Universitat de les
Illes Balears

# Anàlisi dels resultats en Matemàtiques II de les PBAU de juny de 2017

**Amador A. Font Molinas**

## Treball de Final de Màster

**Master Univesitari en Formació del Professorat**
**Especialitat de Matemàtiques**

Universitat de les Illes Balears

Curs Acadèmic 2017-2018

Palma - 18 de juliol de 2018

**Tutor del treball:** Dr. Daniel Ruiz Aguilera

# RESUM

## Anàlisi dels resultats en Matemàtiques II de les PBAU de juny de 2017

La PBAU és la darrera passa que tots els estudiants de batxillerat han de realitzar per entrar a la universitat. La majoria dels estudiants amb el batxillerat aprovat s'avaluen de les diferents matèries i temaris que han estudiat els darrers anys i d'aquesta manera posen de manifest tot allò que han après durant el batxillerat. Finalitzada la prova, es calcula la nota d'accés juntament amb la nota de batxillerat, que els permetrà accedir a la universitat.

En el present treball s'estudia una prova en concret, la de MatemàtiquesII, enfocada als estudiants que han cursat un batxillerat de ciències. La prova en concret va ser realitzada el mes de juny de 2017 per un total de 1650 alumnes de les Illes Balears.

A partir d'aquesta mostra d'exàmens es fa un recull de dades que permet realitzar l'estudi. S'analitzen les dues opcions així com cada una de les preguntes per separat i es dóna una explicació raonada dels resultats en cada cas. Això permetrà treure conclusions de les mancances més significatives dels estudiants de secundària. A banda d'això, també s'estudiaran les correccions i es determinarà si hi ha o no homogeneïtat en les puntuacions dels diferents correctors.

Ja per acabar amb l'estudi, s'analitzen també els errors més comuns que cometen els estudiants a algunes de les preguntes a partir d'una mostra aleatòria. Es cataloguen i es treuen conclusions dels errors més freqüents culminant el treball amb una proposta de millora per tal minimitzar l'aparició d'aquests errors.
**Paraules Clau:** PBAU, estudi, anàlisi, error, matemàtiques, Illes Balears.

# Índex

**1 Introducció** **9**

1.1 Resum dels Objectius. . . . . 12

**2 Les PBAU** **13**

**3 Anàlisi de la prova de Matemàtiques II** **16**

3.1 Estructura de l'examen . . . . . 16

3.2 Criteris generals d'avaluació . . . . . 17

3.3 Opció A, Juny 2017 . . . . . 19

3.3.1 Anàlisi de les preguntes de l'Opció A . . . . . 20

3.4 Opció B, Juny 2017 . . . . . 22

3.4.1 Anàlisi de les preguntes de l'Opció B . . . . . 23

**4 Anàlisi dels Resultats** **26**

4.1 Anàlisi dels Resultats en funció de l'opció . . . . . 28

**5 Anàlisi dels resultats per preguntes** **34**

5.1 Opció A . . . . . 34

5.2 Opció B . . . . . 40

5.3 Conclusions . . . . . 43

**6 Els correctors influeixen?** **46**

**7 Errors més comuns a les PBAU** **51**

7.1 L'error . . . . . 53

7.2 Tipologies d'errors matemàtics . . . . . 53

7.3 L'error a les PBAU . . . . . 59

7.4 Proposta de Millora . . . . . 71

**8 Conclusions finals de l'estudi** **74**

**A Apèndix** **82**

A.1 Acta de la reunió d'octubre 2017 . . . . . 82

A.2 Critèris específics de Correcció . . . . . 89

# Índex de figures


1 Opció escollida. . . . . 26
2 Distribució de qualificacions, opció A. . . . . 30
3 Distribució de qualificacions, opció B. . . . . 32
4 Distribució qualificacions PBAU Matemàtiques II. . . . . 34
5 Correlació P3 opció A amb nota Final . . . . . 36
6 Distribucions de qualificacions preguntes opció A . . . . . 39
7 Mitjanes de les preguntes . . . . . 41
8 Correlació P2 opció B amb nota final . . . . . 43
9 Distribucions preguntes opció B . . . . . 44
10 Nota mitjana correctors . . . . . 47
11 Diagrama de caixes i bigots qualificacions correctors . . . . . 48
12 Percentatge d'aprovats correctors . . . . . 48
13 Error tècnic pregunta 3. . . . . 61
14 Error degut a la deformació d'una fórmula, P3, b). . . . . 62
15 Error degut a la deformació d'una propietat, P3, a). . . . . 62
16 Error degut a la falta de rigor del llenguatge matemàtic, P3, a). . . 63
17 Error degut a un aprenentatge deficient, P3. . . . . 64
18 Error degut a un aprenentatge deficient, P3. . . . . 65
19 Error degut a un aprenentatge deficient, P4. . . . . 65
20 Error degut a un aprenentatge deficient, P4. . . . . 66
21 Error degut a un aprenentatge deficient, P4. . . . . 66
22 Error degut a un aprenentatge deficient, P4. . . . . 66
23 Error degut a la manca de justificació, P4. . . . . 67
24 Error degut a la rigidesa del pensament, P4. . . . . 67
25 Error degut a teoremes o definicions deformades, P4. . . . . 67
26 Error degut a teoremes o definicions deformades, P4. . . . . 68

27 Error degut a teoremes o definicions deformades, P4. . . . . 68
28 Errors Pregunta 3 Opció A . . . . . 69
29 Errors Pregunta 4 Opció A . . . . . 70

# Índex de taules

1 Processos cognitius de les preguntes. . . . . 25
2 Taula de resultats . . . . . 28
3 Taula de contingència test de bondat d'ajustament $\chi^2$ . . . . . 31
4 Mesures preguntes opció A. . . . . 35
5 Test independència pregunta 4 opció A. . . . . 37
6 Mesures opció B. . . . . 41
7 Taula de freqüències d'intervals dels correctors . . . . . 49
8 Categories d'errors segons autors (Vist a Escudero Domínguez i Domínguez Viñas (2014), traduïda i modificada) . . . . . 54

# 1 Introducció

Durant aquest treball de final de màster s'analitzaran els resultat obtinguts en Matemàtiques II a les PBAU (proves de batxillerat per a l'accés a la universitat) realitzades el mes de juny de 2017. La PBAU és la prova d'accés destinada a atorgar un requisit d'accés als estudiants amb el títol de batxillerat. La PBAU és el que en l'àmbit de la Llei Orgànica 2/2006, i tots els seus desenvolupaments posteriors, s'anomena l'avaluació final de batxillerat, avaluació que en principi tots els alumnes han de realitzar per tal d'obtenir el títol de Batxillerat, encara que actualment únicament es considera un requisit per poder entrar a la universitat. L'objectiu principal d'aquesta prova es comprovar el grau d'adquisició de les competències en relació a algunes de les matèries cursades durant el batxillerat.

Una de les matèries que composa el bloc d'assignatures troncals de qualsevol batxillerat de ciències són les matemàtiques, i per tant, qualsevol alumne que cursi aquesta modalitat haurà de realitzar una avaluació final d'aquesta matèria.

Durant la convocatòria ordinària de Juny de l'any 2017, un total de 1650 alumnes van realitzar l'avaluació final de matemàtiques, la qual rep el nom de MatemàtiquesII, per ser la continuació de l'assignatura de MatemàtiquesI que es cursa al primer any de batxillerat.

La principal motivació d'aquest treball és fer un estudi ampli de la prova de MatemàtiquesII a partir de la mostra completa dels exàmens, ja que no tenim constància de que s'hagi realitzat mai cap estudi semblant i d'aquesta forma poder extreure una gran quantitat de dades i informació que ens serviran per adonar-nos de quines són les mancances més significatives dels estudiants. Aquest serà un dels nostres principals objectius.

En primer lloc, es realitzarà una recopilació de dades a partir de la mostra total, 1650 exàmens realitzats de matemàtiques II. Per això ens servirem d'un full de càlcul on apuntarem: l'opció escollida, la puntuació de cada una de les

preguntes, i el corrector, per a cada un del exàmens. D'aquesta forma obtindrem una matriu gegant que *a posteriori* ens servirà per realitzar l'estudi.

Les proves realitzades pels alumnes de totes les Illes Balears, després de ser corregides i revisades, romanen durant aproximadament un any dins capses abans de ser destruïdes. Agrair a la Universitat de les Illes Balears haver-nos permès accedir a les proves per poder dur a terme aquest estudi.

Una vegada tinguem recopilades totes les dades, l'objectiu que ens marcarem serà, a partir dels resultats obtinguts, treure conclusions envers els aspectes on els alumnes tenen més mancances per tal d'oferir una explicació a aquest fet. Seguidament es comprovarà també si els alumnes tenen preferència per respondre un tipus de preguntes.

Al marge d'això, un altre dels nostres objectius, serà determinar si els correctors influeixen o no a l'hora de corregir un examen i comprovar d'aquesta forma, si tots els correctors corregeixen igual.

Finalment, i ja per acabar amb l'estudi, el darrer objectiu que ens marcam serà, a partir d'una mostra aleatòria del total d'exàmens, catalogar els errors més comuns que cometen els estudiants en algunes de les preguntes i determinar d'aquesta forma quins són els errors més comuns. Per acabar amb aquesta darrera part, es donarà una proposta de millora per tal d'evitar que es donin aquests tipus d'errors.

A tall de cloenda d'aquesta introducció, volem comentar que no tenim constància de s'hagi realitzat un estudi tan complet i extens com aquest a una mateixa prova de selectivitat. Emperò si que existeixen estudis prenent de referència els resultats finals comparant-los amb dades d'altres anys.

Per exemple a Gorostiza et al. (2013) es centren en analitzar els resultats de les dues assignatures de matemàtiques a la prova d'accés de la Universitat del País Basc del curs 2009-2010 on mostren que els resultats obtinguts són més bons que anys anteriors, que els resultats de Matemàtiques II eren pitjors

a l'etapa de la LOGSE i també que les notes de Matemàtiques aplicades a les Ciències Socials són pitjors que les de Matemàtiques II. Conclouen, a través del resultat de les enquestes a diferents centres, que aquells que segueixen mètodes més tradicionals són els que obtenen millors resultats.

No volem deixar d'esmentar organitzacions que porten a terme estudis amplis en relació al nivell de competències a partir dels resultats obtinguts, com les proves PISA (Programa Internacional per a l'Avaluació d'Estudiants) i les proves realitzades per l'IAQSE. La principal finalitat d'aquests tipus de proves és avaluar les competències adquirides pels estudiants de diferent matèries, així com analitzar el grau d'eficàcia del sistema educatiu, i d'aquesta forma poder-lo millorar.

Aquí podem veure un estudi realitzat per l'IAQSE (Institut d'Avaluació i Qualitat del Sistema Educatiu) de les proves PISA que es van fer a les Illes Balears l'any 2015 de les Illes Balears Conselleria d'Educació i Universitat. Institut d'Avaluació i Qualitat del Sistema Educatiu (IAQSE) (2016). En aquest estudi podem observar que la puntuació de les Illes Balears en matemàtiques està per sota de la del conjunt d'Espanya així com també de la mitjana de la UE i de l'OCDE, on a més, la majoria dels estudiants té un nivell de rendiment en matemàtiques entre 2 i 3 dins una escala de 0 a 6. Aquests resultats ens permeten interpretar que s'ha de millorar en Matemàtiques, i no únicament estam parlant de l'alumnat, si no també la forma d'ensenyar aquestes ciències. Al marge d'això, hem de dir que hi ha hagut una millora de resultats respecte edicions anteriors, sobretot respecte l'edició de PISA 2009.

No obstant, aquests tipus de proves estan orientades a alumnes que realitzen únicament la tapa d'educació obligatòria.

## 1.1 Resum dels Objectius.

1. Prendre i examinar la mostra total d'exàmens i treure conclusions sobre els resultats obtinguts.

2. Esbrinar quina preferència tenen els alumnes a l'hora d'escollir les preguntes de l'examen.

3. Determinar a quines preguntes els alumnes treuen millor puntuació, i donar una explicació raonada a aquest fet.

4. Comprovar si el corrector influeix a la correcció de l'examen.

5. Identificar i categoritzar els errors més comuns que cometen els estudiants a unes preguntes determinades i donar una proposta de millora per intentar evitar-los.

# 2 Les PBAU

Les proves de batxillerat per a l'accés a la universitat, tal com dictamina el Decret 21/2017 del BOIB, són proves dirigides a alumnes que durant els darrers anys han cursat i finalitzat amb èxit els dos cursos que componen el batxillerat.

Des de l'any 1986, a les Illes Balears, els alumnes que acabaven el Batxillerat havien de realitzar la PAU (Prova d'acces a la Universitat). Amb l'entrada de la vigent LOMQUE, al 2017, les PAU varen passar a anomenar-se PBAU, encara que la diferència entre una i altra prova es pràcticament inexistent.

Actualment, acabat el curs, hi ha dues convocatòries per realitzar les proves, una ordinària durant la primera setmana de juny, i una altra extraordinària durant el més juliol, aquesta darrera per a tots els alumnes que no hagin aprovat el batxillerat per juny, hagin suspès les PBAU a juny o bé desitgin pujar nota.

Les PBAU estan formades per dues parts, una part general, que conformarà la nota d'accés i per tant tots els alumnes han de realitzar i una part específica, on els alumnes han d'escollir una sèrie de matèries de les quals desitgin ser avaluats amb la possibilitat de pujar la seva nota d'admissió fins a un màxim de 4 punts. Dins la part general, tots els estudiants que hagin cursat un batxillerat de la modalitat de ciències o ciències socials, hi ha una prova de matemàtiques, on els primers realitzen la prova de Matemàtiques II i els que han cursat el batxillerat especialitzat amb la branca de ciències socials, han de realitzar la prova de Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II.

Totes les proves de les PBAU de qualsevol matèria estan compostes per dues opcions A i B, d'una dificultat similar. L'alumne ha d'escollir respondre una de les dues opcions i serà avaluat de forma objectiva de l'opció que hagi escollit.

La nota de la PBAU s'obtindrà a partir de fer la mitjana de les qualificacions del exàmens realitzats, corresponents a les cinc matèries que composen el bloc d'accés. Aquesta nota es calcularà en una escala de 0 a 10 amb tres xifres

decimals, arrodonides a la mil·lèsima més propera, i en cas de ser equidistant, a la superior.

Sempre que un alumne obtengui una nota superior a 4 punts a les PBAU, aleshores es calcularà la nota d'accés de la següent forma: la nota d'accés serà la ponderació d'un 40% la nota de la PBAU i un 60% la qualificació final de l'etapa de batxillerat.

$$\text{Nota d'accés} = 0.6 \cdot \text{QEB} + 0.4 \cdot \text{QPBAU},$$

on:

- QEB: Qualificació final de batxillerat.
- QPBAU: Qualificació de la PBAU.

Aleshores, si la nota d'accés és superior a 5 punts, l'estudiant obtindrà el títol de batxillerat i podrà accedir a la universitat, en cas contrari, haurà de repetir la PBAU.

No obstant això, en aquest comput únicament es tenen en compte les qualificacions de les matèries del bloc general. Com hem dit, amb la nota d'admissió, la nota d'accés pot elevar-se fins a un total de 14 punts, sempre i quan la nota d'accés sigui superior a 5 punts.

Hem d'entendre com a nota d'admissió aquella que es considera a l'hora d'establir l'ordre de preferència d'un estudiant per accedir a un grau. La nota d'admissió senzillament es calcula fent:

$$\text{Nota d'admisió} = \text{Nota d'accés} + \text{Nota específica},$$

on la nota especifica serà un valor entre 0 i 4 punts, calculats de la següent forma:

$$\text{Nota específica} = a \cdot M_1 + b \cdot M_2,$$

sent:

- $M_1$ i $M_2$ les qualificacions de dues matèries que no formin part del bloc general escollides per l'alumne amb una puntuació més gran o igual a 5. També es poden considerar per $M_1$ i $M_2$ les qualificacions obtingudes en matèries superades en proves específiques d'admissió regulades a l'article 23 de l'Acord Normatiu del dia 20 de febrer de 2017 pel qual es regula l'accés i admissió als ensenyaments oficials de grau a la Universitat de les illes Balears.

- $a$ i $b$ paràmetres de ponderació de les matèries corresponents a les qualificacions $M_1$ i $M_2$ en funció del grau per al qual es calcula la nota d'admissió.

# 3 Anàlisi de la prova de Matemàtiques II

## 3.1 Estructura de l'examen

Tal com marca la UIB [1], la prova de Matemàtiques II està composta per un total de 4 preguntes, cada una de les quals permet avaluar a l'alumne d'un dels quatre blocs següents:

- Àlgebra (matrius, determinants i sistemes d'equacions),
- Anàlisi (límits, derivades i les seves aplicacions, representació de funcions, càlcul de primitives i integrals definides),
- Geometria ( vectors, punts, rectes, plans a l'espai i problemes mètrics),
- Probabilitat i Estadística (atzar, probabilitat i distribucions de probabilitat).

Aquests quatre grans blocs donen estructura a totes les proves de Matemàtiques II des del passat any 2017, així com estableix la vigent LOMQE (Llei Orgànica per a la Millora de la Qualitat Educativa, 2013) que regula els estudis de primària, secundària i batxillerat.

Com ja hem dit, l'alumne haurà d'escollir i desenvolupar una de les dues opcions, sense barrejar preguntes. Cada pregunta s'avaluarà sobre 10 punts, on la puntuació final de l'examen s'obté a partir de fer servir la següent fórmula: $\frac{4}{15}\cdot(P_1+P_2+P_3)+\frac{1}{5}\cdot P_4$, de forma que les 3 primeres preguntes valen un $26,\widehat{6}\ \%$ de la puntuació total, i la pregunta 4 pertanyent al bloc de probabilitat i estadística, val únicament un $20\%$. A la reunió efectuada el 16 d'octubre de 2018 es va establir que de cara al curs 2017-2018, que les quatre preguntes valdran un $25\%$ de la nota final, equiparant així la puntuació de totes les preguntes (Veure Annex A.1. Els problemes i/o qüestions poden tenir diferents apartats on la puntuació

[1] http://estudis.uib.cat/grau/acces/batxiller/materies/matematiques/

de cada un d'ells ve indicada pel propi enunciat sumant així un total de 10 punts. Els alumnes disposen de 90 minuts en total per realitzar la prova.

Es permet utilitzar calculadores de tots els tipus, científiques, gràfiques o programables, sense portar però informació emmagatzemada dins la memòria.

Generalment la prova conté exclusivament preguntes referents als blocs que s'han esmentat a l'inici d'aquest apartat. No obstant això, a l'hora de resoldre algun problema es pot requerir l'ús d'alguns coneixements adquirits a cursos inferiors, com puguin ser problemes d'optimització on s'hagin de fer servir conceptes de geometria plana, entre d'altres.

## 3.2 Criteris generals d'avaluació

L'alumne que realitza la prova ha de justificar o explicar els processos i raonaments que ha fet servir per resoldre el problema. S'ha de contestar de forma clara i raonada una de les dues opcions que es proposen i aquesta serà corregida per un professor, el qual desconeix completament la procedència de la prova que està corregint. Els raonaments, les justificacions i les explicacions de les solucions dels problemes, són punts fonamentals dels criteris específics de correcció.

Es valoren també la claredat en el llenguatge matemàtic i no matemàtic emprat per l'alumne a l'hora de realitzar la prova. Es penalitzen els errors de càlcul, especialment errors greus que porten a resultats incoherents o absurds, arribant a penalitzar un 50 % la nota de la qüestió.

Cada professor corrector compta amb uns criteris específics de correcció que els indica la puntuació que han d'assignar quan es realitza un procés correctament (Veure Annex A.2).

Per acabar, cal dir que les qualificacions de les PBAU únicament poden ser enteres o mitges, és a dir que si la qualificació d'un alumne és un 4.7, recau sobre

el professor decidir posar un 4.5 o un 5. El mateix professor tindrà en compte la presentació o la claredat de llenguatge emprada a l'hora de fer l'examen per prendre aquesta decisió.

A continuació s'exposaran els enunciats de l'examen, on es comentarà seguidament cada una de les preguntes per separat.

Abans de res però, centrat-nos amb la competència matemàtica, donarem tres categories en funció del procés cognitiu que es requereix a l'hora de resoldre un problema de matemàtiques IAQSE (2010):

- **Reproducció:** fan referència a la reproducció dels coneixements practicats, com el reconeixement de tipus de processos i problemes matemàtics familiars i la realització d'operacions habituals. Aquestes destreses són necessàries per a la realització dels exercicis més senzills.

- **Connexió:** exigeixen que els alumnes vagin més enllà dels problemes habituals, realitzin interpretacions i estableixin interrelacions en diverses situacions, però també en contextos relativament coneguts. Aquestes destreses acostumen a presentar-se en els problemes difícils.

- **Reflexió:** impliquen perspicàcia i reflexió per part de l'alumne, com també creativitat a l'hora d'identificar els elements matemàtics d'un problema i establir-hi interrelacions.

Ara a partir d'aquest tres processos, categoritzarem cada una de les preguntes de l'examen.

## 3.3 Opció A, Juny 2017

**1.** a) Discutiu per a quins valors de $m$ el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{array}{rcl} mx+3z & = & m, \\ x+2y-z & = & 1, \\ 2x+y-z & = & 2. \end{array}\right\}$$

(7 punts)

b) Resoleu-lo en el cas o casos en que sigui compatible indeterminat. (3 punts)

**2.** El nombre de litres per metre quadrat que va ploure en un determinat lloc ve donada per la funció següent:

$$Q(t) = -\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10,$$

on $t$ ve donat en dies i va des de el dia $t = 1$ (dilluns) fins al dia $t = 8$ (dilluns de l'altra setmana).

a) Trobeu el dia de la setmana que va ploure més i el que va ploure menys. Quants de litres per metre quadrat va ploure aquests dos dies? (6 punts)

b) Feu un petit dibuix de la funció anterior durant els 8 dies. (4 punts).

**3.** Donades les rectes $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$ i $s : \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-2}$,

a) Demostrau que es tallen. (4 punts)

b) Calculau la distància entre elles. (6 punts)

**4.** Llançam dos daus de 6 cares no trucats i consideram els esdeveniments següents:

$S_7$: “ la suma dels resultats dels dos dau és 7”.

$P$: “ el producte dels resultats dels dos daus és imparell”.

a) Calculau les probabilitats que passin els esdeveniments anteriors. (6 punts)

b) Són independents $S_7$ i $P$? Raonau la resposta. (4 punts)

### 3.3.1 Anàlisi de les preguntes de l'Opció A

El primer problema de l'opció A pertany al bloc d'Àlgebra. Aquest tipus de pregunta habitualment sempre va ser una pregunta molt freqüent a les anteriors PAU. [2]

La pregunta en si consta de dos apartats relacionats. Per resoldre el primer apartat s'ha de saber determinar el rang d'una matriu en funció d'un paràmetre i seguidament fer casos i treure conclusions aplicant per exemple el teorema de Rouché.

