



Universitat
de les Illes Balears

Errors en l'aprenentatge de l'estadística i la probabilitat a l'educació secundària: anàlisi i proposta de millora

NOM AUTOR: Paula Ferrer Munar

Memòria del Treball de Fi de Màster

Màster Universitari de Formació del Professorat
(Especialitat de Matemàtiques)

de la

UNIVERSITAT DE LES ILLES BALEARS

Curs Acadèmic 2017-2018

Data 04/06/2018

Nom Tutor del Treball: Daniel Ruiz Aguilera

Paraules clau: anàlisi d'errors, estadística i probabilitat, matemàtiques, procés d'ensenyament-aprenentatge, proposta de millora.

Resum

En aquest estudi es realitza una investigació per descobrir quins són els errors més habituals dels alumnes de secundària durant el procés d'ensenyament-aprenentatge de determinats continguts del bloc de coneixements d'estadística i probabilitat. Per dur-la a terme, prèviament es consulten altres treballs d'anàlisi d'errors amb l'objectiu d'aprendre diferents mètodes o classificacions.

A partir de l'estudi, s'analitzen per una banda les dificultats dels alumnes de tercer d'ESO, en les proves escrites d'estadística i probabilitat del curs 2017-2018 de l'IES Binissalem. Per l'altra, les errades de les respostes a les preguntes del bloc d'estadística i probabilitat de l'assignatura Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II, de la Prova de Batxillerat per a l'Accés a la Universitat de juny de 2017.

Amb els resultats obtinguts en la investigació s'observa que la principal causa dels errors en estadística i probabilitat és la falta de comprensió dels conceptes. S'ha vist la necessitat de proposar un canvi en la metodologia que pugui ajudar a l'alumnat a superar els errors, ja que molts d'ells es van arrossegant al llarg dels anys. També es fan recomanacions basades en l'ús d'activitats competencials i experimentals, amb la finalitat de donar més importància a la comprensió dels conceptes.

A més, es posa en pràctica una activitat experimental i competencial en un grup de segon de batxillerat que cursen l'assignatura de Matemàtiques II a l'institut de Binissalem. S'observa com aquesta experimentació pot afavorir a la comprensió del continguts que es treballen del bloc d'estadística i probabilitat.

Índex

1.	Introducció	5
2.	Marc teòric	7
2.1.	Marc competencial	7
2.1.1.	El currículum de les Illes Balears	7
2.1.2.	El marc de Catalunya	8
2.1.3.	Principis i estàndards del NCTM.....	11
2.2.	Estudis sobre els errors en Estadística i Probabilitat	13
2.3.	Tipus d'errors	14
3.	Estudi dels errors en estadística i probabilitat	17
3.1.	Proves de tercer d'ESO.....	17
3.1.1.	Mètode d'anàlisi.....	17
3.1.2.	Resultats	18
3.1.3.	Categorització dels errors	21
3.1.4.	Proposta de millora	23
3.2.	PBAU	24
3.2.1.	Preguntes a analitzar	24
3.2.2.	Mètode d'anàlisi.....	26
3.2.3.	Resultats	27
3.2.4.	Elecció dels apartats a analitzar	31
3.2.5.	Errors.....	34
3.2.6.	Resum de les dades	43
3.2.7.	Propostes de millora	44
3.3.	Conclusions globals	48
4.	Activitat experimental	49
4.1.	Objectius de l'activitat	50
4.2.	Continguts i competències	50
4.3.	Avaluació	52
4.3.1.	Qualificacions i resultats	53
4.4.	Metodologia didàctica i recursos	55
4.5.	Valoració de l'activitat	56
4.6.	Proposta de millora	59
5.	Conclusions	60
6.	Referències bibliogràfiques	62
7.	Annexos.....	65
A.	Estàndards del NCTM en l'etapa de 3r d'ESO a 2n de batxillerat.....	65
B.	Preguntes de les proves escrites de probabilitat a tercer d'ESO	67
C.	Treball en grups cooperatius d'estadística	70
D.	Error en les activitats de la PBAU.....	71
E.	Categories dels errors de la PBAU.....	76
F.	Fitxa activitat experimental.....	88
G.	Qualificacions activitat experimental	89
H.	Qüestionari de valoració de l'activitat	90

Índex de figures

Figura 1: Connexions entre diferents blocs de continguts.	10
Figura 2: Preguntes de l'examen d'estadística de tercer d'ESO.	21
Figura 3: Nombre d'alumnes segons la puntuació dels apartats de l'AP3.	28
Figura 4: Nombre d'alumnes segons la puntuació de l'AP4.	29
Figura 5: Nombre d'alumnes segons la puntuació dels apartats de la BP4.	31
Figura 6: Relació entre la qualificació de l'examen i la nota de l'AP4.	33
Figura 7: Relació entre la qualificació de l'examen i la nota de la BP4.	34
Figura 8: Els blocs lògics.	45
Figura 9: La Màquina de Galton amb 150 llançaments.	49
Figura 10: Errors comuns en les preguntes 4 i 5.	54
Figura 11: error en la pregunta 8.	55

Índex de taules

Taula 1: Continguts d'estadística i probabilitat respecte les competències.	10
Taula 2: Categorització dels errors més habituals de probabilitat.	22
Taula 3: Percentatge d'alumnes segons la puntuació d'AP3a i AP3b.	27
Taula 4: Percentatge d'alumnes segons la puntuació d'AP3c i AP3d.	28
Taula 5: Percentatge d'alumnes segons la puntuació d'AP4.	29
Taula 6: Percentatge d'alumnes segons la puntuació de BP4a, BP4b i BP4c.	30
Taula 7: Mitjanes aritmètiques de les puntuacions dels alumnes sobre 10.	32
Taula 8: Categories dels errors d'AP3c.	35
Taula 9: Categories dels errors d'AP3d.	37
Taula 10: Categories dels errors de l'AP4.	38
Taula 11: Categories dels errors de BP4b.	40
Taula 12: Categories dels errors de BP4c.	42
Taula 13: Les categories amb els errors més habituals de cada apartat.	44

1. Introducció

L'estudi de les dificultats i els errors que poden tenir els alumnes en l'aprenentatge de les diferents àrees de coneixements, és de gran importància i d'utilitat didàctica, ja que pot ser una valuosa eina del professorat per ajudar a l'alumnat en la superació de les barreres que sorgeixen a l'hora d'adquirir nous coneixements. Aquest treball se centrarà en l'estudi dels errors que sorgeixen durant el procés d'ensenyament-aprenentatge de l'estadística i la probabilitat a l'educació secundària.

L'interès d'analitzar els errors en estadística i probabilitat ve del Treball de Final de Grau *L'ensenyament i l'aprenentatge de l'estadística i la probabilitat a l'educació secundària: estat actual i proposta d'activitats* (Ferrer Munar, 2017), on es va poder concloure que els conceptes que es treballen, d'aquest bloc de coneixements, a les proves de PISA i a les proves de diagnòstic de l'IAQSE són d'una escala de dificultat molt baixa en comparació amb els altres blocs. A més, com a conseqüència d'aquest fet, es va veure que, en aquestes proves d'avaluació externa, una de les categories de coneixements on els alumnes de les Illes Balears obtenen millors resultats és la que correspon al bloc d'estadística i probabilitat. Però, quins són els errors més habituals que cometten els estudiants de secundària a l'hora de respondre preguntes on es treballen continguts curriculars d'estadística i de probabilitat?

El present treball té la intenció de respondre a l'anterior qüestió, amb la finalitat de descobrir el que s'ha de millorar en la metodologia d'ensenyar i aprendre l'estadística i la probabilitat. Cal que les dues parts implicades en aquest procés (el professor i l'alumne) prestin atenció als errors que es cometten durant l'adquisició dels coneixements. No se'ls ha de deixar passar, sinó que s'han de descobrir les causes per combatre'ls i evitar que, com estableixen Espinel, Ramos i Ramos (2007) i Ramos i Espinel (2003), l'error no es corregeixi i es mantengui fins al nivell universitari.

De fet, es pretén complir amb els objectius que es presenten a continuació.

1. Realitzar un estudi bibliogràfic sobre diferents treballs d'anàlisi dels errors comesos per alumnes d'educació secundària durant l'aprenentatge d'estadística i de probabilitat.
2. Analitzar i classificar els errors que han tingut en Estadística i Probabilitat alumnes de secundària, a partir de dades reals obtingudes de dues fonts diferents: exàmens de tercer d'ESO de l'institut Binissalem i les proves d'accés a la Universitat de les Illes Balears, de juny de 2017, de l'assignatura Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II.
3. Estudiar els resultats i les actituds dels alumnes de segon de Batxillerat, de l'IES Binissalem, que cursen l'assignatura de matemàtiques acadèmiques II, davant qualche activitat proposada al Treball de Final de Grau.
4. Aportar propostes de millora perquè el professorat les pugui aplicar a l'aula, amb la intenció d'anteposar-se als principals errors, que es descobreixen durant l'anàlisi dels resultats de les diferents proves escrites, emprades com a font d'aquest treball.

2. Marc teòric

En aquesta secció es presenta el marc teòric en el qual es basa aquest treball. Per una banda es presenta el marc teòric competencial i per l'altra el marc teòric dels errors en estadística i en probabilitat.

2.1. Marc competencial

L'aprenentatge de les matemàtiques, i en particular de l'estadística i la probabilitat, no ha de consistir només a recordar conceptes o aplicar algoritmes, sinó que l'aspecte vertaderament important és la comprensió, i posterior aplicació, del que s'està fent. I també, l'adquisició d'habilitats o tècniques de treball per saber afrontar noves situacions, tant a la vida quotidiana com a l'acadèmica o la professional. Aquí entra en joc la necessitat de canviar la forma d'avaluar a l'aula de matemàtiques. Entenent per avaluar el procés continu, durant l'ensenyament-aprenentatge d'una certa àrea de coneixement, que *comporta recollir dades i analitzar-les per prendre decisions, orientades a regular les dificultats i errors que sorgeixen i a valorar els resultats* (Sanmartí, 2010).

S'han d'avaluar, no tan sols els continguts del currículum de matemàtiques, sinó també els processos matemàtics: resolució de problemes, raonament i prova, connexions i comunicació i representació. Aquests processos *posen en relleu les formes d'adquisició i ús dels continguts matemàtics* (Alsina, 2012), la qual cosa és fonamental per la seva interiorització. Així, per aconseguir treballar amb la combinació de continguts i processos, sorgeixen les activitats competencials, allunyades de les mecanicistes on l'únic que es necessita per realitzar-les correctament és memoritzar el procediment a seguir.

2.1.1. El currículum de les Illes Balears

Al Treball de Final de Grau (Ferrer Munar, 2017) es va estudiar entre diferents marcs teòrics el del currículum de les Illes Balears. Es varen analitzar, a més dels estàndards, els continguts que es veuen a cada un dels cursos i es va poder comprovar que no hi ha molta diferència entre els continguts de les matemàtiques aplicades i els de les matemàtiques acadèmiques. També es va veure que a primer de batxillerat es treballa només estadística i a segon només probabilitat.

A més, es va dur a terme una comparativa del currículum de Balears amb els d'alguns països que solen obtenir puntuacions més elevades que Espanya a les proves PISA i amb el document del Common Core (sense data) dels Estats Units. Així, es va arribar a la conclusió que no hi ha cap relació que indiqui que com més continguts s'especifiquin al currículum millors resultats s'obtenen, sinó que pareix que aquells països on la normativa és més oberta els alumnes tenen un nivell més elevat en la competència matemàtica.

2.1.2. El marc de Catalunya

Com es diu al Decret 34/2015, *el procés d'ensenyament-aprenentatge competencial s'ha d'abordar des de totes les àrees de coneixement*, ja que l'objectiu de l'educació secundària és formar a persones reflexives i amb possibilitats d'afrontar diferents situacions de la vida real. Aleshores, el professorat ha de conèixer les competències associades a la seva matèria, per tal de fomentar l'assoliment de cada una d'elles. D'aquesta forma, el Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya ha concretat les competències lligades a cada una de les assignatures curriculars de l'educació secundària obligatòria.

Les competències bàsiques de l'àmbit matemàtic són dotze i s'especifiquen en el document publicat per Burgués i Sarramona (2017), on vénen agrupades segons el procés que es treballa. Aquestes competències són les que s'enumeren a continuació.

- *Resolució de problemes.*
 - *Competència 1. Traduir un problema a llenguatge matemàtic o a una representació matemàtica utilitzant variables, símbols, diagrames i models adequats.*
 - *Competència 2. Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre problemes.*
 - *Competència 3. Mantenir una actitud de recerca davant d'un problema assajant estratègies diverses.*
 - *Competència 4. Generar preguntes de caràcter matemàtic i plantejar problemes.*

- *Raonament i prova.*
 - *Competència 5. Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques.*
 - *Competència 6. Emprar el raonament matemàtic en entorns no matemàtics.*
- *Connexions.*
 - *Competència 7. Usar les relacions que hi ha entre les diverses parts de les matemàtiques per analitzar situacions i per raonar.*
 - *Competència 8. Identificar les matemàtiques implicades en situacions properes i acadèmiques i cercar situacions que es puguin relacionar amb idees matemàtiques concretes.*
- *Comunicació i representació.*
 - *Competència 9. Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic.*
 - *Competència 10. Expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió i comprendre les dels altres.*
 - *Competència 11. Emprar la comunicació i el treball col·laboratiu per compartir i construir coneixement a partir d'idees matemàtiques.*
 - *Competència 12. Seleccionar i usar tecnologies diverses per gestionar i mostrar informació, i visualitzar i estructurar idees o processos matemàtics.*

Pel que fa al bloc de coneixements d'estadística i probabilitat, totes aquestes competències es poden treballar amb determinats continguts. Si s'observa la taula que apareix a l'Annex A del document citat anteriorment, hi apareixen continguts clau, és a dir, aquells que contribueixen al fet de desenvolupar més competències. Dels continguts clau, quatre estan relacionats amb l'estadística o la probabilitat i el conjunt de tots ells es troba lligat a les dotze competències, com es pot veure a la Taula 1.

Competències	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Continguts												
13. Sentit de l'estadística.	X			X	X	X						
14. Dades, taules i gràfics estadístics.							X		X	X		X
15. Mètodes estadístics d'anàlisi de dades.		X	X					X			X	X
16. Sentit i mesura de la probabilitat.	X			X	X	X		X		X	X	
13, 14, 15 i 16.	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Taula 1: Continguts d'estadística i probabilitat respecte les competències.

Però no tots aquests continguts clau de la Taula 1 es poden considerar exclusivament del bloc d'estadística i probabilitat, sinó que alguns d'ells també estan relacionats amb altres blocs. Per tant, treballant amb segons quins continguts podem aconseguir una interconnexió. Aquesta idea queda molt ben representada a la Figura 1, extreta del mateix document (Burgués i Sarramona, 2017).

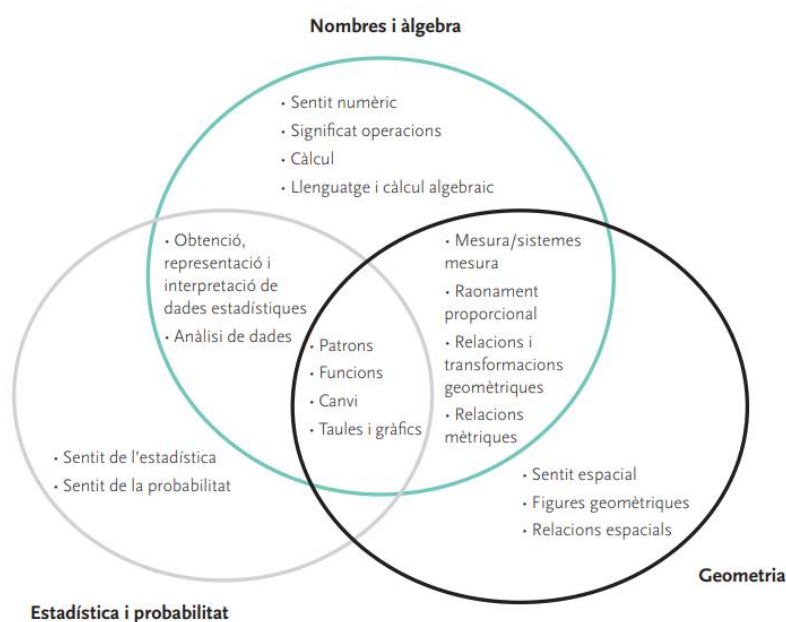


Figura 1: Connexions entre diferents blocs de continguts.

2.1.3. Principis i estàndards del NCTM

El *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) va manifestar la necessitat d'una reorganització del sistema educatiu dels Estats Units d'Amèrica, per tal d'adequar l'avaluació en l'àrea de matemàtiques a les necessitats actuals del país. Ho va fer mitjançant l'elaboració del llibre *Principles and Standards for School Mathematics*, que la *Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales* en va editar una versió traduïda al castellà (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). En ell es presenten, per a cada una de les etapes educatives, els cinc processos: *resolució de problemes, raonament i demostració, comunicació, connexions i representació*. També, es descriuen els estàndards d'aprenentatge per cada un dels blocs de coneixements, de la corresponent etapa.

Si se centra en el bloc d'Estadística i Probabilitat, en llibre del NCTM (2000) s'indica que els sistemes educatius haurien de permetre que l'alumne potenciés, en cada etapa educativa, la seva capacitat per:

- formular preguntes que puguin abordar-se amb dades i recollir, organitzar i presentar dades rellevants per respondre-les
- seleccionar i emprar mètodes estadístics apropiats per analitzar dades
- desenvolupar i avaluar inferències i prediccions basades en dades
- comprendre i aplicar conceptes bàsics de Probabilitat

Així, per aquestes capacitats s'especifica què hauria de saber fer un alumne quan acabi la corresponent etapa, s'expliquen els aspectes fonamentals que s'han de tractar i es donen alguns exemples de com treballar-los, de manera que es faciliti a l'alumnat la seva comprensió. Més endavant se n'emprarà un d'ells (secció 3.2.7).

Comparació amb el currículum de les Illes Balears

A partir del que s'assenyala al document (National Council of Teachers of Mathematics, 2000), si se centra en l'ensenyament i l'aprenentatge de l'Estadística i la Probabilitat a Espanya, com que el currículum està basat en els estàndards d'aprenentatge avaluables, els alumnes de tercer d'ESO ja haurien d'estar familiaritzats amb les tasques d'estadística: disseny d'enquestes; fer

experiments estadístics senzills; recollir dades, resumir-les i representar-les de diverses formes; obtenir les mesures de tendència central i de dispersió; descriure la distribució de les dades i treure conclusions d'una mostra simple. I de les tasques de probabilitat: calcular probabilitats de successos simples i alguns composts; fer simulacions i comparar els seus resultats amb les probabilitats esperades.

Comparant aquests coneixements que suposadament han de tenir els alumnes en acabar segon d'ESO, amb els criteris d'avaluació i els estàndards d'aprenentatge avaluable del bloc d'estadística i probabilitat del currículum de matemàtiques de primer i segon d'ESO (Conselleria d'Educació i Universitat, 2015a) podem veure que, efectivament, poden adquirir aquesta familiarització en gairebé totes les tasques. Les úniques mancances que hi ha són en estadística, ja que al currículum no especifica que s'hagin de dissenyar enquestes ni tampoc realitzar experiments estadístics. En aquest sentit, només apareix el criteri de *formular preguntes adequades per conèixer les característiques d'interès d'una població* (Conselleria d'Educació i Universitat, 2015a).

Així doncs, cal que els professors fomentin la realització d'enquestes i d'experiments, tant estadístics com probabilístics, perquè els alumnes aprenguin i interioritzin els conceptes a partir de la pràctica. A més, se'ls ha de fer raonar, descriure les dades i extreure conclusions sobre els resultats obtinguts, per tal de valorar la seva coherència i l'afinitat amb la teoria.

El que ha d'aprendre a fer en anàlisi de dades i probabilitat, segons el NCTM (2000), un alumne que es troba en l'etapa de tercer d'ESO a segon de batxillerat (Annex A) es pot aconseguir treballant els criteris i estàndards del currículum de tercer i quart d'ESO i primer de batxillerat (Conselleria d'Educació i Universitat, 2015b; 2015c; 2015d; 2015e). Aleshores, els continguts del bloc d'estadística i probabilitat del currículum de Matemàtiques II i de Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II, que com s'ha dit a la secció 2.1.1 són de probabilitat, pareix que als Estats Units s'aprenen a nivells més alts.

