Universitat de les Illes Balears

escola politècnica superior

Treball Final de Grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

L'art de sumar: Introducció als algoritmes per calcular sumes de sèries hipergeomètriques

AMADOR ANTONI FONT MOLINAS

Tutors

Sebastià Massanet Massanet   Arnau Mir Torres

Escola Politècnica Superior
Universitat de les Illes Balears

Palma, 7 de setembre de 2017

Sumari

Resum

Les sèries hipergeomètriques són una eina matemàtica de gran aplicació en camps com la variable complexa, equacions diferencials, equacions en diferències i aritmètica, entre d'altres. En aquest treball, explicarem en detall que són aquestes sèries i donarem resultats sobre aquestes per entendre i observar el seu comportament.

Ens adonarem de que aquestes sèries suposen un càlcul laboriós i llarg, en molts casos, ja que els seus sumands o termes són funcions que poden estar compostes de nombres combinatoris o factorials fent que el càlcul de la sèrie sigui molt complex quan s'han de fer moltes sumes.

Aquest fet serà la pedra angular d'aquest treball en el qual s'intentarà trobar una fórmula tancada $f(n)$ que ens doni el resultat de la sèrie d'una forma més òptima. Tot i que hi ha diferents mètodes per aconseguir aquesta fórmula tancada $f(n)$, ens centrarem bàsicament en tres.

El primer mètode, consistirà en mostrar una base de dades formada per fórmules tancades $f(n)$. Identificarem una sèrie hipergeomètrica donada amb una fórmula específica d'aquesta base de dades depenent de les característiques de la sèrie hipergeomètrica en qüestió. No obstant això, no totes les sèries hipergeomètriques poden trobar la seva expressió en forma de $f(n)$ a la base de dades, per això veurem altres dos mètodes més.

El segon mètode que veurem és el mètode de Sor Celine, el qual es considera el precursor de tots els mètodes que es centren en trobar una expressió $f(n)$ per una sèrie hipergeomètrica. Aquest mètode consisteix en trobar una relació de recurrència amb els termes "desplaçats" d'una sèrie hipergeomètrica. Veurem i explicarem el funcionament d'aquest mètode juntament amb uns quants exemples del seu ús. Emperò, encara que aquest resulta molt efectiu a l'hora de trobar una expressió de $f(n)$ no sol ser un mètode molt òptim, fet que ens durà a veure un tercer mètode.

Per acabar amb el treball mostrarem un darrer mètode conegut amb el nom de mètode de Gosper. Aquest mètode es basa en escriure la raó entre dos termes consecutius en un quocient de polinomis els quals han de satisfer una relació de recurrència clau per trobar l'expressió de la fórmula tancada de la nostra sèrie. Igual que amb l'anterior mètode també és mostrarà com és el seu funcionament i l'aplicarem també a uns quants exemples. Encara que aquest mètode és més òptim que el de Sor Celine, s'ha de dir que aquest no resulta tant efectiu.

CAPÍTOL 1

Introducció

En aquest treball ens centrarem en estudiar les sèries hipergeomètriques de la forma $\sum_{k=0}^{n} t_k$, on t_k és un terme hipergeomètric. En el grau de matemàtiques hem pogut tractar amb les sèries geomètriques on el quocient entre dos termes consecutius de la sèrie és constant. En canvi quan xerram de les sèries hipergeomètriques la raó que es forma a partir del quocient de dos termes consecutius és una funció racional de variable k. Veurem tot això amb més detall al capítol 2, on es presenten nombrosos resultats d'aquestes sèries, se'n demostraran alguns i s'inclouran diversos exemples per il·lustrar el funcionament d'aquestes sèries.

La història de les sèries hipergeomètriques, o de les funcions hipergeomètriques les quals es fan servir per calcular aquestes sèries, va començar a partir d'un article de Carl Friedrich Gauss l'any 1813 [1], encara que fou el matemàtic anglès John Wallis la primera persona que introduí el concepte de sèries hipergeomètriques l'any 1655 amb el seu llibre titulat *Arithmetica Infinitorum*. En aquest article Gauss va presentar moltes de les propietats de les funcions hipergeomètriques que coneixem avui en dia. El descobriment de les funcions hipergeomètriques ha provocat sempre una motivació intrínseca pel seu estudi en el món de les matemàtiques. A més, aquestes han motivat el desenvolupament de diversos camps de les matemàtiques com el de les funcions complexes, les superfícies de Riemann, les equacions diferencials, les equacions en diferències, la teoria de l'aritmètica, entre d'altres.

Per altra banda, Ernst Kummer l'any 1836 va contribuir a la cerca d'un gran nombre de propietats aritmètiques de les funcions hipergeomètriques, encara que el seu principal objecte d'estudi fou la funció hipergeomètrica de Gauss d'una variable. A part de Kummer, molts altres matemàtics han contribuït a la cerca d'identitats i generalitzacions de la funció hipergeomètrica de Gauss, les quals duen el seu nom. Goursat, Pochhammer, Barnes, Mellin, and Appell són noms de funcions hipergeomètriques.

Encara que les funcions hipergeomètriques interessassin a alguns investigadors per la seva particularitat com a objecte matemàtic, a molts altres no els hi va interessar el tema ja que no s'aconseguia arribar a cap resultat significatiu. En tot cas, algunes de les propietats de les funcions hipergeomètriques han ajudat en molts de casos d'una forma o d'una altra. Els polinomis ortogonals estudiats al llibre de Szego [2], un gran nombre de fórmules que es poden trobar als enormes quaderns de Ramanujan, funcions esfèriques sobre els grup de Lie i aplicacions de les matemàtiques a la mecànica quàntica, són uns quants exemples de camps on les funcions hipergeomètriques han jugat un paper important.