El segon apartat d'aquesta primera pregunta consistia en resoldre el sistema compatible indeterminat que sorgia amb el cas $m = -9$ mitjançant qualsevol mètode de resolució, com per exemple els mètodes de Gauss o Cràmer. Es tracta d'una pregunta que es pot considerar de reproducció per la seva forma mecànica de resoldre's i sobretot per la seva familiaritat d'exàmens posteriors.

El segon problema, a diferència de l'anterior, pot ser considerat com un problema de reflexió, ja que l'alumne ha de saber relacionar la teoria apresa del bloc d'anàlisi sobre funcions i treure conclusions sobre un problema contextualitzat.

Aquest problema va donar molt que parlar al seu dia, ja que hi ha 3 formes diferents de resoldre el primer apartat, fet que estranyament té lloc a un pregunta

[2] Per consultar les PAU d'anys anteriors podeu clicar en el següent enllaç `http://estudis.uib.cat/grau/acces/batxiller/Info_materies/`, on s'ha d'escollir la matèria i l'any que es desitgi.

d'un examen d'accés d'aquest tipus. Les formes que es van considerar correctes per resoldre aquest apartat són:

1. Calcular quan $Q'(t) = 0$ i determinar d'aquesta forma els màxims i mínims d'aquesta funció sense oblidar també els extrems de l'interval.

2. Considerar $Q(t)$ com una funció discreta i construir una taula amb $Q(1), Q(2), \ldots, Q(8)$, mirant quins són els valors mínims i màxims de la taula.

3. Per calcular el que va ploure el dia $n$, calcular la integral definida de $Q(t)$ entre $n$ i $n+1$ i treure així el volum total d'aigua que va plore el dia $n$. Després únicament indicar el dia que va ploure més i el dia que va ploure menys.

El segon apartat d'aquesta pregunta, bàsicament consistia en dibuixar la funció a partir de les dades obtingudes a l'apartat anterior.

La tercera pregunta d'aquesta opció referent al bloc de geometria, va estar marcada per una errada a l'enunciat del primer apartat. L'enunciat dóna les equacions de dues rectes on el primer apartat demana que es demostri que les dues rectes es tallen quan en realitat les dues rectes es creuen. De fet, si s'observa l'enunciat del segon apartat, aquest demana que es calculi la distància entre les dues rectes, fet que no tendria sentit si les rectes es tallessin, ja que en aquest cas la distància entre les dues rectes seria 0. El primer apartat hauria de posar: "demostra que es creuen".

Al marge d'això, l'exercici 3 d'aquesta opció és una pregunta bastant comú del bloc de geometria. Calcular la posició relativa de dues rectes, demostrar que aquestes es creuen i calcular-ne la distància entre elles, és una exercici molt comú amb un procediment a seguir molt marcat. Per aquesta raó podem considerar-lo un exercici de reproducció.

Ja per acabar amb l'opció A, la pregunta 4 és una pregunta del bloc de probabilitat on s'han de calcular dues probabilitats mitjançant la llei de Laplace i de-

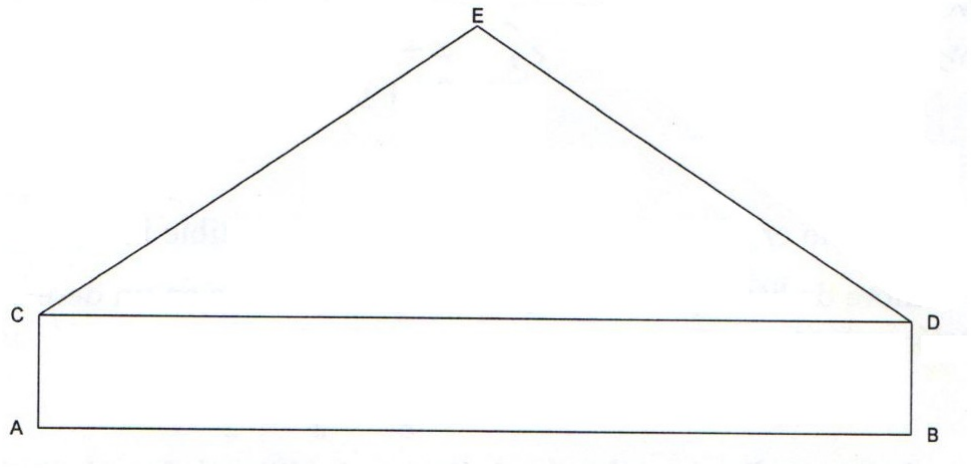
mostrar que aquestes dues probabilitat són independents mitjançant una fórmula. Aquest exercici també pot ser considerar de reproducció, ja que solament s'ha d'aplicar una fórmula.

Finalment, podem concloure que aquesta opció és bastant assequible, ja que llevat de la pregunta 2, tots els altres exercicis poden ser considerats de reproducció.

## 3.4 Opció B, Juny 2017

1. Tenim tres aixetes per omplir un dipòsit d'aigua on suposem que el caudal que cau per cada aixeta és constant. Si fem servir l'aixeta 1, tardam 10 hores en omplir el dipòsit, si fem servir les aixetes 1 i 2, tardam 4 hores i si les fem servir totes tres, tardam una hora. Suposant que la suma dels caudals de les tres aixetes és 10 litres per minut, trobeu el caudal de l'aigua de cada aixeta (8 punts) i el volum del diposit (2 punts).

2. Hem de dissenyar una finestra com la que surt a la figura adjunta, o sigui, el polígon $ACEDB$ de 30 metres de perímetre. Es tracta d'un rectangle amb un triangle equilàter damunt. Trobeu les dimensions del rectangle perquè l'àrea de la finestra sigui màxima. (10 punts)



**3.** Considerem les rectes següents dependents d'un paràmetre $\lambda$.

$$r: \left.\begin{array}{rcl} x & = & 1+\lambda t, \\ y & = & -1+t, \\ z & = & 3-2t. \end{array}\right\}, \quad s: \frac{x-2}{\lambda} = \frac{y}{2\lambda} = \frac{z-3}{-1}$$

a) Calculeu el valor de $\lambda$ perquè $r$ i $s$ es tallin. (7 punts)

b) Calculau el punt d'intersecció pel valor de $\lambda$ trobat. (3 punts)

4. El test d'intel·ligència (CI) és una prova que en teoria mesura l'intel·ligència de l'individu i dóna un valor que aproximadament té mitjana 100. O sigui, el nivell 100 se suposa que és el nivell d'intel·ligència d'una persona normal. Suposem ara que el nivell d'intel·ligència d'una determinada població segueix una distribució normal de mitjana 100 i desviació típica 10.

   a) Calculeu el percentatge de la població qie se considera superdotada. Una persona se considera superdotada si té un nivell d'intel·lència superior a 130. (3 punts)

   b) Calculeu el percentatge de la població amb un nivell d'intel·lència entre 90 i 110. (3 punts)

   c) Ens diuen que el $70\%$ de la població té un nivell d'intel·lència menor que un cert llindar. Calculeu aquest llindar. (4 punts)

### 3.4.1 Anàlisi de les preguntes de l'Opció B

El primer exercici de l'opció B pertany al bloc d'Àlgebra, igual que a l'opció A. No obstant això, aquest exercici no és un exercici que fins aleshores hagi estat molt comú a la prova de Matemàtiques II. Una de les modificacions amb l'entrada de les PBAU respecte a les PAU ha estat l'increment de problemes més contextualitzats, i aquest exercici n'és una prova. Aquest primer exercici, que podem

considerar de reflexió, consisteix en interpretar un problema de la vida quotidiana i resoldre-ho plantejant un sistema d'equacions a partir de les dades que proporciona l'enunciat. El plantejament és la principal dificultat d'aquest exercici, una vegada plantejat el sistema, aquest és relativament fàcil de resoldre ja que es pot obtenir directament un sistema escalonat.

La segona pregunta, a l'igual que la primera, també és un exercici de reflexió. En aquest cas, es tracta d'una pregunta d'optimització del bloc d'anàlisi per tal de maximitzar l'àrea d'una finestra. Per realitzar aquest exercici cal emprar conceptes de geometria plana que no apareixen al temari de batxillerat, com per exemple el teorema de Pitàgores, però que s'han de saber, motiu per el qual també podem catalogar aquesta pregunta de connexió amb el bloc de geometria plana. La dificultat d'aquest exercici és obtenir la funció que determina l'àrea total de la finestra en funció de la base (o altura) del rectangle. Una vegada obtinguda aquesta funció, s'ha de derivar i resoldre una equació de 1r grau que ens permetrà determinar la base i l'altura del triangle que fan que la finestra tengui una àrea màxima.

Cal remarcar però, que el triangle del dibuix que apareixia a l'examen de la finestra, no era pas un triangle equilàter tal com dictava l'enunciat, fet que podia generar confusió si no es llegia en detall el que deia l'enunciat.

La tercera pregunta de la segona opció pertany al bloc de geometria. Aquesta pregunta, d'igual manera que a l'opció A, consisteix en estudiar la posició relativa de dues rectes, no obstant això, aquesta no és tant de reproducció com l'anterior, ja que en aquest cas la posició de les rectes depèn d'un paràmetre que implicarà una discussió de casos. D'aquesta forma podem considerar aquesta pregunta un poc més reflexiva que no pas la de l'opció A.

D'altra banda, el segon apartat és més un exercici de reproducció ja que únicament s'ha de trobar el punt de tall de les dues rectes, emprant per exemple la tècnica del punt genèric o bé resolent el sistema compatible determinat que

sorgeix de les dues equacions de les rectes amb el valor de $\lambda$ trobat a l'apartat a).

Ja per acabar, l'exercici 4 pertany al bloc d'estadística, i en ell s'indica que hi ha una variable aleatòria que segueix una distribució normal. En aquest cas s'ha de saber tipificar la variable aleatòria i saber emprar correctament la taula de la distribució $N(0,1)$. Aquest és un exercici de reproducció molt senzill i comú del tema d'estadística i que en principi no hauria de generar grans dificultats. Cal dir però, que hi va haver un problema amb aquesta pregunta durant l'examen. La taula de la distribució $N(0,1)$ no es va proporcionar a l'alumnat fins mitja hora després des de l'inici de l'examen, degut a problemes de coordinació.

En la següent Taula 1, hem categoritzat cada una de les preguntes en funció del procés cognitiu seguit per resoldre el problema. Podem observar com abunden les preguntes de reproducció i com les de connexió són les menys freqüents. A banda d'això notam també una diferència de dificultat entre les dues opcions, ja que l'opció B és molt més reflexiva que l'opció A. Aquest fet ens fa qüestionar si l'examen està ben dissenyat.

| | **Reproducció** | **Connexió** | **Reflexió** |
|---|---|---|---|
| **A** | P1, P3, P4 | | P2 |
| **B** | P3, P4 | P2 | P1, P2 |

Taula 1: Processos cognitius de les preguntes.

Podeu trobar les resolucions dels exercicis d'ambdues opcions a l'Annex A.2.

# 4 Anàlisi dels Resultats

En aquesta part del treball analitzarem els resultats obtinguts a partir dels 1650 exàmens de les PBAU de Matematiques II que es van realitzar el dia 7 de Juny de 2017.

Un dels primer fets que criden més l'atenció és la baixa quantia d'alumnes que va prendre com a alternativa fer l'opció B durant l'examen. En total, dels 1650 alumnes que van fer l'examen, únicament 65 van optar per fer l'opció B, en percentatges parlam d'un $3.94\%$.

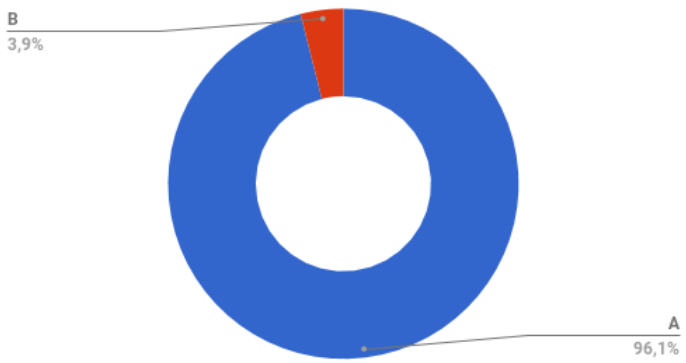



Figura 1: Opció escollida.

Òbviament, quan es tracta d'una mostra de població tan gran, que el percentatge de gent que va optar per fer l'opció $B$ no arribàs ni al $4\%$ és per algun motiu i ens agradaria donar-hi una explicació.

A primera vista, si comparam les dues opcions es pot observar que l'opció B té molt més text que l'opció A. Aquest fet possiblement es va tenir en compte a l'hora de escollir l'opció A ja que la creença popular ens diu que una pregunta més llarga implica una pregunta més complicada, encara que aquest fet no té perquè ser cert.

Per exemple, fixem-nos amb la pregunta 1 d'ambdues opcions. Per una banda

tenim la de l'opció A, la típica pregunta de sistemes on s'ha de discutir un sistema en funció d'un paràmetre i trobar la solució per un cas determinat amb algun mètode de resolució. Aquesta pregunta no es curta de resoldre ni molt menys, i de fet és relativament fàcil equivocar-se a l'hora de calcular un determinant, fet que condicionaria part de l'exercici. En canvi la de l'opció B és una pregunta amb un text que implica fer una reflexió respecte el que ens està dient l'enunciat per a posteriori obtenir un sistema fàcil de resoldre. Aleshores, podem dir que els alumnes prefereixen resoldre un exercici llarg que ja coneixen a intentar resoldre un exercici que implica fer una reflexió, encara que aquest darrer sigui més curt.

Si ens centram ara amb l'exercici 2 de les dues opcions, tenim un exercici de reflexió en cada un dels casos. En aquest cas sí que podríem dir que l'exercici de l'opció B té una major dificultat ja que requereix també una connexió amb el bloc de geometria plana i més si tenim en compte que el de l'opció A tenia 3 formes diferents de resoldre's.

L'exercici 3 de les dues opcions és molt similar on en els dos s'ha d'estudiar lo posició relativa de dues rectes. Emperò cal dir que el de l'opció B implica una major reflexió o un major domini del bloc de geometria ja que s'ha de fer una discussió a partir d'un paràmetre. Aquest fet implica que el de l'opció B té un poc més de dificultat.

Finalment la comparació de l'exercici 4: Per una banda el de l'opció A és un exercici molt curt i fàcil de resoldre's ja que cal tenir unes nocions molt bàsiques de probabilitat i que podria resoldre un alumne de 4 ESO. En canvi el de l'opció B és un exercici molt comú d'estadística el qual suposa una major inversió de temps pel simple fet d'haver de realitzar més càlculs. Recordem també que l'exercici 4 de ambdues opcions valia menys que la resta d'exercicis i per tant, és possible que els estudiants no tinguessin molt en compte aquest exercici per escollir una o altra opció

El que és cert és que l'opció B té les dues primeres preguntes contextua-

litzades on s'ha de modelar un problema de la vida real i resoldre-ho amb les eines que en teoria s'han après durant el curs. En canvi, l'opció A únicament té una pregunta d'aquest tipus, però a diferencia de les altres dues, és més curta i ve més guiada pels apartats. A més, les altres 3 preguntes de l'opció A, són preguntes bastant freqüents a Selectivitat.

D'aquesta forma podríem concloure que hi ha un biaix amb la dificultat d'ambdues opcions i que aquest va ser notat per la majoria dels alumnes, conduint-los a decantar-se per l'opció A. A continuació veurem els resultats d'ambdues opcions i contrastarem aquest fet.

## 4.1 Anàlisi dels Resultats en funció de l'opció

Tot seguit, anem a veure quins varen ser els resultats dels exàmens en funció de l'opció escollida. Per això hem calculat la nota mitjana, la mediana, la desviació estàndard, el coeficient de variació a més del percentatge d'aprovats (hem considerat que una persona aprovava l'examen quan la nota era superior a 4.75 ja que normalment, en aquest cas, la nota queda arrodonida a 5), dades que podem veure recollides a la següent Taula 2.

| Opció | A | B |
|---|---|---|
| **Nota Mitjana** | 5.88 | 5.27 |
| **Mediana** | 6.07 | 5.47 |
| **Desviació Estàndard** | 2.05 | 2.71 |
| **Coef. de Variació** | 0.35 | 0.51 |
| **% Aprovats** | 73.25% | 56.92% |

Taula 2: Taula de resultats

Podem observar que els alumnes que elegiren l'opció A varen obtenir un resultat notablement superior (0,61 punts més de mitjana) en contraposició a l'opció B.

Gràcies a les dades recollides a la Taula 2, podem observar que els alumnes

que elegiren l'opció A varen obtenir un resultat notablement superior (0,61 punts més de mitjana) en contraposició a l'opció B. D'altra banda el coeficient de variació de l'opció B és més elevat que el de l'opció A, fet que ens indica que les notes de l'opció B són més variades. De tota manera, s'ha de tenir en compte que les dades de l'opció B s'extreuen d'una població molt més petita, raó per la qual comparar aquestes dues opcions a partir d'aquestes dades no és el més indicat.

Hem d'esmentar també la gran diferència que hi ha entre els percentatges d'aprovats d'una i altra opció. L'opció A va tenir una nombre considerable d'alumnes aprovats, exactament un 73.25$\%$, en canvi l'opció B únicament va tenir un 56.92$\%$ d'aprovats, donant lloc a una diferència percentual del 16.33$\%$.

Aquest fet ens dona entendre que les dues opcions estaven esbiaixades en quant a dificultat, ja que sembla que l'opció B era més complicada. Aleshores, l'opció B, a banda de ser l'opció rebutjada per la majoria dels estudiants, va ser més difícil, i per tant, els estudiants que van escollir fer l'opció A ho van fer amb bon criteri.

Anem ara a veure la distribució de notes d'ambdues opcions. Per fer-ho hem pres intervals de notes amb una distància de 0.5 obtenint així els següents resultats per a cada una de les opcions. Volem deixar clar que la darrera columna de l'histograma únicament recompta el nombre de qualificacions igual a 10, encara que l'interval s'allargui fins a 10.5. Necessitam escriure així aquest darrer interval ja que el penúltim únicament té en compte el nombre de qualificacions que es troben entre [9,10), i per tant menors que 10.

Com podem observar a la Figura 2, la distribució de notes de l'opció A adopta una forma semblant a una campana de Gauss, on l'interval de qualificacions més freqüent es troba entre 6 i 6.5, que és a més, allà on es troba la mediana. A simple vista diríem que les qualificacions de l'opció A segueixen una distribució $N$(5.88,2.05). No obstant això, realitzarem un test de bondat d'ajustament $\chi^2$ i

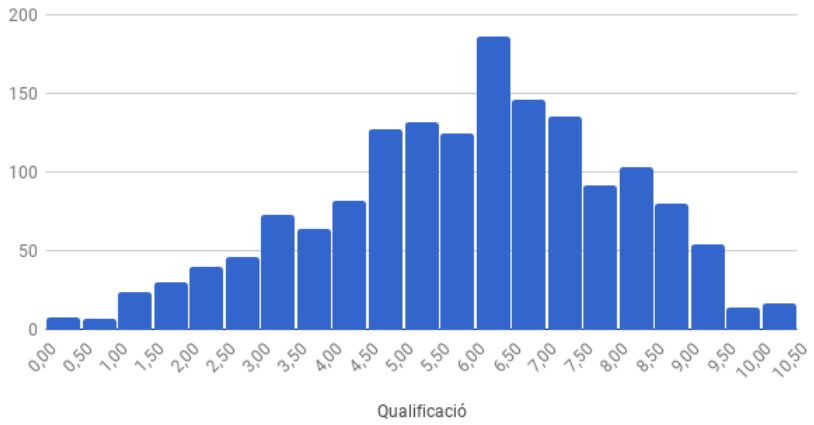



Figura 2: Distribució de qualificacions, opció A.

d'aquesta forma poder afirmar o rebutjar que la distribució de qualificacions de l'opció A segueix una distribució normal.

Suposem la hipòtesi nul·la $H_0$ que ens diu que la nota mitjana de l'examen de Matemàtiques II segueix una distribució $N(\mu, \sigma)$.

Recordem que els estimadors de màxima versemblança de $\mu$ i $\sigma$ són: $\overline{X} = 5.88$ i $S = 2.05$, mitjana i desviació estàndard de la mostra respectivament.

Vegem la Taula de contingència 3 que ens permetrà realitzar el test on $N = 1585$ és la grandària total de la mostra.

Després de calcular la freqüència $N_i$ per cada interval per $i = 1, \ldots, 20$, que no és més que el nombre d'exàmens tal que la seva qualificació final cau dins el propi interval, també hem calculat la respectiva probabilitat per a cada un dels intervals. Per calcular la probabilitat tenim en compte la hipòtesi nul·la que diu que la variable aleatòria segueix una distribució $N$(5.88,2.05), de forma que si per exemple volem calcular la probabilitat del segon interval ($i = 2$), ho farem de la següent manera:

| Intervals | $N_i$ | $p_i$ | $N \cdot p_i$ | $\frac{(N_i - N \cdot p_i)^2}{N \cdot p_i}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\leq 0.5$ | 8 | 0,00435 | 6,89344 | 0,17763 |
| (0.5,1] | 7 | 0,00431 | 6,82648 | 0,00441 |
| (1,1.5] | 24 | 0,00767 | 12,15716 | 11,53664 |
| (1.5,2] | 31 | 0,01288 | 20,40821 | 5,49711 |
| (2,2.5] | 39 | 0,02037 | 32,29351 | 1,39276 |
| (2.5,3] | 50 | 0,03039 | 48,16856 | 0,06963 |
| (3,3.5] | 69 | 0,04273 | 67,72525 | 0,02399 |
| (3.5,4] | 86 | 0,05663 | 89,75862 | 0,15739 |
| (4,4.5] | 60 | 0,07075 | 112,13484 | 24,23905 |
| (4.5,5] | 135 | 0,08331 | 132,05171 | 0,06583 |
| (5,5.5] | 124 | 0,09248 | 146,58403 | 3,47949 |
| (5.5,6] | 152 | 0,09677 | 153,37992 | 0,01241 |
| (6,6.5] | 160 | 0,09545 | 151,28283 | 0,50230 |
| (6.5,7] | 159 | 0,08874 | 140,65334 | 2,39312 |
| (7,7.5] | 121 | 0,07777 | 123,26780 | 0,04172 |
| (7.5,8] | 111 | 0,06425 | 101,83296 | 0,82522 |
| (8,8.5] | 84 | 0,05003 | 79,29869 | 0,27872 |
| (8.5,9] | 87 | 0,03672 | 58,20797 | 14,24170 |
| (9,9.5] | 47 | 0,02541 | 40,27518 | 1,12286 |
| $> 9.5$ | 31 | 0,03899 | 61,79949 | 15,34978 |

Taula 3: Taula de contingència test de bondat d'ajustament $\chi^2$

$$p_2 = p(0.5 \leq X \leq 1) = p\left\{Z \leq \frac{1 - 5.88}{2.05}\right\} - p\left\{Z \leq \frac{0.5 - 5.88}{2.05}\right\} = 0.00431.$$

Seguidament obtenim el valor esperat de cada interval fent $N \cdot p_i$ (tercera col-lumna) comprovant sempre que cada valor obtingut sigui sempre $\geq 5$ per a tot $i$. Aleshores, per obtenir el valor de $\chi^2$ per fer el test basta amb sumar els valors obtinguts a la darrera columna, sent així:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{20} \frac{(N_i - N \cdot p_i)^2}{N \cdot p_i} = 81.41177.$$

Aleshores amb $k = 20$ (nombre d'intervals) i $r = 2$ (paràmetres estimats), hem

de fer servir la distribució $\chi^2_{k-r-1} = \chi^2_{17}$, i per tant:

$$\begin{aligned} \text{Acceptarem } H_0 &\Leftrightarrow \chi^2_{6,1-\alpha} \geq 49.17601 \\ &\Leftrightarrow 1-\alpha \geq 0.9999999998 \\ &\Leftrightarrow \alpha \leq 2.15 \cdot 10^{-10} \end{aligned}$$

D'aquesta forma, com que el valor de $\alpha_{max}$ que ens permet acceptar la hipòtesis $H_0$ és igual a $2.15 \cdot 10^{-10}$ i aquest és menor que 0.05, hem de rebutjar la hipòtesis i per tant les qualificacions de l'opció A no segueixen una distribució normal.