2.2. Estudis sobre els errors en Estadística i Probabilitat

A la literatura no es troben moltes publicacions sobre anàlisi d'errors en Estadística i Probabilitat dels alumnes d'Educació Secundària Obligatòria. De fet, quasi no hi ha evidències que s'hagin realitzat investigacions dels errors en matemàtiques dels estudiants espanyols d'ESO. Però un article interessant és el de Batanero, Godino, Vallecillos, Green i Holmes (1994) que té com a propòsit difondre els resultats d'investigacions sobre errors i dificultats dels alumnes en estadística que, tal com diuen els autors, *no són suficientment coneguts pels professors*. A més, aquest document (Batanero et al., 1994) aporta exemples de preguntes que poden ajudar a l'alumne a entendre determinats conceptes. A les propostes de millora (seccions 3.1.4 i 3.2.7) que es realitzen en el present treball s'empren algunes d'aquestes activitats.

A diferència de l'ESO, sí que s'han estudiat en diverses ocasions els errors comesos per alumnes de batxillerat en les preguntes del bloc d'estadística i probabilitat de les Proves d'Accés a la Universitat (PAU). Com a primer exemple tenim un treball on s'estudien els errors d'una mostra d'exàmens de Matemàtiques per a les Ciències Socials, de les PAU de les Illes Canàries realitzades en juny de 2007 (Ramos Domínguez, Espinel Febles i Ramos Domínguez, 2009). En particular, s'analitzen els errors comesos en dos problemes de contrastos d'hipòtesis.

La metodologia que s'utilitza per fer l'estudi és comptabilitzar el nombre d'alumnes que elegeix cada una de les preguntes de les dues opcions d'examen i en calculen els percentatges. També, obtenen el percentatge dels estudiants que aproven cada pregunta, és a dir, que obtenen més de la meitat dels punts totals. Així, s'observa que els alumnes tendeixen a contestar les preguntes d'estadística i probabilitat i que aquestes estan entre les que tenen el percentatge d'aprovat més elevat, excepte una activitat que treballa el concepte d'interval de confiança amb un 32,57%. Segons el que s'exposa, es creu que aquesta pregunta ha estat més complicada perquè l'alumne ha de raonar per obtenir les dades de l'enunciat i que normalment no estan acostumats, ja que en general solen aplicar les tècniques de resolució sense entendre del tot el que estan fent.

I la pregunta que ens sorgeix és: s'ha de permetre que l'aprenentatge en estadística i probabilitat (o en general en matemàtiques) es basi en la memorització de procediments? La resposta és no, evidentment. El que s'ha de fer és avaluar per competències.

Pel que fa a l'estudi dels errors, es fa un recompte dels alumnes que han contestat la pregunta correctament, sense cap error, i el dels que n'han comès algun. Llavors, a partir dels exàmens que tenen qualche error, s'ha fet un llistat dels diferents tipus de dificultats que han sorgit, quantificant les vegades que s'ha repetit. Tot seguit, s'han aportat consells i estratègies per millorar el procés d'ensenyament-aprenentatge dels continguts amb els quals s'ha errat. Aquestes recomanacions s'han basat principalment en l'ús de les noves tecnologies i de problemes pràctics i reals, ja que la causa d'una gran part dels errors ha estat la falta de comprensió.

Un altre exemple és la publicació de Nortes Checa i Nortes Martínez-Artero (2010) on s'analitzen les respostes de totes les preguntes de la prova PAU de setembre de 2009, per la Universitat de Murcia, de l'assignatura Matemàtiques per a les Ciències Socials II. En aquest estudi es va arribar a la conclusió que els problemes amb millors resultats van ser els d'inferència estadística, els quals consistien a construir un interval de confiança.

2.3. Tipus d'errors

Un altre treball que cal referenciar és un Treball de Final del Màster en Formació del Professorat (Pons Fiol, 2016). Principalment es realitza una anàlisi dels errors comesos en unes proves escrites de Geometria i una proposta de millora. Les proves són d'un grup de quart d'ESO d'un institut de Mallorca. Per dur a terme aquesta anàlisi es va fer prèviament un estudi sobre altres línies d'investigació dels errors en matemàtiques, la qual va permetre basar-se en tres metodologies diferents de classificació dels errors, proposades per Radatz, per Moscovitz-Hadar, Zaslavsky i Inbar i per Brousseau. A continuació es presenten les categories de les dites classificacions amb una breu explicació tal com apareixen en aquest treball (Pons Fiol, 2016).

Radatz (Radatz, 1979):

1. Errors deguts a dificultats de llenguatge. Deriven del mal ús de símbols i termes matemàtics i es deuen a una falta de comprensió semàntica del llenguatge matemàtic.
2. Errors deguts a dificultats per obtenir informació espacial. Provenen de la producció de representacions icòniques inadequades de situacions matemàtiques.
3. Errors deguts a un aprenentatge deficient de fets, destreses i conceptes previs. Són originals per deficiències en el maneig de conceptes, continguts i procediments per a la realització d'una tasca matemàtica.
4. Errors deguts a associacions incorrectes o a rigidesa del pensament. En general, són causats per incapacitat del pensament per ser flexible, és a dir, per adaptar-se a situacions noves. Poden ser:
 - 4.1. Errors per perseveració. Predominen elements singulars d'un problema.
 - 4.2. Errors d'associació. Inclouen raonaments o associacions incorrectes entre elements singulars.
 - 4.3. Errors d'interferència. Els conceptes i operacions interfereixen els uns amb els altres.
 - 4.4. Errors d'assimilació. La informació és mal processada a causa d'errades de percepció.
 - 4.5. Errors de transferència negativa, a partir de tasques prèvies. Es pot identificar l'efecte d'una impressió errònia obtinguda d'un conjunt d'exercicis o problemes verbals.
5. Errors deguts a l'aplicació de regles o estratègies irrellevants. Es produeixen quan s'apliquen regles o estratègies similars a continguts diferents.

Moscovitz-Hadar, Zaslavsky i Inbar (Moscovitz-Hadar, Zaslavsky i Inbar, 1987):

1. Errors deguts a dades mal utilitzades. Es produeixen per una discrepància entre les dades i el tractament que l'alumne li dona.

2. Errors deguts a la interpretació incorrecta del llenguatge. Són produïts per la traducció incorrecta de fets matemàtics descrits en un llenguatge simbòlic a un altre llenguatge simbòlic diferent.
3. Errors deguts a inferències no vàlides lògicament. Estan relacionats amb mancances en el raonament i no es deuen al contingut específic.
4. Errors deguts a teoremes o definicions deformades. Es produeixen per deformació d'un principi, regla, teorema o definició identificable.
5. Errors deguts a la falta de verificació de la solució. Es presenten quan el procediment de la tasca és correcte però el resultat final no és la solució de la pregunta plantejada.
6. Errors tècnics. Poden ser errors de càlcul o produïts en la manipulació de símbols algebraics i altres derivats de l'execució d'algoritmes.

Brousseau (Brousseau, 1983):

1. Errors a un nivell pràctic. El professor considera que són errors de càlcul.
2. Errors en la tasca. Relacionats amb descuits dels alumnes.
3. Errors de tècnica. Relacionats amb l'execució d'un mode operatiu conegut.
4. Errors de tecnologia. El professor critica l'elecció de la tècnica.
5. Errors de nivell teòric. Relacionats amb els coneixements teòrics de l'alumne.

3. Estudi dels errors en estadística i probabilitat

Analitzar i classificar els errors que tenen els alumnes de secundària en Estadística i Probabilitat és el principal objectiu marcat per aquest treball. Per dur a terme aquest estudi, s'obtidran dades reals de dos tipus diferents de proves d'avaluació. El primer tipus són proves escrites d'estadística i probabilitat realitzades a un institut d'educació secundària de Mallorca (l'IES Binissalem) per dos professors diferents, que imparteixen classes a tercer d'ESO, durant el curs acadèmic 2017-2018. I el segon, exàmens de l'assignatura Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II, de la prova de batxillerat per a l'accés a la Universitat (PBAU) del curs 2016-2017.

3.1. Proves de tercer d'ESO

Gràcies als professors de matemàtiques Josep Mulet i Lluís Aristondo de l'IES Binissalem, s'han pogut analitzar les respostes de les proves escrites d'estadística i probabilitat, realitzades el curs escolar 2017-2018 a quatre grups de tercer d'ESO, per trobar els errors que han tingut els alumnes.

Les proves escrites de probabilitat han consistit en dos exàmens diferents, un de cada docent. En canvi, les d'estadística han estat un examen d'un professor i un treball, per realitzar en grup cooperatiu i entregar per escrit, de l'altre professor.

3.1.1. Mètode d'anàlisi

En total s'han analitzat 161 exàmens (108 de probabilitat i 53 d'estadística) i 14 treballs d'estadística, seguint la metodologia que es presenta a continuació.

1. Anotar a un document d'Excel les puntuacions obtingudes a cada apartat.
2. Estudiar les respostes de cada pregunta per aquells alumnes que l'han contestat i no tenen la qualificació total, definint sempre que sigui possible el tipus d'error comès i comptant el nombre de vegades que apareix cada un d'ells.
3. Agrupar en diferents categories, segons les classificacions de la secció 2.3, els diferents tipus d'errors.

3.1.2. Resultats

Tenint en compte que no s'han pogut detectar les causes de tots els errors comesos, ja que en moltes respostes no apareix la justificació, s'ha treballat només amb els que es pot determinar el seu motiu. Així, en probabilitat s'han comès un total de 154 errors que es troben agrupats en 22 tipus diferents, segons la raó de l'errada. Els tipus més habituals, aquells que han aparegut més de cinc vegades, es presenten a continuació.

1. Dóna una probabilitat major que 1.

Aquest error s'ha repetit 23 vegades, és a dir, un 21% dels 108 alumnes l'ha comès. Un exemple n'és el següent resultat:

d) Néixer un dia del mes de gener $\frac{31}{12} \approx 2.5$
Major que 1!

2. Error de càlcul.

19 errors han estat per equivocar-se en qualche operació com en la següent resposta:

5. Llançam dos daus i ens fixam en les puntuacions de cadascun d'ells. Calcula: /
a) La probabilitat de treure un 5 en cadascun dels dos daus.
b) La probabilitat que la suma de les puntuacions sigui igual a 7.
a) $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$
b) $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
Alerta !!!

Per tant, un 18% dels alumnes han realitzat qualche càlcul incorrecte, la majoria de multiplicació o sumes de fraccions. Així, s'evidencia que els càlculs amb fraccions encara no estan clars en aquestes altures.

3. Error al reemplaçament o al no reemplaçament.

18 alumnes (17%) han tingut dificultats amb el concepte de reemplaçament, ja que si l'enunciat especificava que s'havia de fer

l'experiment sense reemplaçament, el feien amb reemplaçament i el mateix pel cas invers. Aquest és un dels errors que s'ha comès al resultat següent:

6. Tenim un calaix que conté 14 calcetins blancs i 6 calcetins negres tots ells separats. Agafam sense mirar dos calcetins a l'atzar (sense reemplaçament). Quina és la probabilitat que els dos siguin blancs? I la probabilitat que siguin d'igual color?

Handwritten notes: "2-els dos siguin blancs $\frac{9}{10}$ " and "2-els igual color." and "és sense reemplaçament..."

4. Construcció incorrecta del diagrama en arbre.

Aquest error ha estat comès per 13 alumnes (12%) i consisteix a escriure unes probabilitats incorrectes a les branques o, com s'observa en la resposta que es mostra a continuació, en elaborar un arbre inadequat.

5. Llançam dos daus i ens fixam en les puntuacions de cadascun d'ells. Calcula:

a) La probabilitat de treure un 5 en cadascun dels dos daus. $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

b) La probabilitat que la suma de les puntuacions sigui igual a 7. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Handwritten notes: "B" and "X"

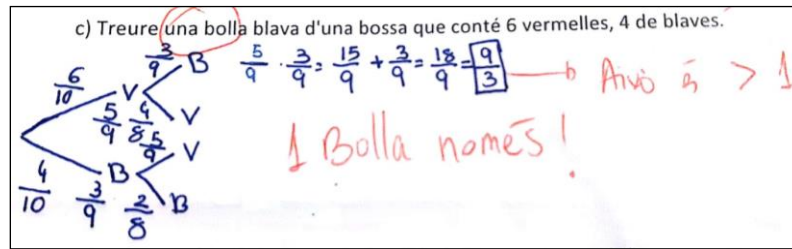
5. No entén la diferència entre sumar i multiplicar probabilitats.

Un total d'11 alumnes (10%) no entén aquesta diferència. Tres d'ells han multiplicat en lloc de sumar les probabilitats de cada camí de l'arbre i els altres set han sumat en lloc de multiplicar les probabilitats de cada una de les branques que segueixen. En la resposta d'exemple de l'error tipus 3 s'ha pogut observar el segon cas.

6. No entén qualche aspecte de l'enunciat.

11 alumnes (10%) no han entès del tot el que es demana a qualche pregunta. Per exemple, tres alumnes no han entès el concepte "promig" o, l'alumne que ha escrit la següent resposta, no ha llegit bé l'enunciat

perquè vol calcular la probabilitat d'extreure dues bolles blaves quan només se'n demana una.



7. Error a l'hora d'agafar qualche dada.

11 estudiants (10%) han emprat qualche dada que no tocava, per exemple a continuació es veu com un alumne agafa la probabilitat de l'altre color.

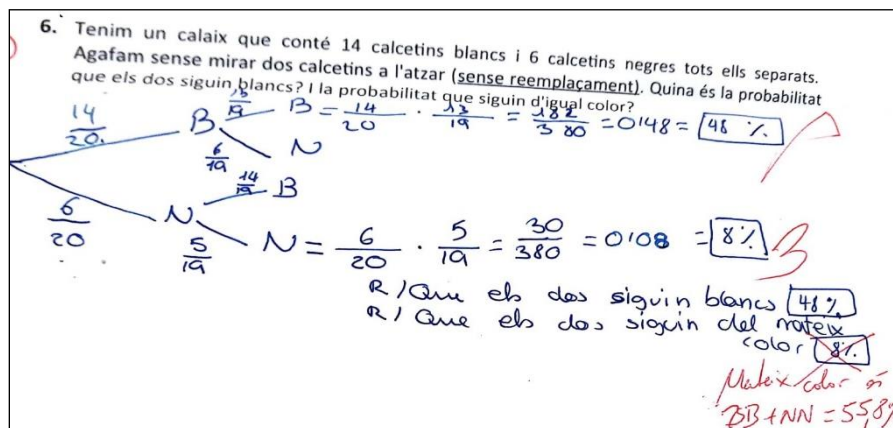
a) Que surti parell en llançar un dau (cúbic). $\frac{1}{6} \cdot 2$

b) Treure una carta menor que 6 d'una baralla espanyola (de 40 cartes) $\frac{10}{40}$

c) Treure una bolla blava d'una bossa que conté 6 vermelles, 4 de blaves i 8 de verdes. $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

8. Falta considerar qualche altre cas (camí de l'arbre).

Aquest error s'ha repetit 8 vegades (7% dels alumnes). A la següent resposta, per exemple, es veu com l'alumne es deixa el cas dels dos calcetins blancs.



9. No sap calcular la intersecció de dos conjunts.

6 alumnes no han sabut calcular la intersecció d'A i C següents:

3) Tenim els següents conjunts:
 $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12\}$
 $A = \{\text{nombres parells}\}$
 $B = \{\text{nombres estrictament majors que 6}\}$
 $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 Considerant que E representa un espai mostral on els esdeveniments són equiprobables, calcula els següents conjunts i la seva probabilitat:

a) $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 $p(A \cup B) = \frac{8}{12}$

b) $A \cap C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 $p(A \cap C) = \frac{6}{12}$

En aquest cas, com només havien de contestar la pregunta 56 alumnes, tenim que un 11% dels alumnes no entén el concepte d'intersecció.

Quant a les proves escrites d'estadística, pel fet que les dues preguntes (Figura 2) són bàsicament de càlcul sense necessitat de raonar, l'error més habitual es troba en l'aplicació d'una fórmula errònia. Aleshores, és evident que els alumnes s'aprenen de memòria les fórmules de la mitjana, la mediana, la variància i la desviació típica sense entendre els conceptes.

2) Tenim una variable a partir de la qual hem elaborat la següent taula:

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i	$f_i \cdot x_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
12,1	1	0,02	1	0,02	12,1	0,28516	0,28516
12,2	2	0,04	3	0,06	24,4	0,18836	0,37671
12,3	3	0,06	6	0,12	36,9	0,11156	0,33467
12,4	5	0,1	11	0,22	62	0,05476	0,27378
12,5	6	0,12	17	0,34	75	0,01796	0,10774
12,6	9	0,18	26	0,52	113,4	0,00116	0,0104
12,7	8	0,16	34	0,68	101,6	0,00436	0,03485
12,8	7	0,14	41	0,82	89,6	0,02756	0,19289
12,9	4	0,08	45	0,9	51,6	0,07076	0,28302
13	4	0,08	49	0,98	52	0,13396	0,53582
13,1	1	0,02	50	1	13,1	0,21716	0,21716
N= 50					631,7	2,6522	

a) Calcula la mitjana, variància i desviació típica (1,5 punts)
 b) Calcula la moda i la mediana (1 punt)
 c) Indica quin percentatge de les dades estan per damunt 12,8, i quantes dades estan entre 12,6 i 12,9 (1 punts)

3) Hem recollit les següents dades:

34	35	36	34	33	35	33
34	35	36	37	35	33	34
35	35	37	36	34	35	

a) Calcula la desviació típica de la variable (2 punts).
 b) Fes un gràfic de barres que mostri la distribució (2 punts).

Figura 2: Preguntes de l'examen d'estadística de tercer d'ESO.

Pel que fa als treballs d'estadística (Annex C), no s'han detectat errors sinó únicament mancances en les conclusions o explicacions de determinats aspectes.

3.1.3. Categorització dels errors

En aquest apartat, es realitza la categorització dels errors observats als exàmens segons les classificacions proposades per Radatz, per Moscovitz-Hadar,

Zaslavsky i Inbar i per Brousseau (secció 2.3). Recordant la numeració dels errors més habituals de probabilitat:

1. Dóna una probabilitat major que 1.
2. Error de càlcul.
3. Error al reemplaçament o al no reemplaçament.
4. Construcció incorrecta del diagrama en arbre.
5. No entén la diferència entre sumar i multiplicar probabilitats.
6. No entén qualque aspecte de l'enunciat.
7. Error a l'hora d'agafar qualque dada.
8. Falta considerar qualque altre cas (camí de l'arbre).
9. No sap calcular la intersecció de dos conjunts.

la seva classificació es mostra a la Taula 2, on només apareixen les categories que tenen qualque error assignat.

Tipus	Categoria	Error
Radatz	Errors deguts a un aprenentatge deficient de fets, destreses i conceptes previs.	1, 3, 5, 9
	Errors d'assimilació.	6
	Errors deguts a l'aplicació de regles o estratègies irrelevantes.	4
Moscovitz-Hadar, Zaslavsky i Inbar	Errors deguts a dades mal utilitzades.	4, 6, 7
	Errors deguts a teoremes o definicions deformades.	1, 3, 5, 9
	Errors deguts a la falta de verificació de la solució.	8
	Errors tècnics.	2
Brousseau	Errors a un nivell pràctic.	2
	Errors en la tasca.	6, 7, 8
	Errors de tècnica.	4
	Errors de nivell teòric.	1, 3, 5, 9

Taula 2: Categorització dels errors més habituals de probabilitat.

Es pot veure que les categories dominants són aquelles on hi ha els errors 1, 3, 5 i 9. Per tant, en general es pot dir que els alumnes no acaben d'entendre correctament determinats conceptes de probabilitat.

En els exàmens d'estadística, els errors també són per falta de comprensió dels conceptes estadístics. Per tant, la seva classificació estarà formada per les mateixes les categories dominants dels errors en probabilitat: *errors deguts a un aprenentatge deficient de fets, destreses i conceptes previs* (Radatz, 1979), *errors deguts a teoremes o definicions deformades* (Moscovitz-Hadar et al., 1987) i *errors de nivell teòric* (Brousseau, 1983).

3.1.4. Proposta de millora

S'ha pogut comprovar com els errors més habituals han estat deguts a la falta de comprensió dels continguts d'estadística i probabilitat que es treballen en cada una de les preguntes. Per tant, per ajudar a l'alumne a adquirir correctament aquests coneixements, cal que es dediqui més temps a realitzar activitats contextualitzades, perquè l'alumnat pugui veure per què serveixen cada un dels conceptes, i a treballar el raonament mitjançant preguntes que els puguin fer caure en qualche error de manera intencionada. Un exemple de pregunta d'aquest segon tipus és la següent, extreta de la publicació de Batanero et al. (1994), que té l'objectiu d'aconseguir que l'alumne s'adoni de la necessitat d'ordenar els nombres per poder respondre-la correctament.

La mediana del següent conjunt de nombres

1, 5, 1, 6, 1, 6, 8

és a) 1; b) 4; c) 5; d) 6; e) un altre valor.