Emperò, el càlcul d'aquestes sèries a vegades es pot complicar molt ja que en molts de casos els termes hipergeomètrics t_k de la sèrie estan formats per nombres combinatoris o per nombres factorials. Per això la finalitat de l'estudi d'aquest treball consistirà en trobar una fórmula tancada $f(n)$ que depengui únicament del valor de n escollit, i de forma que es compleixi que $\sum_{k=0}^{n} t_k = f(n)$. Gràcies a l'obtenció de l'expressió de $f(n)$ ens serà més fàcil calcular el valor de la suma per a valors de n grans i d'estudiar la seva convergència quan n tendeix a infinit, ja que tendrà molta menys complexitat i serà molt més ràpida de calcular.

Primer de tot veurem en el capítol 2 una base de dades que podrem utilitzar per tal d'assignar una fórmula a certes sèries amb unes característiques específiques. Veurem a més com obtenir alguna d'aquestes identitats en un cas particular i resoldrem diversos exemples per il·lustrar la utilitat dels resultats recopilats en aquest capítol.

A continuació, al capítol 3 estudiarem el mètode de Sor Celine, on veurem un algorisme per tal d'obtenir una expressió de $f(n)$ juntament amb la demostració de que aquest mètode funciona sota certes condicions. L'algorisme que va proposar Sor Celine és el precursor de tots els algorismes que vénen a continuació, per això és considerada la mare d'aquestes demostracions. Ja per acabar en el capítol 4 treballarem amb el mètode de Gosper. Aquest mètode té l'avantatge de ser més ràpid que el mètode de Sor Celine. Veurem en aquests dos capítols exemples dels dos mètodes. A més, es presentaran implementacions en Mathematica dels dos mètodes i exemples del seu ús.

Cal dir que apart dels mètodes que veurem en aquest treball, existeixen altres mètodes per trobar una expressió de $f(n)$, com el mètode de Zeilberger [3][4], el mètode WZ [5] i el mètode Hyper [6].

Aquest treball de final de grau està realitzat principalment a partir d'un treball fet per Marko Petkovek, Herbert S. Wilf i Doron Zeilberg, l'any 1997 titulat $A = B$ [6]. Concretament ens hem basat en la primera part d'aquest llibre. Hem desglossat aquesta primera part mirant d'explicar d'una forma més ordenada i extensa els resultats que es donen, tant teoremes com exercicis resolts. A més hem resolt uns quants d'exercicis que es proposen a la llista d'exercicis de cada tema.

CAPÍTOL 2

LES SÈRIES HIPERGEOMÈTRIQUES

Una sèrie geomètrica $\sum_{k\geq 0} t_k$ és un tipus de sèrie on els termes segueixen una progressió geomètrica, és a dir, que el quocient entre dos termes consecutius $\frac{t_{k+1}}{t_k}$ és una constant x. D'aquesta forma podem generalitzar totes les sèries geomètriques de la forma següent:

$$\sum_{k\geq 0} cx^k \qquad \text{on } c, x \in \mathbb{R}$$

on si ens fixam:

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{cx^{k+1}}{cx^k} = x.$$

Un exemple típic d'una sèrie geomètrica és la sèrie

$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{2^k},$$

on en aquest cas,

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{\frac{1}{2^{k+1}}}{\frac{1}{2^k}} = \frac{1}{2}.$$

A partir d'aquí, podem presentar les sèries hipergeomètriques $\sum_{k\geq 0} t_k x^k$ amb $t_0 = 1$, com una sèrie on la raó, entesa com el quocient entre dos termes consecutius, és una funció racional de variable k, és a dir,

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{P(k)}{Q(k)}$$

on $P(k), Q(k) \in \mathbb{R}[k]$.

Considerem per exemple la sèrie

$$\sum_{k\geq 3} \frac{(2k+1)!}{(k-3)!} = \sum_{k\geq 0} \frac{(2k+7)!}{k!}. \tag{2.1}$$

Anem primer a comprovar que efectivament és una sèrie hipergeomètrica. Si feim el quocient entre dos termes consecutius tenim que

$$\begin{aligned}\frac{t_{k+1}}{t_k} &= \frac{\frac{(2(k+1)+7)!}{(k+1)!}}{\frac{(2k+7)!}{k!}} = \frac{(2k+9)!k!}{(2k+7)!(k+1)!} \\ &= \frac{(2k+9)(2k+8)(2k+7)!k!}{(2k+7)!(k+1)!} \\ &= \frac{(2k+9)(2k+8)}{k+1} = \frac{4\left(k+\frac{9}{2}\right)(k+4)}{k+1},\end{aligned}$$

obtenint d'aquesta forma una funció racional. Així doncs hem pogut comprovar que efectivament la sèrie 2.1 és una sèrie hipergeomètrica. Aquest és un dels molts exemples que podem trobar-nos d'una sèrie hipergeomètrica. Funcions tan familiars com exponencials, logarítmiques, trigonomètriques, binomials, així com les funcions de Bessel, o les successions de Legendre, Chebyshev, Laguerre, Hermite... són funcions que tenen associada una sèrie de potències hipergeomètrica.

Una de les tasques més importants a partir d'ara serà poder identificar si una sèrie és o no hipergeomètrica i d'aquesta forma poder aplicar els resultats que veurem més endavant, que formaran la base del nostre treball.

Si una sèrie té la forma $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ el terme t_k serà $a_k x^k$ i el quocient entre dos termes consecutius tendrà la forma:

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{P(k)}{Q(k)}x = \frac{(k+a_1)(k+a_2)\cdots(k+a_p)}{(k+b_1)(k+b_2)\cdots(k+b_q)(k+1)}x \tag{2.2}$$

on x és una constant i els a_i's i els b_i's són nombres reals, anomenats paràmetres superiors i inferiors de la sèrie respectivament. A partir de la factorització anterior, una altra forma molt emprada a l'hora de denotar una sèrie hipergeomètrica $\sum_{k\geq 0} t_k x^k$ amb $t_0 = 1$ és la següent:

$${}_pF_q\left[\begin{matrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_q \end{matrix} ; x\right].$$

Hem de dir que els b_i's no poden ser enters negatius ja que en tal cas la sèrie no estaria ben definida (argumentarem això més endavant a la secció 2.2).