Anem ara a veure les distribucions de notes de l'opció B.

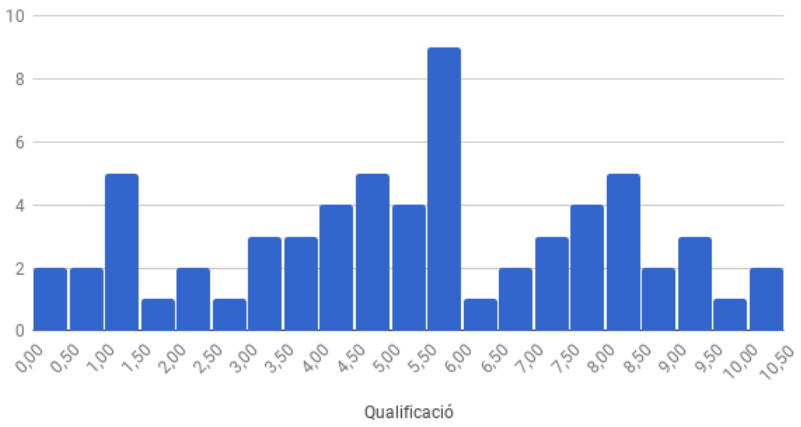



Figura 3: Distribució de qualificacions, opció B.

Com podem veure a la Figura 3, les qualificacions tenen un comportament bastant particular. En aquest cas no s'observa cap tipus de campana de Gauss amb la distribució de les notes com en l'opció A. A més, podem observar com l'interval més donat és entre 5.5 i 6, però que el següent interval de qualificacions, entre 6 i 6.5, és dels menys donats. Seguidament els altres intervals de notes més elevats són: entre 1 i 1.5 i entre 8 i 8.5, intervals molt distanciats entre si. Aquest fet justifica l'elevat coeficient de variació a la Taula 2.

No obstant això, hem de recordar que ens referim a una població de solament 65 alumnes, front els 1585 que van realitzar l'opció A. Aquest fet possiblement és el que dona aquesta diferència dels intervals, i que la distribució de qualificacions adopti aquesta forma tan particular, ja que pel teorema central del límit sabem que: quan la grandària de la mostra tendeix infinit, més s'aproxima la distribució a una normal.

Si ara prenem la mostra de tots els alumnes, independentment de l'opció escollida, tenim que la nota mitjana obtinguda és de 5.86 amb una desviació estàndard de 2.08, on la mediana de les notes en aquest cas és 6 amb un 72.61 $\%$ d'aprovats. Notem que aquestes dades no varien gaire respecte les obtingudes a l'opció A degut òbviament al baix nombre d'alumnes que van escollir l'opció B. De fet, s'observa que els nombres han minvat un mica respecte els de l'opció $A$, ja que els resultats de l'opció $B$ són inferiors.

Si ens fixem ara amb la distribució de notes de l'examen de Matemàtiques II que apareixen a la Figura 4, veim com aquesta és pràcticament calcada a la de l'opció A. No obstant però, podem dir que aquesta distribució de qualificacions tampoc és normal, ja que si les de l'opció A no ho eren, menys o seran aquestes que inclouen els resultats de l'opció B.

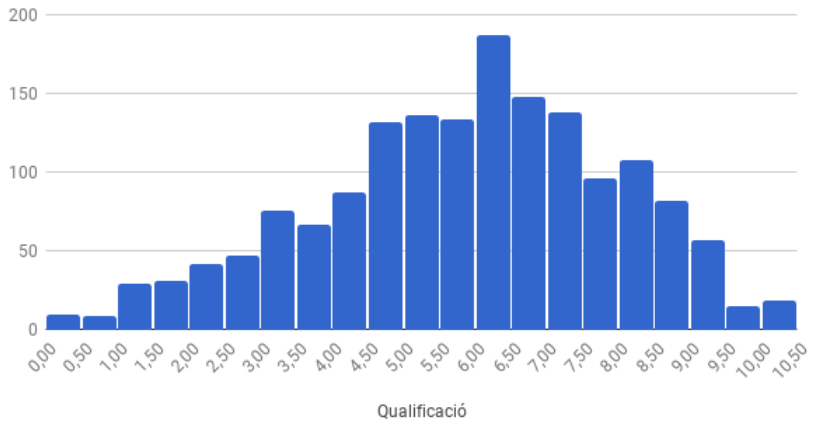



Figura 4: Distribució qualificacions PBAU Matemàtiques II.

# 5 Anàlisi dels resultats per preguntes

En aquest apartat analitzarem els resultats de les dues opcions, compararem els resultats i veurem quines van ser les preguntes que van anar millor i les que van anar pitjor i intentarem donar una explicació als resultats.

## 5.1 Opció A

Primer de tot anem a analitzar les preguntes de l'opció A, que recordem va ser l'opció més escollida pels estudiants, amb un total de 1585 alumnes, i en la que es van obtenir més bons resultats. Vegem la Taula 4.

Si ens fixem tant amb la mitjana com amb la mediana de les notes, aquestes van en decrement així com avancen les preguntes de l'examen. La primera pregunta obté una mitjana de 7.85 amb una mediana de 9. En canvi, la pregunta 4 té una mitjana 3.37 i una mediana de 3, aquests darrers, valors molt més baixos que la resta de preguntes anteriors. De fet, la pregunta 4 és l'única que té la mitjana suspesa.

| Opció A | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| **Mitjana** | 7.85 | 7.17 | 5.28 | 3.37 |
| **Mediana** | 9 | 8.5 | 4 | 3 |
| **Desviació Estàndard** | 2.45 | 3.09 | 3.12 | 3.05 |
| **Coef. de Variació** | 0.31 | 0.43 | 0.59 | 0.90 |
| **Nota Màxima** | 10 | 10 | 10 | 10 |
| **Nota Mínima** | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **Covariància Nota Final** | 3.22 | 4.11 | 4.42 | 3.60 |
| **Coef. Correlació Nota Final** | 0.64 | 0.65 | 0.69 | 0.57 |
| **Preguntes en Blanc** | 1 | 80 | 50 | 149 |

Taula 4: Mesures preguntes opció A.

De la mateixa manera, el coeficient de variació, que és el quocient entre la desviació estàndard i la mitjana, també és major així com avancen les preguntes de l'examen. D'aquesta forma podem dir que les qualificacions de la pregunta 1 són més semblants entre si, ja que el seu coeficient de variació és solament de 0.31. D'altra banda el coeficient de variació de la pregunta 4 igual a 0.9, valor que ens permet deduir que hi ha una major dispersió de notes d'aquesta pregunta.

A més, també hem calculat quina ha estat la nota màxima i la nota mínima per qualsevol de les 4 preguntes i els resultats han estat 10 i 0 respectivament. D'altra banda també hem anotat el nombre de preguntes en blanc que han deixat els alumnes. Entenem com a pregunta en blanc aquella pregunta de l'examen que no ha estat contestada. Ens ha resultat sorprenent el fet que solament hi hagi hagut una persona que hagi deixat la pregunta 1 en blanc i en cavi n'hi hagi hagut 149 que han deixat la pregunta 4 en blanc. L'altre fet sorprenent és que la pregunta 2 tengui més respostes en blanc que la pregunta 3 quant la pregunta 2 ha anat relativament millor en quan a resultats.

Ja per acabar, hem mirat també la covariància de les qualificacions de les preguntes amb la nota final i el seu respectiu coeficient de correlació, que determina el grau de dependència lineal entre les dues variables. Recordem que el coeficient de correlació es el quocient entre la covariància i el productes de les

desviacions estàndard de cada una de les variables. Com més s'acosta a 1 el coeficient de correlació major és la dependència lineal entre les dues variables, i menor quan s'acosta a 0.

En el nostre cas els coeficients de correlació de les 4 preguntes s'acosten més 1 que no a 0, però cap d'ells supera el $0.7$, podent dir d'aquesta forma que hi ha una dependència lineal dèbil entre la puntuació de la pregunta i la nota final de l'examen. Dels 4 coeficients de correlació calculats, el més gran és el de la pregunta 3, sent aquest de $0.69$. Vegem la Figura 5, on hem dibuixat el diagrama de dispersió del parell. Així doncs, podem concloure que a major puntuació de la pregunta 3, major qualificació final a la prova.

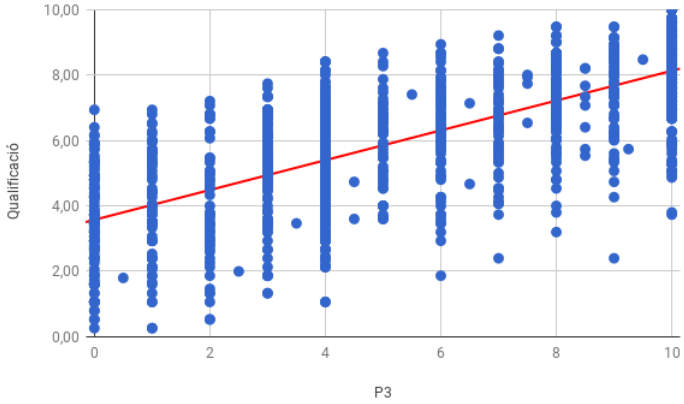



Figura 5: Correlació P3 opció A amb nota Final

D'altra banda, la puntuació del problema número 4 és la que té menys correlació amb la nota final, sent aquesta de 0.57. Recordem però que estam parlant de dependència lineal. Per contrastar aquesta informació realitzarem un test de independència per veure si realment hi ha dependència o no entre la puntuació de la pregunta 4 i la nota final de l'opció A.

Per fer-ho realitzarem un test d'independència que és un cas particular de la

prova $\chi^2$ de bondat d'ajustament. En aquest cas considerarem la hipòtesi nul·la:

$H_0$ : La puntuació de la pregunta 4 i la nota final de l'exàmen són independents.

Observem la següent Taula 5 de contingència on hi apareix el nombre d'exàmens tal que la puntuació de la pregunta 4 i la nota final de l'examen cau dins els intervals donats:

| P4 Opció A\NF | [0,3,5] | (3,5,5] | (5,6] | (6,7,5] | (7,5,10] | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| [0,2] | 140 | 150 | 130 | 149 | 34 | 603 |
| (2,3] | 25 | 40 | 43 | 80 | 42 | 230 |
| (3,4] | 8 | 7 | 13 | 30 | 18 | 76 |
| (4,5] | 0 | 3 | 8 | 22 | 22 | 55 |
| (5,7] | 6 | 29 | 45 | 117 | 143 | 340 |
| (7,10] | 0 | 4 | 7 | 26 | 95 | 132 |
| Total | 179 | 233 | 246 | 424 | 354 | 1436 |

Taula 5: Test independència pregunta 4 opció A.

Per calcular el valor de $\chi^2$ emprarem la fórmula següent:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{5} \frac{\left(x_{ij} - \frac{x_i x_j}{N}\right)^2}{\frac{x_i x_j}{N}}$$

on:

- $i \in \{(1,2,3,4,5,6\}$ nombre de files i $j \in \{1,2,3,4,5\}$ nombre de columnes.
- $x_{ij}$ és l'element de la taula de la fila $i$ i de la columna $j$.
- $x_i = \sum_{j=1}^{5} x_{ij}; \qquad x_j = \sum_{i=1}^{6} x_{ij}$
- $N = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{5} x_{ij}$

D'aquesta forma obtenim que $\chi^2 = 470,96$. Aleshores amb $n = 6$ i $m = 5$, nombre de files i columnes respectivament, hem de fer servir la distribució

$\chi^2_{(n-1)(m-1)} = \chi^2_{20}$, i per tant :

$$\begin{aligned} \text{Acceptam } H_0 &\Leftrightarrow \chi^2_{20,1-\alpha} \geq 470.96 \\ &\Leftrightarrow 1-\alpha \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \alpha \leq 0 \end{aligned}$$

D'aquesta forma obtenim que $\alpha_{\max} = 0$ és el valor màxim pel qual la hipòtesis nul·la pugui ser acceptada i sent aquest valor menor que 0.05 hem de rebutjar $H_0$. Aleshores podem concloure que hi ha dependència entre la puntuació de la pregunta 4 i la qualificació final de l'examen, fet que no podíem assegurar amb el coeficient de correlació. De totes formes, és obvi que hi ha d'haver una correlació, ja que tenir major puntuació de la pregunta 4, implica tenir més puntuació de l'examen.

Per continuar amb l'estudi dels problemes de l'opció A, ens ha semblat interessant mirar quina és la distribució de les qualificacions en funció de les preguntes. Per fer-ho, hem representat amb els histogrames de la Figura 6, la freqüència de notes dins els intervals fitats pels valors enters, des de 0 fins a 11. És a dir, que el primer interval recolliria les qualificacions que caiguin dins l'interval $[0, 1)$ i el darrer interval recolliria únicament les qualificacions que siguin igual a 10, que és la puntuació màxima de la pregunta, fent així un total de 11 intervals.

Quan observam les distribucions de notes de les preguntes 1 i 2 observam com els resultats van ser força favorables. De fet, la nota que més es va donar a les dues preguntes va ser la màxima. En la primera pregunta aquesta destaca amb una diferència bastant gran. Per ser exactes, a la qüestió 1 es va obtenir 576 cops la nota màxima i a la 2, 390.

Els bons resultats de la pregunta 1 no ens sorprenen degut a la forma automàtica de resoldre aquest problema que recordem hem catalogat de reproducció. D'altra banda, volem comentar la flexibilitat a l'hora de contestar la pregunta

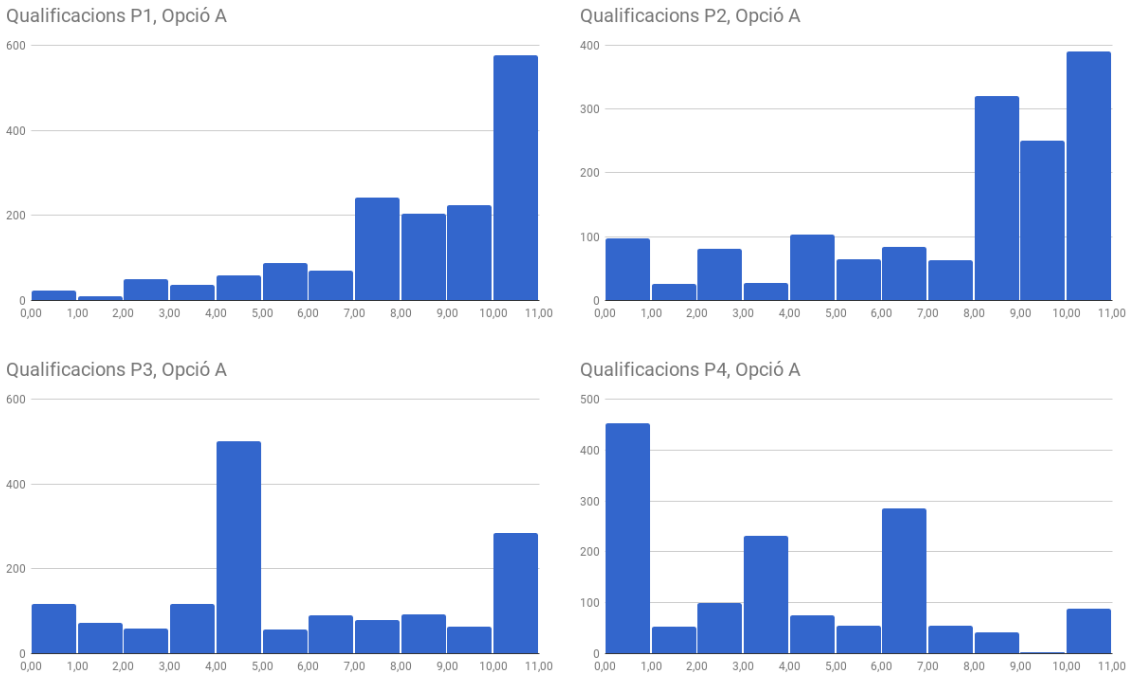



Figura 6: Distribucions de qualificacions preguntes opció A

2, la qual podria donar una justificació als bons resultats d'aquesta, ja que recordem que hi havia un total de 3 formes diferents de resoldre aquesta pregunta.

En canvi les següents dues preguntes no varen obtenir tans bons resultats. A la pregunta 3, l'interval que recull més qualificacions, en total 501, és [4,5), resultats que es queden a les portes d'aprovar la pregunta. Sorprenentment, el segon interval més repetit és el darrer, amb 285, que recordem únicament recull les qualificacions iguals a 10. D'aquesta forma podem concloure que la pregunta 3 no va anar ni bé ni malament. Recordem que la mitjana d'aquesta pregunta va ser de 5.28, obtenint un aprovat just.

Finalment, la pregunta 4, que recordem va ser la menys contestada amb un total de 149 respostes en blanc, va ser la pregunta que pitjor qualificacions va obtenir. L'interval de notes més repetit va ser $[0, 1)$ amb un total de 452 qualificacions, la majoria 0. Aquest fet és un tant preocupant ja que la pregunta 4 era

una pregunta molt senzilla de probabilitat. Hem intentat cercar una explicació a aquest fet i hem trobat tres possibles raons:

La primera raó que hem pensat és que els temaris de probabilitat i estadística són nous dins el temari de matemàtiques II amb l'entrada de les PBAU, i no es tenia informació respecte anys anteriors de quina tipologia de preguntes podien sortir.

La segona raó que s'ens ha acudit és que els temes de probabilitat i estadística moltes vegades es deixen pel final, ja que solen ser més assequibles, i es donen amb molta rapidesa sense arribar a assolir els criteris d'avaluació i estàndards d'aprenentatge que marca el currículum

Ja per acabar, la tercera i darrera raó és que la pregunta en si valia menys que les altres tres i per tant els alumnes no hi van prestar tanta atenció deixant-la pel final sense tenir temps suficient per pensar-la.

De totes formes, cap de les anteriors explicacions pren sentit quan observam els resultats obtinguts a la pregunta 4 de l'opció B, del tema d'estadística, on els resultats són bastant millors, sent una de les preguntes que millor va anar de l'examen, amb una mitja de $6.83$. Ho veurem a continuació a la Taula 6.

Es farà un anàlisis més detallat de la pregunta 4 de l'opció A a la Secció 7.3.

## 5.2 Opció B

De la mateixa forma que a l'opció A, hem recollit diferents mesures a partir dels resultats obtinguts amb les preguntes de l'opció B, que recordem va ser escollida únicament per un total de 65 alumnes.

Si de bon principi ens fixem amb les mitjanes de les preguntes podem observar com aquestes no són tan altes com les de l'opció A. No obstant això, la mitjana més baixa que s'obté és de $4.25$, a la pregunta 2, amb un resultat més alt que la mitjana més baixa de l'opció A, que recordem era de $3.37$. Per com-

| Opció B | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| **Mitjana** | 6.85 | 4.25 | 5.07 | 6.83 |
| **Mediana** | 10 | 3 | 6 | 7.5 |
| **Desviació Estàndard** | 4.09 | 3.10 | 4.08 | 3.25 |
| **Coef. de Variació** | 0.60 | 0.70 | 0.84 | 0.49 |
| **Nota Mínima** | 10 | 10 | 10 | 10 |
| **Nota Màxima** | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **Covariància Nota Final** | 7.24 | 5.96 | 7.48 | 5.78 |
| **Coef. Correlació Nota Final** | 0.65 | 0.71 | 0.68 | 0.66 |
| **Preguntes en Blanc** | 3 | 8 | 4 | 5 |

Taula 6: Mesures opció B.

parar les mitjanes de les dues opcions ens ha semblat interessant plasmar-ho a un histograma (Figura 7) amb les mitjanes de cada pregunta i així poder treure conclusions més fàcilment dels resultats de les preguntes.

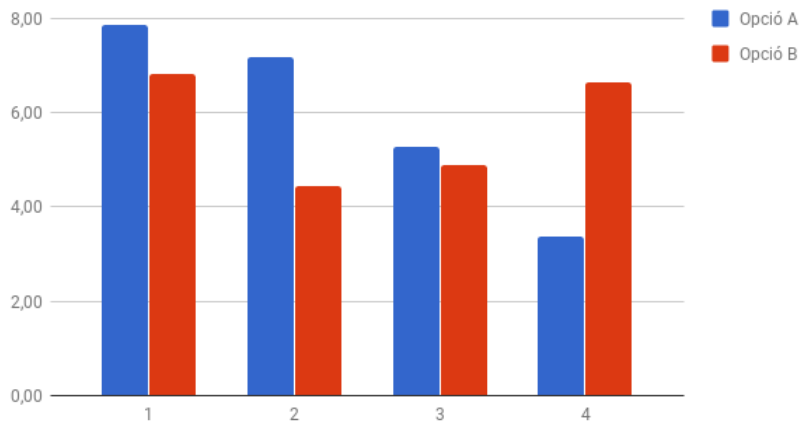



Figura 7: Mitjanes de les preguntes

Aquest histograma ens permet comprovar com les preguntes 1 i 2 de l'opció A van obtenir més bons resultats que les de l'opció B. En canvi la pregunta 3 del bloc de geometria té una èxit bastant similar. Finalment la pregunta 4, com es pot observar, va anar molt pitjor la de l'opció A que la de l'opció B, convertint-se, com ja hem dit, amb la pregunta que més fracàs va tenir de les dues opcions.

Atenent a les notes medianes que ens proporciona la Taula 6, podem veure com totes les medianes, excepte la de la pregunta 2, són més altes que les mitjanes, on cal destacar la mediana de la pregunta 1 sent aquesta de 10. Això significa que hi va haver una gran nombre d'alumnes que van obtenir la qualificació màxima d'aquesta pregunta, però també n'hi va haver que van treure notes molt baixes, fet que fa que la mitja davalli fins a $6.85$. Es pot fer també un raonament similar amb la pregunta 3. Aquests fets es poden veure reflectits amb la desviació estàndard sent les desviacions de les preguntes 1 i 3 les més elevades.