També, mitjançant l'experimentació es pot afavorir a la comprensió dels conceptes i procediments que es duen a terme. A més, els experiments es poden realitzar emprant material d'ús quotidià com poden ser daus (Aubanell, 2012) o xinxetes (Aubanell, 2013). Aquestes propostes citades de n'Anton Aubanell són activitats competencials amb l'objectiu que l'alumne interioritzi els conceptes bàsics de probabilitat i calculi probabilitats de diferents successos.

Finalment, un altre error dels més habituals ha estat el càlcul incorrecte de diferents operacions amb fraccions, sobretot la multiplicació. Per fer veure a l'alumne l'error que comet es podria suggerir que comprovassin amb la calculadora el càlcul amb els corresponents nombres decimals.

3.2. PBAU

La prova de batxillerat per a l'accés a la Universitat (PBAU) consisteix en un conjunt de proves escrites de diferents assignatures, que s'han realitzat al llarg del segon curs de batxillerat. Aquest treball se centrarà en les preguntes d'estadística i de probabilitat, de les dues opcions del model de la convocatòria de juny del curs 2016-2017, de l'assignatura Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II. El model en qüestió és el Model 2 (Universitat de les Illes Balears, 2017a) on a l'opció A hi ha dues preguntes del bloc d'estadística i probabilitat, la tercera i la quarta, i a l'opció B només una, la quarta. Així, s'ha realitzat un estudi de les respostes dels alumnes per analitzar i classificar els errors més habituals, sorgits a l'hora de respondre aquestes preguntes.

Gràcies al fet que ha estat possible aconseguir la totalitat de les proves corregides, s'han pogut analitzar una gran quantitat de respostes. Concretament s'ha realitzat l'estudi sobre 1192 exàmens, tots aquells que es corregiren en una única ocasió, és a dir que només han passat per la mà d'un únic corrector.

3.2.1. Preguntes a analitzar

Com s'ha dit, els alumnes poden elegir entre dues opcions possibles d'examen, l'opció A o la B. La tercera pregunta de l'opció A (AP3) i la quarta (AP4), s'han elaborat per avaluar els coneixements dels alumnes sobre uns determinats continguts del bloc d'estadística i probabilitat del currículum (Conselleria d'Educació i Universitat, 2015d), de l'assignatura Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II. Els enunciats d'aquestes dues preguntes són els següents.

AP3. Siguin A i B dos successos tals que $p(A \cup B) = 0.9$ i $p(A^c) = 0.4$, on A^c denota el succés complementari del succés A , i $p(A \cap B) = 0.2$. Calculau les probabilitats següents:

- a) $p(B)$ (3 punts)
- b) $p(A/B)$ (2 punts)
- c) $p(A \cap B^c)$ (3 punts)
- d) $p(A^c \cup B^c)$ (2 punts)

AP4. A partir d'una mostra de 100 individus, s'ha realitzat una estimació de la proporció mitjançant l'interval de confiança (0.17, 0.25). Quin és el nivell de confiança amb el qual s'ha realitzat l'estimació? (10 punts)

Els conceptes d'estadística i probabilitat que s'avaluen s'enumeren a continuació.

AP3:

- *Aprofundiment en la Teoria de la Probabilitat. Axiomàtica de Kolmogorov.*
- *Experiments simples i compostos. Probabilitat condicionada. Dependència i independència d'esdeveniments.*

AP4:

- *Distribució de la proporció mostral en el cas de mostres grans.*
- *Estimació per intervals de confiança. Relació entre confiança, error i mida mostral.*
- *Interval de confiança per a la proporció mostral, en el cas de mostres grans, d'una distribució de model desconegut.*

Quant a les preguntes del bloc d'estadística i probabilitat de l'opció B, únicament hi ha la quarta pregunta (BP4):

BP4. Un estoig conté 17 llapis de color vermell i 13 de color blau.

a) *Si en triam un a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui vermell?*

(2 punts)

b) *Si n'extraïem dos a l'atzar, sense reemplaçament, quina és la probabilitat que tots dos siguin de color blau?*

(4 punts)

c) *Si en triam dos a l'atzar, sense reemplaçament, calculau la probabilitat que el primer sigui blau i el segon sigui vermell.*

(4 punts)

D'aquesta activitat sorprèn la diferència de dificultat que hi ha respecte a les de l'altra opció, ja que té una certa contextualització, la qual cosa fa que les preguntes no siguin tan abstractes, i per resoldre la pregunta correctament s'ha d'emprar la regla de Laplace i es pot fer un diagrama en arbre (Universitat de les

Illes Balears, 2017b), que són dos continguts que es comencen a treballar a primer o a segon d'ESO, segons el currículum (Conselleria d'Educació i Universitat, 2015a). De fet, és molt semblant a una de les activitats d'una prova escrita de tercer d'ESO que s'ha analitzat a la secció 3.1. En aquesta pregunta un 46% dels alumnes han contestat correctament tots els apartats, un 44% ha tingut qualche error i un 10% no ha realitzat l'activitat. El seu enunciat es mostra a continuació.

Tenim un calaix que conté 14 calcetins blancs i 6 calcetins negres tots ells separats. Agafam sense mirar dos calcetins a l'atzar (sense reemplaçament). Quina és la probabilitat que els dos siguin blancs? I la probabilitat que siguin d'igual color?

Entre els 23 alumnes que han tingut qualche dificultat, s'han detectat 28 errors de nou tipus diferents. Els tipus més habituals han estat: errades en el càlcul (15% dels alumnes que han contestat la pregunta), donar com a resultat una probabilitat major que 1 (11%) i realitzar els càlculs amb reemplaçament (11%).

3.2.2. Mètode d'anàlisi

Abans de realitzar el procés de classificació dels errors, s'han dut a terme diverses tasques prèvies. De fet, els passos que s'han seguit per aconseguir analitzar i classificar els errors més comuns són els següents:

1. Anotar a un document d'Excel les puntuacions obtingudes a cada apartat, definits a les preguntes d'estadística i probabilitat, i la qualificació final del corresponent alumne avaluat.
2. Quantificar el nombre d'alumnes, mitjançant les funcions d'Excel, que han elegit l'opció A o la B de l'examen i que, pels diferents apartats, no han contestat (NC) o han obtingut cada una de les possibles puntuacions.
3. Seleccionar els apartats amb pitjors resultats per tal d'analitzar les diferents respostes.
4. Estudiar les respostes als apartats seleccionats i definir diferents tipus d'errors, contant el nombre de vegades que s'han produït.

5. Agrupar en diferents categories els errors sorgits en més d'una ocasió al mateix apartat.

Així, la intenció és proposar alguna millora en qualque aspecte del procés d'ensenyament-aprenentatge del contingut en què s'ha comès l'error.

3.2.3. Resultats

Dels 1192 alumnes, sobre els quals es realitza l'estudi, 565 han elegit l'opció A i 627 l'opció B, és a dir, aproximadament un 47% i un 53% respectivament. Per tant, pel fet de ser una elecció força igualada, pareix que els alumnes no han apreciat a primera vista diferència de dificultat.

Opció A

Els resultats obtinguts dels dos primers apartats de la pregunta AP3 han estat molt semblants, ja que el percentatge d'alumnes amb la puntuació màxima en ambdós casos està rondant el 70% i el percentatge dels que no han contestat correctament és d'un poc més del 20%. A més, aquells que han deixat sense fer els apartats AP3a i AP3b són un 5% i un 7% respectivament. Totes aquestes dades s'han extret de la Taula 3.

AP3a	Alumnes	%
3	412	73
2	5	1
1	1	0
0	118	21
NC	29	5
Total	565	

AP3b	Alumnes	%
2	381	67
1	12	2
0	133	24
NC	39	7
Total	565	

Taula 3: Percentatge d'alumnes segons la puntuació d'AP3a i AP3b.

En canvi, pels dos darrers apartats han augmentat molt el nombre d'alumnes amb puntuació zero i el nombre dels que no han contestat. Dit d'una altra forma, ha disminuït el percentatge de l'alumnat amb la màxima puntuació (vegeu la Taula 4).

AP3c	Alumnes	%
3	250	44
2	1	0
1	4	1
0	239	42
NC	71	13
Total	565	

AP3d	Alumnes	%
2	290	51
1	5	1
0	217	38
NC	53	9
Total	565	

Taula 4: Percentatge d'alumnes segons la puntuació d'AP3c i AP3d.

Aquestes semblances i diferències, entre els resultats dels diferents apartats es poden observar a la Figura 3, on es mostren el nombre d'alumnes per a cada una de les possibles puntuacions.

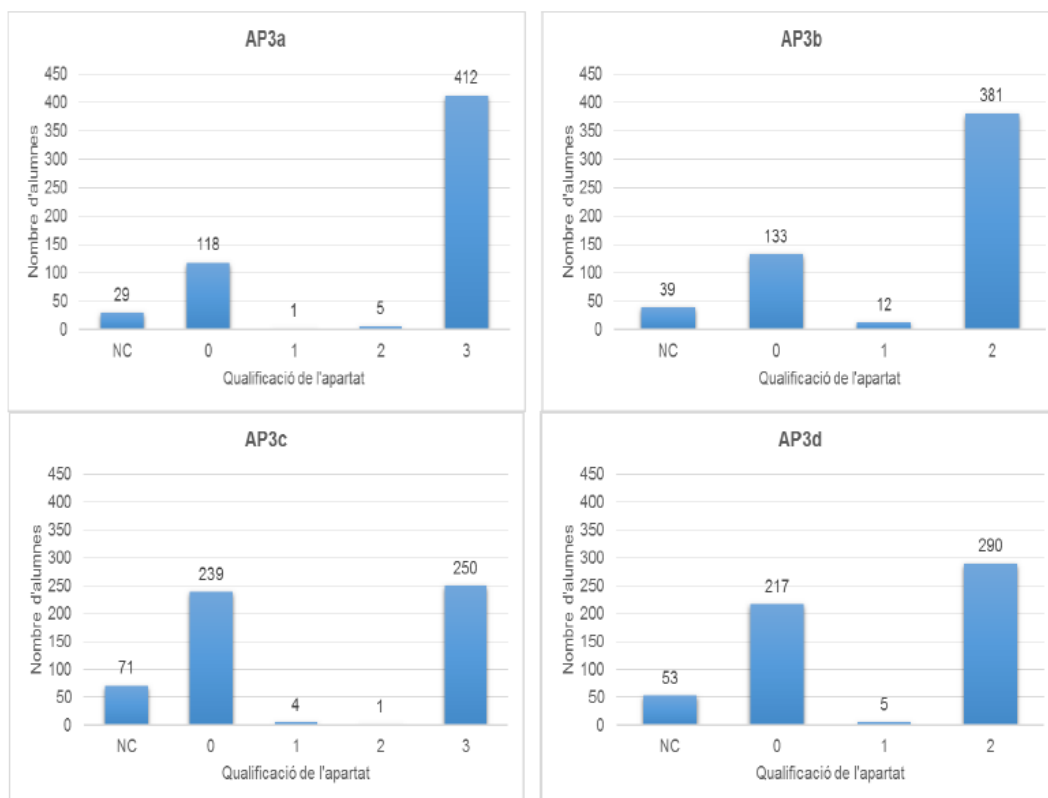


Figura 3: Nombre d'alumnes segons la puntuació dels apartats de l'AP3.

En els quatre apartats es pot apreciar com les puntuacions entremig de la màxima i la mínima tenen un baix nombre d'alumnes. Aquest fet és perquè els criteris que se seguien a l'hora d'avaluar les proves estaven definits per donar els punts indicats a cada probabilitat, si el càlcul és correcte i amb justificació, i

zero punts, si apareix el resultat sense cap tipus de justificació. Així, es va deixar a criteri propi decidir quina puntuació posar quan l'alumne realitza un procediment correcte però les dades que s'utilitzen, dels anteriors apartats, són errònies. Va ser aquí quan alguns correctors decidiren penalitzar de manera parcial la resposta.

Pel que fa a la pregunta AP4, les puntuacions en general han estat molt baixes. Només un 3% dels alumnes han sabut respondre correctament l'activitat. A més, un 28% de l'alumnat no ha contestat i un 41% no ha sabut resoldre-la. Tots els percentatges es poden consultar a la Taula 5.

AP4	NC	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Alumnes	158	233	15	56	5	25	9	8	31	4	3	18	565
%	28	41	3	10	1	4	2	1	5	1	1	3	

Taula 5: Percentatge d'alumnes segons la puntuació d'AP4.

A més, la gran diferència que hi ha entre el nombre d'alumnes que han obtingut un zero, amb els que han obtingut més punts, es pot apreciar a la Figura 4.

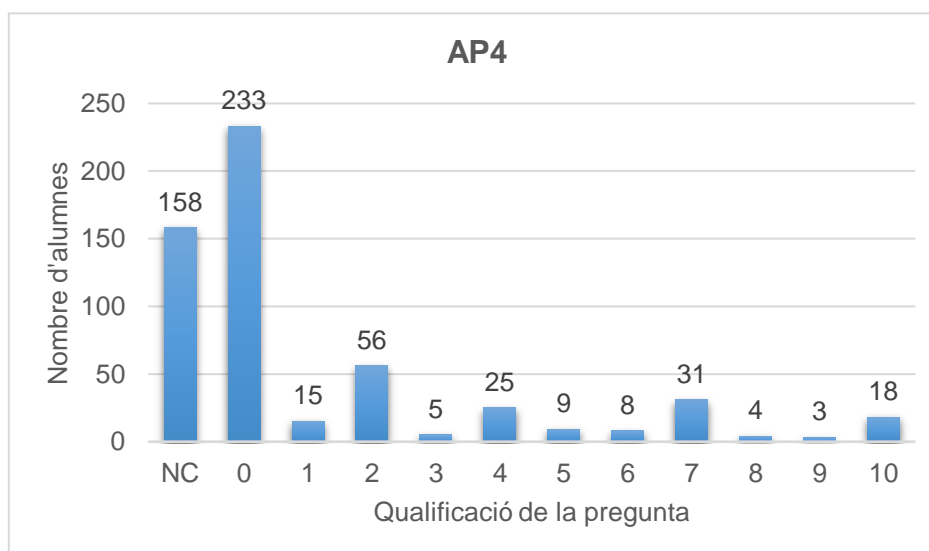


Figura 4: Nombre d'alumnes segons la puntuació de l'AP4.

La puntuació d'aquesta pregunta s'ha calculat amb els criteris que es presenten a continuació.

- Càlcul correcte de p: 2 punts.

- Càlcul correcte de l'error: 2 punts.
- Determinació correcta de $\frac{z\alpha}{2}$: 3 punts.
- Determinació correcta del nivell de confiança: 3 punts.

Aquí, de nou, es deixa a criteri del corrector decidir quina qualificació posar en algunes situacions, no definides als criteris, com: no obtenir exactament el mateix resultat a causa de l'arrodoniment d'algunes dades o que no es calculi l'error perquè s'ha fet servir un procediment diferent on no es necessita. Per aquest motiu, s'han obtingut tantes puntuacions possibles de l'AP4.

Opció B

Com s'ha dit anteriorment, la quarta pregunta de l'opció B té un nivell de dificultat inferior a les activitats d'estadística o de probabilitat de l'altre examen. És per aquest motiu que els resultats han estat més favorables. El percentatge d'alumnes que han obtingut la màxima puntuació als tres apartats supera el 60%. De fet, al primer apartat aquest percentatge és d'un 89%. Així i tot, al BP4b i al BP4c un 27% de l'alumnat no ha sabut calcular correctament les probabilitats demanades.

A més, per tots els apartats el nombre de vegades que s'ha deixat en blanc és molt baix. Com es pot veure a la Taula 6, no supera en cap dels casos el 10%.

BP4a	Alumnes	%	BP4b	Alumnes	%	BP4c	Alumnes	%
2	555	89	4	403	64	4	386	62
1	17	3	3	14	2	3	12	2
0	45	7	2	1	0	2	5	1
NC	10	2	1	6	1	1	7	1
Total	627		0	169	27	0	170	27
			NC	34	6	NC	47	7
			Total	627		Total	627	

Taula 6: Percentatge d'alumnes segons la puntuació de BP4a, BP4b i BP4c.

Aleshores, s'ha vist que aquesta és l'activitat del bloc d'estadística i probabilitat que ha anat millor. L'apartat que ha tingut pitjors resultats ha estat el BP4c, però amb una diferència insignificant respecte el BP4b (vegeu la Figura 5).

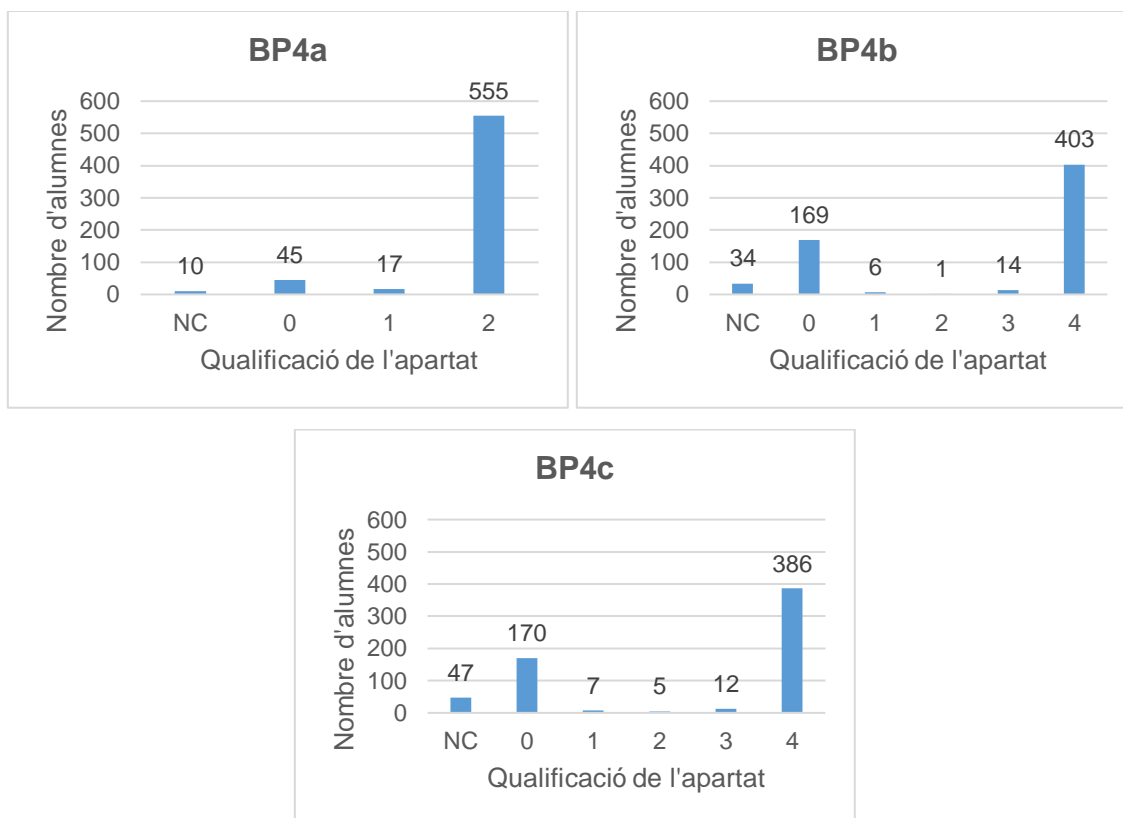


Figura 5: Nombre d'alumnes segons la puntuació dels apartats de la BP4.

Novament, hi ha pocs alumnes que hagin obtingut una puntuació entre la mínima i la màxima. Però en aquest cas, els criteris que s'han emprat sí que especifiquen que si no hi ha justificació, s'ha de qualificar amb com a màxim 1 punt:

- BP4a: indicació correcta de la probabilitat: 2 punts,
- BP4b: càlcul correcte de la probabilitat: 4 punts i sense cap justificació màxim 1 punt,
- BP4c: càlcul correcte de la probabilitat: 4 punts i sense cap justificació màxim 1 punt.

3.2.4. Elecció dels apartats a analitzar

Segons el nombre d'alumnes que no han contestat o que han obtingut cada una de les puntuacions, s'ha pogut comprovar que la pregunta que ha anat millor ha estat la BP4 i la pitjor l'AP4. De fet, amb la següent Taula 7 es poden comparar les notes mitjanes d'aquestes activitats sobre 10 punts. Les mitjanes aritmètiques

han estat calculades amb la suma de les mitjanes de cada un dels apartats, les quals s'han realitzat de dues formes: sobre el total dels alumnes, que han elegit l'opció de l'examen corresponent, i sobre els alumnes que han contestat l'apartat.

	AP3	AP4	BP4
Tots	5,94	1,4	7,00
Sense els NC	6,46	1,94	7,38

Taula 7: Mitjanes aritmètiques de les puntuacions dels alumnes sobre 10.