Notem que en el denominador de l'expressió 2.2 apareix un factor $(k+1)$, el qual sempre ha d'aparèixer per conveniència. En el cas que aquest no aparegui haurem de forçar-lo a aparèixer compensant sempre el numerador.

2.1 Com podem identificar una sèrie hipergeomètrica?

Com hem dit abans, moltes de les funcions clàssiques que coneixem tenen associada una sèrie de potències hipergeomètrica com per exemple la funció exponencial $f(x) = e^x$. En aquest cas sabem que aquesta funció es pot escriure en forma de sèrie de potències com $e^x = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}$, on el primer terme de la sèrie és 1. Si calculam la raó d'aquesta sèrie tenim que $\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{x}{k+1}$ obtenint així una expressió que encaixa amb el que hem definit a 2.2, i per tant:

$$e^x = {}_0F_0\left[\begin{matrix} - \\ - \end{matrix}; x\right].$$[1]

Com ja hem dit, un dels nostres principals objectius serà determinar si una sèrie és o no hipergeomètrica i en el cas que ho sigui escriure-la de la forma ${}_pF_q[\cdots]$. Una vegada identificada la sèrie com hipergeomètrica, podrem emprar els nombrosos resultats disponibles de les sèries hipergeomètriques que ens facilitaran la nostra tasca. Això ho veurem més endavant.

A partir d'aquí podríem definir un algorisme on donada una sèrie, determini si és o no hipergeomètrica i que a més ens retorni la sèrie escrita amb la notació ${}_pF_q[\cdots]$.

2.1.1 Algorisme de cerca de sèries hipergeomètriques

1. Donada una sèrie $\sum_k t_k$, primer trobarem quin és el valor de l'índex k més petit pel qual la sèrie té sentit i després desplaçarem k de tal forma que la sèrie comenci sempre per $k = 0$ fent les modificacions pertinents a la sèrie. Ara, si el primer terme de la sèrie corresponent a $k = 0$, és diferent d'1, aquest es modificarà aplicant factor comú, amb la idea que sempre es verifiqui que $t_0 = 1$.

2. Calcular l'expressió de la raó simplificada $\frac{t_{k+1}}{t_k}$; donant lloc a $\frac{P(k)}{Q(k)}$, on P i Q són polinomis. Si el quocient anterior no és una funció racional en k, la sèrie no serà hipergeomètrica.

3. Factoritzar al màxim els polinomis P i Q amb factors lineals. Si no apareix el factor $(k+1)$ al denominador, aquest s'ha d'afegir compensant sempre el numerador. D'aquesta forma obtindrem una expressió com la següent:

$$\frac{P(k)}{Q(k)} = \frac{(k+a_1)(k+a_2)\cdots(k+a_p)}{(k+b_1)(k+b_2)\cdots(k+b_p)(k+1)}x$$

   on x denota una constant i els a_i's i b_i's són paràmetres reals. Donat el cas que hi hagi un coeficient de k que no sigui 1, aquest es traurà factor comú i s'afegirà a la constant x.

4. Ara ja només queda escriure la sèrie hipergeomètrica amb la notació explicada, i si a la passa 1 hem tret alguna cosa factor comú , aquest factor multiplicaria l'expressió.

$${}_pF_q\left[\begin{matrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_q \end{matrix}; x\right].$$

Vegem ara uns quants exemples per posar en pràctica l'algorisme que hem explicat.

Exemple 2.1. Considerem la sèrie

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}}.$$

[1] Escriurem un guió quan no hi hagi cap paràmetre a l'hora d'escriure la sèrie amb la notació hipergeomètrica.

A partir d'aquí tenim que el k-èsim terme de la sèrie ve donat en funció de k per l'expressió següent:

$$t_k = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{(2n-1)!}{k!(2n-1-k)!}} = \frac{n!(2n-1-k)!}{(2n-1)!(n-k)!},$$

on és fàcil comprovar que $t_0 = 1$. Si ara volem determinar-ne la raó, hem de calcular:

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{\frac{n!(2n-2-k)!}{(2n-1)!(n-k-1)!}}{\frac{n!(2n-1-k)!}{(2n-1)!(n-k)!}} = \frac{(2n-k-2)!(n-k)!}{(2n-k-1)!(n-k-1)!} = \frac{n-k}{2n-k-1} = \frac{k-n}{k-2n+1}.$$

Fixem-nos que a l'expressió anterior no hi apareix el terme $(k+1)$ al denominador, de forma que hem d'afegir-lo compensant el denominador:

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{k-n}{k-2n+1} = \frac{(k-n)(k+1)}{(k-2n+1)(k+1)}.$$

A partir de l'expressió anterior tenim que la sèrie pot ser escrita amb la notació explicada de la següent forma:

$${}_2F_1\left[\begin{matrix} -n & 1 \\ -2n+1 & - \end{matrix} ;1\right].$$

Exemple 2.2. Sigui la sèrie $\sum_k t_k$ on $t_k = \frac{1}{(2k+1)(2k+3)!}$. Fixem-nos que el valor de k més petit pel qual la sèrie te sentit és $k = -1$. D'aquesta forma podem reescriure la sèrie de la següent manera reajustant els índexs:

$$\sum_{k\geq -1} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)!} = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)!}$$

on $t_0 = -1$, el qual tendrem en compte a l'hora d'escriure la sèrie al final. Anem ara a calcular-ne la raó a partir de dos termes consecutius.