A l'hora de calcular els coeficients de variació de les diferents preguntes, podem observar com aquests són més elevats que els obtinguts a l'opció A, fent entendre que les qualificacions de les preguntes de l'opció B són més variades. Aquest fet es pot justificar amb el baix nombre de gent que va optar per aquesta opció, ja que quan hi ha unes poques qualificacions allunyades de la mitjana fan que augmenti la desviació estàndard i en conseqüència el coeficient de variació.

Igual que a l'opció A, les notes màximes i mínimes d'aquesta opció també són 10 i 0 respectivament, per a totes les preguntes. La pregunta que més s'ha deixat de contestar ha estat la pregunta 2 amb 8 blancs, de forma que aproximadament un $12\%$ dels alumnes que van escollir l'opció B, van deixar la pregunta 2 en blanc. Igual que a l'altra opció la pregunta amb la mitjana més baixa és la pregunta amb més preguntes en blanc.

Pel que fa a la Taula 6, de la mateixa forma que amb l'opció A, hem calculat els coeficients de correlació de les puntuacions de les preguntes amb la nota final de l'examen, on en aquest cas tots els coeficients són bastant semblants. El coeficient més elevat és el de la pregunta 2, sent aquest de $0.71$, de forma que és la pregunta de les dues opcions que té més correlació amb la nota final. Vegem el diagrama de punts de la Figura 8 on hem plasmat aquesta correlació.

De la mateixa forma que amb l'opció A, hem dibuixat els histogrames de les distribucions de qualificacions per a cada una de les preguntes de l'opció B i així

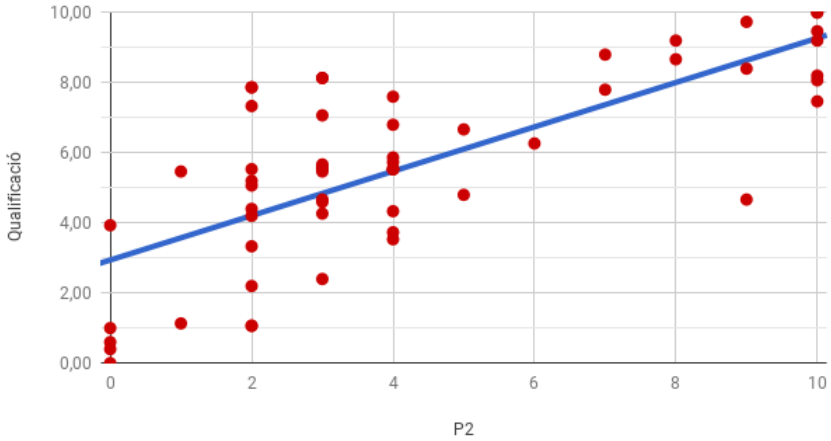



Figura 8: Correlació P2 opció B amb nota final

entendre millor els resultats. Vegem la Figura 9.

Com ja hem comentat, podem veure a les distribucions de les preguntes 1 i 3, els intervals més repetits són el primer i el darrer fet que fa que el coeficient sigui tan elevat.

També podem observar a la distribució de la pregunta 2 com els intervals més repetits són els que units formen l'interval de $[2, 5)$, fet que justifica també la mitjana suspesa d'aquesta pregunta.

Finalment la pregunta 4, s'observa com la puntuació màxima va ser la més freqüent i els altres intervals, amb bastant menys freqüència, tenen un nivell bastant semblant.

## 5.3 Conclusions

La primera i gran conclusió que podem treure de tot això és que els alumnes prefereixen i obtenen millors resultats a contestar preguntes reproductives que no pas una pregunta d'un caire més reflexiu, encara que aquesta sigui més curta o més fàcil. La certesa és que els resultats justifiquen aquest fet, ja que com hem

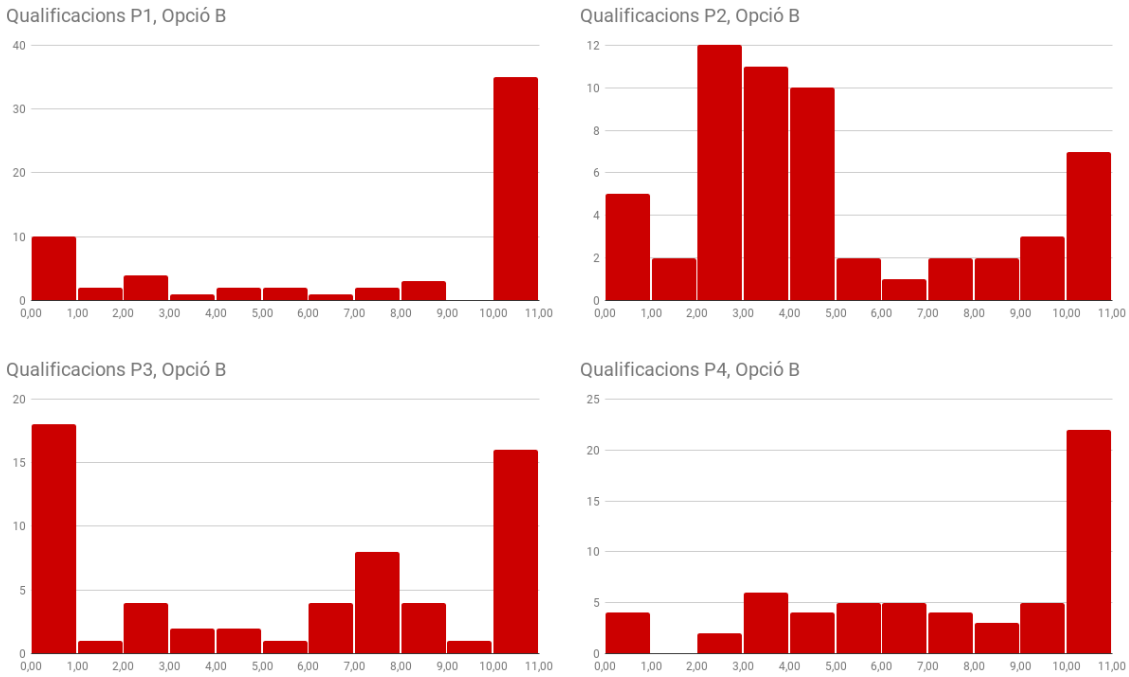



Figura 9: Distribucions preguntes opció B

vist, els millors resultats s'obtenen amb les preguntes de reproducció. Amb el nombre d'alumnes que han escollit fer l'opció A front a l'opció B, aquesta darrera més reflexiva, hem pogut demostrar aquest fet.

Si prestam atenció als blocs que constitueixen el temari, podem concloure que el bloc que millors resultats dóna i per tant que millor els va als alumnes, és el d'Àlgebra. Presenten, en general, competència per discutir i resoldre sistemes d'equacions, però quan es contextualitza una poc el problema i ells mateixos han de plantejar el sistema a resoldre, les qualificacions baixen, reafirmant el que hem dit sobre la reflexió dels problemes.

Pel que fa al bloc d'anàlisi, en aquest cas representat per dues preguntes contextualitzades a cada una de les opcions ha donat resultats bastants diferents a una opció i a l'altra. Però com ja hem comentat, com major és la reflexió que s'ha de fer per resoldre la pregunta, i en aquest cas, com més eines has d'emprar

i més connexió hi ha amb altres temaris, més perjudicada es veu la qualificació.

Les preguntes del bloc de geometria, tot hi no estar contextualitzades i ser preguntes bastant reproductives, ja que es demana estudiar la posició relativa de dues rectes i trobar la distància o punt d'intersecció, no obté unes qualificacions molt elevades. Podríem dir que el bloc de geometria és un dels blocs que més costa i uns dels més difícils per l'alumnat de batxillerat.

Ja per acabar, hem de concloure també que el darrer bloc compost de probabilitat i estadística, han tingut resultats molt diferents. Per una banda els resultats de la pregunta de probabilitat han estat molt dolents, obtenint la mitjana més baixa de totes les preguntes, 3.37, i el nombre més elevat de preguntes en blanc, 149. Realment aquest fet és preocupant ja que la majoria no ha sabut aplicar la llei de Laplace a un típic problema de combinacions de daus.

En canvi, la pregunta de l'opció B del tema d'estadística ha obtingut uns resultats molt millors, sent una de les preguntes que ha tingut més èxit de la seva opció amb una mitjana de 6.83. Aleshores podem dir que els alumnes saben tipificar una variable aleatòria i utilitzar correctament la taula de la normal per trobar una probabilitat. Novament aquest procés és purament mecànic, i saber fer un exercici bé d'aquest tipus implica saber-los fer gairebé tots. En canvi quan parlem d'una pregunta de probabilitat on s'ha de reflexionar sobre quins són els casos favorables i els casos possibles que determinen la probabilitat d'un esdeveniment, els resultats empitjoren dràstica-ment.

# 6 Els correctors influeixen?

Una de les preguntes que es fan molt els alumnes i els propis professors és si el corrector influeix o no a l'hora de corregir els exàmens. De fet, sovint els alumnes demanen una doble correcció d'algun examen, on aquesta és realitzada per un altre professor. Cal dir que la doble correcció de l'examen pot baixar-li o pujar-li la nota, o bé, quedar-se amb la mateixa nota.

En aquest àmbit, ja s'han fet alguns estudis sobre les correccions de les PAU com per exemple a l'article de (Gairín Sallán et al., 2013) on analitzen i categoritzen certes actuacions dels correctors quan identifiquen errors i posteriorment proposen recomanacions amb la finalitat que el procés qualificador sigui el més fiable possible.

Una altre estudi és el que es recull a l'article de Rosa Grau i Martí-Recober (2002), aquest realitzat amb les PAU de Catalunya l'any 1997. L'objectiu del present treball fou estudiar la qualitat de les correccions en quatre assignatures diferents: Filosofia, Biologia, Matemàtiques i Literatura Catalana. L'estudi confirma l'existència de diferències entre els correctors, sent més gran aquesta diferència a les assignatures de Filosofia i Literatura Catalana.

En el nostre cas, totes les correccions dels exàmens de selectivitat venen marcades per uns criteris específics de correcció (veure Annex A.2), i tots els correctors disposen d'aquests. En aquests criteris s'indica detalladament les puntuacions que s'han d'atorgar quan es realitza correctament una determinada passa de l'exercici per arribar a la solució. Finalment, si s'han realitzat correctament totes les passes que determinen els criteris es dóna la puntuació màxima de la pregunta.

D'aquesta forma, la correcció d'un examen hauria de ser el més similar possible, independentment del professor que la realitzi. Malgrat això, la interpretació dels criteris pot variar en funció de quin sigui el professor, o bé, que l'examen

en si sigui un poc ambigu i no es pugui determinar en exactitud quina puntuació assignar en un determinat cas. Òbviament, per corregir un examen de forma totalment objectiva, aquest hauria de ser tipus test, però aquest no és el cas de les PBAU de Matemàtiques II.

L'examen de Matemàtiques II de Juny 2017 va ser corregit per un total de 8 professors, durant aproximadament 5 dies. Cada professor va corregir un nombre considerable d'exàmens. El rang d'exàmens corregits per un professor va ser de 231 a 172.

Per determinar si la correcció d'un examen depèn o no del corrector hem decidit mostrar amb un histograma la nota mitjana dels exàmens corregits per a cada un dels professors, això si, respectant l'anonimat dels correctors. Veure la Figura 10.

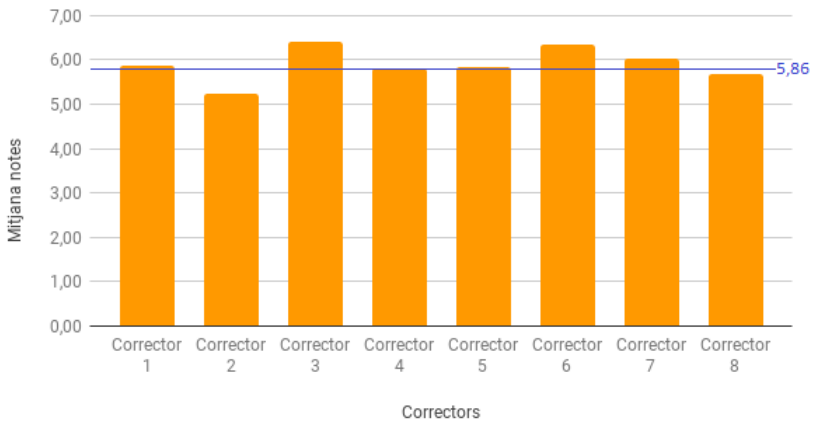



Figura 10: Nota mitjana correctors

Recordem que la nota mitjana de l'examen de Matemàtiques II va ser de 5.86. Podem observar en aquesta figura que hi ha tres mitjanes, concretament la dels correctors 3, 6 i 7, que superen la mitjana total, arribant a travessar fins hi tot la línia horitzontal del 6. Els correctors 1, 4, 5 i 8, podríem dir que estan sobre la mitjana. No obstant, el corrector 2 està bastant per sota de la mitjana, sent

aquesta de 5.25. A més a més, també hem dibuixat un diagrama de caixes i bigots (veure Figura 11) per poder comparar millor els resultats i es pot observar també com les qualificacions del corrector 2 són més baixes.

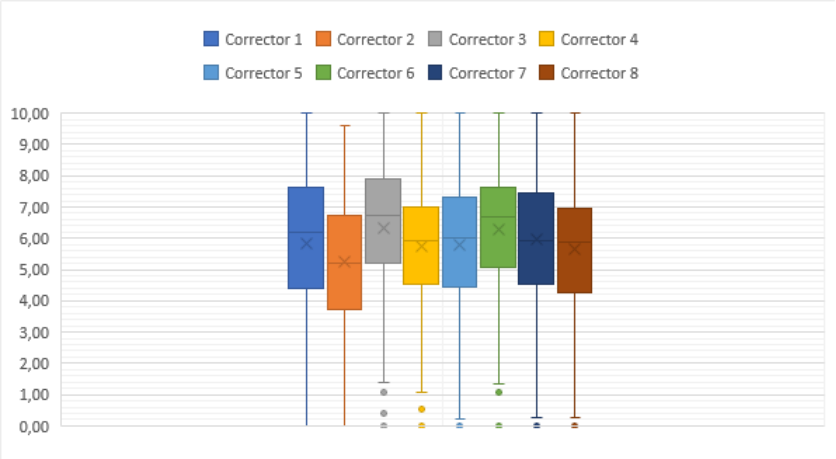



Figura 11: Diagrama de caixes i bigots qualificacions correctors

Hem fet el mateix amb el percentatge d'aprovats per a cada un dels professors correctors on el percentatge d'aprovat general va ser del $72.61\%$. Veure Figura 12.

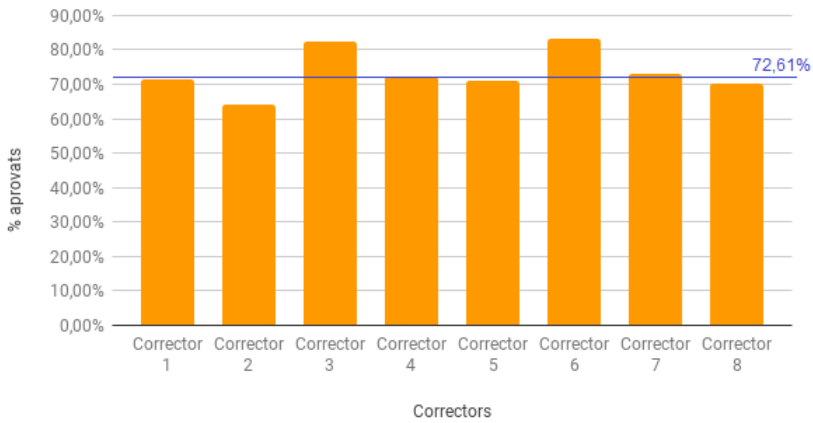



Figura 12: Percentatge d'aprovats correctors

A simple vista diríem que els correctors afecten a la correcció de l'examen ja

que un alumne, veient aquestes dades, preferiria que el seu examen no fos corregit pel corrector 2, i preferiblement que fos corregit pels professors 3 o 6. Ara bé, no és suficientment concloent la informació recollida amb aquests diagrames per poder afirmar que efectivament les qualificacions es veuen afectades en funció de quin sigui el corrector.

Una vegada acabada la prova, tots els exàmens es dipositen dins sobres quan aquests són entregats pels alumnes. Després, aquests sobres es reparteixen als diferents correctors de forma aleatòria on aquests en desconeixen la procedència. És a dir, a un corrector pot tocar-li corregir una mateixa zona geogràfica de les Illes, i que aquesta zona tengui un nivell més baix que la resta. Aquest fet provocaria que les qualificacions mitjanes del professor en particular fossin més baixes, i això podria haver-li passat al corrector 2.

Per tal de clarificar aquest fet, realitzarem un test $\chi^2$ d'homogeneïtat per comprovar si les qualificacions dels correctors segueixen una mateixa distribució. Per fer-ho hem calculat la següent taula de freqüències d'intervals en funció del corrector.

| **OBSERVAT** | **[0,2)** | **[2,4)** | **[4,6)** | **[6,8)** | **$\geqslant$8** | **Total** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Corrector 1** | 16 | 35 | 54 | 77 | 48 | 230 |
| **Corrector 2** | 17 | 42 | 81 | 62 | 25 | 227 |
| **Corrector 3** | 10 | 16 | 44 | 84 | 48 | 202 |
| **Corrector 4** | 8 | 35 | 82 | 81 | 34 | 240 |
| **Corrector 5** | 9 | 27 | 57 | 70 | 31 | 194 |
| **Corrector 6** | 5 | 15 | 52 | 76 | 34 | 182 |
| **Corrector 7** | 7 | 26 | 58 | 52 | 36 | 179 |
| **Corrector 8** | 7 | 36 | 61 | 67 | 25 | 196 |
| **Total** | 79 | 232 | 489 | 569 | 281 | 1650 |

Taula 7: Taula de freqüències d'intervals dels correctors

Volem contrastar la hipòtesi nul·la:

$H_0$ : la distribució de notes és la mateixa per tots els correctors.

Per això, primer de tot hem de calcular el valor de $\chi^2$ a partir de la fórmula següent:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{5} \frac{\left(x_{ij} - \frac{x_i x_j}{N}\right)^2}{\frac{x_i x_j}{N}}$$

on:

- $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ i $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- $x_{ij}$ és l'element de la taula de la fila $i$ i de la columna $j$.
- $x_i = \sum_{j=1}^{5} x_{ij}; \qquad x_j = \sum_{i=1}^{8} x_{ij}$
- $N = \sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{5} x_{ij}$

D'aquesta forma obtenim que $\chi^2 = 65.2158051$. Aleshores:

$$\begin{aligned} \text{Acceptam } H_0 \quad &\Leftrightarrow \quad \chi^2_{28,1-\alpha} \geq 65.2158051 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - \alpha \geq 0.9999157 \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha \leq 8.429567 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

Per tant, tenim que $\alpha_{\text{màx}} = 8.429567 \cdot 10^{-5}$ és el valor de $\alpha$ més gran pel qual la hipòtesi nul·la $H_0$ pugui ser acceptada. Aleshores com que $\alpha_{\text{màx}} < 0.05$ hem de rebutjar la hipòtesis $H_0$ i podem afirmar que les distribucions de les qualificacions són diferents en funció del corrector. D'aquesta forma, concloem que els correctors corregeixen de forma diferent i per tant afecten a les puntuacions dels exàmens.

# 7 Errors més comuns a les PBAU

Una de les darreres motivacions d'aquest estudi ha estat analitzar quins tipus d'errors cometen en més freqüència els alumnes durant la PBAU de Matemàtiques II.

A hores d'ara, existeixen alguns estudis realitzats respecte els errors comesos en els exàmens de selectivitat. A continuació esmentarem uns quants dels estudis més recents al respecte.

A Espinel Febles et al. (2007) és presenta un estudi realitzat a la comunitat de les Illes Canàries dels errors comesos a la prova de matemàtiques aplicades a les ciències socials de juny 2005. En aquest estudi es mostra com els alumnes prefereixen preguntes d'estadística i que s'obtenen qualificacions més altes quan empren gràfics a l'hora de resoldre el problema. A més es proposa desenvolupar diferents metodologies per tal de millorar l'ensenyança de l'estadística:

- Ús d'analogies en el desenvolupament de continguts teòrics.
- Ús de les eines TIC.
- Treball amb projectes estadístics.

A Ramos Domínguez et al. (2009) també es realitza un estudi als alumnes que van fer la prova de matemàtiques aplicades a les ciències socials a les Illes Canàries al juny de 2007. En el present estudi es mostren els errors que cometen els alumnes de batxillerat a l'hora de resoldre problemes de contrast d'hipòtesis, s'analitzen les causes i es proposen alternatives per tal intentar evitar aquests tipus d'errors.

Nortes Checa i Nortes Martines-Artero (2010) realitzat per la Universitat de Múrcia enfocat a la resolució de problemes de les PAU i als errors més significatius que cometen els alumnes. Per això es va partir d'una mostra d'exàmens fets pels alumnes en la matèria de matemàtiques aplicades a les ciències socials,

realitzats al setembre de 2009. En ell s'analitzen les respostes de cada una de les 10 preguntes que composen l'examen i es detecten els errors més significatius, entre els quals destaquen: la comprensió incorrecta de l'enunciat, solucions sense sentit i errors de càlcul. Finalment es treuen conclusions de cara a que el professorat conegui com contesten i afronten els alumnes la resolució dels problemes de selectivitat i contribuir positivament a l'ensenyança i a l'aprenentatge de les matemàtiques.

A l'article de Mallart Solaz (2014) s'analitza una mostra de 104 exàmens de selectivitat de l'assignatura de Matemàtiques de l'any 2012 de la Universitat de Barcelona. Mallart estudia les resolucions dels alumnes dels diferents problemes amb la finalitat de detectar els errors més significatius i d'aquesta forma poder incidir en les dificultats de l'aprenentatge. Finalment es donen 5 punts comuns en totes les resolucions sobre els quals es pot reflexionar i abordar a l'aula.

1. Correcta assimilació dels processos mecànics de resolució.

2. Incapacitat de resoldre creativament qüestions sobre la interpretació geomètrica de l'àlgebra.

3. Incorrecta assimilació de les operacions i propietats de l'àlgebra matricial.

4. Indiferència front a resultats parcials incoherents i contradictoris sobre els que construeixen la pròpia argumentació.

5. Absència de rigor i precisió en els càlculs efectuats.

Aquests són uns quants dels estudis més recents que s'han anat fet dels errors comesos als exàmens de selectivitat que ens serviran una mica per guiar a continuació el nostre estudi.