Entre les dues mitjanes de la pregunta AP3, de l'AP4 i de la BP4 hi ha 0,52, 0,54 i 0,38 punts de diferència, respectivament. Encara així, es fa evident que molts d'alumnes han comès errors a l'hora de realitzar aquestes activitats. Aleshores, en quins aspectes s'han equivocat més els alumnes? Per saber-ho caldrà analitzar cada una de les respostes dels apartats que més ens interessin, a la recerca d'errors.

AP3

Dels quatre apartats d'aquesta pregunta, els que més ens interessin analitzar són els dos darrers, ja que havíem vist que són els que tenen el percentatge més baix d'alumnes amb la puntuació màxima. Per tant, AP3c i AP3d seran els apartats que s'analitzaran, per trobar diferents tipus d'errors que s'hagin comès durant el càlcul de les corresponents probabilitats que es demanen.

AP4

S'ha vist que, efectivament, l'AP4 és la pregunta que ha obtingut els resultats més baixos. La seva mitjana aritmètica, calculada de qualsevol de les dues formes, no supera els 2 punts. Per tant, és necessari que s'analitzin les respostes a aquesta activitat per trobar quines són les dificultats en què es troben els alumnes, a l'hora de resoldre-la.

Aquesta pregunta es troba a una escala d'abstracció una mica alta per l'alumnat, ja que no està gens contextualitzada. Per arribar a aquest nivell d'abstracció és necessari plantejar primer de tot altres qüestions a uns esglaons més baixos, és a dir, d'un caire més real. Per aquest motiu, a l'aula s'hauria de treballar amb

exemples que puguin ajudar a la comprensió necessària per fer activitats d'aquest tipus, sense que sorgeixin grans dificultats.

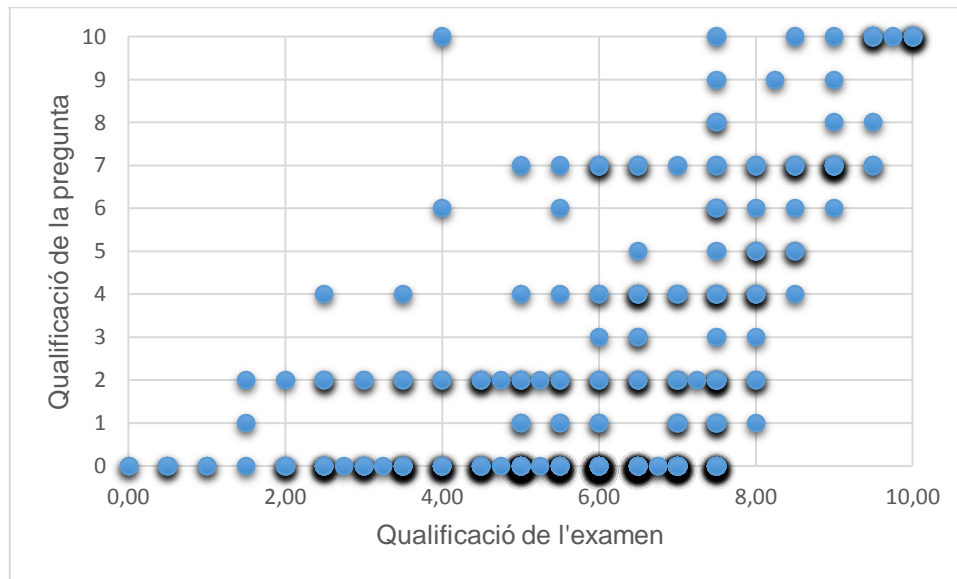


Figura 6: Relació entre la qualificació de l'examen i la nota de l'AP4.

El gràfic de la Figura 6 és un gràfic de punts on, per un punt (x,y), la x representa la qualificació de l'examen d'un determinat alumne, que ha elegit el model A i ha contestat la pregunta quatre, i la y la puntuació que ha obtingut d'aquesta activitat. A més, els punts estan ombrejats per indicar que, com més gran és l'ombra, més alumnes tenen aquestes mateixes notes.

Així, excepte el cas d'un alumne aïllat que té un 10 de l'exercici però només un 4 de l'examen, els altres alumnes que tenen més d'un 7 d'aquesta pregunta han obtingut un 7,5 o més de la prova avaluable. De fet, es pot observar com la majoria dels alumnes que han contestat sense cap error, la quarta qüestió de l'opció A, tenen un 9,5 o més de l'examen. Aquest fet fa pensar que els alumnes han d'estar molt ben preparats per poder respondre correctament tota la pregunta.

BP4

Per la seva banda, la pregunta BP4 ha estat la que en general ha anat millor. Però s'analitzaran els apartats BP4b i BP4c, ja que més o menys un 30% dels

alumnes han comès qualche error, perquè han contestat i no han obtingut la puntuació màxima.

Novament, si s'observa el gràfic de punts per aquesta activitat (Figura 7), es veu que no passa el mateix que per l'activitat AP4. En aquest cas, hi ha molts d'alumnes que han obtingut un 10 de la pregunta, però pel fet d'haver tret la puntuació màxima no vol dir que els hi hagi anat bé tot l'examen. De fet, n'hi ha alguns que han contestat correctament tots els apartats i tenen un 2,5 de l'examen, és a dir, és l'única pregunta que han fet bé de tota la prova d'avaluació escrita.

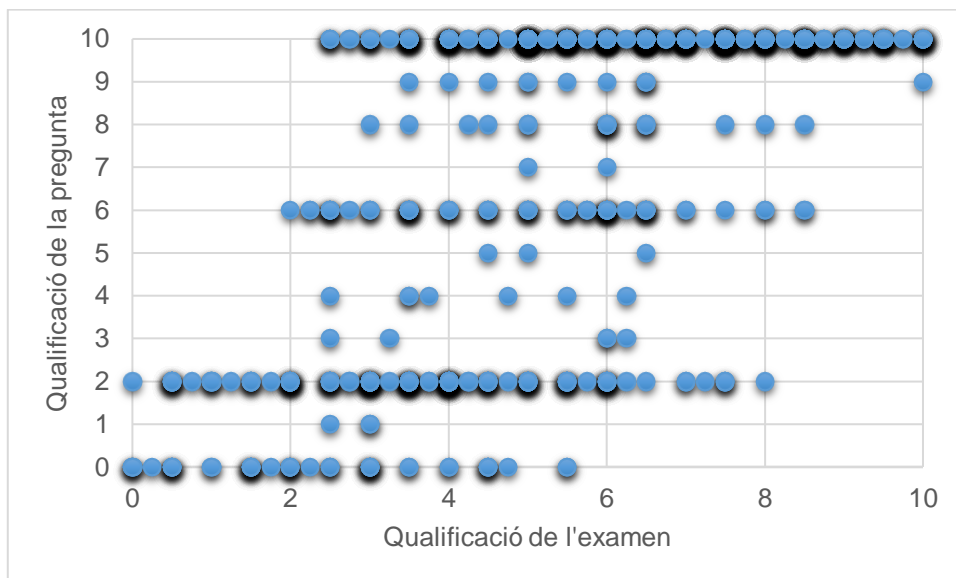


Figura 7: Relació entre la qualificació de l'examen i la nota de la BP4.

3.2.5. Errors

Amb l'anàlisi de les preguntes AP3c, AP3d, AP4, BP4b i BP4c, s'han observat una gran quantitat d'errors. Cada vegada que se n'observava un de diferent dels anteriors, es definia un nou tipus d'error i s'anava duent un recompte de les vegades que apareixia cada tipus.

En haver finalitzat la recollida d'errors, aquells que havien aparegut a més d'un examen, s'han agrupat amb altres dintre d'una mateixa categoria. Les categories s'han creat a partir de l'observació dels aspectes que tenen en comú els diferents

tipus d'errors, d'una mateixa pregunta. S'ha intentat fer de la forma més adient i objectiva possible.

A continuació es presenten les categories per a cada apartat analitzat i, per aquelles que els seus errors hagin estat més habituals, es mostrarà mitjançant la imatge d'una resposta on es comet l'error que s'ha repetit més vegades. Per veure els exemples de les altres categories es pot consultar l'Annex E.

AP3c

Aquest apartat l'han contestat un total de 494 alumnes i d'entre totes les seves respostes s'han definit 38 tipus diferents d'errors (vegeu Annex D), detectats durant l'anàlisi de les respostes, que s'han distribuït en cinc categories.

- Categoria 1: errada a la fórmula.
- Categoria 2: no té en compte la dependència dels successos.
- Categoria 3: no entén el concepte de complementari.
- Categoria 4: no té clar el concepte de probabilitat.
- Categoria 5: no té clar el concepte d'intersecció.

A la següent Taula 8 es mostren: el nombre de vegades que s'ha detectat qualque error de cada categoria; una estimació del percentatge d'alumnes que han comès una errada d'aquest estil i el percentatge d'errors de la pregunta AP3c que són de cada categoria.

Categoria	1	2	3	4	5
Errors comesos	32	81	9	15	56
% d'alumnes	6	16	2	3	11
% d'errors	17	42	5	8	29

Taula 8: Categories dels errors d'AP3c.

Per tant, la categoria 2 és en diferència on s'han comès més errors, seguida de la categoria 5. Vegem els seus errors més habituals.

- Categoria 2: no té en compte la dependència dels successos

L'error d'aquesta categoria més habitual és el tipus 3 (T3) que s'ha repetit setanta-vuit vegades, és a dir un 16% dels alumnes que han contestat aquest apartat l'han comès.

T3: $P(A \cap B^c) = P(A) * P(B^c)$

$P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B') = 0.6 \cdot 0.5 \Rightarrow 0.3 = P(A \cap B')$

$P(B') = 1 - P(B) = 0.5$

Els alumnes que s'han equivocat en aquest fet, calculen la probabilitat de la intersecció com si els successos fossin independents.

- Categoria 5: no té clar el concepte d'intersecció

Els dos errors més repetits d'aquesta categoria són el tipus 10 (T10) i el tipus 14 (T14), que s'han repetit dotze (2% dels alumnes) i set vegades (1%), respectivament. Per tant, els errors no són molt comuns però en conjunt fan que més o menys un 11% dels alumnes s'hagin equivocat en el concepte tan bàsic que és la intersecció. De fet, aquest error també va ser comès per un 11% dels alumnes de tercer d'ESO que havien de calcular la intersecció de dos conjunts.

T10: $P(A \cap B^c) = P(A) + P(B^c) - P(A \cap B)$

c) $P(A \cap B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B)$

$= 0.6 + 0.5 - 0.2 = 0.9$

Es calcula la probabilitat de la intersecció de dos successos fent un procediment similar a la probabilitat de la unió de dos successos compatibles.

T14: $P(A \cap B^c) = P(A) - P(B)$

$P(A \cap B^c) = P(A) - P(B) = 0.2$

En la resposta es veu com l'alumne entén el concepte de complementari, ja que fa un dibuix representatiu. Però no sap fer la intersecció dels successos.

AP3d

Aquest apartat l'han contestat un total de 512 alumnes i d'entre totes les seves respostes s'han definit 18 tipus diferents d'errors (vegeu Annex D), detectats durant l'anàlisi de les respostes, que s'han distribuït en quatre categories.

- Categoria 1: no té clar la Llei de Morgan.
- Categoria 2: no sap calcular la probabilitat d'una unió de successos compatibles.
- Categoria 3: no té clar el concepte de probabilitat.
- Categoria 4: no sap calcular la probabilitat d'una intersecció de successos dependents.

A la següent Taula 9 es mostra el pes de cada categoria.

Categoria	1	2	3	4
Errors comesos	107	53	7	28
% d'alumnes	21	10	1	5
% d'errors	55	27	4	14

Taula 9: Categories dels errors d'AP3d.

Així, els errors de les dues primeres categories són els que s'han repetit més. Vegem un exemple de l'error més habitual de cada una d'elles.

- Categoria 1: no té clar la Llei de Morgan

L'error d'aquesta categoria més habitual és el tipus 8 (T8) que s'ha repetit setanta-sis vegades. Per tant, un 15% dels alumnes que han contestat la pregunta han comès aquest error.

$$T8: P(A^C \cup B^C) = 1 - P(A \cup B)$$

$$P(A' \cup B') = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.9 = 0.1$$

L'alumne dona per vàlida la igualtat $A^c \cup B^c = (A \cup B)^c$ quan hauria de ser $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$. Aleshores, s'està aplicant de forma errònia la Llei de Morgan.

- Categoria 2: no sap calcular la probabilitat d'una unió de successos compatibles

L'error d'aquesta categoria més habitual és el tipus 10 (T10) que s'ha repetit vint-i-una vegades (4% dels alumnes).

T10: $P(A^c \cup B^c) = P(A^c) + P(B^c)$

$P(A^c \cup B^c) = P(A^c) + P(B^c) = 0.4 + 0.2 = 0.6$

Es calcula la probabilitat de la unió com si fossin dos successos incompatibles.

AP4

Aquest apartat l'han contestat un total de 407 alumnes i d'entre totes les seves respostes s'han definit 24 tipus diferents d'errors (vegeu Annex D), detectats durant l'anàlisi de les respostes, que s'han distribuït en cinc categories.

- Categoria 1: utilitza la notació i l'interval per a l'estimació de la mitjana en lloc de la proporció.
- Categoria 2: no té clar el concepte d'error.
- Categoria 3: no té clar què és p .
- Categoria 4: no té clar què és α .
- Categoria 5: descuit de l'alumne.

A la següent Taula 10 es mostra el pes de cada categoria.

Categoria	1	2	3	4	5
Errors comesos	200	17	25	19	42
% d'alumnes	49	4	6	5	10
% d'errors	63	5	8	6	13

Taula 10: Categories dels errors de l'AP4.

També hi ha hagut un altre error que no s'ha pogut classificar en cap d'aquestes categories: el tipus 14. Aquest error s'ha repetit catorze vegades (14% dels alumnes).

T14: cerquen els valors de 0,17 i 0,25 a la taula per fer càlculs.

$n = 100$
 $0.17 \rightarrow 0.5675$
 $0.25 \rightarrow 0.5987$

$\alpha = \frac{\sqrt{100}}{0.5675} = \frac{10}{0.5675} = 17.62$
 \downarrow
 0.17%

$\alpha = \frac{\sqrt{100}}{0.5987} = \frac{10}{0.5987} = 16.70$
 \downarrow
 0.16%

El que fa pensar aquest error és que els alumnes saben que han d'emprar la taula de la distribució normal, que es proporciona amb els enunciats de les preguntes de l'examen, però no entenen el que han de fer.

Però, clarament els errors més habituals són els de la Categoria 1. Vegem quins són aquests errors.

- Categoria 1: utilitza la notació i l'interval per a l'estimació de la mitjana en lloc de la proporció

Els errors d'aquesta categoria han estat molt habituals entre les respostes dels alumnes, la qual cosa fa pensar que realment no s'entén el que s'ha de fer perquè a l'enunciat s'especifica clarament que s'ha d'estimar la proporció i no la mitjana. Els tipus d'errors són: tipus 3 (T3), tipus 8 (T8) i tipus 11 (T11), que s'han repetit cent cinquanta-una (37% dels alumnes), trenta-tres (8%) i setze vegades (4%), respectivament.

T3: Utilitza l'interval de confiança per a l'estimació de la mitjana.

$n = 100$
 Proporció
 $\mu = 0.17$
 $\sigma = 0.25$

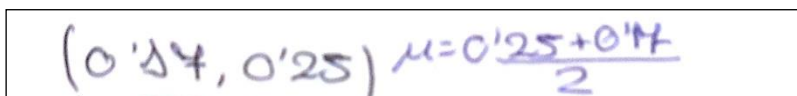
$N(\mu, \frac{\sigma}{n})$
 $(\mu - \frac{z\alpha}{2} \cdot \frac{\sigma}{n}, \mu + \frac{z\alpha}{2} \cdot \frac{\sigma}{n})$

En aquesta resposta s'observen dos errors diferents el T3 i el T8, ambdós inclosos dins aquesta categoria. Així, es pot observar com s'empra la notació per l'interval de confiança per estimar la mitjana en lloc de la proporció.

T8: Pren $\mu = 0,17$ i $\sigma = 0,25$.

Quan es comet aquest error es pot dir que l'alumne no entén què és un interval de confiança.

T11: Empra μ en lloc de p .



$$(0,14, 0,25) \quad \mu = \frac{0,25 + 0,17}{2}$$

Novament, s'utilitza la notació per a l'estimació de la mitjana.

BP4b

Aquest apartat l'han contestat un total de 593 alumnes i d'entre totes les seves respostes s'han definit 20 tipus diferents d'errors (vegeu Annex D), durant l'anàlisi de les respostes, que s'han agrupat en cinc categories.

- Categoria 1: no entén la importància de l'ordre.
- Categoria 2: falta de comprensió de l'enunciat.
- Categoria 3: no entén el concepte de reemplaçament.
- Categoria 4: descuit de l'alumne.
- Categoria 5: no entén per què fa l'arbre.

A la següent Taula 11 es mostra el pes de cada categoria.

Categoria	1	2	3	4	5
Errors comesos	18	16	61	13	58
% d'alumnes	3	3	10	2	10
% d'errors	11	9	37	8	35

Taula 11: Categories dels errors de BP4b.

En aquest apartat, els errors més comuns es troben a les categories 3 i 5. Vegem exemples de respostes amb els errors més habituals de les dites categories.

- Categoria 3: no entén el concepte de reemplaçament

Els dos errors més repetits d'aquesta categoria són el tipus 7 (T7) i el tipus 13 (T13), que s'han repetit divuit (3%) i vint-i-cinc (4%) vegades, respectivament. A les proves escrites de 3r d'ESO ja s'havien vist problemes de comprensió d'aquest concepte.

T7: Ho fa amb reemplaçament.

$$b) P(A \cap B) + P(B \cap A) = \frac{12}{30} \cdot \frac{13}{29} + \frac{13}{30} \cdot \frac{14}{29} = \frac{403}{870}$$

Aquest alumne comet molts d'errors, però un d'ells és que per calcular la probabilitat d'extreure el segon llapis ho fa emprant els llapis inicials, és a dir, amb reemplaçament.

T13: Ha escrit malament el no reemplaçament.

b) La probabilidad de que los dos sean azules es del 16.9%

$$\left(\frac{13}{30}\right) \left(\frac{11}{28}\right) = \frac{113}{840}$$

El que pareix que fa l'alumne, a més de no tornar a l'estoig el primer llapis que s'ha extret, és treure'n un altre.

- Categoria 5: no entén per què fa l'arbre

Els dos errors més repetits d'aquesta categoria són el tipus 4 (T4) i el tipus 10 (T10), que s'han repetit trenta-set (6%) i catorze (2%) vegades, respectivament.

T4: Suma en lloc de multiplicar

$$b) p(b, b) = \frac{13}{30} + \frac{12}{29}$$

Aquest error consisteix en fer el diagrama en arbre correctament, però en lloc de multiplicar les probabilitats, del camí que se segueix per les branques, se sumen.

T10: Dóna $p(B_2/B_1)$ i falta multiplicar per $p(B_1)$

La probabilidad de que los dos sigan blancos

La probabilidad de que los dos sigan blancos

En aquest cas, el diagrama en arbre també s'ha construït correctament, però a l'hora de respondre la pregunta només es dóna la probabilitat del fet que el segon sigui blau sabent que el primer també ho és.

BP4c

Aquest apartat l'han contestat un total de 580 alumnes i d'entre totes les seves respostes s'han definit 17 tipus diferents d'errors (vegeu Annex D), detectats durant l'anàlisi de les respostes, que s'han agrupat en cinc categories.

- Categoria 1: no entén la importància de l'ordre.
- Categoria 2: falta de comprensió de l'enunciat.
- Categoria 3: no entén el concepte de reemplaçament.
- Categoria 4: descuit de l'alumne.
- Categoria 5: no entén per què fa l'arbre.

A la següent Taula 12 es mostra el pes de cada categoria.

Categoria	1	2	3	4	5
Errors comesos	18	61	54	11	28
% d'alumnes	3	11	9	2	5
% d'errors	11	36	31	6	16

Taula 12: Categories dels errors de BP4c.

Aquí, tenim que la segona i la tercera categoria són les que contenen els errors més habituals de l'apartat. Vegem exemples de respostes.

- Categoria 2: falta de comprensió de l'enunciat

L'error d'aquesta categoria més habitual és el tipus 2 (T2) que s'ha repetit quaranta vegades (7%).

T2: Calcula la probabilitat condicionada i ho fa de forma incorrecta.

c) $P(A/B) = \frac{P(A) \cdot P(A|B)}{P(B)} = \frac{\frac{17}{30} \cdot \frac{17}{30}}{\frac{221}{870}} = 0,2095$

$P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap A) + P(B \cap B) = \frac{221}{870} + \frac{221}{870} + \frac{26}{145} = \frac{221}{435} + \frac{26}{145} = \frac{299}{435} = 0,687$

En aquesta ocasió, s'han comès diversos errors. El que compta per aquesta categoria és el fet de no entendre el que s'està demanant, ja que l'alumne en

qüestió pretén fer el càlcul de la probabilitat condicionada: que el segon llapis sigui vermell, sabent que el primer ha estat blau.