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{\frac{1}{(2k+1)(2k+3)!}}{\frac{1}{(2k-1)(2k+1)!}} = \frac{(2k-1)}{(2k+1)(2k+2)(2k+3)} = \frac{(k-\frac{1}{2})}{(k+\frac{1}{2})(k+\frac{3}{2})(k+1)}\frac{1}{4}.$$

Finalment la sèrie adoptarà la següent forma escrita amb la notació de sèrie hipergeomètrica:

$$-{}_1F_2\left[\begin{matrix} -\frac{1}{2} & \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{matrix} ;\frac{1}{4}\right].$$

Recordem que el signe menys prové de la constat obtinguda a l'hora de calcular t_0.

Exemple 2.3. És la funció de *Bessel* una sèrie hipergeomètrica? Recordem que la funció de Bessel ve donada per la següent sèrie:

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}}{k!(k+p)!},$$

on p és un valor enter positiu. Si calculam la raó de dos termes consecutius d'aquesta sèrie tenim

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{\frac{(-1)^{k+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p+2}}{(k+1)!(k+p+1)!}}{\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}}{k!(k+p)!}} = \frac{(-1)\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(k+1)(k+1+p)}.$$

Fixem-nos que $t_0 = \frac{(\frac{x}{2})^p}{p!}$. Així doncs podem concloure que la funció de Bessel és efectivament hipergeomètrica, la qual pot ser escrita de la següent forma:

$$J_p(x) = \frac{(\frac{x}{2})^p}{p!} {}_0F_1 \left[\begin{matrix} - \\ p+1 \end{matrix} ; -\frac{x^2}{4} \right].$$

2.2 Definicions, notacions i relacions bàsiques per treballar amb les sèries hipergeomètriques

En el tema de les sèries hipergeomètriques, és molt comú trobar-se amb notacions un tant peculiars i poc conegudes d'ús molt freqüent en aquest camp. Per això, a continuació explicarem un seguit de conceptes i notacions bàsiques que farem servir durant el transcurs d'aquest treball.

Definició 2.1 (Funció d'increment factorial)**.** *Siguin a un nombre real i n un nombre enter no negatiu, aleshores:*

$$(a)_n := \begin{cases} a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1) & si\ n \geq 1, \\ 1 & si\ n = 0. \end{cases}$$

Tenint en compte la definició anterior podem escriure una sèrie hipergeomètrica en forma de sèrie de potències de la següent forma:

$${}_pF_q \left[\begin{matrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_q \end{matrix} ; x \right] = \sum_{n\geq 0} \frac{(a_1)_n(a_2)_n\cdots(a_p)_n}{(b_1)_n(b_2)_n\cdots(b_q)_n} \frac{x^n}{n!}.$$

Aquesta sèrie de potències estarà ben definida sempre que els paràmetres inferiors $b_1, b_2, \ldots, b_q$ no siguin enters negatius o 0, ja que si ens fixam amb la definició 2.1, si a és un nombre enter negatiu, en el seu desenvolupament hi apareixerà un 0, fet que provocarà que el denominador sigui 0 i per tant la sèrie no estaria ben definida. Per altra banda, la sèrie convergirà trivialment si tots els paràmetres superiors $a_1, a_2, \ldots, a_p$ són enters negatius, en cas contrari la sèrie no acabaria donant lloc a una sèrie infinita. A part d'aquesta nomenclatura, també és molt comú trobar una sèrie hipergeomètrica escrita de la següent forma:

$${}_pF_q \left[\begin{matrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_q \end{matrix} ; x \right] = {}_pF_q(a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q; x).$$

Juntament amb la funció d'increment, una funció que s'utilitza molt sovint en la temàtica de les sèries hipergeomètriques és la funció Gamma, $\Gamma(z)$, que és defineix de la següent forma:

Definició 2.2. *[Funció Gamma] S'anomena funció Gamma a la funció Γ definida com*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt,$$

on z és un real que verifica $z > 0$.

La funció Gamma es pot estendre per continuïtat analítica a tot z complex excepte als enters negatius [8]. A continuació veurem un seguit de resultats i teoremes sobre la funció Gamma que ens seran de gran utilitat. Per donar i demostrar aquests resultats ens ha estat de gran ajuda el llibre [7].

Proposició 2.1. *Per a tot $z \in \mathbb{C}$ no enter negatiu, es verifica que:*

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$$

Demostració. Per provar-ho,suposam primer que $z > 0$. Resolent la integral de la definició 2.2 utilitzant el mètode per parts:

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_0^\infty t^z e^{-t} dt \\
&= \left| \begin{array}{cc} u = t^z \Rightarrow & du = z t^{z-1} dt \\ dv = e^{-t} dt \Rightarrow & v = -e^{-t} \end{array} \right| \\
&= \left[-e^{-t} t^z\right]_0^\infty + z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \\
&= z \cdot \Gamma(z).
\end{aligned}$$

Per continuïtat analítica [8] podem dir que $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$ per a tot z complex no enter negatiu. □

Corol·lari 2.1. *Sigui $n \in \mathbb{Z}^+$. Es té que:*

$$\Gamma(n+1) = n! = (1)_n.$$

Demostració. Ho veurem mitjançant inducció. Per $n = 0$ tenim que:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^\infty = 0 - (-1) = 1 = 0!.$$

Suposem ara que el resultat és vàlid per a n i vegem que també es vàlid per $n+1$. Per fer-ho utilitzarem la igualtat demostrada a la proposició 2.1:

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n(n-1)! = n! = (1)_n.$$

□

Corol·lari 2.2. *Sigui a un nombre real i n un nombre enter positiu, aleshores:*

$$(a)_n = \frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(a)}.$$

Demostració.

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(a)} &= \frac{(n+a-1)\Gamma(n+a-1)}{\Gamma(a)} = \frac{(n+a-1)(n+a-2)\Gamma(n+a-2)}{\Gamma(a)} \\
&= \frac{(n+a-1)\cdots(a+1)\Gamma(a)}{\Gamma(a)} = (n+a-1)\cdots(a+1)a = (a)_n.
\end{aligned}$$

□

Una altra de les funcions més emprades en aquest camp, juntament amb la funció Γ, és la que es coneix com a funció Beta (B), que és defineix a continuació:

Definició 2.3. *Siguin u, v dos nombres reals positius. Aleshores la funció Beta B es defineix de la següent forma:*

$$B(u,v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}dt.$$

Aquesta funció es pot relacionar amb la funció Γ tal com veurem en el següent teorema.