## 7.1 L'error

Les dificultats que tenen els alumnes s'evidencien a través de les seves errades. Per això, seguint a Franchi i Hernández de Rincón (2004), és imprescindible reflexionar envers el seu significat i origen. A l'ensenyament tradicional, el docent no treu profit de de l'error, car que es concebut negativament. D'altra banda, per al Constructivisme o la Teoria de les Situacions Didàctiques de Brousseau (2002) es considera fonamental com a eina per a la construcció de coneixement.

La investigació d'aquestes dificultats i errors ha donat lloc a nombrosos estudis que tenen com a principal característica la pluralitat de casuístiques. I tant és així que l'error no es pot considerar com una categoria sinó com un prisma, explicat des de la diversitat de perspectives i enfocaments. No obstant això, podem diferenciar, tal com ho fa Rico (1995), entre quatre grans línies d'investigació. En primer lloc, *la identificació, classificació i anàlisi de les dificultats i errors i les causes que els provoquen*. La segona línia, es decantaria pel *tractament curricular de l'error*. La tercera línia s'enfocaria a *la formació del professorat en relació a les dificultats dels alumnes*. Finalment, la quarta línia, tindria per objecte d'estudi *l'anàlisi tècnic i estadístic dels errors.*

En endavant, ens centrarem en categoritzar aquests errors i fer una anàlisi dels mateixos, de manera que pugui servir de precedent per al disseny de futures proves de Batxillerat i també, per a què els docents tenguin informació sobre quins són els obstacles més comuns als quals s'enfronta l'alumnat.

## 7.2 Tipologies d'errors matemàtics

Molts d'autors han proporcionat classificacions i tipologies d'errors, les quals creiem oportú sintetitzar a la Taula 8.

| Autor | Categories |
|---|---|
| Brousseau | - Errades a nivell pràctic<br>- Errors en la tasca<br>- Error de la tècnica<br>- Error de tecnologia<br>- Error a nivell teòric |
| Socas | - Errors que tenen el seu origen en un obstacle<br>- Errors que tenen el seu origen en l'absència de sentit<br>- Errors que tenen el seu origen en actituds afectives i emocionals cap a les matemàtiques |
| Movshovitz et al. | - Errors causats per dades mal utilitzades<br>- Errors causats per una incorrecta interpretació del llenguatge<br>- Errors causats pel mal ús de teoremes o definicions deformades<br>- Errors causats per la manca de verificació de la solució<br>- Errors tècnics |
| Radatz | - Errors causats per la dificultat del llenguatge<br>- Errors causats per la dificultat d'obtenir informació espacial<br>- Errors causats a un aprenentatge deficient de fets, destreses i conceptes previs<br>- Errors causats per rigidesa en el pensament<br>- Errors causats per l'aplicació de regles o estratègies irrellevants |

Taula 8: Categories d'errors segons autors (Vist a Escudero Domínguez i Domínguez Viñas (2014), traduïda i modificada)

A l'estudi de Franchi i Hernández de Rincón (2004) es fa un resum de les anteriors classificacions, explicant a gran trets en què consisteixen els ítems.

En primer lloc, la tipologia d'errors de **Brousseau (2002)**. Aquesta categorització es basa en les atribucions dels professors a les errades dels alumnes.

- **Error a nivell pràctic:** relacionats amb un càlcul deficient.
- **Error en la tasca:** atribuïts al descuit per part de l'alumne.
- **Errors de tècnica:** el professor critica l'execució d'un mode operatiu conegut.
- **Errors de tecnologia:** el professor critica l'elecció de la tècnica.
- **Errors a nivell teòric:** relacionats amb els coneixements teòrics de l'alumne que serveixen de base per a la tecnologia i les tècniques associades.

En segon lloc, **Socas Robayna (1997)**. Segons aquest autor, els errors en l'aprenentatge de les matemàtiques són causats per diverses dificultats que es poden agrupar en cinc categories. Tenint en compte aquestes dificultats, realitza una posterior categorització dels errors atenent al seu origen Ruano et al. (2008):

- **Errors que tenen el seu origen en un obstacle:** considera obstacle com un coneixement adquirit – no la falta de coneixement – que ha demostrat la seva efectivitat en diversos contextos. Quan l'alumne utilitza aquest coneixement fora d'aquests contextos, dona lloc a respostes inadequades.
- **Errors que tenen el seu origen en l'absència de sentit:** relacionats estretament amb l'àlgebra però amb origen en l'aritmètica, procediments inapropiats i desconeixença del llenguatge algebraic.
- **Errors que tenen el seu origen en actituds afectives i emocionals cap a les matemàtiques:** són de diversa índole com ara faltes de concentració, oblits, excessiva confiança, bloquejos, etc.

En tercer lloc, Movshovitz-Hadar et al. (1987) realitzen una classificació empírica que assigna les errades a un d'aquestes sis categories:

- **Errors causats per dades mal utilitzades:** els mateixos autors la defineixen com la categoria que inclou els errors que poden estar relacionats amb discrepàncies entre la informació donada i com l'examinat la tracta. Un exemple molt típic és copiar malament una dada de l'enunciat.

- **Errors causats per inferències no vàlides lògicament:** aquesta categoria inclou errors que tenen a veure amb un raonament fallit invàlidament extret d'una informació donada o prèviament inferida. Aquest error es dona per exemple quan s'intenta demostrar una cosa a emprant una propietat del que s'està demostrant. No es pot demostrar que una figura és un rectangle a partir de comprovar que els angles oposats són iguals, ja que un rombe compleix aquesta propietat i no és un rectangle.

- **Errors causats per la utilització de teoremes o definicions deformats**: aquestes errades tenen a veure amb la distorsió d'un principi, regla, teorema o definició identificable. Per exemple aplicar el teorema de Pitàgores a un triangle que no és rectangle.

- **Errors provocats per la manca de verificació de la solució**: com apunten els autors, la principal característica d'aquests errors és que cada passa donada per l'alumne és correcta excepte el resultat final. Aquest tipus d'error és molt comú a problemes de geometria. Per exemple, quan es demana l'altura $y$ d'un edifici però abans es necessita saber la distància $x$ entre la persona i l'edifici. Es calcula $x$ i $y$ correctament, però quan es dona la solució de l'exercici és diu que aquesta és $x$, donant una solució incorrecta.

- **Errors tècnics:** errors de càlcul i de procediment en algoritmes bàsics.

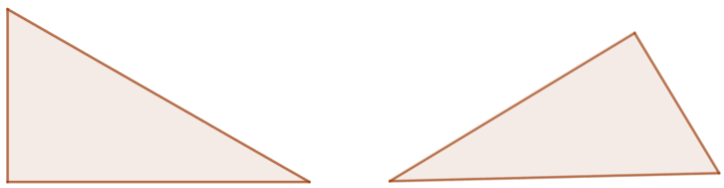
Finalment, pel que fa a la classificació de Radatz (1980) (citat a Franchi i Hernández de Rincón (2004)) realitza una categorització partint des de la perspectiva del processament de la informació. A partir d'aquesta categorització, els autors Abrate et al. (2006) elaboren la següent llista amb exemples il·lustradors de cada errada:

1. **Dificultats del llenguatge.** Errades derivades del mal ús dels símbols i termes matemàtics, causats per una falta de comprensió semàntica del llenguatge matemàtic.

   **Exemple:** Si $x$ denota l'edat de Maria i $y$ la de Joan. Maria té el doble d'edat que Joan, la traducció incorrecta al llenguatge simbòlic és: $2x = y$.

2. **Dificultats per obtenir informació espacial.** Errors procedents de la inadequada representació icònica (imatges espacials) de situacions matemàtiques.

   **Exemple:**

   El triangle de l'esquera és identificat pels alumnes com un triangle rectangle, rotació d'aquest (com a l'exemple de la dreta) porta a no identificar-lo com a tal.

3. **Aprenentatge deficient de fets, destreses i conceptes previs.** Errades causades per deficiències en el maneig de conceptes, continguts i procediments per a la realització d'una tasca matemàtica. Exemple: Identificació de l'interval continu de nombres real $[-2, 3]$ com el conjunt discret de nombres $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

4. **Associacions incorrectes o rigidesa del pensament.** Són errors que en general són causats per la incapacitat del pensament per ser flexible, dit altrament, per adaptar-se a situacions noves. Dins aquesta classe d'errors es tenen:

   (a) **Per perseverança.** Predominen els elements singulars problema
   **Exemple:** Demostrar una propietat sobre triangles en general, utilitzant un triangle rectangle (un cas particular).

   (b) **D'associació.** Raonament o associacions incorrectes entre elements singulars.
   **Exemple:** $\sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$

   (c) **D'interferència.** Quan els conceptes o operacions interfereixen uns amb altres.
   **Exemple:** la multiplicació de nombres negatius ($- \cdot - = +$) ha interferit en la resolució d'una resta: $-3 - 5 = 8$.

   (d) **D'assimilació.** Quan la informació no és ben processada per mor d'errades en la percepció.
   **Exemple:** $2x - x = 2$

5. **Aplicació de regles o estratègies irrellevants** . Errors produïts quan s'apliquen regles o estratègies similars per a coneixements distints.
   **Exemple:** El càlcul d'arrels de $x^2 + x - 6 = 0$ dóna per resultat $x_1 = 2$ i $x_2 = -3$. D'aquesta manera, el càlcul $x^2 + x - 6 = -4$ sol conduir erròniament al mateix resultat.

A tall de cloenda d'aquest apartat, podem observar que les categories dels diferents autors, abans esmentades, presenten similituds en alguns dels seus ítems. En aquest sentit, la categoria "errors causats per dificultats del llenguatge" de Radatz (1980) és eminentment semblant a la categoria "errors causats per

una interpretació incorrecta del llenguatge" de Movshovitz-Hadar et al. (1987). Així mateix, els "errors a nivell pràctic" de Brousseau (2002), poden considerar-se també dins la categoria "errors tècnics" de Movshovitz-Hadar et al. (1987). Entre d'altres. Finalment, Rico (1995) remarca que, tot i existir una quantitat de considerable de categoritzacions dels errors, aquestes no han superat, per ara, el nivell descriptiu. És a dir, no existeix un desenvolupament teòric sistemàtic que doni lloc a classificar, interpretar i/o predir els errors en termes epistemològics, sense categories cognitives

## 7.3 L'error a les PBAU

Com ja hem dit, una de les darreres motivacions d'aquest treball és analitzar els errors més comuns que cometen els estudiants a les proves de selectivitat i treure conclusions al respecte per tal de poder millorar els resultats.

Després de fer una amplia recerca dels diferents tipus d'errors hem decidit fer una síntesi de tots ells, on hem fent alguna petita modificació i n'hem afegit algun més que hem considerat interessant a partir de l'observació realitzada de la mostra dels exàmens. D'aquesta forma hem obtingut el següent decàleg de l'error, intentant d'aquesta forma poder classificar els diferents tipus d'errors que es poden donar a un exercici de matemàtiques, i en aquest cas en un problema de selectivitat.

1. **Pregunta en Blanc.** Hem decidit considerar aquest tipus de resposta com un error el qual es dóna quan l'alumne no presenta iniciativa per resoldre l'exercici. Aquest tipus d'error es pot donar quan un alumne no sap fer l'exercici o bé per una mancança de temps.

2. **Interpretació errònia de l'enunciat.** Aquest error té lloc quan l'alumne interpreta incorrectament una part o el tot de l'enunciat del problema i per tant, no tradueix la informació correctament al llenguatge matemàtic.

3. **Incapacitat d'extreure informació de l'enunciat.** L'alumne no és capaç de seleccionar les dades necessàries que proporciona l'enunciat d'un problema per tal d'arribar a la solució. Aquest error és molt comú quan parlam de problemes contextualitzats als quals s'ha de fer una reflexió de totes les dades que ens proporciona l'enunciat i escollir aquelles que realment són rellevants.

4. **Error en la transcripció de dades.** Aquest tipus d'error té lloc quan es realitza una passa del problema i es copia malament alguna dada que proporcionada per l'enunciat o bé que ja has calculat anteriorment, provocant una alteració del resultat final.

5. **Error tècnic.** Errors de càlcul i de procediment en algoritmes bàsics.

6. **Error degut a teoremes o definicions deformades.** Aquest tipus d'errades tenen lloc quan es fa una distorsió d'un principi, regla, propietat, teorema o definició identificable. Per exemple, aplicar el teorema de Pitàgores a un triangle que no és rectangle.

7. **Error degut a la manca de justificació.** Aquest tipus d'error té lloc quan es realitzen passes, correctes o no, sense una justificació que expliqui el motiu pel qual es realitza l'operació.

8. **Error provocat per la falta de rigor del llenguatge matemàtic.** Aquest error es dóna quan és fa ús d'una simbologia inadequada. Per exemple quan es demana que es calculi la derivada d'una funció i es dóna com a resposta: $x^2 + 3x = 2x + 3$.

9. **Error degut a un aprenentatge deficient.** Aquest error té lloc quan es realitzen passes sense sentit per resoldre el problema, a causa de la manca o la inequació dels coneixements previs.

10. **Error degut a la rigidesa del pensament.** L'estudiant és incapaç de fer raonaments lògics i a ser flexible per poder resoldre problemes que impliquin adaptar-se a situacions diferents a les que està acostumat.

Donada l'anterior categorització de l'error en un exercici de matemàtiques, la pròxima tasca serà prendre una mostra aleatòria del total d'exàmens, on en aquest cas hem agafat 50 exàmens amb la condició que l'opció escollida hagi estat l'A. Hem decidit únicament contemplar l'opció A ja que la mostra es molt més àmplia que la de l'opció B i ens permetrà treure més conclusions al respecte.

Una vegada presa la mostra ens hem fixat únicament amb els exercicis 3 i 4, que recordem van ser els que pitjor resultats van obtenir. L'objectiu final serà poder dir quina va ser l'errada més comú per a cada un dels exercicis i d'aquesta forma concloure quines són aquelles dificultats més gran que es troben el alumnes a l'hora de realitzar la prova de matemàtiques.

Primer de tot vegem alguns dels exemples de les errades més comunes que hem trobat i d'algunes que ens han cridat l'atenció. Notarem que a les següents imatges i apareixen les correccions dels professors en bolígraf vermell.

Una de les errades més comuns que ens hem trobat a la pregunta 3 ha estat l'error tècnic, degut a errades de càlcul que condueixen a posteriors resultats erronis, condicionant greument a la puntuació final de la pregunta.

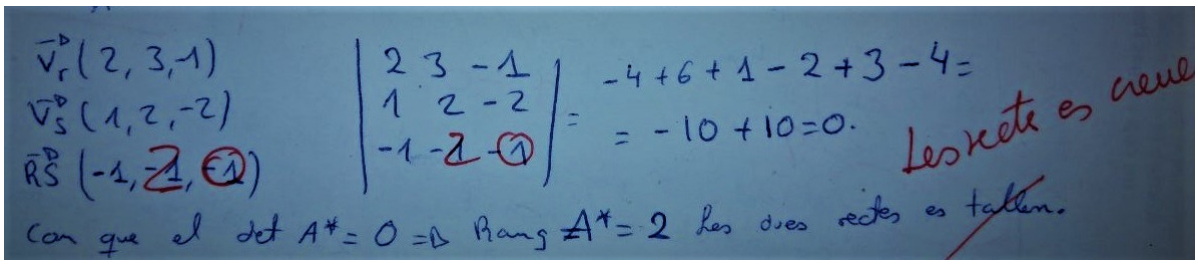



Figura 13: Error tècnic pregunta 3.

Podem observar com l'anterior errada a conduït a un posterior càlcul del de-

terminant erroni i a continuació a una afirmació errònia dient que les rectes es tallen, quan realment es creuen.

Una altra de les errades que també ens hem pogut trobar a l'exercici 3 és la errada provocada per una deformació a l'hora d'aplicar lleis o fórmules.

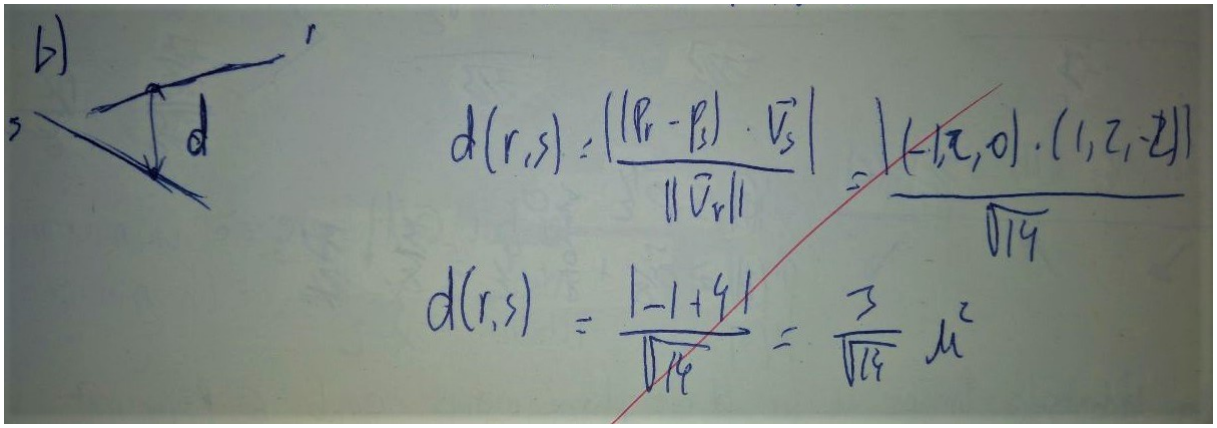



Figura 14: Error degut a la deformació d'una fórmula, P3, b).

En aquest cas veim com l'alumne intenta trobar la distància entre dues rectes que es creuen mitjançant una fórmula inadequada per aquest cas. L'alumne intenta emprar la fórmula de la distància entre un punt i una recta, però sense tenir en compte que en aquest cas el punt ha d'estar sobre la perpendicular comuna. A més, utilitza la formula de forma errònia ja que realitza el producte escalar quan en realitat s'ha d'utilitzar el producte vectorial i a més el denominador hauria de ser $||\vec{v}_s||$.

Un altre exemple d'aquest tipus d'error que ens hem trobat, en aquest cas al primer apartat és el següent:

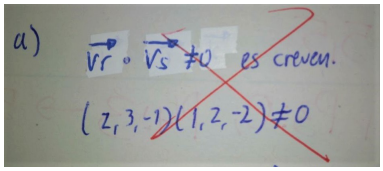



Figura 15: Error degut a la deformació d'una propietat, P3, a).

En aquest cas s'ha emprat una propietat fonamental del producte escalar per demostrar que dues rectes es creuen. L'estudiant comprava que efectivament els dos vectors directors de les rectes no són perpendiculars, però aquest fet no demostra que les dues rectes es creuïn. Aquest darrer error també ha estat catalogat d'un aprenentatge deficient ja que és una errada molt greu.

El següent exemple mostra una errada de rigor amb el llenguatge matemàtic que també hem pogut trobar.

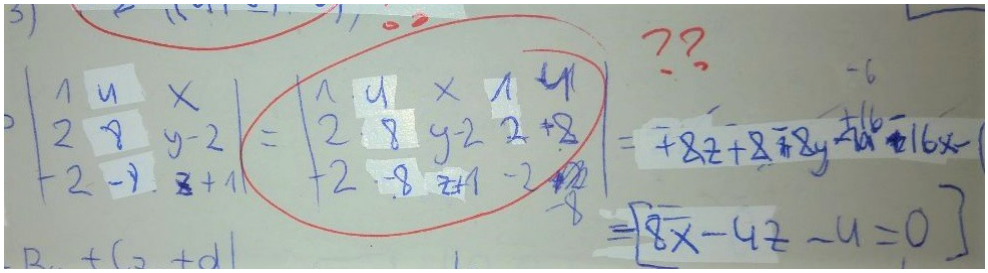


Figura 16: Error degut a la falta de rigor del llenguatge matemàtic, P3, a).

L'alumne calcula un determinant de dimensió $3 \times 5$, donant lloc a una falta de rigor del llenguatge matemàtic molt gran, ja que això és impossible de calcular.

Un dels errors que també més hem pogut trobar a l'exercici 4 és el causat a un aprenentatge deficient, on es realitzen passes sense cap tipus de sentit per resoldre el problema. Veure Figura 18

En aquesta resolució de l'exercici 2 es poden observar una gran multitud de passes sense sentit, com per exemple la forma de demostrar que les dues rectes es creuen. A banda d'això, també podem veure un error de deformació com el que hem vist a la Figura 14.

Un altre error molt comú que volem comentar i que hem pogut observar en algunes de les imatges, és la manca de justificació dels processos seguits per resoldre l'exercici. No obstant, encara que nosaltres el consideram un error, molts de correctors decideixen no penalitzen aquest tipus d'accions.

Volem remarcar que aquestes imatges només mostren alguns dels errors que

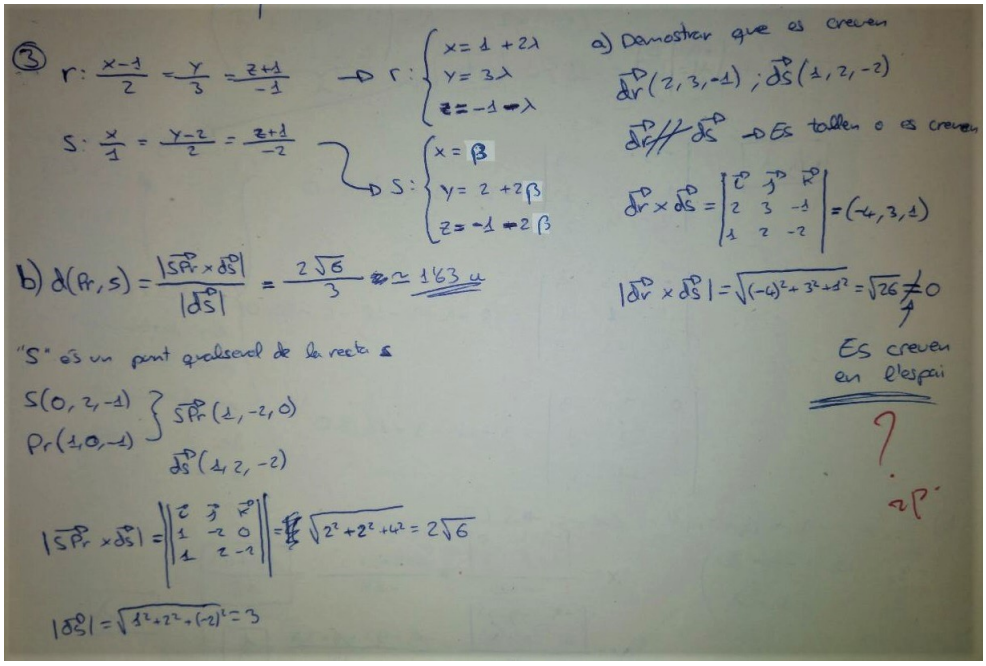



Figura 17: Error degut a un aprenentatge deficient, P3.