- Categoria 3: no entén el concepte de reemplaçament

Aquí, els dos errors més repetits són el tipus 1 (T1) i el tipus 14 (T14), que s'han repetit vint-i-dues (4%) i vint-i-sis vegades (4,5%), respectivament.

T1: Ho fa amb reemplaçament.

$$c) P(\text{blau}) \cdot P(\text{vermell I} / \text{blau I}) = \frac{13}{30} \cdot \frac{P(\text{vermell I} / \text{blau I})}{P(\text{blau I})}$$

$$= \frac{13}{30} \cdot \frac{17}{30} = 0,124100 \rightarrow \boxed{12,41\%}$$

En aquesta resposta s'ha detectat l'error de calcular la probabilitat amb reemplaçament.

T14: Ha escrit malament el no reemplaçament.

4

30

a) $P(\text{vermell}) = \frac{17}{30}$

b) $P(2B) = \left(\frac{17}{30} \cdot \frac{13}{28}\right) + \left(\frac{13}{30} \cdot \frac{11}{28}\right) = \frac{221}{840} + \frac{143}{840} = \frac{364}{840} = \frac{13}{30}$

c) $P(1B, 2V) = \left(\frac{17}{30} \cdot \frac{13}{28}\right) + \left(\frac{17}{30} \cdot \frac{15}{28}\right) = \frac{221}{840} + \frac{255}{840} = \frac{476}{840} = \frac{17}{30}$

Per aquest error es mostra la resposta de tota l'activitat BP4 perquè es pugui veure de forma més clara com es calcula incorrectament el no reemplaçament. El que pareix que fa l'alumne és, a més de no tornar a l'estoig el primer llapis que s'ha extret, treure'n un altre del mateix color. Aquest error l'han repetit molts d'alumnes. A més, en aquesta resposta de la pregunta BP4c, també s'ha comès un altre error que s'ha inclòs dins la Categoria 1.

3.2.6. Resum de les dades

La gran majoria d'errors que s'han comès han estat per falta de comprensió dels conceptes que es treballen, per tant cal incidir en ells perquè els alumnes

entenguin realment el que fan i poder evitar els errors que es produeixen per la memorització dels procediments. A més, segons el currículum, molts dels continguts s'haurien d'haver vist abans del batxillerat i s'ha pogut comprovar com alguns han aparegut a les proves escrites de tercer d'ESO. Per tant, són errors que no s'han corregit al llarg dels anys i, aquest fet, fa pensar que els docents i sobretot els alumnes no dediquen el temps suficient a analitzar quines són les dificultats que sorgeixen per superar-les en un futur.

Seria necessari reflexionar sobre la possibilitat de reduir els continguts del currículum, en aquest cas de batxillerat, per poder dedicar més temps a reforçar els aspectes que no s'han acabat d'entendre. Per exemple, si no s'han entès els conceptes més bàsics com l'error d'una estimació o la proporció mostral, com es vol que l'alumne entengui què és l'interval de confiança per estimar una proporció?

Si ens fixam, per a cada pregunta, a quines categories pertanyen els errors que han aparegut més vegades, obtenim la següent Taula 13.

AP3	AP3c	Categoria 2: no té en compte la dependència dels successos (42%) Categoria 5: no té clar el concepte d'intersecció (29%)
	AP3d	Categoria 1: no té clar la Llei de Morgan (55%) Categoria 2: no sap calcular la probabilitat d'una unió de successos compatibles (27%)
AP4		Categoria 1: utilitza la notació i l'interval per a l'estimació de la mitjana (63%)
BP4	BP4b	Categoria 3: no entén el concepte de reemplaçament (37%) Categoria 5: no entén per què fa l'arbre (35%)
	BP4c	Categoria 2: falta de comprensió de l'enunciat (36%) Categoria 3: no entén el concepte de reemplaçament (31%)

Taula 13: Les categories amb els errors més habituals de cada apartat.

3.2.7. Propostes de millora

Vegem com es podria millorar la metodologia didàctica per contribuir en la desaparició dels errors de les categories de la Taula 13.

AP3

Aquesta activitat no té cap tipus de contextualització i utilitza un sistema de representació simbòlic que, per als alumnes, pot ésser molt abstracte si prèviament no s'ha dedicat temps a la comprensió de cada un dels conceptes. Així, abans de mostrar aquests símbols, es podria començar a treballar amb la intersecció i unió de conjunts mitjançant els blocs lògics (Figura 8).

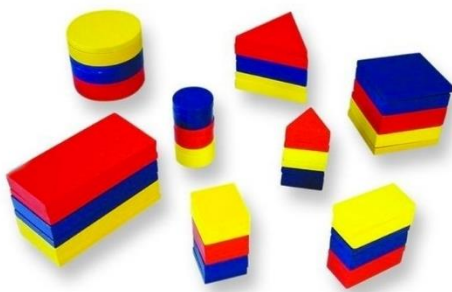


Figura 8: Els blocs lògics.

Els blocs lògics (Dienes, Golding i Bonet, 1981) són un material pedagògic que, encara que estigui pensat per aprendre matemàtiques a escala d'educació infantil o primària, permet realitzar classificacions segons quatre variables diferents: la forma (quadrat, cercle, rectangle i triangle), el color (vermell, groc i blau), la mida (gran i petit) i la gruixa (gros i fi). Aleshores, es podria demanar als alumnes que anessin col·locant en dos conjunts diferents unes quantes peses, segons un criteri que hagin triat, per després fer la intersecció d'aquests dos conjunts. Així si, per exemple, el criteri és, posar les peses blaves a un conjunt i les vermelles a l'altre podrien veure que la intersecció és buida. A partir d'aquí es podria introduir el concepte de successos independents. També, es pot treballar la unió, la compatibilitat de successos, la complementarietat, etc.

De fet, amb els blocs lògics es poden dur a terme un elevat nombre d'activitats. Al llibre *Cómo utilizar los bloques lógicos* (Dienes, 1973) es recullen 71 jocs diferents que es poden realitzar amb aquest material. Per exemple, uns dels jocs és construir una classificació de les peces en dos conjunts que tinguin intersecció i col·locar alguna pesa de forma errònia. Així els alumnes hauran d'adonar-se d'aquest fet i trobar el lloc correcte on hauria de col·locar-se.

Una vegada que s'hagin interioritzat cada un dels conceptes, treballant amb problemes reals, es pot passar a introduir la notació simbòlica. Per ajudar a comprendre la representació de conjunts es pot emprar l'aplicació *Conditional Probability Experiment* (Random Services, sense data).

AP4

Quan sorgeix l'error d'emprar l'interval de confiança per a l'estimació de la mitjana, és evident que l'alumne no entén el que està fent, ja que a l'enunciat s'especifica clarament que l'estimació que es realitza és per la proporció i no per la mitjana. Per tant, és necessari abans de fer activitats d'aquesta dificultat, que estigui clar el concepte d'interval de confiança i que es conegui la diferència entre el de la mitjana i el de la proporció.

Al llibre (National Council of Teachers of Mathematics, 2000) apareix un exemple d'activitat per aportar la intuïció necessària per entendre els intervals de confiança. L'enunciat d'aquesta activitat es presenta a continuació.

Mr. Blake es presenta com a candidat per ser alcalde d'una ciutat. Si enquestam a una mostra de 20 votants i obtenim que el 65% estan a favor seu,

- a) seria raonable esperar que el 65% de tots els votants estiguin a favor de Mr. Blake?*
- b) què ocurriria si la mostra fos de 200 votants?*
- c) i si fos de 2000 votants?*

Així, l'alumnat hauria de veure, a partir de simulacions de mostres amb diferents mides, que com més petita sigui la mostra més variació hi pot haver d'una a altra i que com més votants s'enquestin més petita serà aquesta variació. Aquest raonament també es pot treballar amb la següent activitat proposada al document de Batanero et al. (1994).

Una certa ciutat està atesa per dos hospitals. A l'hospital més gros neixen aproximadament 45 nadons cada dia i a l'hospital més petit en neixen aproximadament 15 cada dia. Com saps, aproximadament el 50 per cent de tots els recents nats són barons, però el percentatge exacte varia d'un dia per l'altre.

A vegades pot ser més que el 50 per cent, a vegades més baix. Durant un període d'un any, cada hospital va registrar els dies en què més del 60 per cent dels recents nats varen ser barons. Quin hospital creus que va registrar més d'aquests dies?

- a) L'hospital gran.*
- b) L'hospital petit.*
- c) Aproximadament igual (això és, si la diferència entre ambdós és menor del 5 per cent).*

A la pàgina web de l'Educalab (Rodríguez Morales, sense data) es poden descarregar activitats i explicacions de tota la unitat didàctica de segon de batxillerat de ciències socials, on es treballen tots els continguts d'estadística del currículum Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II. Entre aquestes activitats unes de gran interès són dos qüestionaris d'autoavaluació que l'alumne pot fer per comprovar si ha entès els conceptes d'estimació de la mitjana i d'estimació de la proporció. Són preguntes tipus test que fan a l'alumne reflexionar i, si es realitzen els dos qüestionaris, podran entendre millor la diferència entre una estimació i l'altra.

Les preguntes tipus test no són molt habituals en matemàtiques però són unes activitats que poden fer veure, tant a l'alumne com al professor, si s'entén el que es fa. Per exemple, a les proves PISA sí que s'empren algunes preguntes d'aquest estil per comprovar si l'alumne ha adquirit la competència matemàtica.

BP4

Per superar els errors que han sorgit en aquesta pregunta es podrien fer més activitats d'aquest estil, és a dir, que es treballi dins qualche context real i que, a més, es pugui emprar material manipulable per poder entendre millor tot el procés. Ja s'ha vist a la secció 3.1.4 com aquest fet es pot aconseguir emprant materials senzills, per exemple daus i xinxetes (Aubanell, 2012; 2013a).

Una altra activitat interessant de n'Anton Aubanell consisteix en la utilització d'un material que és un circuit d'obstacles que s'ha de recórrer fins a arribar a la meta, podent elegir entre dos camins (Aubanell, 2013b). Els obstacles són

experiments aleatoris basats en els resultats de diferents ruletes. Per tant, per obtenir la millor estratègia cal elegir l'opció (el camí) més probable.

3.3. Conclusions globals

A partir d'analitzar les respostes de les proves d'estadística i de probabilitat de tercer d'ESO i de les preguntes d'aquest bloc de continguts de la PBAU, s'ha comprovat que els alumnes tendeixen a la mecanització dels procediments i a la memorització de les fórmules. En conseqüència d'aquest fet, s'ha observat una falta de comprensió dels conceptes que han dut a l'alumne a cometre errors greus. Per exemple, donar com a resultat del càlcul d'una probabilitat un valor major que 1.

Per potenciar la capacitat de l'alumne d'afrontar els problemes que sorgeixen, s'ha vist la necessitat de proposar un canvi en la metodologia del procés d'ensenyament-aprenentatge de l'Estadística i la Probabilitat. Aquest canvi ha consistit a donar més importància a la comprensió dels conceptes i no tant a la realització d'activitats que no requereixen cap tipus de raonament.

Així, a part de proposar activitats contextualitzades que puguin ajudar a l'alumnat a entendre les possibles aplicacions dels continguts, s'han aportat diferents activitats experimentals amb l'ús de material manipulable. A partir de l'experimentació es pretén que s'interioritzin els conceptes per arribar a la seva comprensió i també que s'entenguin els procediments per intentar evitar la seva memorització. A més, aquestes activitats són competencials.

A continuació, es presenta l'aplicació d'una activitat competencial, on s'utilitza material manipulable per fomentar l'experimentació, en un grup de segon de batxillerat de l'IES Binissalem.

4. Activitat experimental

Un altre dels objectius que s'ha proposat per aquest treball és posar en pràctica una de les activitats que es varen elaborar al treball de final del Grau de Matemàtiques (Ferrer Munar, 2017). Per complir amb aquest propòsit, s'ha elegit experimentar amb la màquina de Galton (Figura 9), en un grup de segon de batxillerat que cursen l'assignatura de matemàtiques II, a l'IES Binissalem. Aquest grup està format per 34 alumnes, per tant, és un grup bastant nombrós. A més, pel que s'ha pogut observar i pel que ha explicat el seu professor, en Lluís Aristondo, molts d'ells la majoria de vegades no presten atenció, perquè parlen amb els companys de diferents temes o fan feina d'altres assignatures.

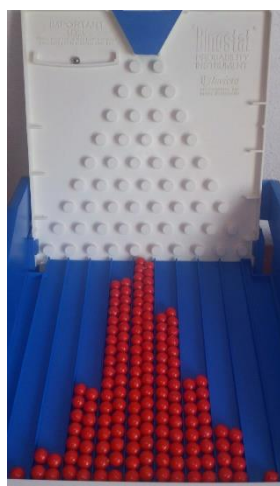


Figura 9: La Màquina de Galton amb 150 llançaments.

Per tal de poder complir amb la programació, només es va poder disposar d'una sessió. Així doncs, la intervenció es va realitzar el dilluns 7 de maig de 2018 durant la seva hora de matemàtiques, de 13:10 a 14:05. Abans d'aquesta sessió es tingueren dues reunions amb el professor per organitzar-la i saber quins coneixements de probabilitat tenen els alumnes. Els continguts que han treballat prèviament durant aquest curs són alguns del currículum de Matemàtiques II (Conselleria d'Educació i Universitat, 2015d) i s'enumeren a continuació.

- Esdeveniments i assignació de probabilitats (regla de Laplace, freqüència relativa i diagrama en arbre).
- Axiomàtica de Kolmogorov.
- Teoremes de probabilitat i el Teorema de Bayes.

- Aplicació de la combinatòria al càlcul de probabilitats.
- Variables aleatòries discretes.

D'aquesta forma, el següent pas és aprendre què és una distribució i, més en concret, la distribució binomial. Aleshores, es va acordar que a partir de la màquina de Galton es presentarien aquests nous conceptes.

4.1. Objectius de l'activitat

Després de les reunions amb el professor, es fixaren els objectius que es pretenien complir amb aquesta activitat. Així, els objectius d'aquesta sessió són que els alumnes siguin capaços de

- comprendre el concepte de distribució
- reconèixer i entendre la distribució binomial
- deduir la probabilitat de la distribució binomial
- calcular les probabilitats de successos d'un esdeveniment aleatori que segueix una distribució binomial

Per tal de comprovar el compliment d'aquests objectius, es va elaborar una fitxa (vegeu Annex F) perquè cada un dels alumnes la contestés i entregués al final de la classe.

4.2. Continguts i competències

D'entre tots els continguts d'estadística i probabilitat que es poden treballar amb la màquina de Galton, s'ha centrat en els següents:

- obtenció, representació (en taules) i interpretació de dades estadístiques
- distribució de probabilitat
- distribució binomial: caracterització i identificació del model
- deducció i càlcul de la probabilitat dels successos d'un experiment que segueix una distribució binomial
- nombres combinatoris i el triangle de Pascal o de Tartaglia

Per tant, a part de treballar continguts clau del bloc d'estadística i probabilitat, segons la Figura 1, també se'n treballen dels blocs de nombres i àlgebra

(obtenció, representació en taules i interpretació de dades estadístiques) i de geometria (taules). Aleshores, amb aquesta activitat es produeix una connexió entre diferents blocs de coneixement de matemàtiques.

Com s'ha dit, es treballen continguts clau de les competències. Així, aquesta activitat és competencial i contribueix als processos, i per tant en algunes de les seves competències (secció 2.1.2), en els següents aspectes:

- Resolució de problemes.
 - Competència 1. S'elaboren taules per entendre millor què passa quan es llancen moltes bolles per la màquina de Galton.
 - Competència 2. Es fomenta la intuïció i es demana que es comprovi si és raonable segons el resultat de l'experimentació.

- Raonament i prova.
 - Competència 5. Es fan conjetures sobre què passarà quan es llancin les bolles. Després del llançament, s'ha de validar o rebutjar la conjectura.
 - Competència 6. A partir del material (la màquina de Galton) es reflexiona i s'empra el raonament matemàtic per investigar el comportament de les bolles.

- Connexions.
 - Competència 7. Com s'ha comentat anteriorment, es relacionen diferents blocs de continguts.
 - Competència 8. Es representa la situació del llançament de les bolles en taules.

- Comunicació i representació.
 - Competència 9. Els diferents resultats es representen en taules de valors.
 - Competència 10. Es demana que s'escriuin raonadament les respostes a diverses preguntes, usant la terminologia matemàtica i taules.

- Competència 11. S'empra la comunicació i el treball en equip per realitzar l'experiment, contrastar resultats i compartir idees per resoldre les preguntes.
- Competència 12. S'usen les calculadores per obtenir el resultat de la probabilitat i el nombre esperat de bolles, el més exacte possible. A més, es mostra la màquina de Galton virtual, construïda en GeoGebra, per observar el llançament d'un nombre major de bolles.

4.3. Avaluació

A partir de la fitxa de l'Annex F, es pot valorar si els alumnes han adquirit els coneixements que s'han proposat. Per fer-ho, s'han avaluat les respostes dels alumnes seguint els criteris i els estàndards d'aprenentatge avaluable que s'enumeren a continuació.

1. Estimar i elaborar conjectures sobre el resultat de llançar moltes bolles per la màquina de Galton, comprovant posteriorment la seva coherència.
 - 1.1. Fa una conjectura sobre el resultat de llançar moltes bolles per la màquina de Galton i després la valida o la refuta.
2. Identificar que el llançament de bolles per la màquina de Galton segueix una distribució binomial, calculant els seus paràmetres i determinant la probabilitat del fet que una bolla caigui a un calaix o a un altre.
 - 2.1. Identifica que l'experiment de la màquina de Galton pot modelitzar-se mitjançant la distribució binomial, obtenint els seus paràmetres.
 - 2.2. Calcula correctament la probabilitat del fet que una bolla caigui a un determinat calaix, emprant la calculadora.
 - 2.3. Compren el concepte de probabilitat i l'utilitza per calcular el nombre de bolles que s'esperen a cada calaix (freqüència absoluta teòrica), quan se'n llancen un cert nombre.

Aquests criteris i estàndards d'aprenentatge avaluable estan basats en alguns del currículum de Matemàtiques II (Conselleria d'Educació i Universitat, 2015d), tant del bloc de processos, mètodes i actituds en matemàtiques com el d'estadística i probabilitat.

4.3.1. Qualificacions i resultats

Emprant els criteris i estàndards anteriors, s'han qualificat les fitxes dels alumnes. La fitxa consta de set preguntes i cada pregunta ha tingut el mateix pes sobre la nota final. Aleshores, s'ha puntuat cada pregunta amb un nombre entre 0 i 1 i després s'han sumat i el resultat s'ha multiplicat per 10 i dividit entre 7, per donar una nota entre 0 i 10. La puntuació de cada pregunta s'ha calculat seguint els següents criteris.

- Pregunta 1. Si fa una conjectura i respon a la pregunta *per què?*, 1 punt. En canvi, si no explica el perquè 0,5 punts.
- Pregunta 2. Per cada valor que no estigui escrit o sigui incorrecte es resta 0,1 punts a la puntuació total.
- Pregunta 3. Si només explica les semblances o les diferències o no escriu un raonament correcte per una d'elles, 0,5 punts. Si raona correctament les semblances i les diferències, 1 punt.
- Pregunta 4. Si la resposta és sí o no, sense cap justificació, 0,5 punts. Amb justificació coherent 1 punt. Si la justificació no acaba de rebutjar o aprovar la conjectura, 0,8 o 0,9 punts.
- Pregunta 5. Si s'identifica que és una distribució binomial i que $n=9$ i $p=0,5$, 1 punt. Si només es diu que és una distribució binomial 0,8 punts.
- Pregunta 6 i 7. Per cada valor que no estigui escrit o sigui incorrecte es resta 0,1 punts a la puntuació total.

En qualsevol altre cas han estat 0 punts.

Dels 34 alumnes que hi ha al grup, 31 d'ells han entregat la fitxa i les qualificacions finals i les de cada pregunta es troben a la taula de l'Annex G, on NC indica que no s'ha contestat. Es pot observar que l'activitat ha anat força bé, ja que la nota mitjana és d'aproximadament 9 punts.

Segons aquestes puntuacions sembla que s'ha complert amb els objectius de l'activitat. De fet, tots els alumnes que han contestat la primera i la tercera pregunta han tingut la màxima puntuació. A la segona pregunta només dos alumnes han escrit un nombre incorrecte, segurament l'han copiat malament de

la pissarra. A la quarta, cinc alumnes no han justificat per què el seu raonament previ al llançament era correcte i altres cinc no han rebutjat o aprovat del tot la seva conjectura, per deficiències en el seu raonament. Per exemple, un error comú en tres alumnes ha estat afirmar que hi ha més bolles als calaixos d'enmig perquè la màquina té forma triangular o de "piràmide". Però per fer-los veure que no és del tot cert se'ls ha demanat, com es pot veure a la Figura 10, la següent pregunta: què passaria si la màquina amb forma triangular estigués un poc inclinada cap a un cert costat?