Teorema 2.1. *Siguin u i v dos nombres reals positius, aleshores:*

$$B(u,v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}. \tag{2.3}$$

Demostració. Utilitzant la definició de la funció Gamma donada a la definició 2.2 tenim que:

$$\begin{aligned}\Gamma(u)\Gamma(v) &= \int_0^\infty e^{-t}t^{u-1}dt\int_0^\infty e^{-s}s^{v-1}ds \\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(t+s)}t^{u-1}s^{v-1}dt\,ds.\end{aligned}$$

Per resoldre aquesta integral de diverses variables utilitzarem els canvis de variables següents: $t = xy$ i $s = x(1-y)$. Notem que amb aquest canvi $t+s = x$ i que el fet que $0 < t < \infty$ i $0 < s < \infty$ implica que $0 < x < \infty$ i que $0 < y < 1$.

Considerant doncs la funció de canvi de variable $g(x,y) = (xy, x(1-y))$, tendrem que el Jacobià del canvi vendrà donat per

$$Dg(x,y) = \begin{vmatrix} y & x \\ 1-y & -x \end{vmatrix} = -x.$$

Així tendrem que $dt\,ds = |Dg(x,y)|dx\,dy = x\,dx\,dy$.

Si ara aplicam el canvi ens quedarà reescrit de la forma següent:

$$\begin{aligned}\Gamma(u)\Gamma(v) &= \int_0^\infty\int_0^1 e^{-x}x^{u-1}y^{u-1}x^{v-1}x^{v-1}(1-y)^{v-1}x\,dx\,dy \\ &= \int_0^\infty e^{-x}x^{u+v-1}dx\cdot\int_0^1 y^{u-1}(1-y)^{v-1}dy \\ &= \Gamma(u+v)\cdot B(u,v).\end{aligned}$$

□

A part de la definició 2.3 de la funció Beta, podem trobar altres tipus de definicions obtinguts a partir de considerar un canvi de variable a la integral. Per exemple si consideram el canvi $t = \frac{s}{s+1}$ obtenim:

$$\begin{aligned} B(u,v) &= \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}dt \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{s}{s+1}\right)^{u-1}\left(1-\frac{s}{s+1}\right)^{v-1}\frac{1}{(s+1)^2}\,ds \\ &= \int_0^\infty s^{u-1}(s+1)^{1-u}(s+1)^{1-v}(s+1)^{-2}\,ds \\ &= \int_0^\infty \frac{s^{u-1}}{(s+1)^{u+v}}ds. \end{aligned}$$

A partir d'aquesta definició alternativa, aplicant el Teorema 2.1 obtenim que:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \Gamma(z+1-z)B(z,1-z) = B(z,1-z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{t+1}dt, \tag{2.4}$$

on $0 < z < 1$.

Vegem ara un altre teorema molt important que ens facilitarà la feina a l'hora de resoldre problemes que veurem més endavant quan ens apareguin factorials de nombres negatius.

Teorema 2.2. *(Fórmula de Reflexió) Per a tot $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ es satisfà que*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \tag{2.5}$$

Demostració. Per provar aquesta igualtat, coneguda amb el nom de *fórmula de reflexió*, utilitzarem integració de contorn en el pla complex. Primer de tot restringirem els valors de z a l'interval real $(0,1)$ fent $z = x$. Ara, a partir de la igualtat que hem donat a 2.4, tenim que:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1-t}dt.$$

Ara bé, en lloc de resoldre aquesta integral definida, resoldrem la següent integral de contorn:

$$\int_{\mathscr{C}} \frac{z^{x-1}}{1-z}dz,$$

on $\mathscr{C}$ serà un contorn tancat format per dues circumferències centrades a l'origen de radis R i ε respectivament, les quals s'ajuntaran amb un segment de recta sobre l'eix de les abscisses que anirà de $-R$ fins a $-\varepsilon$ amb $R > \varepsilon$.

Ens mourem primer sobre la circumferència de radi R en sentit positiu (antihorari) per després recórrer la circumferència de radi ε en sentit negatiu (horari). Dividirem el contorn $\mathscr{C}$ en 4 contorns diferents $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3, \mathscr{C}_4$, de forma que $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2 \cup \mathscr{C}_3 \cup \mathscr{C}_4$ tal com es pot veure a la Figura 2.1.

Per resoldre la integral utilitzarem el teorema del residus demostrat a l'assignatura de funcions amb variable complexa. A continuació recordarem aquest resultat.

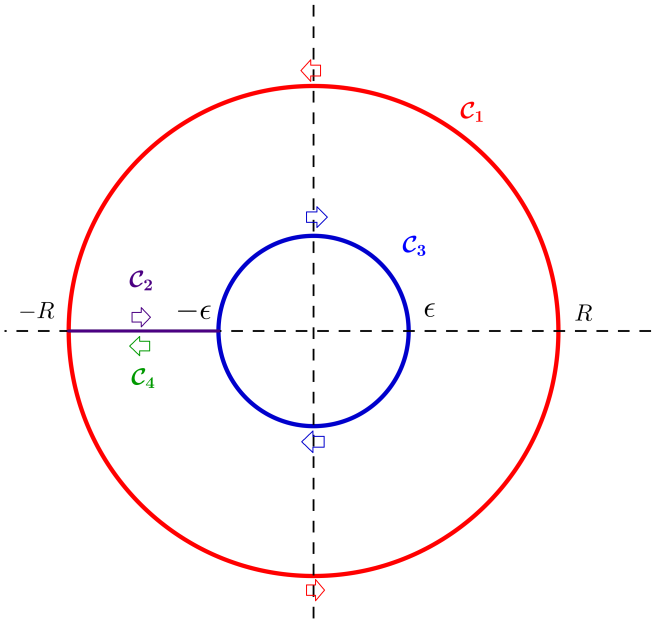

Figura 2.1: Contorn $\mathscr{C}$.