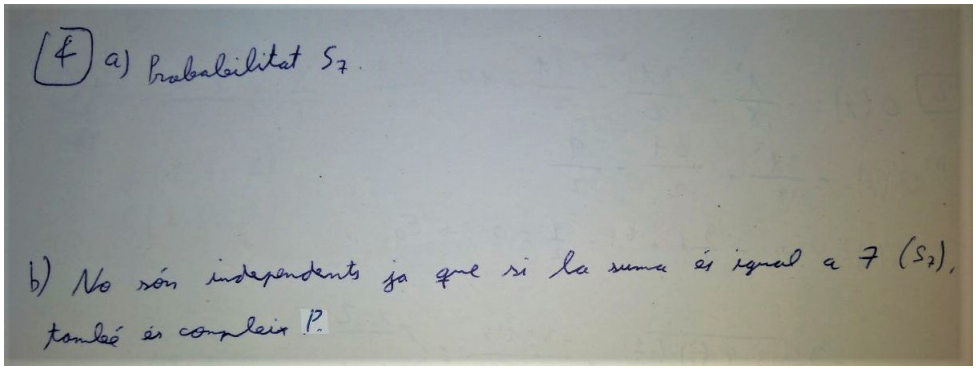
ens hem pogut trobar a partir de la mostra. Al marge d'aquests, també hem trobat preguntes en blanc i preguntes amb la màxima puntuació. Aquestes imatges

En aquest cas no hem considerat que s'hagin comés errors deguts a un interpretació errònia de l'enunciat o a una incapacitat d'extreure informació de l'enunciat, ni tampoc errors deguts a la rigidesa del pensament, ja que aquest exercici no és un exercici on s'hagi de reflexionar sobre una situació donada a la qual no es tan acostumats. És un problema molt típic sense cap tipus de contextualització, ve molt marcat el que s'ha de fer, raó per la qual no tenen lloc aquest tipus d'errors en aquest problema.

Anem a continuació a veure uns quants dels errors més comuns de la pregunta 4.

En primer lloc volem mostrar un dels errors que més ens hem trobat en aquest exercici, degut a un aprenentatge deficient.

Hem trobat una gran quantitat de respostes on no s'ha sabut calcular la proba-


4 a) Probabilitat $S_7$.

b) No són independents ja que si la suma és igual a 7 ($S_7$), també és complein P.

Figura 18: Error degut a un aprenentatge deficient, P3.

bilitat de cap dels dos esdeveniments que es demanen. A banda d'això, al segon apartat, en molts de casos s'intenta donar una justificació textual de perquè els esdeveniments són independents, quan realment no ho són.

En aquest segon apartat únicament s'havia de verificar que $P(P \cap S_7) \neq P(P) \cdot P(S_7)$. Si es justificava que $P(P \cap S_7) = 0$, degut a la incompatibilitat d'aquests dos esdeveniments, i s'havien calculat bé les probabilitats de l'apartat a), era immediat afirmar que no eren independents. Idò bé, a únicament dos exàmens de la mostra que hem agafat, s'ha sabut realitzar correctament aquest darrer apartat. Volem comentar a més que aquesta propietat per determinar si dos successos són independents s'ensenya a 4 ESO, raó per la qual ens sorprèn encara més aquest fet. Vegem a continuació uns quants exemples on s'intenta justificar aquesta independència erròniament.

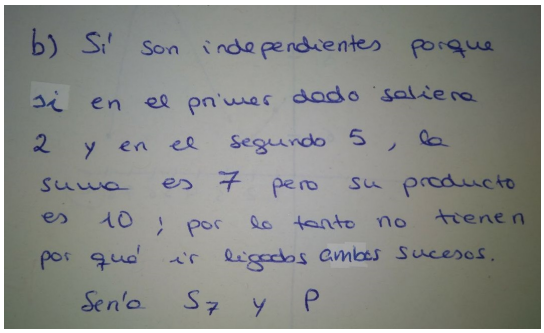

b) Sí son independientes porque si en el primer dado saliera 2 y en el segundo 5, la suma es 7 pero su producto es 10; por lo tanto no tienen por qué ir ligados ambos sucesos.
Serían $S_7$ y P

Figura 19: Error degut a un aprenentatge deficient, P4.

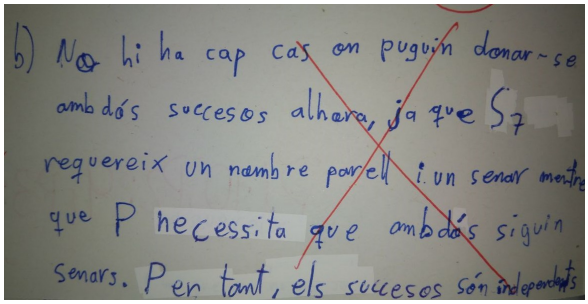

b) No hi ha cap cas on puguin donar-se ambdós successos alhora, ja que $S_7$ requereix un nombre parell i un senar mentre que P necessita que ambdós siguin senars. Per tant, els successos són independents

Figura 20: Error degut a un aprenentatge deficient, P4.

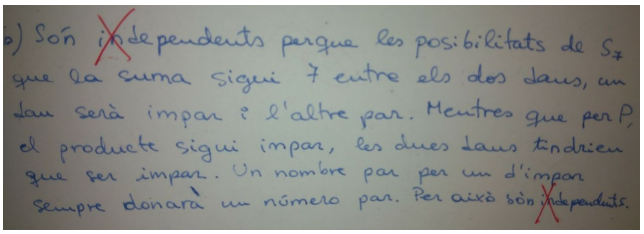
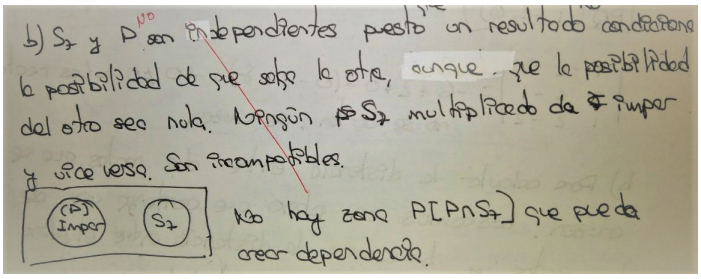

b) Són independents perque les posibilitats de $S_7$ que la suma sigui 7 entre els dos dans, un dau serà impar i l'altre par. Mentres que per P, el producte sigui impar, les dues daus tindrien que ser impar. Un nombre par per un d'impar sempre donarà un número par. Per això són independents.

Figura 21: Error degut a un aprenentatge deficient, P4.


b) $S_7$ y P no son independientes puesto un resultado condiciona la posibilidad de que salga la otra, aunque que la posibilidad del otro sea nula. Ningún $S_7$ multiplicado da impar y vice versa. Son incompatibles.



No hay zona $P[P \cap S_7]$ que pueda crear dependencia.

Figura 22: Error degut a un aprenentatge deficient, P4.

Podem observar com és fa una mescla dels conceptes de esdeveniments independents i incompatibles, justificants que els esdeveniments són independents quan realment s'està justificant que són incompatibles. Aquest fet és l'hem catalogat com un error d'aprenentatge deficient, ja que no es tenen clars conceptes bàsics de la probabilitat.

A banda d'aquests, també volem mostrar alguns errors que també hem trobat a l'exercici 4:

Si observam la Figura 23, en aquest cas no s'ha justificat el procés per treure

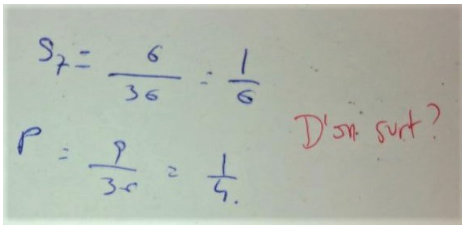



Figura 23: Error degut a la manca de justificació, P4.

ambdues probabilitats, i encara que aquestes siguin correctes, la puntuació de l'apartat ha estat 0.

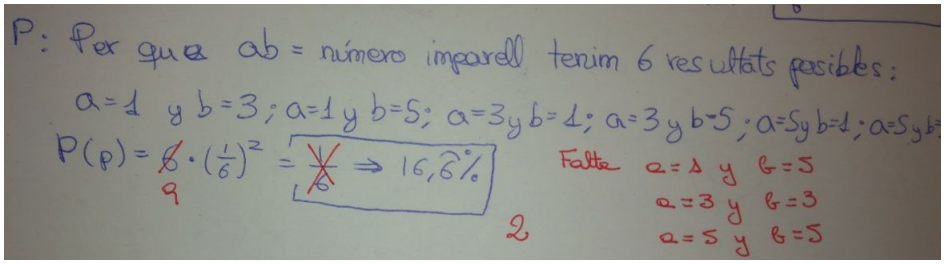



Figura 24: Error degut a la rigidesa del pensament, P4.

Hem catalogat aquest error degut a una rigidesa del pensament ja que hi hagut casos que no s'han tingut en consideració a l'hora de calcular la probabilitat.

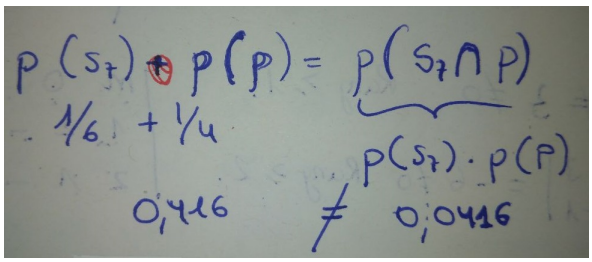



Figura 25: Error degut a teoremes o definicions deformades, P4.

Les Figures 25 i 26 són un exemple d'errors provocats per una deformació d'una llei per determinar la independència dels esdeveniments, així com també la Figura 27, on s'utilitza que $P$ i $S_7$ són independents per calcular $P(P \cap S_7)$, quan encara no s'ha provat.

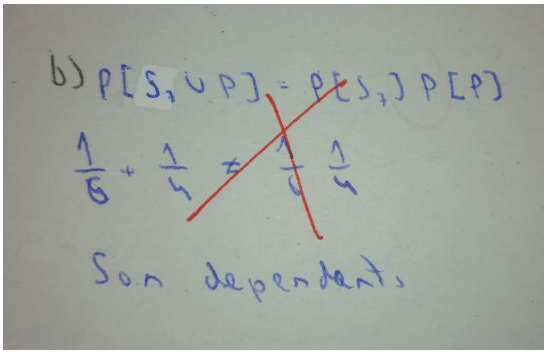



Figura 26: Error degut a teoremes o definicions deformades, P4.

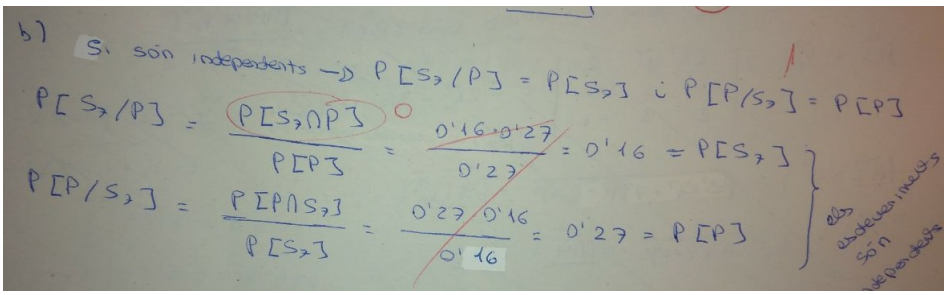



Figura 27: Error degut a teoremes o definicions deformades, P4.

Vists doncs alguns dels exemples d'errors que ens hem anat trobant, mostrarem a continuació els resultats que hem obtingut per a cada un de les preguntes.

En primer lloc, hem comprovat que l'error més donat a la pregunta 3 és el degut a un aprenentatge deficient ja que en moltes ocasions ens hem trobat amb respostes on es feien servir procediments incongruents que no tenien sentit respecte el que es demanava. Aquest ha estat més abundant al segon apartat de la pregunta, el primer, en canvi, ha anat força bé.

El segon tipus d'error més freqüent, a la pregunta 3, ha estat el tècnic, provocat per errors de càlcul, conduint a un resultat incorrecte. Aquest s'ha donat a ambdós apartats.

En tercer lloc tenim un empat, per una banda la pregunta en blanc i en segon lloc per la deformació, en aquest cas de la fórmula que obté la distància entre dues rectes que va ser sovint emprada sense rigor de les hipòtesis.

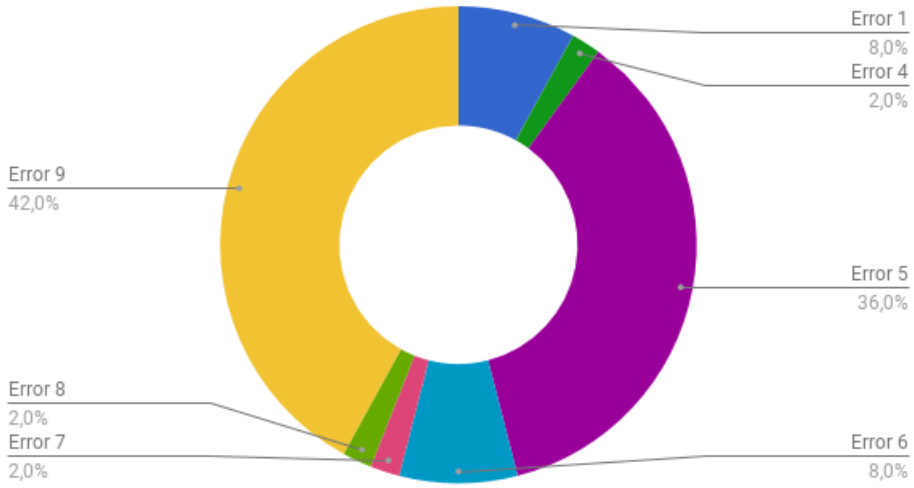



Figura 28: Errors Pregunta 3 Opció A

Ja per acabar amb els errors trobats a la mostra de la pregunta 3, també han sortit errors deguts a: la transcripció de dades, la manca de justificació i per la falta de rigor del llenguatge matemàtic. Aquests darrers en menor mesura que els anteriors.

Hem de comentar que no s'han donat errors a causa de una interpretació errònia de l'enunciat, ja que venia molt ben especificat el que s'havia de fer amb dos apartats diferenciats. Tampoc hem trobat errors provocats per una incapacitat d'extreure informació ni a una rigidesa del pensament, ja que aquest és un exercici molt comú sense cap tipus de contextualització que pogués donar peu a errors d'aquests tipus.

De la mateixa forma que a la pregunta 3, l'error més repetit a la pregunta de probabilitat ha estat el degut a un aprenentatge deficient, ja que sobretot al segon apartat, ens hem trobat que a la majoria d'exàmens s'intentava donar una justificació sense sentit de per què els successos eren independents quan realment no ho eren.

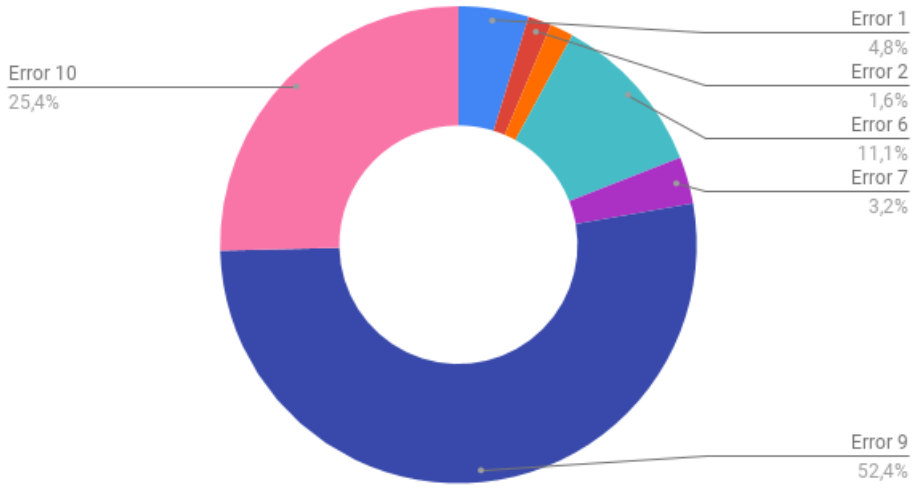



Figura 29: Errors Pregunta 4 Opció A

El segon error més comú ha estat el provocat per una rigidesa del pensament. En molts de casos, els alumnes eren incapaços de raonar sobre quins eren tots els casos possibles i favorables que els hi permetria calcular la probabilitat. Degut a aquest fet, en hem trobat freqüent probabilitats mal calculades dels esdeveniments que es demanaven.

El tercer error més donat ha estat el causat per una deformació d'una llei, en aquest cas freqüent-ment ens hem trobar que s'intentava utilitzar la fórmula d'independència de successos incorrectament.

Òbviament també hem trobat preguntes en blanc ja que recordem va ser la pregunta amb més respostes en blanc de tot l'examen.

Per acabar, també ens hem trobat amb errors deguts a la manca de justificació, errors tècnics i errors deguts a una interpretació errònia de l'enunciat.

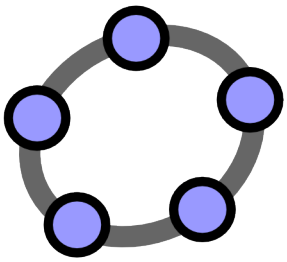
## 7.4 Proposta de Millora

Com hem pogut veure, l'error més donat a les dues preguntes de l'examen de selectivitat ha estat el degut a un aprenentatge deficient. No obstant això, volem aclarir un fet. Aquest error no és única i exclusivament culpa de l'alumne, òbviament, l'alumne haurà estudiat més o menys, però hem de tenir ben clar que dins l'aprenentatge hi tenen lloc diferents parts com puguin ser: els centres educatius, l'administració i els docents. L'incorrecte funcionament d'alguna d'aquestes parts pot condicionar greument l'aprenentatge de l'alumnat i observant que els errors comesos són gairebé sempre eles mateixos, podem dir que falla alguna cosa més que les hores d'estudi.

Quan observem que la pregunta de geometria és la que obté pitjors resultats no ens sorprèn. Hem de tenir en compte que a segon de batxillerat és el primer moment en el qual l'alumne té contacte amb un espai afí, és a dir amb la tercera dimensió. Fins a les hores, els estudiants únicament han treballat amb la geometria plana o euclidiana, i encara que molts dels conceptes es puguin extrapolar a la geometria afí, la capacitat de poder-se imaginar rectes o plans en un espai tridimensional, és en ocasions molt limitada.

Degut a aquest fet, consideram com a proposta de millora incloure dins la programació didàctica dels departaments del centres, l'ús d'eines TIC, com per exemple Geogebra, que permetin als estudiants poder concebre millor un espai de tres dimensions.

El Geogebra és un programa lliure interactiu, que es pot descarregar fàcilment, molt útil per treballar geometria, així com també àlgebra anàlisis i càlcul.



Ara bé, per tal de poder donar un ús adequat a aquest tipus d'eines primer de tot ens hem d'assegurar que els docents saben i estan preparats per poder-les emprar. A causa d'això, seria necessari fomentar els cursos de formació del professorat per tal de poder treure el màxim benefici a aquests recursos.

No podem estar-nos de demanar que s'ha de fer un canvi amb l'educació. S'està ensenyat tal com es feia 50 anys enredera, sense ser conscients, en moltes ocasions, de les grans avantatges que ens proporciona la tecnologia per poder millorar el rendiment dels nostres alumnes.

No cal dir que tot això no té sentit si i ha una falta de recursos TIC, així com del seu manteniment i funcionament. Si no podem comptar amb pissarres digitals ben instal·lades i funcionals, no es podrà treballar amb aquests recursos.

En segon lloc, hem comprovat com la pregunta de probabilitat és la pregunta amb els pitjors resultats de l'examen. A més, després d'estudiar els errors més comuns comesos en aquesta pregunta, hem comprovat també que han estat deguts a un aprenentatge deficient. Això ens ha duit a reflexionar sobre el següent.

En la majoria de llibres de text que s'utilitzen a l'educació secundaria de les Illes Balears, el tema de probabilitat i estadística es troba al darrera de tot. A més , aquest tema és en moltes ocasions donat als darrers dies de curs, ràpidament, on els alumnes sovint no arriben a adquirir les competències bàsiques que estableix el currículum.

Aquest fet, ocorre any rere any i quan l'alumne arriba a batxillerat, a partir del que hem comprovat, es incapaç de calcular probabilitats simples o compostes

aplicant la regla de Laplace, que és un criteri d'avaluació de l'assignatura de matemàtiques orientades a ensenyaments acadèmics de 4 ESO.

El que està clar, és que el bloc d'estadística i probabilitat, per alguna raó o per una altra, té menys importància dins l'assignatura de matemàtiques. Si per exemple en fixem amb els currículums tant de 4 ESO, 1r de batxillerat o 2n de batxillerat, podrem comprovar com aquests continguts es troben a la coa. A més a més, si ens fixem amb la puntuació del mateix examen, aquesta era menor que la resta de preguntes.[3]

Doncs bé, proposam per tal d'intentar evitar aquest tipus de problemàtica, que la pròpia programació didàctica dels departaments de matemàtiques dels centres, vagin canviant l'ordre en el qual s'imparteixen els diferents blocs, i d'aquesta forma evitar dificultats com les que hem pogut comprovar. De la mateixa forma, tampoc donar més importància a un bloc de continguts que a un altre.

Per acabar volem concloure que, en aquest cas, hem pres les preguntes que van anar més malament de l'examen, esdevenint molts d'errors deguts a un aprenentatge deficient, que penalitzaven considerablement la puntuació de la pregunta. No obstant això, creim que també seria interessant realitzar un estudi semblant amb les preguntes que han obtingut bons resultats, per adonar-nos de quins tipus d'errors cometen quan aquests no són tant greus.

[3]Per consultar els diferents currículums de les Illes Baleats, consultau a: `http://weib.caib.es/Normativa/Curriculum_IB/curriculum_.htm`

# 8 Conclusions finals de l'estudi

Després d'analitzar en detall la PBAU de Matemàtiques II a partir dels 1650 exàmens realitzats pels alumnes, hem arribat a les següents conclusions.

En primer lloc, hem notat un biaix bastant gran entre els dos models d'exàmens presentats a l'avaluació ordinària de juny 2017. Aquest biaix, és degut a una major reflexivitat de l'opció B front a una opció A més reproductiva. El més segur és que els alumnes notaren aquesta desigualtat i això donà lloc a que més del 96% d'ells optessin per resoldre l'opció A. A més a més, comparant les qualificacions mitjanes d'ambdues opcions, hem pogut comprovar que les de l'opció A són més altes, reafirmant encara més aquesta idea.

Aleshores, hem pogut concloure que els alumnes prefereixen respondre preguntes reproductives que no pas reflexives, i que a més obtenen puntuacions més altes en les preguntes en que es requereix aquest procés cognitiu.

D'altra banda, també hem pogut comprovar com les preguntes de Geometria i de Probabilitat són les que pitjor van als alumnes, fet que ens ha dut a realitzar un posterior estudi exhaustiu dels errors que cometen els alumnes en les preguntes d'aquests dos blocs.