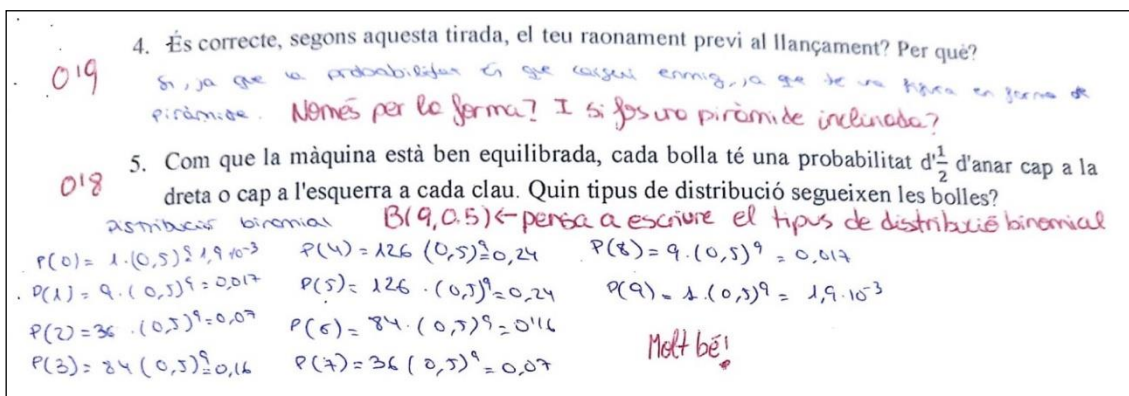


Figura 10: Errors comuns en les preguntes 4 i 5.

Pel que fa a la pregunta 5, l'error que han tingut els vuit alumnes que no han aconseguit la puntuació màxima ha estat no especificar el tipus de distribució binomial, com es pot observar a la Figura 10. Per altra banda, l'error que s'ha comès a la pregunta 6 ha estat no donar la probabilitat que una bolla caigui en el calaix 9. També, en alguna ocasió no s'ha donat la probabilitat dels calaixos 0 i 9. Aquests errors poden ser deguts al fet que la probabilitat és gairebé 0 i no pensen que les probabilitats hauran de sumar 1. Així, l'error de no donar la probabilitat de l'esdeveniment que una bolla arribi a qualche calaix dels extrems, s'ha traslladat fins a la pregunta 7. A més, alguns alumnes no han acabat la pregunta i tres han donat els valors de la Figura 11, que són poc coherents, ja que es demanava el nombre de bolles que s'esperava a cada calaix i el valor més alt és 1,23, quan se suposa que es llancen 165 bolles.

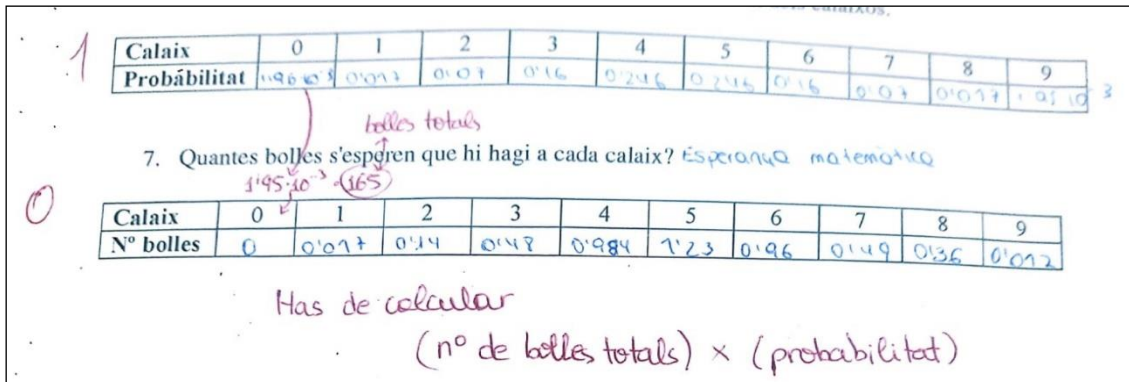


Figura 11: error en la pregunta 8.

4.4. Metodologia didàctica i recursos

Al començament de la sessió s'ha presentat la màquina de Galton, fet que ha captat l'atenció de tot l'alumnat, i seguidament s'ha repartit la fitxa perquè anessin responnent la primera pregunta. Se'ls ha motivat a reflectir al paper la seva pròpia intuïció del que passarà quan es llacin moltes bolles, sense haver vist cap llançament previ. A continuació, s'ha anat donant pas a les següents preguntes, passant les diapositives d'una presentació que s'ha preparat amb la intenció de guiar la feina de l'alumne i controlar la temporalització de cada part.

Per contestar la segona pregunta, s'ha dividit la classe en dos grups perquè experimentessin amb una màquina de Galton i fessin els llançaments. Els grups han estat nombrosos però han sabut treballar bastant bé en equip, ja que s'han dividit les feines de llançar les bolles i d'anar comptant quantes n'hi havia a cada calaix. Tot seguit, s'han escrit a la pissarra els resultats dels dos grups per poder realitzar la comparació a la següent pregunta.

En l'únic moment que s'ha intervingut en tota la sessió ha estat per explicar què és una distribució i la distribució binomial, a partir de l'exemple de llançar una moneda. Tot i això, se'ls ha anat fent preguntes perquè arribessin ells a la solució i també perquè deduïssin la funció de probabilitat de la distribució binomial, trobant entre tots la probabilitat del fet que una bolla arribi al calaix 0, després al calaix 1 i posteriorment veure la relació dels camins amb el Triangle de Pascal. Una vegada calculades les probabilitats teòriques, s'ha mostrat la màquina de Galton virtual, on s'ha pogut veure el llançament d'un nombre major de bolles i com s'anaven aproximant les freqüències relatives a les probabilitats teòriques.

Aleshores, el material que s'ha emprat ha estat: un ordinador portàtil i un projector, per poder mostrar la presentació i la màquina de Galton virtual (<https://ggbm.at/bNXfmEMD>); les dues màquines de Galton, per realitzar l'experiment, i la calculadora per obtenir el resultat de les preguntes 7 i 8.

4.5. Valoració de l'activitat

Tant per l'actitud de l'alumnat com pels resultats de les fitxes, la sessió ha estat tot un èxit. A més, el professor ha apreciat que alguns alumnes han prestat més atenció que a les altres classes. Pot ser perquè l'activitat s'ha realitzat durant la setmana que no tenen exàmens abans dels finals, però també per la novetat de: la persona que guia la sessió, el material manipulable emprat i el fet dur a terme una metodologia més dinàmica.

Al final de la sessió, es va passar als alumnes un qüestionari (vegeu Annex H) de valoració de l'activitat. Aquest qüestionari consta de tres preguntes d'elecció entre 5 opcions, per avaluar de *molt poc* a *molt* com els ha ajudat l'activitat a entendre la distribució binomial i si han prestat més atenció que altres dies. També, conté dues preguntes de resposta curta on han d'explicar el que més i el que menys els ha agradat.

En total, 27 alumnes han entregat la valoració anònima de la sessió i els resultats de les tres primeres preguntes han estat els següents:

1. Consideres que emprar la màquina de Galton, t'ha ajudat a entendre millor el concepte de distribució binomial?

Regular: 1 alumne

Bastant: 10 alumnes

Molt: 16 alumnes

2. Consideres que veure els llançaments a la màquina de Galton virtual t'ha ajudat a entendre millor el concepte de distribució binomial?

Regular: 1 alumne

Bastant: 11 alumnes

Molt: 15 alumnes

3. Amb l'activitat d'avui has prestat més atenció que la que sols prestar?

Regular: 6 alumnes

Bastant: 8 alumnes

Molt: 13 alumnes

Es pot observar que cap alumne ha elegit l'opció *molt poc* o *poc* i que l'opció *regular* ha estat elegida per un únic alumne a la primera i a la segona pregunta. En canvi, a la tercera 6 alumnes (un 22%) han indicat que més o menys han prestat la mateixa atenció que a altres sessions, la qual cosa no és un fet negatiu si solen escoltar i participar en les altres classes. Com s'ha explicat anteriorment, aquests alumnes no solen prestar gaire atenció per estar al curs que estan, però en aquesta sessió el professor va notar un poc de diferència.

Quant a les preguntes de resposta curta, s'han obtingut diversos comentaris. A la pregunta *Què és el que més t'ha agradat?*, han contestat 25 alumnes i a vuit d'ells els ha agradat que fos una activitat pràctica. Algunes d'aquestes respostes són les que es presenten a continuació.

- *Que la classe fos més pràctica, més entretinguda, ja que així m'ha estat més fàcil entendre el concepte.*
- *Fer la classe pràctica i no tan teòrica.*
- *El fer una classe pràctica de matemàtiques, però en lloc d'amb activitats escrites, amb activitats a on aprenem jugant.*

També, el que els ha agradat més a altres vuit alumnes ha estat la màquina o realitzar el llançament de les bolles, com es pot apreciar en els següents comentaris.

- *Observar l'experiment amb la màquina.*
- *La manera de fer classe amb la pràctica dels llançaments.*
- *Poder entendre la distribució binomial de manera més fàcil amb la màquina de Galton.*
- *M'ha agradat utilitzar material per entendre el concepte.*
- *Fer una activitat de manera que vegem realment l'experiment.*

Com es pot veure, l'ús de material manipulable facilita el procés d'aprenentatge de nous coneixements i porta a una major comprensió dels conceptes. A més, quatre alumnes han donat importància al fet que la classe fos interactiva i dinàmica, així com la forma en què s'han vist els conceptes.

- *La nova manera d'aprendre el concepte.*
- *La manera en la qual ha explicat els conceptes i el dinamisme.*
- *Fer coses interactives.*
- *El dinamisme, l'ús d'un joc.*

Finalment, un alumne ha indicat que no li ha agradat ni desagradat res en concret, un altre que li ha agradat tot i dos han indicat que el que més els ha agradat és

- *quan hem determinat que la màquina de Galton segueix els patrons del triangle de Tartaglia*
- *que no havia entès gens la distribució a classe i m'he adonat del que s'ha de fer.*

En canvi, a la pregunta *Què és el que menys t'ha agradat?*, només han contestat 16 alumnes i nou d'ells (56,25%) han contestat que no els hi ha desagradat res. Per tant, en general és una activitat que ha estat del gust dels alumnes. A més, l'aspecte que menys li ha agradat a un altre alumne ha estat *que sols hagi passat un cop aquesta experiència.*

Quatre alumnes han indicat que el que no els hi ha agradat ha estat calcular les probabilitats, ja que els hi ha costat un poc. Un altre ha indicat directament que no li ha agradat el fet d'escriure i, per últim, un ha explicat que no li ha agradat *el poc temps que ha durat l'experiment.*

Aleshores, amb aquests comentaris es pot veure que, encara que alguns aspectes els hagin costat més, com el càlcul de les probabilitats, els alumnes en general han entès millor el concepte de distribució i els hi ha agradat aprendre la distribució binomial. Com s'ha vist durant el màster, és molt important com es mostra per primera vegada un nou contingut i aquesta activitat sembla que ha anat molt bé per presentar la distribució binomial.

4.6. Proposta de millora

Evidentment, la màquina de Galton és un instrument que permet treballar una gran quantitat de continguts d'estadística i de probabilitat, a més de connectar amb altres blocs. Però, per realitzar tota la proposta del Treball de Final de Grau (Ferrer Munar, 2017) és necessari disposar d'una sessió i mitja o dues, i en aquest cas no ha estat possible. Així i tot, la sessió ha funcionat prou bé i els resultats dels alumnes són satisfactoris.

Els aspectes que es podrien canviar de la sessió serien: emprar més màquines de Galton i fer la mitjana aritmètica de tots els resultats de la pregunta 2, d'aquesta forma s'aproximarien més a les freqüències absolutes teòriques de la pregunta 7; si els alumnes coneguessin la distribució normal, es podria realitzar la comprovació que fent molt de llançaments la distribució binomial es va aproximant a la normal, emprant la màquina de Galton virtual; i mostrar la distribució binomial amb una probabilitat diferent de 0,5 amb la màquina de Galton virtual (<https://ggbm.at/qNfZTqPZ>), així potser s'evitaria l'error de dir que hi ha més bolles als calaixos del centre perquè la màquina té forma triangular.

5. Conclusions

El marc teòric d'aquest treball s'ha basat per una banda en un marc competencial, on s'inclou una breu anàlisi del currículum de les Illes Balears; de les competències bàsiques en estadística i probabilitat proposades pel Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya i dels estàndards en anàlisi de dades i probabilitat, durant les etapes corresponents a secundària, del NCTM. I per altra banda en un estudi bibliogràfic sobre treballs d'anàlisi dels errors comesos per alumnes de secundària en estadística i probabilitat. Així, s'ha pogut observar que s'han realitzat molt poques investigacions d'aquest tipus i que la majoria d'elles són estudis sobre els errors en les proves d'accés de qualque universitat, però cap de la Universitat de les Illes Balears.

A partir del marc teòric, s'ha pogut realitzar un estudi dels errors més habituals durant l'aprenentatge de continguts d'estadística i de probabilitat, amb les dades obtingudes de 161 proves escrites de tercer d'ESO de l'IES Binissalem i de 1192 exàmens de l'assignatura Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II de la prova de batxillerat per a l'accés a la UIB, del curs 2017-2018 i 2016-2017, respectivament.

De les dades obtingudes s'han observat una gran quantitat d'errors molt comuns entre els alumnes. Aquests errors han estat causats principalment pel fet de memoritzar els procediments i les fórmules, sense entendre el que s'està fent. Apareix una falta de comprensió en conceptes com: la intersecció de dos conjunts, el reemplaçament i la dependència de successos. També, s'ha vist com molts d'alumnes de segon de batxillerat no entenen el concepte d'interval de confiança, ja que d'una pregunta de les PBAU on es treballava amb aquest concepte només un 3% dels alumnes l'han realitzat correctament. De fet, la nota mitjana de les puntuacions de tots els alumnes en aquesta pregunta és d'1,4 punts sobre 10. Així doncs, s'ha vist la necessitat de proposar activitats amb les quals es pugui donar més pes a la comprensió dels conceptes, per poder afavorir a la desaparició d'aquests errors.

A més, moltes de les dificultats es repeteixen a tercer d'ESO i a segon de batxillerat. Per exemple, en ambdós cursos hi ha hagut un 11% dels alumnes

que han tingut problemes a l'hora de calcular la intersecció de dos conjunts. Per tant, pareix que s'hauria de donar més importància i prendre una major atenció als errors, que sorgeixen durant l'aprenentatge de l'estadística i la probabilitat, per analitzar les seves causes amb la finalitat de trobar possibles solucions. Així, en aquest treball, s'han aportat recomanacions que puguin ajudar a l'alumne a entendre millor els conceptes i interioritzar-los per posteriorment poder afrontar problemes més complexos. Aquestes propostes han consistit en activitats competencials i experimentals i en l'ús de material manipulable i d'eines tecnològiques.

Per acabar de complir amb els objectius del treball, s'ha realitzat a un grup de segon de batxillerat de ciències de l'IES Binissalem una activitat competencial i experimental, fent ús de material manipulable i del GeoGebra. L'activitat ha consistit a estudiar la màquina de Galton per treballar la intuïció, l'estimació, el raonament, el càlcul de probabilitats i aprendre el concepte de distribució binomial. També, s'ha connectat amb continguts dels blocs de nombres i àlgebra i de geometria.

Per poder valorar aquesta activitat s'ha entregat una fitxa amb set preguntes i de mitjana s'ha obtingut un 9, per tant es pot dir que els alumnes han entès força bé els continguts treballats. A més, s'ha entregat un qüestionari per valorar la sessió i un 56,25% han indicat que no els hi ha desagradat res. Per tant, a part de ser una activitat que ha cridat l'atenció de l'alumnat i que ha agradat a la majoria, pareix que ha afavorit a l'aprenentatge dels conceptes.

Aleshores, amb la realització d'aquest treball s'ha après a analitzar i a categoritzar els errors que poden cometre els estudiants en uns determinats continguts, per trobar-ne possibles solucions. Així, es pretén seguir amb l'estudi de les causes dels errors dels alumnes de secundària que es tinguin en el futur, per intentar facilitar el procés d'aprenentatge dels diferents continguts del currículum de matemàtiques.

6. Referències bibliogràfiques

- Alsina, À. (2012). Activitats competencials per aprendre a usar les matemàtiques al cicle inicial. *GUIX 386-387*, 77-80.
- Aubanell, A. (2012). *Daus*. Recollit de ARC: <http://apliense.xtec.cat/arc/node/1350> (Recuperat dia 1/6/2018)
- Aubanell, A. (2013a). *Com cau una xinxeta?* Recollit de ARC: <http://apliense.xtec.cat/arc/node/1353> (Recuperat dia 1/6/2018)
- Aubanell, A. (2013b). *Cursa d'obstacles de probabilitat*. Recollit de ARC: <http://apliense.xtec.cat/arc/node/1351> (Recuperat dia 1/6/2018)
- Batanero, C., Godino, J. D., Vallecillos, A., Green, D. R., & Holmes, P. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 25(4), 527-547.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques Grenoble*, 4(2).
- Burgués, C., & Sarramona, J. (2017). *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic*. Recollit de Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament: <http://ensenyament.gencat.cat/web/.content/home/departament/publicacions/colleccions/competencies-basiques/eso/eso-matematic.pdf> (Recuperat dia 1/6/2018)
- Common Core. (sense data). *Estàndards comuns per a les matemàtiques*. Recollit de creamat: http://svcnpbs.xtec.cat/creamat/joomla/file/CCSSI_Math%20Standards_CA_REV.pdf (Recuperat dia 1/6/2018)
- Conselleria d'Educació i Universitat. (2015a). *Matemàtiques (ESO)*. Recollit de http://weib.caib.es/Normativa/Curriculum_IB/secundaria_lomce/matematicas_ESO.pdf (Recuperat dia 1/6/2018)
- Conselleria d'Educació i Universitat. (2015b). *Matemàtiques Orientades als Ensenyaments Acadèmics (ESO)*. Recollit de http://weib.caib.es/Normativa/Curriculum_IB/secundaria_lomce/mates_ens-academics.pdf (Recuperat dia 1/6/2018)

- Conselleria d'Educació i Universitat. (2015c). *Matemàtiques Orientades als Ensenyaments Aplicats (ESO)*. Recollit de http://weib.caib.es/Normativa/Curriculum_IB/secundaria_lomce/mates_ens-aplicats.pdf (Recuperat dia 1/6/2018)
- Conselleria d'Educació i Universitat. (2015d). *Matemàtiques (batxillerat)*. Recollit de http://weib.caib.es/Normativa/Curriculum_IB/batxillerat_lomce/matematiques_batx.pdf (Recuperat dia 1/6/2018)
- Conselleria d'Educació i Universitat. (2015e). *Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials (Batxillerat)*. Recollit de http://weib.caib.es/Normativa/Curriculum_IB/batxillerat_lomce/matematiques_aplicades_a_les_ciencies_socials_batx.pdf (Recuperat dia 1/6/2018)
- Dienes, Z. P. (1973). *Cómo utilizar los BLOQUES LOGICOS*. Barcelona: Teide.
- Dienes, Z. P., Golding, E. W., & Bonet, M. D. (1981). *Los primeros pasos en matemáticas: lógica y juegos lógicos*. Teide.
- Espinel, M. C., Ramos, R. M., & Ramos, C. E. (2007). Algunas alternativas para la mejora de la enseñanza de la inferencia estadística en secundaria. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 67, 15-23.
- Ferrer Munar, P. (2017). *L'ensenyament i l'aprenentatge de l'estadística i la probabilitat a l'educació secundària: estat actual i proposta d'activitats*. Palma: Escola Politècnica Superior. Universitat de les Illes Balears. Enllaç: <https://tinyurl.com/TFG-FerrerMunar>
- Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for research in mathematics Education*, 3-14.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Estándares para la etapa 9-12. Análisis de datos y Probabilidad. A S. A. THALES, *Principios y Estándares para la Educación Matemática* (p. 328-338).
- Nortes Checa, A., & Nortes Martínez-Artero, R. (2010). Resolución de problemas de matemáticas en las pruebas de acceso a la universidad. Errores significativos. *Educatio Siglo XXI*, 28(1), 317-341. Recollit