Teorema 2.3. ***(Teorema dels Residus)*** *Sigui $\mathscr{C}$ un contorn tancant simple orientat positivament i sigui $f(z)$ una funció analítica dins i sobre el contorn $\mathscr{C}$ excepte en un nombre finit de punt singulars $z_1,\dots,z_n$ interiors a $\mathscr{C}$, aleshores:*

$$\int_{\mathscr{C}} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{Res}\, f(z),$$

on $Res\ f$ denota el conjunt de residus de la funció f.

En el nostre cas tenim que la funció $\frac{z^{x-1}}{1-z}$ és analítica en tot punt excepte quan $z=1$. Així tenim que:

$$\int_{\mathscr{C}} \frac{z^{x-1}}{1-z}\,dz = 2\pi i \underset{z=1}{Res} \frac{z^{x-1}}{1-z}.$$

Per calcular el residu farem servir també una proposició demostrada a l'assignatura de funcions amb variable complexa.

Proposició 2.2. *Si $f(z)$ i $g(z)$ són analítiques en z_0 i $f(z_0)\neq 0$, $g(z_0)=0$, $g'(z_0)\neq 0$, llavors z_0 és un pol simple de $\frac{f(z)}{g(z)}$ i el seu residu val $\frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$.*

En aquest cas en particular tenim que $z_0=1$ és un pol simple de $\frac{z^{x-1}}{1-z}$, i per tant si aplicam la proposició 2.2 ens queda que la integral val:

$$\int_{\mathscr{C}} \frac{z^{x-1}}{1-z}\,dz = 2\pi i \underset{z=1}{Res} \frac{z^{x-1}}{1-z} = 2\pi i \frac{1^{x-1}}{-1} = -2\pi i,$$

fet que implica que:

$$-2\pi i = \int_{\mathscr{C}_1} \frac{z^{x-1}}{1-z}dz + \int_{\mathscr{C}_2} \frac{z^{x-1}}{1-z}dz + \int_{\mathscr{C}_3} \frac{z^{x-1}}{1-z}dz + \int_{\mathscr{C}_4} \frac{z^{x-1}}{1-z}dz.$$

Anem ara a calcular cada una d'aquestes integrals.

1. Per resoldre la integral sobre el contorn $\mathscr{C}_1$ ho farem mitjançant el canvi a coordenades polars $z = Re^{i\theta}$, vegem-ho:

$$\int_{\mathscr{C}_1} \frac{z^{x-1}}{1-z} dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^{x-1} e^{i(x-1)\theta}}{1-Re^{i\theta}} d(Re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{iR^x e^{ix\theta}}{1-Re^{i\theta}} d\theta.$$

   Ara recordem que $0 < x < 1$, de forma que si feim el radi R tan gran com vulguem fent-lo tendir a infinit, ens quedarà que:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{iR^x e^{ix\theta}}{1-Re^{i\theta}} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{R\to\infty} \frac{iR^x e^{ix\theta}}{1-Re^{i\theta}} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} 0 \cdot d\theta = 0.$$

2. Anem ara a resoldre la integral sobre el contorn $\mathscr{C}_2$ fent servir el canvi $z = te^{\pi i} = -t$.

$$\int_{\mathscr{C}_2} \frac{z^{x-1}}{1-z} dz = \int_{R}^{\varepsilon} \frac{t^{x-1} \cdot e^{\pi(x-1)i}}{1+t} d(te^{\pi i}) = \int_{R}^{\varepsilon} \frac{t^{x-1} \cdot e^{\pi x i}}{1+t} dt.$$

3. Considerant ara la integral sobre el contorn $\mathscr{C}_3$ amb el canvi $z = \varepsilon e^{i\theta}$ obtenim:

$$\int_{\mathscr{C}_3} \frac{z^{x-1}}{1-z} dz = \int_{\pi}^{-\pi} \frac{\varepsilon^{x-1} \cdot e^{\pi(x-1)\theta}}{1-\varepsilon e^{i\theta}} d(\varepsilon e^{i\theta}) = \int_{\pi}^{-\pi} \frac{i\varepsilon^x e^{ix\theta}}{1-\varepsilon e^{i\theta}} d\theta.$$

   Ara si feim tendir ε a 0, ens quedarà que:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\pi}^{-\pi} \frac{i\varepsilon^x e^{ix\theta}}{1-\varepsilon e^{i\theta}} d\theta = 0.$$

4. Finalment la integral sobre el contorn $\mathscr{C}_4$ considerant el canvi $z = te^{-\pi i} = -t$, ens queda:

$$\int_{\mathscr{C}_4} \frac{z^{x-1}}{1-z} dz = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{t^{x-1} e^{-\pi(x-1)i}}{1+t} d(te^{-\pi i}) = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{t^{x-1} e^{-\pi x i}}{1+t} dt.$$

Així doncs si feim tendir $R \to \infty$ i $\varepsilon \to 0$ la suma de les 4 integrals de contorn anteriors es redueix a:

$$\begin{aligned}
-2\pi i &= \int_{\infty}^{0} \frac{t^{x-1} \cdot e^{\pi x i}}{1+t} dt + \int_{0}^{\infty} \frac{t^{x-1} \cdot e^{-\pi x i}}{1+t} dt \\
&= -\int_{0}^{\infty} \frac{t^{x-1} \cdot e^{\pi x i}}{1+t} dt + \int_{0}^{\infty} \frac{t^{x-1} \cdot e^{-\pi x i}}{1+t} dt \\
&= \left(-e^{\pi x i} + e^{-\pi x i}\right) \int_{0}^{\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\, dt \\
&= -2i \sin(\pi x) \int_{0}^{\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\, dt.
\end{aligned}$$

Obtenint finalment que:

$$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}. \tag{2.6}$$

Per acabar podem estendre aquesta demostració que hem provat per tot valor de $z = x$ amb $0 < x < 1$ a tot el pla complex per continuïtat analítica [8], concloent d'aquesta forma que:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

□

Vegem a continuació una forma d'aproximar la funció Gamma quan aquesta s'aplica a valors molt grans. La següent relació serà molt important més endavant per demostrar alguns resultats.