En aquest estudi dels errors hem comprovat com les errades més comeses pels estudiants són aquelles que es deuen a un aprenentatge deficient, ja que en moltes ocasions hem pogut observar com realitzen passes sense cap tipus de sentit.

Aquest aprenentatge deficient però, no és degut únicament a la manca d'estudi de l'alumne, sinó a unes certes dificultats que es presenten a l'hora d'abordar aquests blocs:

En primer lloc, al bloc de geometria de 2n de batxillerat es treballa per primer cop l'espai de tridimensional, fet que genera dificultats a l'hora d'imaginar-se, rectes, plans i figures dins aquest espai afí. A causa d'això, els alumnes no són

capaços de realitzar els raonaments necessaris per poder arribar a la solució del problema. Per tal donar una ajuda a l'estudiant, proposem potenciar les TIC dins l'aula, emprant eines com per exemple el "Geogebra".

En segon lloc, el bloc de probabilitat, degut suposadament a una menor dificultat respecte als altres blocs, sempre s'ha posat a la coa de la programació didàctica dels cursos i en moltes ocasions, no s'arriben a adquirir les competències que marca el currículum per una manca de temps. Aquesta raó, podria donar una justificació a que la pregunta de probabilitat sigui la que pitjor resultats obté, i per això, proposem fer un canvi d'ordre respecte les unitats didàctiques i anar permutant-les contínuament. Aquesta metodologia didàctica es coneix com a currículum en espiral. A l'estudi Alonso Tello et al. (2013), s'analitza el procés d'ensenyament/aprenentatge de Singapur (país que obté els millors resultats en matemàtiques a les proves PISA i TIMSS), i s'apunta que "el mètode Singapur atorga importància al currículum en espiral, entès com revisions periòdiques i progressives d'allò que s'ha après. Consideren que els nens no aprenen per repetició, en aquest sentit és el professor qui ha de proveir d'oportunitats diverses d'aprenentatge sempre reprenent els coneixements previs alhora que s'amplia coneixement" (p. 254)

Per acabar, també hem realitzat un estudi a partir de les correccions realitzades pels diferents correctors. D'aquesta forma hem pogut comprovar com els correctors influeixen a l'hora de corregir l'examen, i per tant, encara que els correctors contin amb els mateixos criteris de correcció, corregeixen de forma diferent. Aquest és un punt intricat, ja que la correcció per part de persones (llevat dels exàmens tipus test) és una activitat on la subjectivitat hi té cabuda. Malgrat això, s'ha d'intentar evitar al màxim i una manera de pal·liar-ho seria detallant més els criteris de correcció i els tipus d'errades, de manera que la interpretació d'aquest per part del docent sigui el més guiada possible.

# Acords, Lleis i Decrets esmentats al treball

Ley Orgánica 2/2006 , de 3 de mayo de 2006 , de Educación . Boletin Oficial del Estado. Boletin Oficial del Estado. Jefatura del Estado, núm 106, de 4 de mayo de 2006. Capítulo IV.

Ley Orgánica 8/2013 , de 9 de diciembre de 2013 , para la mejora de la calidad educativa . Boletin Oficial del Estado. Jefatura del Estado, núm 295, de 10 de diciembre 2013

Decret 35/2015, de 15 de maig, pel qual s'estableix el currículum de batxillerat a les Illes Balears, Annex Currículum Matemàtiques I i II. Bolletí oficial de les Illes Balears. Illes Balears, 16 de maig de 2015

Decret 34/2015, de 15 de maig, pel qual s'estableix el currículum de l'educació secundaria obligatòria a les Illes Balears. Bolletí oficial de les Illes Balears. Illes Balears, 16 de maig de 2015

Decret 21/2017 , 15 de febrer de 2017. Resolució del conseller d'Educació i Universitat de 15 de febrer de 2017 per la qual s'aproven les instruccions que estableixen les pautes i criteris d'actuació per a dur a terme les proves d'accés a la Universitat. Palma. Bolletí oficial de les Illes Balears. Illes Balears, 18 de maig de 2015.

Decret 1105/2014 , 26 de febrer de 2015, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletin Oficial del Estado. Jefatura del Estado, núm 3, de 3 de enero de 2015

Acord Normatiu, 20 de febrer de 2017, pel qual es regula l'accés i admissió als ensenyaments oficials de grau. Universitat de les Illes Balears. Núm 445

# Referències

Abrate, R., Pochulu, M., i Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo*.

Alonso Tello, C., López Barriga, P., i De La Cruz Vicente, O. (2013). CREER TOCANDO. *TENDENCIAS PEDAGÓGICAS Nº*, 21:249–262.

Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*.

Conselleria d'Educació i Universitat. Institut d'Avaluació i Qualitat del Sistema Educatiu (IAQSE) (2016). Resultats de PISA 2015. Illes Balears.

Escudero Domínguez, A. M. i Domínguez Viñas, J. (2014). De los errores identificados en la investigación a los errores encontrados en un aula de primero de bachillerato. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 86:111–130.

Espinel Febles, M. C., Ramos Domínguez, R. M., i Ramos Domínguez, C. E. (2007). Algunas alternativas para la mejora de la enseñanza de la inferencia estadística en secundaria. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 67.

Franchi, L. i Hernández de Rincón, A. (2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana. *Educere*, pages 63–71.

Gairín Sallán, J. M., José María., M. E., i Antonio M., O. M. (2013). Anomalías en los procesos de identificación de errores en las pruebas escritas de matemáticas de las P.A.U. *Campo Abierto*, 32:27–50.

Gorostiza, J. R. D., Balsera, P. D., Murgiondo, J. E., i Fernandez, J. M. S. (2013). UPV-EHU University entrance testing in mathematics. Teachers' opinions and results. *Revista De Educacion*, 362(362):217–246.

IAQSE (2010). *Avaluació de diagnòstic 2008-2009, Informe executiu*. Conselleria d'Educació i Cultura del Govern de le Illes Balears.

Mallart Solaz, A. (2014). La resolución de problemas en la prueba de Matemáticas de acceso a la universidad : procesos y errores. *Educatio Siglo XXI*, 32:233–254.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., i Inbar, S. (1987). An Empirical Classification Model for Errors in High School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*.

Nortes Checa, A. i Nortes Martines-Artero, R. (2010). Resolución de problemas de matemáticas en las pruebas de acceso a la universidad. Errores significativo. *Educatio Siglo XXI*, 28(1):317–342.

Radatz, H. (1980). Students Errors in the Mathematical Learning Process: a Survey. *For the Learning of Mathematics*.

Ramos Domínguez, C. E., Espinel Febles, M. C., i Ramos Domínguez, R. M. (2009). Identificación de los errores en los contrastes de hipótesis de los alumnos de Bachillerato. *Suma*, 61:35–44.

Rico, L. (1995). Errores y Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas. *Educación matemática: errores y dificultades de los estudiantes, resolución de problemas, , evaluación e historia.*

Rosa Grau, A. C. i Martí-Recober, M. (2002). La calidad en el proceso de correccion de las pruebas de acceso a la universidad: variabilidad y factores. *Revista de Investigación Educativa*, 20:209–223.

Ruano, R. M., Socas, M., i Palarea, M. (2008). Análisis y Clasificación de Errores Cometidos por Alumnos de Secundaria en los Procesos de Sustitución Formal, Generalización y Modelización en Álgebra. *Pna*, pages 61–67.

Socas Robayna, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundariae. *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, pages 125–154.

# A Apèndix

## A.1 Acta de la reunió d'octubre 2017

Universitat de les Illes Balears

**Resum de la reunió de l'assignatura Matemàtiques II del dia 16 d'octubre de 2017, que ha tingut lloc a l'aula AV03 de l'edifici G.M. de Jovellanos del campus de la UIB**

Comença la reunió a les 9 hores, presidida pels professors Manuel González Hidalgo i Arnau Mir Torres, de la UIB, amb telèfon 971 17 29 02 i 971 17 25 61 respectivament, fax: 971 17 30 03 i adreça electrònica <manuel.gonzalez@uib.es> i <arnau.mir@uib.es>. Hi assisteixen també els professors dels centres que es detallen a la llista següent.

| Centre | Professor/a |
|---|---|
| Aula Balear | M. Ángeles Fernández Pineda |
| CIDE | Toni Mir Quetglas |
| Col·legi Beat Ramon Llull (Inca) | Miquel Fiol Sabater |
| Col·legi Francesc de Borja Moll | Joan Prats |
| Col·legi Lluís Vives (Palma) | Albert Tomàs |
| Col·legi Pius XII | Pau Bosch Servera |
| Col·legi Sa Real (Eivissa) | David Moreno |
| Col·legi Sant Francesc | Francesca Trias Company |
| Col·legi Sant Antoni Abat | M. Jesús Beltrán Aparicio |
| Col·legi Sant Josep | J. Alcolea |
| Col·legi Sant Pere | M. Isabel Blanes |
| Col·legi Santa Mònica | Alexandre Rodríguez |
| Col·legi La Salle (Palma) | Dolores Hernández |
| Col·legi Madre Alberta | Félix Rodríguez Díaz |
| Col·legi San Cayetano | Francisca González Cano |
| Col·legi Verge del Carme | Andreu Vich |
| IES Albuhaira | Conxita Tortell Martínez |
| IES Alcúdia | Joana M. Canals |
| IES Arxiduc (Palma) | J. L. Bastante |
| IES Baltasar Porcel | Jessica Arenas Cano |
| IES Berenguer d'Anoia | Miquel Alemany Pujol |
| IES Calvià | Miquel Nadal |
| IES CTEIB | Pilar Garau |
| IES Damià Huguet | Miquel Àngel Cerdà |
| IES Emili Darder | Carlos Andrés |
| IES Felanitx | Miquel Mayol Bauzà |
| IES Guillem Cifre de Colonya (Pollença) | Antoni Colom Morey |
| IES Guillem Colom Casasnovas | Arnau Ramis Colom |
| IES Guillem Sagrera | Eva Palmer |
| IES Joan Alcover | Margalida Llompart |
| IES Joan Maria Tomàs | Fernando Bernal Garcias |
| IES Josep Maria Llompart | M. Rosaria García Fernández |
| IES Josep Sureda i Blanes | Miquel Àngel Fontanet |

1

www.uib.cat

Universitat de les Illes Balears

| | |
|---|---|
| IES Llucmajor | Maria Fca. Adrover |
| IES Madina Mayurqa | M. Dolors Carbonell |
| IES Marratxí | Rafel Amorós Mateo |
| IES Mestral (Eivissa) | Vicente Bonet Carbonell |
| IES Mossèn Alcover | Rafel Galmés Galmés |
| IES Manacor | Carme Nebot |
| IES Pau Casesnoves (Inca) | Maria Ramis |
| IES Politècnic | Francesca Martí Mut |
| IES Puig de sa Font (Son Servera) | Aina M. Riera |
| IES Ramon Llull | Joana Rosselló |
| IES Sa Blanca Dona (Eivissa) | Mónica Yern |
| IES Sa Colomina (Eivissa) | Juan Sans Caselles |
| IES Santa Margalida | Antònia Martorell |
| IES Ses Estacions | Damià Martín Vidal |
| IES Sineu | Catalina M. Amengual |
| IES Son Ferrer | Maria Triay |
| IES Son Rullan | Camilo Sobrino Romano |
| IES Consolació (Eivissa) | Evelin Martín Arroyo |
| Col·legi Àgora Portals | Juan Zárate Osuna |
| Col·legi Aixa | Isabel Ramis |
| IES La Ribera | José Daniel Torrejón |
| Col·legi Monti-sion | Ramon Pons Mercadal |
| Col·legi Son Verí | Jorge Parán |
| Col·legi Santa Magdalena Sofia | Juan Manuel Reverte |
| IES Quartó de Portmany | Marcos Heras |
| IES Xarc | Silvia Pérez Fernández |
| Col·legi Llaüt | Javier Polo |
| IES Pascual Calbó i Caldés | Joana Pons Mercadal |
| IES Biel Martí | Miquel Capó |
| IES Josep Maria Quadrado | Tomàs Font |
| IES Josep Miquel Guàrdia | Cristina Pons Barro |
| IES Joan Ramis i Ramis | Antònia Seguí Palmer |
| IES M. Àngels Cardona | Joan Lluís Pons Marquès |
| IES Sant Agustí (Eivissa) | Leonor Agulló |
| IES Balàfia (Eivissa) | Josefina Pastor Nadal |
| IES Sa Serra (Eivissa) | Felip Cabrera Miralles |
| IES Santa Maria d'Eivissa | Miquel Torres Serra/Teresa Marí Vich |
| IES Algarb (Eivissa) | Jordi de Font Ferrer |

La reunió es pot seguir per videoconferència des de Menorca, Eivissa i Formentera.

Universitat de les Illes Balears

El professor Manuel González comença informant que aquest any, en principi, hi ha intenció de nomenar coordinador de Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II el professor Arnau Mir, i el professor Manuel González coordinador de Matemàtiques II.

A continuació informa que hem avançat la reunió, encara que els professors abans indicats no han estat nomenats oficialment.

El professor Arnau Mir pren la paraula i comenta les estadístiques de les notes mitjanes de juny i setembre que surten als gràfics següents:

Universitat de les Illes Balears | Proves d'accés a la Universitat

**Prova de batxillerat per a l'accés a la Universitat**

**Convocatòria de juny de 2017**

| MATÈRIES COMUNES (SOLS ALUMNES DE BATXILLERAT) | BLOC D'ACCÉS | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | MATRICULATS | PRESENTATS | MITJANA ABANS REVISIONS | APTES ABANS REVISIONS | MITJANA DESPRÉS REVISIONS | APTES DESPRÉS REVISIONS* |
| ALEMANY II | 2 | 2 | 8,25 | 2 | 8,25 | 2 |
| ANGLÈS II | 3 311 | 3 304 | 5,89 | 2 288 | 5,91 | 2 016 |
| HISTÒRIA D'ESPANYA | 3 313 | 3 306 | 5,32 | 1 958 | 5,34 | 1 607 |
| LLENGUA CATALANA I LITERATURA II | 3 292 | 3 286 | 6,43 | 2 704 | 6,45 | 2 467 |
| LLENGUA CASTELLANA I LITERATURA II | 3 313 | 3 307 | 5,68 | 2 399 | 5,70 | 1 991 |
| FONAMENTS DE L'ART II | 196 | 196 | 5,41 | 122 | 5,43 | 99 |
| LLATÍ II | 394 | 394 | 6,06 | 279 | 6,08 | 236 |
| MATEMÀTIQUES II | 1 577 | 1 575 | 6,09 | 1 191 | 6,10 | 1 067 |
| MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II | 1 147 | 1 141 | 5,40 | 733 | 5,40 | 616 |

| MATÈRIES DE MODALITAT (SOLS ALUMNES DE BATXILLERAT) | BLOC D'ADMISSIÓ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | MATRICULATS | PRESENTATS | MITJANA ABANS REVISIONS | APTES ABANS REVISIONS | MITJANA DESPRÉS REVISIONS | APTES DESPRÉS REVISIONS* |
| ARTS ESCÈNIQUES | 33 | 28 | 6,82 | 27 | 6,82 | 25 |
| BIOLOGIA | 925 | 883 | 7,01 | 778 | 7,01 | 727 |
| CULTURA AUDIOVISUAL II | 168 | 143 | 7,81 | 142 | 7,81 | 142 |
| DISSENY | 122 | 115 | 5,50 | 90 | 5,49 | 68 |
| DIBUIX TÈCNIC II | 440 | 406 | 6,59 | 317 | 6,60 | 293 |
| ECONOMIA DE L'EMPRESA | 994 | 909 | 7,40 | 829 | 7,41 | 785 |
| FONAMENTS DE L'ART II | 1 | | | | | |
| FÍSICA | 734 | 617 | 4,97 | 314 | 4,97 | 268 |
| GEOLOGIA | 46 | 31 | 7,03 | 26 | 7,03 | 24 |
| GEOGRAFIA | 1 047 | 898 | 5,67 | 650 | 5,68 | 542 |
| GREC II | 204 | 196 | 6,24 | 153 | 6,25 | 140 |
| HISTÒRIA DE L'ART | 403 | 326 | 6,18 | 236 | 6,18 | 209 |
| HISTÒRIA DE LA FILOSOFIA | 475 | 233 | 4,84 | 118 | 4,84 | 103 |
| LLATÍ II | 5 | 5 | 6,80 | 4 | 6,80 | 4 |
| MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II | 59 | 45 | 7,14 | 38 | 7,14 | 36 |
| MATEMÀTIQUES II | 6 | 5 | 5,20 | 3 | 5,15 | 2 |
| QUÍMICA | 1 044 | 971 | 6,19 | 711 | 6,21 | 637 |

Actualitzat a dia 28-06-2017

3

www.uib.cat

Universitat de les Illes Balears

Universitat de les Illes Balears | Proves d'accés a la Universitat

## Prova de batxillerat per a l'accés a la Universitat

**Convocatòria de setembre de 2017**

| MATÈRIES COMUNES (SOLS ALUMNES DE BATXILLERAT) | BLOC D'ACCÉS | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | MATRICULATS | PRESENTATS | MITJANA ABANS REVISIONS | APTES ABANS REVISIONS | MITJANA DESPRÉS REVISIONS | APTES DESPRÉS REVISIONS |
| ANGLÈS II | 518 | 498 | 4,02 | 172 | 4,02 | 173 |
| HISTÒRIA D'ESPANYA | 518 | 491 | 3,20 | 117 | 3,20 | 116 |
| LLENGUA CATALANA I LITERATURA II | 511 | 489 | 4,98 | 284 | 4,98 | 284 |
| LLENGUA CASTELLANA I LITERATURA II | 518 | 498 | 5,01 | 281 | 5,01 | 274 |
| FONAMENTS DE L'ART II | 31 | 27 | 5,87 | 17 | 5,87 | 18 |
| LLATÍ II | 70 | 67 | 4,75 | 32 | 4,75 | 33 |
| MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II | 203 | 194 | 4,17 | 79 | 4,17 | 78 |
| MATEMÀTIQUES II | 214 | 206 | 1,92 | 14 | 1,92 | 15 |

| MATÈRIES DE MODALITAT (SOLS ALUMNES DE BATXILLERAT) | BLOC D'ADMISSIÓ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | MATRICULATS | PRESENTATS | MITJANA ABANS REVISIONS | APTES ABANS REVISIONS | MITJANA DESPRÉS REVISIONS | APTES DESPRÉS REVISIONS |
| ARTS ESCÈNIQUES | 5 | 4 | 5,63 | 4 | 5,63 | 4 |
| BIOLOGIA | 143 | 117 | 6,19 | 87 | 6,20 | 87 |
| CULTURA AUDIOVISUAL II | 18 | 13 | 6,69 | 11 | 6,69 | 11 |
| DISSENY | 13 | 12 | 5,71 | 11 | 5,71 | 11 |
| DIBUIX TÈCNIC II | 60 | 51 | 7,16 | 46 | 7,18 | 46 |
| ECONOMIA DE L'EMPRESA | 163 | 125 | 4,50 | 57 | 4,51 | 57 |
| FONAMENTS DE L'ART II | 1 | | | | | |
| FÍSICA | 85 | 63 | 3,80 | 22 | 3,80 | 22 |
| GEOLOGIA | 6 | 5 | 4,80 | 3 | 4,80 | 3 |
| GEOGRAFIA | 170 | 123 | 4,25 | 44 | 4,25 | 43 |
| GREC II | 19 | 15 | 5,03 | 9 | 5,03 | 9 |
| HISTÒRIA DE L'ART | 39 | 26 | 4,48 | 12 | 4,48 | 12 |
| HISTÒRIA DE LA FILOSOFIA | 65 | 36 | 3,26 | 10 | 3,26 | 10 |
| LLATÍ II | 1 | 1 | 7,50 | 1 | 7,50 | 1 |
| MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II | 13 | 10 | 4,90 | 3 | 4,95 | 3 |
| MATEMÀTIQUES II | 13 | 9 | 1,44 | | 1,44 | |
| QUÍMICA | 149 | 127 | 5,02 | 66 | 5,04 | 67 |

Actualitzat a dia 25-09-2017

4

El professor de l'IES Josep Maria Quadrado (Menorca) diu que l'examen de setembre va ser més difícil que el de juny. El professor Arnau Mir li comenta que intenta que els exàmens tinguin la mateixa dificultat, però això a vegades no es compleix.

www.uib.cat

Universitat de les Illes Balears

Des d'Eivissa, una professora demana si és possible saber la puntuació mitjana de cada exercici. Els professors Arnau Mir i Manuel González li contesten que aquesta informació no la proporciona el Secretariat Tècnic d'Accés, i no és possible obtenir-la.

La professora Joana Rosselló informa que els problemes d'optimització i de geometria que varen sortir a la convocatòria de setembre varen ser massa difícils, segons el seu parer.

A partir d'aquí agafa la paraula el professor Manuel González, per informar com serà la prova del curs 2017-18.

En primer lloc, diu que s'ha de contextualitzar qualque problema per avaluar el primer bloc de la matriu d'especificacions. També diu que no apareixerà contextualitzat cap problema de geometria, però sí que pot aparèixer, per exemple, un problema d'optimització de màxims i mínims. Si un problema està contextualitzat, sempre que sigui possible, s'avaluarà, d'una banda, el plantejament i, de l'altra, la solució. Els possibles problemes de sistemes d'equacions dependents d'un paràmetre no estaran contextualitzats. Informa que en cada opció sortirà un problema de probabilitat i estadística. Arribats a aquest punt, informa que hi haurà un canvi respecte a la puntuació dels problemes del curs passat, i és que tots quatre problemes valdran el mateix, o sigui, el 25 per cent de la nota final.

A continuació diu que no apareixeran problemes en què sigui necessari utilitzar un resultat d'integració per resoldre un problema de derivació. Poden aparèixer problemes amb dos apartats no dependents, per exemple, un apartat a) de derivació on es demani pel creixement i/o decreixement d'una funció, i un apartat b) on es demani calcular una primitiva.



En resum, en cada opció hi haurà un problema per cadascun dels blocs, 2, 3, 4 i 5, de la matriu d'especificacions. Entre les dues opcions es cobrirà la derivació i la integració, i la integració sortirà almenys en una de les dues opcions. Diu que intentarà que hi hagi apartats en els problemes al més independents possible.

El professor Miquel Nadal demana com seran les preguntes de construcció de gràfics. El professor Manuel González li diu que no hi haurà preguntes del tipus «Dibuixa la gràfica fent tot l'estudi de la funció corresponent» però sí del tipus «Dibuixa la gràfica aproximada de la funció corresponent.»

Des d'Eivissa, una professora demana si a la part de probabilitat i estadística hi entra tot el que hi ha al temari, per exemple: si poden sortir problemes per calcular probabilitats d'esdeveniments associats a fenòmens que poden modelitzar-se mitjançant la distribució binomial a partir de la seva aproximació per la normal. El professor Manuel González li contesta que en principi hi entra tot, però es recomana fer més èmfasi en els problemes de la normal.