- de: <http://revistas.um.es/educatio/article/view/109851/104521> (Recuperat dia 1/6/2018)
- Pons Fiol, M. d. (2016). *Un estudi sobre l'error a classe de matemàtiques. Memòria del Treball de Final de Màster*. Màster Universitari en Formació del Professorat. Universitat de les Illes Balears.
- Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in mathematics Education*, 163-172.
- Ramos Domínguez, C. E., Espinel Febles, M. C., & Ramos Domínguez, R. M. (2009). Identificación de los errores en los contrastes de hipótesis de los alumnos de Bachillerato. *Suma* 61, 35-44.
- Random Services. (sense data). *Conditional Probability Experiment*. Recollit de <http://www.randomservices.org/random/apps/ConditionalProbabilityExperiment.html> (Recuperat dia 1/6/2018)
- Rodríguez Morales, J. M. (sense data). *Inferencia estadística*. Recollit de Educablab: <http://educablab.es/recursos/historico/ficha?recurso=248> (Recuperat dia 1/6/2018)
- Sanmartí, N. (2010). Avaluar per aprendre. *L'avaluació per millorar els aprenentatges de l'alumnat en el marc del currículum per competències*. Generalitat de Catalunya. Departament d'Educació. Direcció General de l'Educació Bàsica i el Batxillerat.
- Universitat de les Illes Balears. (2017a). *Model 2*. Recollit de Proves d'accés a la Universitat. Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II: http://estudis.uib.cat/digitalAssets/447/447701_mcsb_2017_mod2_cat_fin.pdf (Recuperat dia 1/6/2018)
- Universitat de les Illes Balears. (2017b). *Model 2. Solucions*. Recollit de Proves d'accés a la Universitat. Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II: http://estudis.uib.cat/digitalAssets/447/447700_mcsb_2017_mod2_sol_fin.pdf (Recuperat dia 1/6/2018)

7. Annexos

A. Estàndards del NCTM en l'etapa de 3r d'ESO a 2n de batxillerat

Formular preguntes que puguin abordar-se amb dades i recollir, organitzar i presentar dades rellevants per respondre-les	<ul style="list-style-type: none">• Comprendre les diferències entre diverses classes d'estudis estadístics, i quins tipus d'inferències es poden extreure raonablement de cada un;• Conèixer les característiques d'estudis ben dissenyats, incloent-hi el paper que exerceix l'aleatori en enquestes i experiments;• Comprendre el significat de les dades quantitatives i qualitatives, de les dades unidimensionals i bidimensionals, i del terme variable• Comprendre els histogrames, els diagrames de caixa i els níguls de punts, i emprar-los per representar dades;• Efectuar càlculs estadístics bàsics i comprendre la diferència entre un estadístic i un paràmetre.
Seleccionar i utilitzar mètodes estadístics apropiats per analitzar dades	<ul style="list-style-type: none">• Respecte a les dades unidimensionals, ser capaços de representar gràficament la distribució, descriure la seva forma i seleccionar i elaborar un resum estadístic;• En relació amb les dades bidimensionals, ser capaços de representar-los mitjançant un nígul de punt, de descriure la seva forma, i de determinar els coeficients de regressió, les equacions de regressió i els coeficients de correlació, emprant eines tecnològiques;• Representar i discutir dades bidimensionals, quan al menys una variable és qualitativa;• Reconèixer com les transformacions lineals de dades unidimensionals afecten la forma, la centralització i la dispersió;• Identificar tendències en dades bidimensionals, i trobar funcions que les modelitzin, o les transformin perquè puguin modelitzar-se.
Desenvolupar i avaluar inferències i prediccions basades en dades	<ul style="list-style-type: none">• Utilitzar simulacions per explorar la variabilitat de mostres estadístiques d'una població coneguda, i per construir distribucions mostrals;• Comprendre com les mostres estadístiques reflecteixen els valors dels paràmetres de la població, i emprar les distribucions mostrals com base per inferències informals;• Avaluar informes basats en dades, examinant el disseny de l'estudi, l'apropiat de l'anàlisi de les dades i la validesa de les

	<p>conclusions;</p> <ul style="list-style-type: none"> • Comprendre com s'utilitzen tècniques estadístiques bàsiques en els llocs de treball, per controlar característiques del procés de producció.
<p>Comprendre i aplicar conceptes bàsics de probabilitat</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Comprendre els conceptes d'espai mostral i distribució de probabilitat, i construir espais mostrals i distribucions en casos senzills; • Utilitzar simulacions per construir distribucions de probabilitat empíriques; • Calcular i interpretar el valor esperat de variables aleatòries en casos senzills; • Comprendre els conceptes de probabilitat condicionada i successos independents; • Comprendre com es calcula la probabilitat d'un succés compost.

B. Preguntes de les proves escrites de probabilitat a tercer d'ESO

Primera prova escrita de probabilitat

La primera pregunta no és del bloc de continguts d'estadística i probabilitat.

Pregunta 2:

Classifica els experiments següents en aleatoris o deterministes.

- a) *D'una bossa on hi ha 3 bolles vermelles i 2 de blaves exteure'n una i apuntar de quin color surt.*
- b) *Pesar un litre d'oli d'oliva.*
- c) *Exteure una carta d'una baralla espanyola i veure si és un as.*
- d) *Predir el resultat d'un partit de tennis abans que es jugui.*
- e) *Mesurar l'alçada d'un edifici.*

Pregunta 3:

Tenim els següents conjunts:

$$E=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,12\}$$

$$A=\{\text{nombres parells}\}$$

$$B=\{\text{nombres estrictament majors que 6}\}$$

$$C=\{4,5,6,7,8,9\}$$

Considerant que E representa un espai mostral on els esdeveniments són equiprobables, calcula els següents conjunts i la seva probabilitat.

- a) $A \cup B =$
 $p(A \cup B) =$
- b) $A \cap B =$
 $p(A \cap B) =$
- c) $A^c =$
 $p(A^c) =$
- d) $(A \cap B)^c =$
 $p((A \cap B)^c) =$

Pregunta 4:

Un jugador de bàsquet té un promig d'encertar tirs lliures del 82%. Si tira tres vegades seguides, calcula les següents probabilitats:

- a) *Que les encerti totes.*

- b) Que encerti dues vegades.
- c) Que falli almenys una vegada.
- d) Que falli la primera tirada.

Pregunta 5:

A una capsa hi tenim tres bolles negres, dues blanques i cinc verdes. Treim una bolla a l'atzar. Si és negra, la tornam a ficar dins la capsa, si és d'un altre color no. I després treim una segona bolla.

- a) Fes un esquema d'arbre per mostrar els diferents resultats possibles.
- b) Calcula les següents probabilitats:
 - $p(1a \text{ bolla negra})$
 - $p(1a \text{ verda i } 2a \text{ blanca})$
 - $p(\text{dues bolles de diferent color})$

Segona prova escrita de probabilitat.

La primera pregunta no és del bloc de continguts d'estadística i probabilitat.

Pregunta 2:

Hem llançat una xinxeta diverses vegades i hem mirat quants de pics cau punta per amunt

Nº Tirades	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
Pics	7	14	19	23	30	34	40	48	52	58	65	70	76

Amb aquestes dades, estima la probabilitat que la xinxeta caigui punta per amunt i que caigui de costat.

Pregunta 3:

Calcula les següents probabilitats:

- a) Que surti parell en llançar un dau (cúbic).
- b) Treure una carta menor que 6 d'una baralla espanyola (40 cartes).
- c) Treure una bolla blava d'una bossa que en conté 6 de vermelles, 4 de blaves i 8 de verdes.
- d) Nàixer un dia del mes de gener.

Pregunta 4:

Considereu l'experiment, llançar una moneda 3 vegades. Calculeu les probabilitats de

- a) No obtenir cap cara*
- b) Obtenir alguna cara*
- c) Obtenir 2 cares*

Pregunta 5:

Llançam dos daus i ens fixam en les puntuacions de cadascun d'ells. Calcula:

- a) La probabilitat de treure un 5 en cadascun dels dos daus.*
- b) La probabilitat que la suma de les puntuacions sigui igual a 7.*

Pregunta 6:

Tenim un calaix que conté 14 calcetins blancs i 6 calcetins negres tots ells separats. Agafam sense mirar dos calcetins a l'atzar (sense reemplaçament).

Quina és la probabilitat que els dos siguin blancs? I la probabilitat que siguin d'igual color?

C. Treball en grups cooperatius d'estadística

A continuació es mostra l'enunciat del treball d'estadística que han realitzat uns alumnes de tercer d'ESO de l'IES Binissalem.

Matemàtiques 3r d'ESO

IES Binissalem

Projecte d'Estadística

Integrants del grup:

1. Elegir un cas d'estudi per cada tipus de variable estadística diferent: Qualitativa, Quantitativa discreta i Quantitativa contínua. Aquí teniu algun suggeriment per si no se us n'ocorre cap:

- Sondeig sobre una votació: A Favor, En Contra, NS/NC en la teva població
- Nombre de membres de la unitat familiar
- Nombre de cotxes per família
- Estudi de l'índex de massa corporal $IMC = \text{Pes}/\text{altura}^2$ de la teva classe
- Estudi del grau de miòpia/hipermetròpia dels estudiants del pati
- etc.

No és obligatori utilitzar aquests casos. De fet, es valorarà l'originalitat i rellevància dels temes seleccionats.

2. Aplicar el mètode estadístic a cada cas d'estudi. Els apartats són:

1. Prendre una mostra de 15 individus com a mínim
2. Fer el treball de camp per obtenir les dades (*fora de temps de classe*).
3. Fer un recompte de les dades. Construir una taula de freqüències.
4. Representar un diagrama adequat per les dades.
5. Si és possible, calcular la moda, mitjana i desviació típica de la variable.
6. Escriure una conclusió de l'estudi.

Recordau que el treball ha de contenir els 6 punts per cadascun dels casos triats.

	Qualitativa	Quantitativa discreta	Quantitativa contínua
Recompte	Taula de freqüències	Taula de freqüències	Taula de freqüències agrupades en intervals
Gràfic més adient	Diagrama de sectors	Diagrama de barres	Histograma
Paràmetres estadístics \bar{x}, σ	Existeix la moda. No existeix ni mitjanes ni desviacions	Els paràmetres es calculen directament a partir de la variable x	Els paràmetres es calculen a partir de la marca de classe de cada interval.

D. Errors en les activitats de la PBAU

A3c

$$T1: P(A \cap B^C) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$T2: P(A \cap B^C) = P(A) + P(B^C) - P(A \cup B^C)$$

$$T3: P(A \cap B^C) = P(A) * P(B^C)$$

T4: Substitueix la probabilitat a la lletra del succés.

$$T5: P(A \cap B^C) = P(A) * P(B)$$

$$T6: P(A \cap B^C) = \frac{P(A \cap B^C)}{P(B^C)}$$

$$T7: P(A \cap B^C) = P(B^C) - P(A \cap B)$$

$$T8: P(A \cap B^C) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$T9: P(A \cap B^C) = \frac{P(A \cap B)}{P(B^C)}$$

$$T10: P(A \cap B^C) = P(A) + P(B^C) - P(A \cap B)$$

$$T11: P(A \cap B^C) = P(A \cap B) - P(B)$$

$$T12: P(A \cap B^C) = P(A^C \cup B^C)$$

$$T13: P(A \cap B^C) = P(A \cap B) \text{ perquè } p(B) = p(B^C)$$

$$T14: P(A \cap B^C) = P(A) - P(B) = P(A) - P(B^C)$$

T15: Probabilitat major que 1 o negativa.

$$T16: P(A \cap B^C) = P(A) + P(A \cup B) + P(A \cap B)$$

$$T17: P(B^C) = 1 - P(A^C)$$

$$T18: P(A \cap B^C) = \frac{P(A) - P(B^C)}{P(B^C)}$$

$$T19: P(A \cap B^C) = P(A) + P((A \cup B)^C)$$

$$T20: P(A \cap B^C) = \frac{P(A \cup B^C)}{P(B^C)}$$

$$T21: P(A \cap B^C) = \frac{P(B^C)}{P(A)}$$

$$T22: P(A \cap B^C) = P(A) + P(B^C) - P(A \cup B)$$

$$T23: P(A \cap B^C) = P(A \cup B) - P(B)$$

$$T24: P(A \cap B^C) = P(A^C) + P(B^C)$$

$$T25: P(A \cap B^C) = P(A)$$

$$T26: P(A \cap B^C) = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(B^C)}$$

$$\begin{aligned}
\text{T27: } P(A \cap B^c) &= \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} \\
\text{T28: } P(A \cap B^c) &= P(A) * P(A \cap B) \\
\text{T29: } P(A \cap B^c) &= \frac{P(A \cup B)}{P(B^c)} \\
\text{T30: } P(A \cap B^c) &= P(B^c) + P(A \cap B) \\
\text{T31: } P(A \cap B^c) &= P(A) + P(A \cap B) \\
\text{T32: } P(A \cap B^c) &= 1 - P(A^c \cap B) \\
\text{T33: } P(A \cap B^c) &= \frac{P(A)}{P(B^c)} \\
\text{T34: } P(A \cap B) &= -P((A \cup B)^c) \\
\text{T35: } P(A \cap B^c) &= P(A \cup B) - P(A) \\
\text{T36: } P(A \cap B^c) &= 1 - P(B) \\
\text{T37: } P(A \cap B^c) &= P(A) * P(A \cup B) \\
\text{T38: } P(A \cap B^c) &= 1 - P(B) + P(A \cap B)
\end{aligned}$$

A3d

$$\begin{aligned}
\text{T1: En lloc de } P(A^c \cup B^c) \text{ calcula } P((A \cup B)^c) \text{ i fa } P((A \cup B)^c) &= P(A \cap B). \\
\text{T2: } P(A^c \cap B^c) &= 1 - P(A \cap B) \\
\text{T3: } P(A^c \cup B^c) &= P(A^c \cap B^c) \\
\text{T4: } P(A^c \cup B^c) &= P(A^c) * P(B^c) \\
\text{T5: } P(A^c \cup B^c) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
\text{T6: } P(A^c \cup B^c) &= P((A \cap B)^c) = 1 - P(A) + P(B) * P(A \cup B) \\
\text{T7: } P(A^c \cup B^c) &= P(A \cup B^c) \\
\text{T8: } P(A^c \cup B^c) &= 1 - P(A \cup B) \\
\text{T9: } P(A^c \cup B^c) &= P(A^c) + P(B^c) - P((A \cap B)^c) \\
\text{T10: } P(A^c \cup B^c) &= P(A^c) + P(B^c) \\
\text{T11: } P(A^c \cup B^c) &= P(A \cap B^c) \\
\text{T12: Probabilitat major que 1 o negativa.} \\
\text{T13: } P(A^c \cup B^c) &= P(A \cap B) \\
\text{T14: Intersecció de probabilitats.} \\
\text{T15: Quan calcula } P(A^c \cap B^c) \text{ ho fa com } P(A^c) * P(B^c) \\
\text{T16: } P(A^c \cup B^c) &= 1 - P((A \cap B)^c)
\end{aligned}$$

$$T17: P(A^C \cup B^C) = P(A^C) + P(B^C) - P(A \cap B)$$

$$T18: P(A^C \cup B^C) = P(A \cup B)$$

A4

T1: Calcula α com $\alpha = 1 - p$.

T2: Agafar p com 0,17

T3: Utilitza l'interval de confiança per a l'estimació de la mitjana.

T4: Error en la fórmula de l'interval.

T5: S'equivoca a l'hora d'agafar qualque dada.

T6: Calcula l'error com si fos p

T7: Anomena proporció mostral a l'error.

T8: Pren $\mu = 0,17$ i $\sigma = 0,25$

T9: Error a l'hora d'aïllar qualque incògnita.

$$T10: \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{z_{\alpha}}{2}$$

T11: Empra μ en lloc de p

$$T12: p = \text{amplitud} \times 2$$

$$T13: \text{amplitud} = 1 - \alpha$$

T14: Cerquen els valors de 0,17 i 0,25 a la taula per fer càlculs.

$$T15: \text{error} = \frac{q-p}{2}$$

$$T16: \text{error} = \frac{0,17-0,25}{2}$$

$$T17: p(z \leq \frac{z_{\alpha}}{2}) = 1 - \alpha$$

T18: El $\frac{z_{\alpha}}{2}$ el calcula trobant el valor corresponent a p a la taula.

T19: Error a l'hora de cercar a la taula.

T20: Utilitza $\frac{z_{\alpha}}{2}$ per dir quin és el percentatge.

T21: Utilitza p per dir quin és el percentatge.

$$T22: \text{error} = 0,25 - 0,17$$

T23: Pren 0,5 com el valor de p

$$T24: p = 0,17 + 0,25$$

B4b

T1: Calcula la probabilitat condicionada de forma incorrecta.

T2: No fa la multiplicació.

T3: Calcula $\frac{13}{30} \times \frac{12}{30}$ en lloc de $\frac{13}{30} \times \frac{12}{29}$

T4: Suma en lloc de multiplicar

T5: Calcula $\frac{13}{30} \times \frac{12}{29} \times \frac{1}{2}$ perquè diu que és a l'atzar

T6: Calcula $p(B_1) + p(B_1)p(B_2/B_1)$

T7: Ho fa amb reemplaçament.

T8: Calcula $0,3 \times \frac{13}{30} + 0,3 \times \frac{13}{30}$

T9: Calcula $p(V_1)p(B_2/V_1) + p(B_1)p(B_2/B_1)$

T10: Dóna $p(B_2/B_1)$ i falta multiplicar per $p(B_1)$

T11: Utilitza la fórmula de Bayes.

T12: Ha agafat $p(B_2)p(B_3/B_2)$

T13: Ha escrit malament el no reemplaçament.

T14: Calcula $\frac{17}{30} \times \frac{13}{30} + \frac{12}{29} \times \frac{17}{29}$

T15: Calcula $2 \times \frac{13}{30}$

T16: Dóna la probabilitat del fet que el primer sigui vermell.

T17: Resta en lloc de multiplicar.

T18: Ha agafat la probabilitat de l'altre color.

T19: Ho ha fet per un altre nombre de llapis.

T20: Extreu tres calcetins en lloc de dos.

B4c

T1: Ho fa amb reemplaçament.

T2: Calcula la probabilitat condicionada i ho fa de forma incorrecta.

T3: No fa la multiplicació.

T4: Calcula $p(B_1)p(B_2/B_1) + p(V_1)p(V_2/V_1)$

T5: Calcula $\frac{13}{30} \times \frac{17}{29} \times \frac{1}{2}$ perquè diu que és a l'atzar

T6: Calcula $p(V_1)p(B_2/V_1) + p(B_1)p(V_2/B_1)$

T7: Calcula $p(B_1) + p(B_1)p(V_2/B_1)$

T8: Calcula $0,3 \times \frac{13}{30}$

T9: Suma en lloc de multiplicar.

T10: Dóna $p(V_2/B_1)$ i falta multiplicar per $p(B_1)$

T11: Utilitza la fórmula de Bayes.

T12: Error a l'hora d'utilitzar qualche dada.

T13: Ha agafat $p(B_2)p(V_3/B_2)$

T14: Ha escrit malament el no reemplaçament.

T15: Calcula $p(B_1)p(V_2/B_1) + p(V_2/V_1)$

T16: Ho ha fet per un altre nombre de llapis.

T17: Extreu tres calcetins en lloc de dos.

E. Categories dels errors de la PBAU

En aquest Annex apareixen cada una de les categories d'errors, definides per a cada apartat analitzat, acompanyades d'un exemple de resposta on es comet el seu error o errors més habituals.

AP3b

- *Categoria 1: errada a la fórmula*

L'error d'aquesta categoria més habitual és el tipus 1 (T1) que s'ha repetit setze vegades.

$$T1: P(A \cap B^c) = P(B) - P(A \cap B)$$

~~$$P(A \cap B') = P(B) - P(A \cap B)$$~~
~~$$P(A \cap B') = 0,5 - 0,2$$~~
~~$$P(A \cap B') = 0,3$$~~ X

Aquest error s'ha considerat que és degut a una errada en la fórmula, ja que pareix que l'alumne s'aprèn de memòria la fórmula de la diferència de successos i l'escriu de forma incorrecta.

- *Categoria 2: no té en compte la dependència dels successos*

L'error d'aquesta categoria més habitual és el tipus 3 (T3) que s'ha repetit setanta-vuit vegades.

$$T3: P(A \cap B^c) = P(A) * P(B^c)$$

~~$$P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B') = 0,6 \cdot 0,5 \Rightarrow 0,3 = P(A \cap B')$$~~
$$P(B') = 1 - P(B) = 0,5$$

Els alumnes que s'han equivocat en aquest fet, calculen la probabilitat de la intersecció com si els successos fossin independents.