Proposició 2.3. *Sigui $a \in \mathbb{R}$ i n un nombre enter no negatiu tal que $a + n > 1$, aleshores:*

$$\Gamma(a+n) \sim (n-1)!n^a$$

quan $n \to \infty$, o dit d'una altra forma que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{(n-1)!n^a} = 1.$$

Demostració. Per provar-ho, utilitzarem principalment la fórmula d'Stirling que estableix que $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Així doncs, tenim per una part que emprant la igualtat demostrada al corol·lari 2.1:

$$\Gamma(a+n) \sim \sqrt{2\pi(a+n-1)}\left(\frac{a+n-1}{e}\right)^{a+n-1},$$

i per altra part:

$$(n-1)!n^a \sim \sqrt{2\pi(n-1)}\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} n^a.$$

Si feim el quocient entre les dues expressions i feim tendir $n \to \infty$, tenim per una part que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi(a+n-1)}}{\sqrt{2\pi(n-1)}} = 1.$$

Per altra part ens queda que:

$$\frac{\left(\frac{a+n-1}{e}\right)^{a+n-1}}{\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} n^a} = \left(\frac{a+n-1}{e\cdot n}\right)^a \left(\frac{a+n-1}{n-1}\right)^{n-1},$$

on si feim límits novament obtenim que:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a+n-1}{e\cdot n}\right)^a = \left(\frac{1}{e}\right)^a = e^{-a},$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a+n-1}{n-1}\right)^{n-1} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} (n-1)\left(\frac{a+n-1}{n-1} - 1\right)} = e^a,$$

i per tant que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a+n-1}{e}\right)^{a+n-1}}{\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}n^a}=e^{-a}\cdot e^a=1.$$

D'aquesta forma podem dir que quan feim tendir n a un nombre molt gran el quocient que hem descrit val 1, la qual cosa ens porta a concloure que $\Gamma(a+n)\sim(n-1)!n^a$. $\square$

2.3 La base de dades de les sèries hipergeomètriques

Vistes doncs algunes de les definicions i notacions més emprades al camp d'estudi de les sèries hipergeomètriques, veurem un seguit d'identitats clàssiques que relacionen algunes sèries hipergeomètriques amb aquestes definicions com per exemple amb la funció Gamma. Suposarem sempre que no diguem el contrari que les constants a, b, c... són nombres complexos qualssevol. Vegem-ho:

(I) Identitat de Gauss . Si $a\in\mathbb{Z}^-$ o $Re\,(c-a-b)$[2] >0, aleshores:

$$_2F_1\left[\begin{matrix}a & b\\ c & \end{matrix};1\right]=\frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

(II) Identitat de Kummer. Si $a-b+c=1$, aleshores:

$$_2F_1\left[\begin{matrix}a & b\\ c & \end{matrix};-1\right]=\frac{\Gamma\left(\frac{b}{2}+1\right)\Gamma(b-a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma\left(\frac{b}{2}-a+1\right)}.$$

En el cas en que b sigui un enter negatiu, és molt recomanable utilitzar però la identitat següent:

$$_2F_1\left[\begin{matrix}a & b\\ c & \end{matrix};-1\right]=2\cos\left(\frac{\pi b}{2}\right)\frac{\Gamma(|b|)\Gamma(b-a+1)}{\Gamma\left(\frac{|b|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}-a+1\right)}.$$

Aquesta igualtat es dedueix de la primera identitat mitjançant el teorema 2.2 demostrat anteriorment, fent tendir b a un nombre enter negatiu.

(III) Identitat de Saalschütz. Si $d+e=a+b+c+1$ i c és un enter negatiu, aleshores:

$$_3F_2\left[\begin{matrix}a & b & c\\ d & e & \end{matrix};1\right]=\frac{(d-a)_{|c|}(d-b)_{|c|}}{d_{|c|}(d-a-b)_{|c|}}.$$

(IV) Identitat de Dixon. Si $Re\,(1+\frac{a}{2}-b-c)>0$, $d=a-b+1$ i $e=a-c+1$, aleshores:

$$_3F_2\left[\begin{matrix}a & b & c\\ d & e & \end{matrix};1\right]=\frac{\left(\frac{a}{2}\right)!(a-b)!(a-c)!\left(\frac{a}{2}-b-c\right)}{a!\left(\frac{a}{2}-b\right)\left(\frac{a}{2}-c\right)(a-b-c)!}.$$

(V) Identat de Clausen. Si $d\in\mathbb{Z}^-$, $a+b+c-d=\frac{1}{2}$, $e=a+b+\frac{1}{2}$ i $a+f=d+1=b+g$, aleshores:

$$_4F_3\left[\begin{matrix}a & b & c & d\\ e & f & g & \end{matrix};1\right]=\frac{(2a)_{|d|}(a+b)_{|d|}(2b)_{|d|}}{(2a+2b)_{|d|}a_{|d|}b_{|d|}}.$$

[2] La notació $Re(z)$ on z és un nombre complex, ens indica la part real de z.