A continuació es demana si es contextualitzaran els problemes de matrius. El professor Manuel González contesta que no, i aprofita l'ocasió per informar que segueixen vigents tots els acords que es varen prendre als seminaris anteriors, amb tot el temari que coincideix amb el temari actual.

Universitat de les Illes Balears

Li demanen si es tornaran a fer els seminaris. El professor Manuel González contesta que no està previst fer-los, però informa que els dos professors estan oberts a iniciatives d'aquest tipus.

A continuació li demanen què s'entén per integrals senzilles en el càlcul de primitives. El professor Manuel González contesta que això està perfectament descrit al contingut dels seminaris i a la matriu d'especificacions.

Un professor d'institut comenta que aquesta reunió ha estat clarificadora i agraeix que la reunió s'hagi avançat en relació amb l'any anterior. Els professors coordinadors agraeixen el comentari.

I sense més assumptes per tractar, es tanca la sessió a les 10.15 hores.

El professor responsable,

Manuel González

6

www.uib.cat

## A.2 Critèris específics de Correcció

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

**Matemàtiques II** 2017

Model 2. Criteris específics de correcció

*Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té la mateixa valoració.*

*Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.*

*Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.*

*Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.*

*Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.*

*Les puntuacions tant dels apartats com dels subapartats són independents. Si l'alumne s'ha equivocat en qualque apartat o subapartat però fa bé els altres (segons les "seves" dades), donau la puntuació adient. En aquest cas, s'ha de refer el problema, ja que s'han de posar les dades "equivocades" de l'alumne per resoldre els altres apartats o subapartats en què no s'ha equivocat. En canvi, si s'equivoca en dos apartats o subapartats, donau 0 punts.*

---

**OPCIÓ A**

**1.** *a*) Puntuacions de l'apartat a):

i) Càlcul del determinant de la matriu del sistema, 2 punts.
ii) Discussió, 5 punts.
i. Donau 2 punts per discussió quan $m \neq -9$
ii. Donau 3 punts per discussió quan $m = -9$.

*b*) Resolució per a $m = -9$, 3 punts. (1 punt per incògnita)

Si el determinant està malament, donar 5 punts com a màxim.

**2.** a) Càlcul de $Q'(t)$, 2 punts.
Resolució de $Q'(t) = 0$, 2 punts.
Càlcul del màxim i del mínim, 2 punts. Donau un punt pel màxim i un punt pels mínims. Si només donen un mínim, donar-ho com a correcte. Si no té en compte els extrems de l'interval i només mira els valors $t = 2$ i $t = 6$, donau 0.5 punts a l'apartat.

b) Dibuix de la funció $Q(t)$, 4 punts. Si fa el dibuix sense cap tipus d'explicació de com l'ha obtingut, donau 0 punts. Si fan el dibuix discret (en els enters de 1 fins a 8) sense juntar els punts, donar la puntuació màxima, 4 punts.

Aquest problema es pot fer de dues maneres més:

1) Considerant la funció $Q(t)$ discreta i calculant la taula de $Q(1), Q(2), \ldots, Q(8)$ i mirant quins són el mínim i el màxim.
2) Per calcular el que va ploure el dia $n$, poden fer la integral de $Q(t)$ entre $n$ i $n+1$ i després calcular el mínim i el màxim dels resultats obtinguts.

Tant si ho fan d'una manera com de l'altra, si està bé, donar un 10 de l'exercici.

**3.** *a*) Puntuacions de l'apartat a):

Model 2. Criteris específics de correcció

i) Càlcul dels vectors directors de $r$ i $s$, 1 punt.
ii) Demostrar que es creuen, 3 punts. Si s'equivoca en el càlcul del vector $w$ entre un punt de $r$ i un punt de $s$ però fa bé la resta, donau 2 punts.

*b*) Puntuacions de l'apartat b):

i) Càlcul del pla que conté $r$ i és paral·lel a $s$, 3 punts.
ii) Càlcul de la distància entre $r$ i $s$, 3 punts.

**4.** *a*) Puntuacions de l'apartat a):

i) Càlcul de l'esdeveniment $S_7$, 2 punts.
ii) Càlcul de l'esdeveniment $P$, 2 punts.
iii) Càlcul de la probabilitat que passi $S_7$, 1 punt.
iv) Càlcul de la probabilitat que passi, $P$, 1 punt.

*b*) Puntuacions de l'apartat b):

i) Càlcul de l'esdeveniment intersecció entre $S_7$ i $P$, 2 punts.
ii) Demostrar que no són independents, 2 punts.

**OPCIÓ B**

**1.** *a*) Plantejament del sistema d'equacions dels cabdals de les aixetes, 4 punts. Restau 1 punt per cada equació mal expressada. Si totes les equacions estan malament, donau 0 punts.
*b*) Resolució del sistema anterior, 4 punts. Restau 1 punt per cada cabdal mal calculat. Si tots els cabdals estan mal calculats, donau 0 punts.
*c*) Càlcul del volum del dipòsit, 2 punts.

Els apartats són independents. Per exemple, si planteja el sistema malament però resol "el seu sistema" bé i comenta si li dóna alguna solucó sense sentit, donar els 4 punts per la resolució.

**2.** *a*) Plantejar la relació que hi ha entre $x$ i $y$ mitjançant el perímetre, 2 punts.
*b*) Càlcul de la funció àrea, 2 punts.
*c*) Càlcul de la derivada de la funció àrea, 2 punts.
*d*) Resoldre l'equació $A'(x) = 0$ calculant el valor adient de $x$, 2 punts.
*e*) Càlcul del valor de $y$, 1 punt.
*f*) Comprovar que és un màxim, 1 punt.

Si afegeixen el segment $CD$ al perímetre i tot el demés està bé, donar 8punts.

**3.** *a*) Càlcul dels vectors directors de $r$ i $s$, 2 punts.
*b*) Càlcul del vector $w$ entre un punt de $r$ i un punt de $s$, 1 punt.
*c*) Plantejament que l'equació del determinant dels tres vectors directors anteriors sigui zero, 2 punts.
*d*) Càlcul del valor de $\lambda$, 2 punts.
*e*) Càlcul del punt intersecció, 3 punts. Restau 1 punt per cada coordenada incorrecta del punt intersecció.

**4.** *a*) Puntuació de l'apartat a):

i) plantejar bé la probabilitat demanada, 1 punt,

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

**Matemàtiques II** 2017

Model 2. Criteris específics de correcció

ii) estandarditzar la variable $X$, 1 punt,
iii) càlcul de la probabilitat, 1 punt.

*b*) Puntuació de l'apartat b):

i) plantejar bé la probabilitat demanada, 1 punt,
ii) estandarditzar la variable $X$, 1 punt,
iii) càlcul de la probabilitat, 1 punt.

*c*) Apartat c):

i) plantejar bé la condició donada en termes de la variable $X$, 1 punt,
ii) plantejar la condició en termes de la variable $Z$, 1 punt,
iii) establir la condició que verifica $x$, 1 punt,
iv) càlcul de $x$, 1 punt.

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

**Matemàtiques II** 2017

Model 2. Solucions

*Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.*

*Cada problema es puntua sobre 10 punts. Suposem que $P_1$, $P_2$, $P_3$ i $P_4$ son les qüalificacions dels problemes sobre 10. La qualificació final s'obté d'aplicar la fórmula següent: $\frac{4}{15}\cdot(P_1+P_2+P_3)+\frac{1}{5}\cdot P_4$. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.*

*Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.*

## OPCIÓ A

**1.** *a*) Discutiu per a quins valors de $m$ el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{array}{rl} mx+3z= & m,\\ x+2y-z= & 1,\\ 2x+y-z= & 2. \end{array}\right\}$$

(7 punts)

*b*) Resoleu-lo en el cas o els casos en què sigui compatible indeterminat. (3 punts)

**Solució.** *a*) La matriu del sistema és:

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 3\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Estudiem quan el determinant del sistema anterior s'anul·la. El determinant de la matriu anterior val:

$$-m-9.$$

El determinant serà nul per a $m=-9$.
Si $m\neq -9$, el rang de la matriu del sistema serà 3, el mateix que el rang de la matriu ampliada. Per tant, el sistema serà compatible determinat.
Si $m=-9$, el sistema serà:

$$\left.\begin{array}{rl} -9x+3z= & -9,\\ x+2y-z= & 1,\\ 2x+y-z= & 2. \end{array}\right\}$$

El rang del sistema serà 2, ja que, per exemple, el menor $\begin{vmatrix} -9 & 0\\ 1 & 2 \end{vmatrix}\neq 0$, és diferent de zero. El rang de la matriu ampliada serà 2, ja que el determinant següent és zero:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -9\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

**Matemàtiques II** 2017

Model 2. Solucions

Per tant, es tractaria d'un sistema compatible indeterminat.

*b*) Hem de resoldre el sistema en el cas en què $m = -9$:
Les solucions són: $y = x - 1,\ z = 3(x - 1)$, amb $x$ variable lliure.

**2.** El nombre de litres per metre quadrat que va ploure en un determinat lloc ve donat per la funció següent:

$$Q(t) = -\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10,$$

on $t$ ve donat en dies i va des del dia $t = 1$ (dilluns) fins al dia $t = 8$ (dilluns de l'altra setmana).

*a*) Determinau el dia de la setmana que va ploure més i el que va ploure menys. Quants de litres per metre quadrat va ploure aquests dos dies? (6 punts)
*b*) Feu un petit dibuix de la funció anterior durant els 8 dies. (4 punts)

**Solució.** *a*) Per trobar els dies que va ploure menys i més, calculam els possibles extrems relatius de la funció $Q(t)$:

$$Q'(t) = -\frac{3t^2}{8} + 3t - \frac{9}{2}.$$

Resolent l'equació $Q'(t) = 0$, obtenim $t = 2$ i $t = 6$.
Ara fem una petita taula amb els dies obtinguts anteriorment juntament amb el primer i l'últim dia, per veure els dies que va ploure més i menys:

| Dia | $Q(t)$ |
|---|---|
| 1 | 6.875 |
| 2 | 6 |
| 6 | 10 |
| 8 | 6 |

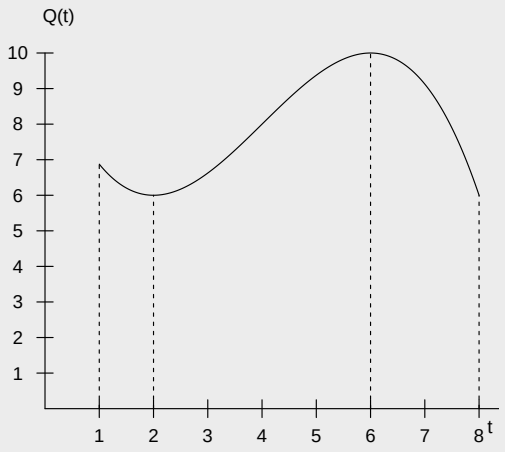
Els dies que va ploure menys varen ser els dies 2 (dimarts) i 8 (dilluns de l'altra setmana), amb 6 litres per metre quadrat, i el dia que va ploure més va ser el dia 6 (dissabte) amb 10, litres per metre quadrat.

*b*) El gràfic de la funció $Q(t)$ es pot veure al dibuix següent:

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

**Matemàtiques II** 2017

Model 2. Solucions




**3.** Donades les rectes $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$ i $s : \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-2}$,

*a*) demostrau que es creuen. (4 punts)
*b*) calculau la distància entre les rectes. (6 punts)

**Solució.** *a*) Per demostrar que es creuen, considerem $v_r = (2, 3, -1)$ el vector director de $r$, $v_s = (1, 2, -2)$ el vector director de $s$, i un vector que uneix un punt de $r$ i un punt de $s$: $w = P_r - P_s = (1, 0, -1) - (0, 2, -1) = (1, -2, 0)$. Si el rang de la matriu formada pels vectors $v_r, v_s$ i $w$ és màxim o 3, voldrà dir que es creuen. Per comprovar això, basta veure que el determinant de la matriu anterior és diferent de zero:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -10.$$

*b*) Per calcular la distància entre les rectes, primer calculam el pla $\pi$ que conté $r$ i és paral·lel a $s$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4x + 3y + z + 5 = 0.$$

La distància entre les dues rectes serà la distància d'un punt qualsevol de $s$, per exemple

Model 2. Solucions

$P_s(0,2,-1)$ a $\pi$:

$$d(r,s) = d(P_s,\pi) = \frac{-4\cdot 0 + 3\cdot 2 - 1 + 5}{\sqrt{4^2+3^2+1^2}} = 5\sqrt{\frac{2}{13}} \approx 1.96116.$$

**4.** Llançam dos daus de 6 cares no trucats i consideram els esdeveniments següents:

$S_7$ : "la suma dels resultats dels dos daus és 7".
$P$ : "el producte dels resultats dels dos daus és imparell".

*a*) Calculau les probabilitats que passin els esdeveniments anteriors. (6 punts)
*b*) Són independents $S_7$ i $P$? Raonau la resposta. (4 punts)

**Solució.** El conjunt de resultats possibles per a l'experiment en qüestió és el següent:

$$E = \{(i,j), |i \in \{1,\dots,6\},\ j \in \{1,\dots,6\}\}.$$

En total tenim 36 resultats possibles.

*a*) L'esdeveniment $S_7$ és el següent:

$$S_7 = \{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\}.$$

En total hi ha 6 resultats. Aplicant la regla de Laplace, la probabilitat que passi $S_7$ serà: $p(S_7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
L'esdeveniment $P$ serà:

$$P = \{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}.$$

En total tenim 9 resultats possibles. Aplicant la regla de Laplace, la probabilitat que passi $P$ serà: $p(P) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

*b*) Perquè siguin independents s'ha de satisfer $p(S_7 \cap P) = p(S_7)\cdot p(P)$. Calculem $p(S_7 \cap P)$. L'esdeveniment $S_7 \cap P$ serà buit, ja que és impossible que la suma dels resultats sigui 7 i el producte, imparell. Per tant, $p(S_7 \cap P) = 0 \neq p(S_7)\cdot p(P)$. Concloem, doncs, que els successos no són independents.

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

**Matemàtiques II** 2017

Model 2. Solucions

**OPCIÓ B**

**1.** Tenim tres aixetes per omplir un dipòsit d'aigua i suposam que el cabal que cau per cada aixeta és constant. Si fem servir l'aixeta 1, tardam 10 hores per omplir el dipòsit, si fem servir les aixetes 1 i 2, tardam 4 hores, i si les fem servir totes tres, tardam una hora. Suposant que la suma dels cabdals de les tres aixetes és 10 litres per minut, calculau el cabdal de l'aigua de cada aixeta (8 punts) i el volum del dipòsit (2 punts).

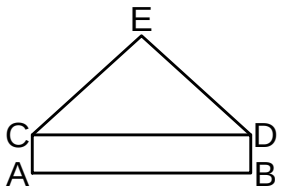
**Solució.** Sigui $V$ el volum del dipòsit, $v_1$, el cabdal de l'aixeta 1, $v_2$, el cabdal de l'aixeta 2 i $v_3$, el cabdal de l'aixeta 3.

Com que tardam 10 hores a omplir el dipòsit amb l'aixeta 1, tindrem que $V = 10 \cdot 60 \cdot v_1 = 600 \cdot v_1$. Si tardam 4 hores a omplir el dipòsit amb les aixetes 1 i 2, tindrem $V = 4 \cdot 60 \cdot (v_1 + v_2) = 240 \cdot (v_1 + v_2)$ i si tardam una hora a omplir el dipòsit amb les tres aixetes, tindrem $V = 60 \cdot (v_1 + v_2 + v_3)$. Com que la suma dels cabdals són 10 litres per minut ($v_1 + v_2 + v_3 = 10$), hem de resoldre el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{rl} 240 \cdot (v_1 + v_2) = & 600 \cdot v_1, \\ 60 \cdot (v_1 + v_2 + v_3) = & 600 \cdot v_1, \\ v_1 + v_2 + v_3 = 10. & \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rl} 360v_1 - 240v_2 = & 0, \\ 540v_1 - 60v_2 - 60v_3 = & 0, \\ v_1 + v_2 + v_3 = 10. & \end{array}\right\}$$

Les solucions del sistema anterior són $v_1 = 1$ litre per minut, $v_2 = \frac{3}{2} = 1.5$ litres per minut i $v_3 = \frac{15}{2} = 7.5$ litres per minut. El volum del dipòsit serà de $V = 600 \cdot v_1 = 600$ litres.

**2.** Hem de dissenyar una finestra com la que surt a la figura adjunta, o sigui, el polígon ACEDB, de 30 metres de perímetre. Es tracta d'un rectangle amb un triangle equilàter damunt. Calculau les dimensions del rectangle perquè l'àrea de la finestra sigui màxima. (10 punts)

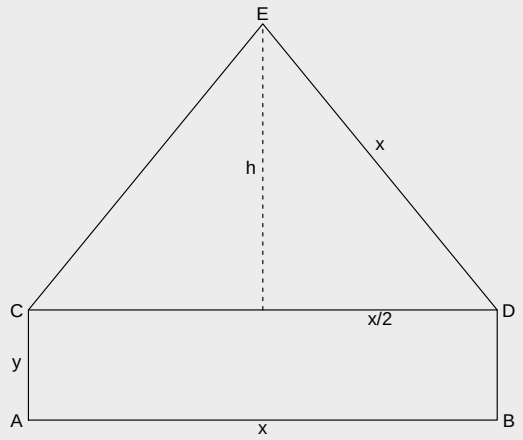


Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

**Matemàtiques II** 2017

Model 2. Solucions

**Solució.** Diguem $x$ i $y$ a les dimensions del rectangle:




El perímetre de la finestra serà:

$$P = 3x + 2y = 30.$$

Per tant, $y = \frac{30-3x}{2}$.

Per calcular l'àrea de la finestra, primer hem de calcular l'alçada del triangle $h$ fent servir el teorema de Pitàgores:

$$h = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}x^2} = \frac{\sqrt{3}x}{2}.$$

L'àrea de la finestra serà l'àrea del rectangle més l'àrea del triangle:

$$A = x \cdot y + \frac{x \cdot h}{2} = x \cdot \frac{(30-3x)}{2} + \frac{\sqrt{3}x^2}{4} = 15x + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}\right)x^2.$$

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

**Matemàtiques II** 2017

Model 2. Solucions

Per trobar el màxim de la funció $A$, l'hem de derivar i igualar a zero:

$$A' = 15 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\right) x = 0, \Rightarrow x = \frac{15}{\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{30}{6 - \sqrt{3}} \approx 7.02914.$$

El valor de $y$ serà:

$$y = \frac{30 - 3x}{2} = \frac{15}{11}\left(5 - \sqrt{3}\right) \approx 4.45629.$$

Es tracta d'un màxim, ja que $A'' = \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 < 0$.

**3.** Considerem les rectes següents dependents d'un paràmetre $\lambda$:

$$r: \left.\begin{array}{rl} x = & 1 + \lambda t, \\ y = & -1 + t, \\ z = & 3 - 2t. \end{array}\right\}, \quad s: \frac{x-2}{\lambda} = \frac{y}{2\lambda} = \frac{z-3}{-1}.$$

*a*) Calculau el valor de $\lambda$ perquè $r$ i $s$ es tallin. (7 punts)
*b*) Calculau el punt d'intersecció pe al valor de $\lambda$ calculat. (3 punts)

**Solució.** Els vectors directors de $r$ i $s$ seran:

$$v_r = (\lambda, 1, -2), \; v_s = (\lambda, 2\lambda, -1),$$

i un vector format per un punt de $r$ i un punt de $s$ serà:

$$w = P_r - P_s = (1, -1, 3) - (2, 0, 3) = (-1, -1, 0).$$

Les dues rectes es tallaran si els vectors $v_r, v_s$ i $w$ són linealment dependents, o, dit en altres paraules, el determinant de la matriu formada pels tres vectors és nul:

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda & -1 \\ 1 & 2\lambda & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 3\lambda = 0.$$

Això es verifica per a $\lambda = \frac{1}{3}$.

Calculem el punt d'intersecció de $r$ i $s$ per a $\lambda = \frac{1}{3}$:

$$r: \left.\begin{array}{rl} x = & 1 + \frac{1}{3}t, \\ y = & -1 + t, \\ z = & 3 - 2t. \end{array}\right\} \quad s: \frac{x-2}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{2}{3}} = \frac{z-3}{-1}.$$

Tindrem:

$$\frac{y}{3} = \frac{2}{3}(x-2), \Rightarrow \frac{t-1}{3} = \frac{2}{9}t - \frac{2}{3}, \Rightarrow t = -3.$$

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

**Matemàtiques II** 2017

Model 2. Solucions

El punt d'intersecció serà:

$$\left(1+\frac{1}{3}\cdot(-3), -1-3, 3-2\cdot(-3)\right) = (0,-4,9).$$

**4.** El test d'intel·ligència (CI) és una prova que en teoria mesura la intel·ligència de l'individu i dona un valor que aproximadament té de mitjana 100. O sigui, el nivell 100 se suposa que és el nivell d'intel·ligència d'una persona normal. Suposem ara que el nivell d'intel·ligència d'una determinada població segueix una distribució normal de mitjana 100 i desviació típica 10.

*a*) Calculau el percentatge de la població que es considera superdotada. Una persona es considera superdotada si té un nivell d'intel·ligència superior a 130. (3 punts)
*b*) Calculau el percentatge de la població amb un nivell d'intel·ligència entre 90 i 110. (3 punts)
*c*) Ens diuen que el 70% de la població té un nivell d'intel·ligència menor que un cert llindar. Calculau aquest llindar. (4 punts)

**Solució.** Sigui $X$ la variable aleatòria que ens dona el nivell d'intel·ligència d'un individu qualsevol de la població.

*a*) Ens demanen $p(X \geq 130)$. Si estandarditzam, obtenim:

$$p(X \geq 130) = p\left(Z \geq \frac{130-100}{10}\right) = p(Z \geq 3) = 1-p(Z \leq 3) = 1-0.9987 = 0.0013,$$

on $Z$ és una normal estàndard.
Per tant, el $0.13\%$ de la població és superdotada.

*b*) Ens demanen $p(90 \leq X \leq 110)$:

$$\begin{aligned} p(90 \leq X \leq 110) =& p\left(\frac{90-100}{10} \leq Z \leq \frac{110-100}{10}\right) = p(-1 \leq Z \leq 1) \\ =& p(Z \leq 1) - p(Z \leq -1) = 0.8413 - 0.1587 = 0.6827. \end{aligned}$$

El percentatge serà: $68.27\%$.

*c*) Ens diuen que $p(X \leq x) = 0.7$, on $x$ és el llindar a calcular. Si estandarditzam, obtenim:

$$p(X \leq x) = p\left(Z \leq \frac{x-100}{10}\right) = 0.7.$$

Tenim que $\frac{x-100}{10} = 0.5244$. Per tant, el valor de $x$ serà:

$$x = 100 + 10 \cdot 0.5244 = 105.244.$$

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

**Matemàtiques II** 2017

Model 2. Solucions

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |
| 3.5 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 |
| 3.6 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.7 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.8 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.9 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 4.0 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 4.1 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

Taula de la distribució normal $N(0,1)$.