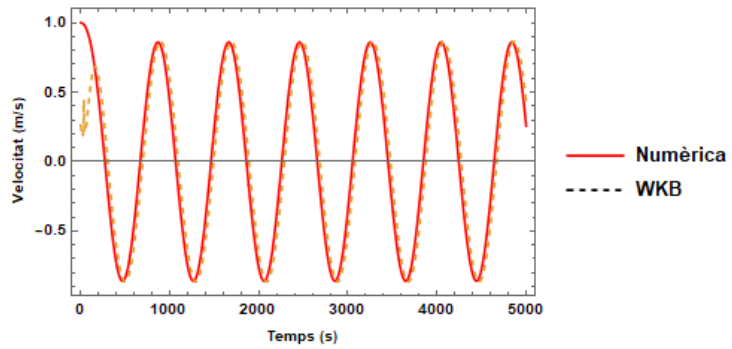


(c) Chianti

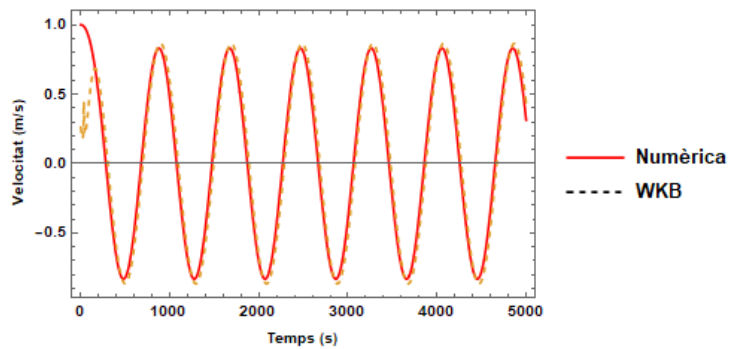
Figura 9: Ones lentes: comparativa de la soluci3 num3rica i l'aproximaci3 WKB en el refredament



(a) Hildner

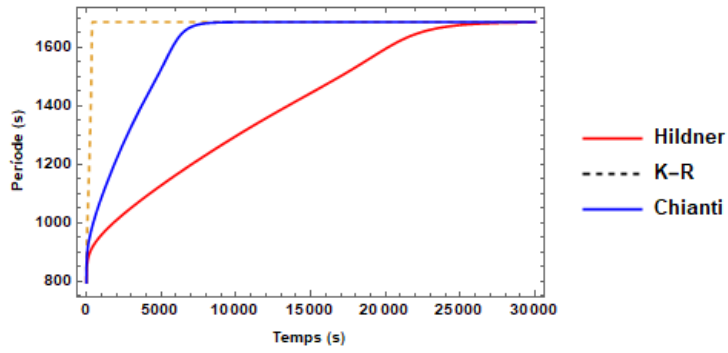


(b) K-R

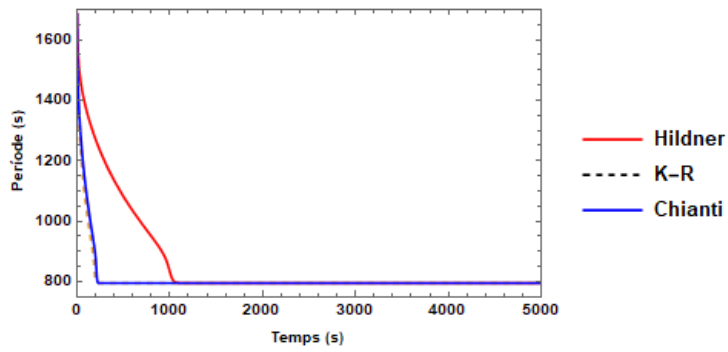


(c) Chianti

Figura 10: Ones lentes: comparativa de la solució numèrica i l'aproximació WKB a l'escalfament

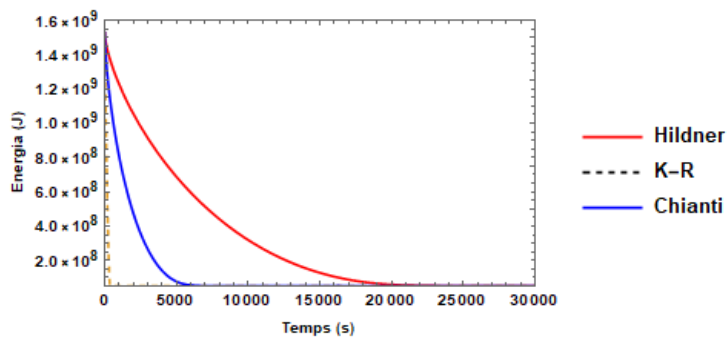


(a) Refredament

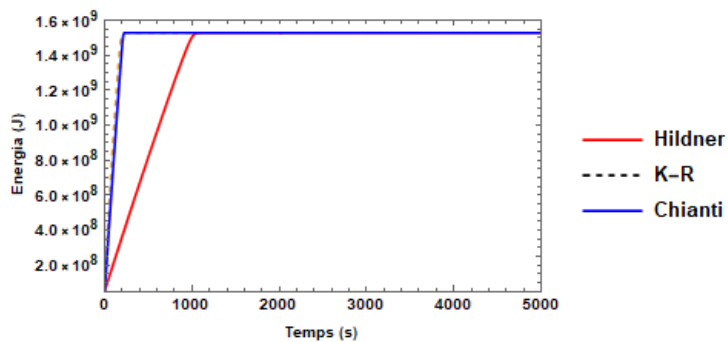


(b) Escalfament

Figura 11: Comparativa del període.