- *Categoria 3: no entén el concepte de complementari*

Els errors d'aquesta categoria no han estat molt habituals. Un error que sorprèn és el tipus 17 (T17) que han comès dos alumnes, on es pensa que els successos A i B són complementaris.

$$T17: P(B^c) = 1 - P(A^c)$$

$$P(A^c) = 0,4 \rightarrow P(B^c) = 0,6$$

- *Categoria 4: no té clar el concepte de probabilitat*

L'error d'aquesta categoria més habitual és el tipus 4 (T4) que s'ha repetit sis vegades.

T4: Substitueix la probabilitat a la lletra del succés.

$$\begin{aligned}
 & \boxed{P(A \cap \bar{B})} \cdot P(A \cap \bar{B}) = P[0,6 \cap (1 - P(B))] = P[0,6 \cap (1 - 0,5)] = P[0,6 \cap 0,5] = \\
 & = P(A \cap B) = 0,2 \\
 & \underline{P(A \cap \bar{B}) = 0,2}
 \end{aligned}$$

En aquest cas, se substitueix el succés A i el complementari de B pel valor de la seva probabilitat. Per tant, no s'entén la diferència que hi ha entre un succés i la probabilitat.

- *Categoria 5: no té clar el concepte d'intersecció*

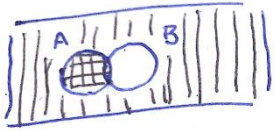
Els dos errors més repetits d'aquesta categoria són el tipus 10 (T10) i el tipus 14 (T14), que s'han repetit dotze i set vegades, respectivament.

$$T10: P(A \cap B^c) = P(A) + P(B^c) - P(A \cap B)$$

$$\begin{aligned}
 c) P(A \cap B^c) &= P(A) + P(B^c) - P(A \cap B) \\
 &= 0,6 + 0,5 - 0,2 = \boxed{0,9}
 \end{aligned}$$

Es calcula la probabilitat de la intersecció de dos successos fent un procediment similar a la probabilitat de la unió de dos successos compatibles.

$$T14: P(A \cap B^c) = P(A) - P(B)$$

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(B) = \underline{0,2}$$


En la resposta es veu com l'alumne entén el concepte de complementari, ja que fa un dibuix representatiu. Però no sap fer la intersecció dels successos.

AP3d

- *Categoria 1: no té clar la Llei de Morgan*

L'error d'aquesta categoria més habitual és el tipus 8 (T8) que s'ha repetit setanta-sis vegades.

$$T8: P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cup B)$$

$$P(A^c \cup B^c) = \cancel{P(\overline{A \cup B})} = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,9 = \boxed{0,1}$$

L'alumne dóna per vàlida la igualtat $A^c \cup B^c = (A \cup B)^c$ quan hauria de ser $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$.

- *Categoria 2: no sap calcular la probabilitat d'una unió de successos compatibles*

L'error d'aquesta categoria més habitual és el tipus 10 (T10) que s'ha repetit vint-i-una vegades.

$$T10: P(A^c \cup B^c) = P(A^c) + P(B^c)$$

$$P(A^c \cup B^c) = P(A^c) + P(B^c) = 0,4 + 0,2 = \textcircled{0,6}$$

Es calcula la probabilitat de la unió com si fossin dos successos incompatibles.

- *Categoria 3: no té clar el concepte de probabilitat*

L'error d'aquesta categoria més habitual és el tipus 12 (T12) que s'ha repetit cinc vegades.

T12: Probabilitat major que 1 o negativa.

$$P(A^c \cup B^c) = 0,4 + 0,9 + 0,2 = 1,5 //$$

Com que es calcula de forma incorrecta la probabilitat, el valor que es dóna com a resultat no pot ser una probabilitat, ja que és major que 1. Per tant, pel fet que l'alumne no s'adona d'aquesta errada es considera que realment no entén què és una probabilitat.

- *Categoria 4: no sap calcular la probabilitat d'una intersecció de successos dependents*

L'error d'aquesta categoria més habitual és el tipus 15 (T15) que s'ha repetit vint-i-sis vegades.

T15: Quan calcula $P(A^c \cap B^c)$ ho fa com $P(A^c) * P(B^c)$

$$\alpha) P(A^c \cup B^c) = P(A^c) + P(B^c) - P(A^c \cap B^c) = 0,4 + 0,5 - 0,2 = 0,7 = P(A^c \cup B^c)$$
$$P(A^c \cap B^c) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2$$

El procediment per trobar el valor de la probabilitat no és correcte i una de les passes que es fa és calcular $P(A^c \cap B^c)$. D'aquí sorgeix l'error T15, ja que els càlculs es realitzen com si fossin dos successos independents.

AP4

- *Categoria 1: utilitza la notació i l'interval per a l'estimació de la mitjana en lloc de la proporció*

Els errors d'aquesta categoria han estat molt habituals entre les respostes dels alumnes, la qual cosa fa pensar que realment no s'entén el que s'ha de fer perquè a l'enunciat s'especifica clarament que s'ha d'estimar la proporció i no la mitjana. Els tipus d'errors són: tipus 3 (T3), tipus 8 (T8) i tipus 11 (T11), que s'han repetit cent cinquanta-una, trenta-tres i setze vegades, respectivament.

T3: Utilitza l'interval de confiança per a l'estimació de la mitjana.

4. $n = 100$
 Proporcio
 $\mu = 0.17$
 $\sigma = 0.25$

$N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
 ~~$\left(\mu - \frac{z_{\alpha}}{2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \mu + \frac{z_{\alpha}}{2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$~~

En aquesta resposta s'observen dos errors diferents el T3 i el T8, ambdós inclosos dins aquesta categoria. Així, es pot observar com s'empra la notació per l'interval de confiança per estimar la mitjana en lloc de la proporció.

T8: Pren $\mu = 0,17$ i $\sigma = 0,25$.

Quan es comet aquest error es pot dir que l'alumne no entén què és un interval de confiança.

T11: Empra μ en lloc de p .

$(0.14, 0.25)$ $\mu = \frac{0.25 + 0.17}{2}$

Novament, s'utilitza la notació per a l'estimació de la mitjana.

- *Categoria 2: no té clar el concepte d'error*

L'error d'aquesta categoria més habitual és el tipus 6 (T6) que s'ha repetit sis vegades.

T6: Calcula l'error com si fos p

4. $n = 100$
 IC $(0.17, 0.25) \rightarrow \frac{0.17 + 0.25}{2} = E$

Amb aquest error es veu clar que l'alumne no entén què és l'error.

- *Categoria 3: no té clar què és p*

L'error d'aquesta categoria més habitual és el tipus 2 (T2) que s'ha repetit onze vegades.

T2: Agafar p com $0,17$

L'errada comesa fa veure que els alumnes s'aprenen de memòria la fórmula de l'interval de confiança i que no entenen el que representa.

- *Categoria 4: no té clar què és α*

L'error d'aquesta categoria més habitual és el tipus 10 (T10) que s'ha repetit vuit vegades.

$$T10: \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{z_{\alpha}}{2}$$

Amb aquesta resposta, fa pensar que l'alumne s'ha equivocat a l'hora de reproduir el procediment après de memòria.

- *Categoria 5: descuit de l'alumne*

L'error d'aquesta categoria més habitual és el tipus 4 (T4) que s'ha repetit vint-i-una vegades.

T4: Error en la fórmula de l'interval.

④ $n=100$
Int. de confiança
 $(0,17, 0,25)$
Niv. de confiança
 ?

~~$(p \pm z_{\alpha/2})$~~
 $(p \pm z_{\alpha/2})$

$(0,17, 0,25) = \left(p \pm z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{p(1-p)}}{n} \right)$

Novament, entra en joc la memorització de les fórmules i la no comprensió del que s'està fent.

BP4b

- *Categoria 1: no entén la importància de l'ordre*

L'error d'aquesta categoria més habitual és el tipus 9 (T9) que s'ha repetit 16 vegades.

T9: Calcula $p(V_1)p(B_2/V_1) + p(B_1)p(B_2/B_1)$

b). $P(2 \text{ blau})$

~~$P(B) \cdot P(V|B) + P(V) \cdot P(B|V)$~~
 $P(V) \cdot P(B|V) + P(B) \cdot P(B|B)$
 $\left(\frac{17}{30} \cdot \frac{13}{30} \right) + \left(\frac{13}{30} \cdot \frac{12}{29} \right)$
 $\frac{221}{900} + \frac{26}{145} = 0,425$

L'alumne calcula la probabilitat del fet que el primer sigui vermell i el segon blau o que el primer sigui blau i el segon sigui també blau. Per tant, es pot dir que no s'ha entès que només es demanava la probabilitat del segon d'aquests dos casos.

- *Categoria 2: falta de comprensió de l'enunciat*

L'error d'aquesta categoria més habitual és el tipus 1 (T1) que s'ha repetit 7 vegades.

T1: Calcula la probabilitat condicionada de forma incorrecta.

$$b) P(B \cap B) = \frac{13}{30} \cdot \frac{13}{30} = \frac{169}{900}$$

L'alumne pareix que no entén el que s'està demanant, ja que calcula la probabilitat del fet que el segon llapis sigui blau sabent que el primer també ho és. A més, dita probabilitat condicionada la calcula de forma incorrecta perquè obté el valor de la probabilitat de la intersecció com si els successos fossin independents.

- *Categoria 3: no entén el concepte de reemplaçament*

Els dos errors més repetits d'aquesta categoria són el tipus 7 (T7) i el tipus 13 (T13), que s'han repetit divuit i vint-i-cinc vegades, respectivament.

T7: Ho fa amb reemplaçament.

$$b) P(A \cap B) + P(B \cap B) = \frac{12}{30} \cdot \frac{13}{29} + \frac{13}{30} \cdot \frac{14}{29} = \frac{403}{870}$$

Aquest alumne comet molts d'errors, però un d'ells és que per calcular la probabilitat d'extreure el segon llapis ho fa emprant els llapis inicials, és a dir, amb reemplaçament.

T13: Ha escrit malament el no reemplaçament.

b) La probabilidad de que los dos sean azules es del 16.9%

$$\left(\frac{13}{30}\right) \left(\frac{11}{28}\right) = \frac{143}{840}$$

El que pareix que fa l'alumne, a més de no tornar a l'estoig el primer llapis que s'ha extret, és treure'n un altre.

- *Categoria 4: descuit de l'alumne*

L'error d'aquesta categoria més habitual és el tipus 18 (T18) que s'ha repetit 7 vegades.

T18: Ha agafat la probabilitat de l'altre color.

b) $P(b) \cdot P(b) = \frac{17}{30} \cdot \frac{12}{29} = 0,313$. La probabilitat de treure dos blaus sense reemplaçament és de 0,313.

En aquesta resposta es pot observar com l'alumne entén el que s'ha de fer, però que s'equivoca i agafa la probabilitat del fet que el primer sigui vermell en lloc de blau.

- *Categoria 5: no entén per què fa l'arbre*

Els dos errors més repetits d'aquesta categoria són el tipus 4 (T4) i el tipus 10 (T10), que s'han repetit trenta-set i catorze vegades, respectivament.

T4: Suma en lloc de multiplicar

b) $p(b, b) = \frac{13}{30} + \frac{12}{29}$

Aquest error consisteix a fer el diagrama en arbre correctament, però en lloc de multiplicar les probabilitats, del camí que se segueix per les branques, se sumen.

T10: Dóna $p(B_2/B_1)$ i falta multiplicar per $p(B_1)$

(B) La probabilitat de que tots dos siguin blaus $\frac{12}{29}$

En aquest cas, el diagrama en arbre també s'ha construït correctament, però a l'hora de respondre la pregunta només es dóna la probabilitat del fet que el segon sigui blau sabent que el primer també ho és.

BP4c

- *Categoria 1: no entén la importància de l'ordre*

L'error d'aquesta categoria més habitual és el tipus 6 (T6) que s'ha repetit nou vegades.

T6: Calcula $p(V_1)p(B_2/V_1) + p(B_1)p(V_2/B_1)$

$$c) P(V \cap B) + P(B \cap V) = \frac{17}{30} \cdot \frac{13}{29} + \frac{13}{30} \cdot \frac{17}{29} = \frac{221}{435}$$

L'alumne calcula la probabilitat del fet que el primer sigui vermell i el segon blau o que el primer sigui blau i el segon sigui vermell. Per tant, es pot dir que no s'ha entès que només es demanava la probabilitat del segon d'aquests dos casos.

- *Categoria 2: falta de comprensió de l'enunciat*

L'error d'aquesta categoria més habitual és el tipus 2 (T2) que s'ha repetit quaranta vegades.

T2: Calcula la probabilitat condicionada i ho fa de forma incorrecta.

$$c) P(A/B) = \frac{P(A) \cdot P(A|B)}{P(B)} = \frac{\frac{17}{30} \cdot \left(\frac{17}{30} \cdot \frac{13}{29}\right)}{0,687} = 0,2095$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap A) + P(B \cap B) = \left(\frac{221}{870}\right) + \left(\frac{221}{870}\right) + \left(\frac{26}{145}\right) = \frac{221}{435} + \frac{26}{145} = \frac{299}{435} = 0,687$$

En aquesta ocasió, s'han comès diversos errors. El que compta per aquesta categoria és el fet de no entendre el que s'està demanant, ja que l'alumne en qüestió pretén fer el càlcul de la probabilitat condicionada: que el segon llapis sigui vermell, sabent que el primer ha estat blau.

- *Categoria 3: no entén el concepte de reemplaçament*

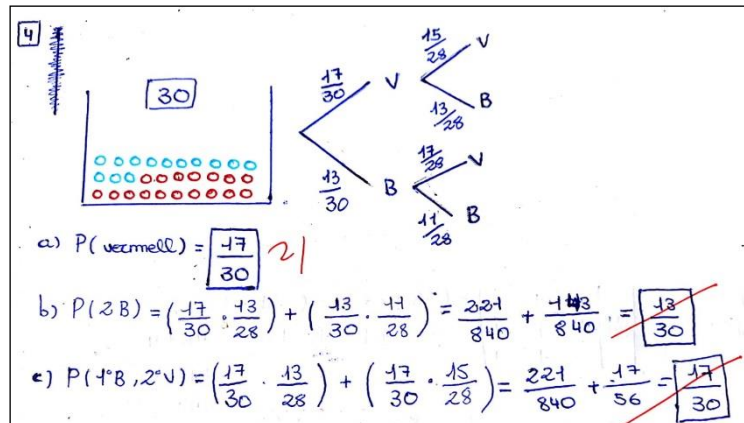
Els dos errors més repetits d'aquesta categoria són el tipus 1 (T1) i el tipus 14 (T14), que s'han repetit vint-i-dues i vint-i-sis vegades, respectivament.

T1: Ho fa amb reemplaçament.

$$c) P(\text{blau}) \cdot P(\text{vermell I / blau I}) = \frac{13}{30} \cdot \frac{P(\text{vermell I A blau I})}{P(\text{blau I})} = \frac{13}{30} \cdot \frac{17}{30} = 0,241$$

En aquesta resposta s'ha detectat l'error de calcular la probabilitat amb reemplaçament.

T14: Ha escrit malament el no reemplaçament.



Per aquest error es mostra la resposta de tota l'activitat BP4 perquè es pugui veure de forma més clara com es calcula incorrectament el no reemplaçament. El que pareix que fa l'alumne és, a més de no tornar a l'estoig el primer llapis que s'ha extret, treure'n un altre del mateix color. Aquest error l'han repetit molts d'alumnes.

En aquesta resposta de la pregunta BP4c, també s'ha comès un altre error que s'ha inclòs dins la Categoria 1.

- *Categoria 4: descuit de l'alumne*

Els dos errors inclosos dins aquesta categoria són el tipus 12 (T12) i el tipus 16 (T16), que s'han repetit nou i dues vegades, respectivament.

T12: Error a l'hora d'utilitzar qualche dada.

$$c) \frac{13}{30} \cdot \frac{15}{29} = \frac{13}{60} = 0,22$$

A part de fer els càlculs amb reemplaçament, que seria un error comptabilitzat a la categoria anterior, s'ha agafat 15 com el nombre de llapis vermells en lloc de 17. Per tant, es considera que aquesta part ha estat un descuit de l'alumne.

T16: Ho ha fet per un altre nombre de llapis.

$$c. \frac{13}{40} \cdot \frac{17}{39} = 0,325 \cdot 0,435 = 0,141\%$$

la probabilitat de que el primer sigui blau i el segon és del 0,141%

L'alumne ha emprat que el nombre de llapis totals és 40, quan només n'hi ha 30. També es considera un descuit a l'hora de reescriure les dades que aporta l'enunciat.

- *Categoria 5: no entén per què fa l'arbre*

L'error d'aquesta categoria més habitual és el tipus 9 (T9) que s'ha repetit vint-i-quatre vegades.

T9: Suma en lloc de multiplicar.

c) A estat, sense reemplaçament:

$$P(A \cap B \mid 2n U) = \frac{13}{30} + \frac{17}{29} = \frac{887}{870}$$

Aquest alumne fa el diagrama en arbre correctament, però en lloc de multiplicar les probabilitats, del camí que se segueix per les branques de l'arbre, se sumen.

F. Fitxa activitat experimental

Màquina de Galton

IES Binissalem 2n Batx

Nom: Grup: Data:

1. Què creus que passarà si llançam moltes bolles? Les bolles estaran repartides de forma equitativa? Per què?
2. Utilitzau la màquina per llançar totes les bolles. Estimau el nombre de bolles que hi ha a cada calaix. Escriu les estimacions a la següent taula:

Calaix	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nº bolles										

3. Compara aquestes estimacions amb les de l'altre grup. Quines semblances i diferències hi ha?

Semblances:

Diferències:

4. És correcte, segons aquesta tirada, el teu raonament previ al llançament? Per què?
5. Com que la màquina està ben equilibrada, cada bolla té una probabilitat d'1/2 d'anar cap a la dreta o cap a l'esquerra a cada clau. Quin tipus de distribució segueixen les bolles?

6. Calcula la probabilitat del fet que una bolla caigui a cada un dels calaixos.

Calaix	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Probabilitat										

7. Quantes bolles s'esperen que hi hagi a cada calaix?

Calaix	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nº bolles										

G. Qualificacions activitat experimental

Alumne	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	Nota (sobre 10)
Alumne 1	1	1	1	1	1	1	1	10
Alumne 2	1	1	1	1	1	0,9	1	9,86
Alumne 3	1	1	1	1	1	1	0	8,6
Alumne 4	1	1	1	1	1	1	0	8,6
Alumne 5	1	1	1	1	1	1	0,9	9,86
Alumne 6	1	1	NC	0,5	0,8	0,9	NC	6
Alumne 7	1	1	1	1	1	0,8	1	9,71
Alumne 8	1	1	1	1	1	1	1	10
Alumne 9	1	1	1	1	1	0,9	1	9,86
Alumne 10	1	1	1	1	0,8	1	1	9,71
Alumne 11	1	1	1	1	0,8	1	NC	8,3
Alumne 12	1	1	1	0,5	1	1	1	9,29
Alumne 13	1	1	1	1	1	0,9	NC	8,43
Alumne 14	1	1	1	0,5	1	1	1	9,29
Alumne 15	1	1	1	1	1	1	1	10
Alumne 16	1	1	1	0,8	0,8	NC	NC	6,57
Alumne 17	1	1	1	1	1	1	1	10
Alumne 18	1	1	1	1	1	1	1	10
Alumne 19	1	1	1	1	1	0,8	1	9,71
Alumne 20	1	1	1	1	1	NC	0,5	7,86
Alumne 21	1	1	1	0,9	0,8	1	1	9,57
Alumne 22	1	1	1	0,9	1	0,9	NC	8,3
Alumne 23	1	1	1	0,5	0,8	1	0,5	8,29
Alumne 24	1	1	1	0,5	1	1	0,3	8,29
Alumne 25	1	1	1	0,9	0,8	0,9	1	9,43
Alumne 26	1	1	1	1	0,8	1	NC	8,29
Alumne 27	1	1	1	1	1	0,9	NC	8,43
Alumne 28	1	1	1	1	1	1	1	10
Alumne 29	1	0,9	1	1	1	1	1	9,86
Alumne 30	1	1	1	1	1	1	1	10
Alumne 31	1	0,9	1	0,8	1	1	0,5	8,86

H. Qüestionari de valoració de l'activitat

Valora la sessió d'avui contestant a les següents preguntes.

Encercla l'opció corresponent.

1. Consideres que emprar el material manipulable, en aquest cas la màquina de Galton, t'ha ajudat a entendre millor el concepte de distribució binomial?

Molt poc Poc Regular Bastant Molt

2. Consideres que veure els llançaments a la màquina de Galton virtual t'ha ajudat a entendre millor el concepte de distribució binomial?

Molt poc Poc Regular Bastant Molt

3. Amb l'activitat d'avui has prestat més atenció que la que sols prestar?

Molt poc Poc Regular Bastant Molt

Escriu la resposta.

4. Què és el que més t'ha agradat?

5. Què és el que menys t'ha agradat?