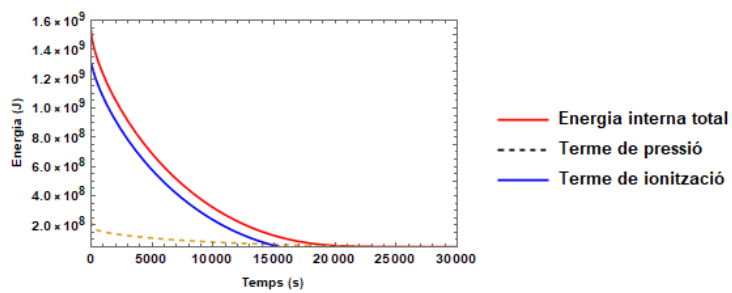


(a) Refredament

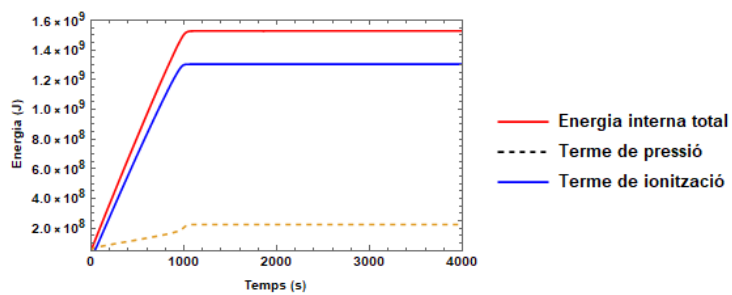


(b) Escalfament

Figura 12: Comparativa de l'energia interna.



(a) Refredament



(b) Escalfament

Figura 13: Comparativa de les contribucions de l'energia interna pel cas de Hildner.

3 Conclusions

En aquest estudi s'ha analitzat el comportament temporal de les ones magnetoacústiques ràpides i lentes dins un plasma sotmès a processos d'escalfament i refredament. S'han calculat els perfils de temperatura entre 4000 i 9000 K en un plasma parcialment ionitzat. S'han utilitzat tres funcions radiatives diferents i s'han analitzat i comparat els efectes que tenien als perfils de temperatura, les velocitats, els períodes i l'energia interna.

Per poder realitzar tots els càlculs de l'estudi primer hem linealitzat el conjunt de les equacions de la MHD per així tenir un sistema d'equacions diferencials que s'utilitzaran per obtenir les pertorbacions de les velocitats a les ones ràpides i lentes. Una vegada han estat linealitzades les equacions hem considerat el cas on les ones es propaguen en direcció x per les lentes i en direcció z per les ràpides.

A causa que els perfils de temperatura varien amb el temps, la resistivitat de Cowling η_c , els diversos efectes tèrmics i les densitats de ions, neutres i electrons varien amb el temps. Com a conseqüència tenim un comportament diferent per a cada tipus d'ona, funció radiativa i procés en funció del comportament d'aquests paràmetres.

Els perfils de temperatura en el cas del refredament són més suaus que en el cas de l'escalfament perquè part de l'energia s'inverteix en la recombinació de ions i electrons. Respecte a les funcions radiatives, K-R tendeix a ser la que varia més ràpid mentre que Hildner té tendència a ser la més lenta i Chianti es situaria en un terme intermedi.

Amb tots els paràmetres definits hem resolt el sistema d'equacions diferencials que dona la velocitat de les ones ràpides i lentes. Pel que fa a les ones ràpides, s'ha pogut veure que s'esmoreeixen amb el pas del temps a causa de les dissipacions resistives i tèrmiques, destacant-ne el fet que si només tenim en compte un dels tipus de dissipació, al refredament veim que domina la dissipació resistiva mentre que a l'escalfament són les dissipacions tèrmiques les dominants amb l'excepció del cas de Hildner. Respecte a les ones lentes, que només tenen dissipacions tèrmiques, hem comprovat que també s'esmoreeixen per tots els casos estudiats. Quan es menysprea els efectes tèrmics, les ones s'amplifiquen durant el refredament i s'esmoreeixen durant l'escalfament; aquest fet està relacionat amb la dependència de la velocitat del so amb la temperatura.

A més s'ha estudiat l'evolució temporal del període de les ones. A les ones ràpides el període roman pràcticament constant ja que en la seva velocitat de propagació intervien la velocitat d'Alfvén i la del so essent la primera molt major que la segona. A les ones lentes en canvi veim que el període depèn clarament del temps i augmenta quan s'escalfa el plasma i disminueix quan es refreda, ja que el període és inversament proporcional al perfil de temperatura.

Pel que fa a l'energia interna, hem calculat com augmenta quan estem en el procés d'escalfament i disminueix en el cas del refredament a causa que els dos termes de l'energia interna creixen o decreixen, respectivament.

4 Referències

- [1] Eric R. Priest. *Magnetohydrodynamics of the Sun*. Cambridge University Press. 2014.
- [2] J.L. Ballester. *Magnetism and Dynamics of Prominences*, in solar prominences. Eds J.-C. Vial & O. Engvold. Springer 2015.