(VI) Identitat de Dougall . Si $n+2a_1+1 = a_2+a_3+a_4+a_5$, $a_6 = 1+\frac{a_1}{2}$, $a_7 = -n$ i $b_i = 1+a_1-a_{i+1} \quad (i=1,\dots,6)$, aleshores:

$$ {}_4F_3\left[\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & \end{matrix};1\right] $$

és igual a:

$$ \frac{(a_1+1)_n(a_1-a_2-a_3+1)_n(a_1-a_2-a_4)_n(a_1-a_3-a_4+1)_n}{(a_1-a_2+1)_n(a_1-a_3+1)_n(a_1-a_4+1)_n(a_1-a_2-a_3-a_4+1)_n}. $$

A part de totes aquestes identitats que hem presentat, n'hi ha moltes més que ens poden servir d'ajuda, com per exemple:

$$ \begin{aligned}
{}_1F_0\left[\begin{matrix} a \\ - \end{matrix};z\right] &= \frac{1}{(1-z)^a}. \\
{}_2F_1\left[\begin{matrix} a & 1-a \\ b & \end{matrix};\frac{1}{2}\right] &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+a+b\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+b\right)}, \\
{}_3F_2\left[\begin{matrix} -2n & b & c \\ 1-b-2n & 1-c-2n & \end{matrix};1\right] &= \frac{(1)_{2n}(b)_n(c)_n(b+c)_{2n}}{(1)_n(b)_{2n}(c)_{2n}(b+c)_n}, \\
{}_3F_2\left[\begin{matrix} a & b & c \\ 1+a-b & 1+a-c & \end{matrix};1\right] &= \frac{(a-b)!(a-c)!\left(\frac{a}{2}\right)!\left(\frac{a}{2}-b-c\right)!}{a!\left(\frac{a}{2}-b\right)!\left(\frac{a}{2}-c\right)!(a-b-c)!}, \\
{}_3F_2\left[\begin{matrix} a & b & -n \\ 1+a-b & 1+a+n & \end{matrix};1\right] &= \frac{(1+a)_n\left(1+\frac{a}{2}-b\right)_n}{\left(1+\frac{a}{2}\right)_n(1+a-b)_n}, \\
{}_3F_2\left[\begin{matrix} a & b & c \\ \frac{1+a+b}{2} & 2c & \end{matrix};1\right] &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(c+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+c\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{b}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{2}+c\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{b}{2}+c\right)}, \\
{}_3F_2\left[\begin{matrix} a & 1-a & c \\ d & 1+2c-d & \end{matrix};1\right] &= \frac{\pi 2^{1-2c}(d-1)!(2c+d)!}{\left(\frac{a-d-1}{2}\right)!\left(\frac{a+d}{2}-1\right)!\left(c-\frac{a+d}{2}\right)!\left(\frac{d-a-1}{2}\right)!}.
\end{aligned} $$

Òbviament no demostrarem totes i cada una d'aquestes igualtats, ja que són demostracions molt extenses i tampoc és la principal finalitat d'aquest treball. No obstant això, sí que demostrarem però la identitat de Gauss quan $Re(c-a-b)>0$ ja que aquesta ens ha semblat interessant i amb la qual podrem entreveure l'essència d'aquestes demostracions. A banda de tot això, és interessant veure també com es treballa amb la notació que hem explicat i també, com s'utilitzen els diferents teoremes que hem demostrat anteriorment. Per fer aquesta demostració ens hem ajudat del llibre [9].

(I) Identitat de Gauss. Cas en que $Re\,(c-a-b)>0$, aleshores:

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a & b \\ c & \end{matrix};1\right] = \frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}. $$

Demostració. Per simplificar la notació de la demostració considerarem a partir d'ara que:

$$F(a,b;c;x) :=_2 F_1 \left[\begin{matrix} a & b \\ c & \end{matrix} ;x \right].$$

Primer de tot veurem per comparació de coeficients que es verifica la següent igualtat, sempre que $0 \leq x < 1$:

$$c(c-1-(2c-a-b-1)x)F(a,b;c;x) + (c-a)(c-b)xF(a,b;c+1;x) \quad \text{(I.1)}$$

$$= c(c-1)(1-x)F(a,b;c-1;x) \quad \text{(I.2)}.$$

Si calculam els coeficients de x^n en cada cas, tenim per una part que el coeficient de (I.1) és

$$c(c-1)\frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n} - c(2c-a-b-1)\frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(n-1)!(c)_{n-1}} + (c-a)(c-b)\frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(n-1)!(c+1)_{n-1}} \quad \text{(C.1)},$$

i per altra part el coeficient de x^n de (I.2) és

$$c(c-1)\frac{(a)_n(b)_n}{n!(c-1)_n} - c(c-1)\frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(n-1)!(c-1)_{n-1}} \quad \text{(C.2)}.$$

Per fer la següent passa primer de tot presentarem un seguit d'igualtats que farem servir per seguidament poder treure factor comú, són les següents:

$$\begin{aligned}
(c+1)_{n-1} &= (c+1)(c+2)\cdots(c+n-1) &&= (c+n-1)(c+1)_{n-2}, \\
(c)_{n-1} &= c(c+1)(c+2)\cdots(c+n-2) &&= c(c+1)_{n-2}, \\
(c-1)_n &= (c-1)c(c+1)\cdots(c+n-2) &&= (c-1)c(c+1)_{n-2}, \\
(c-1)_{n-1} &= (c-1)c(c+1)\cdots(c+n-3) &&= \frac{(c-1)c(c+1)_{n-2}}{(c+n-2)}, \\
(a)_n &= (a+n-1)(a)_{n-1}.
\end{aligned}$$

Aplicant-ho ens queda que podem reescriure (C.1) com:

$$\frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(n-1)!(c+1)_{n-2}}\left[\frac{c(c-1)(a+n-1)(b+n-1)}{n(c+n-1)c} - \frac{c(2c-a-b-1)}{c} + \frac{(c-a)(c-b)}{c+n-1}\right].$$

Per altra banda, també podem reescriure (C.2) com:

$$\frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(n-1)!(c+1)_{n-2}}\left[\frac{c(c-1)(a+n-1)(b+n-1)}{n(c-1)c} - \frac{c(c-1)(c+n-2)}{c(c-1)}\right].$$

Ara, per acabar de veure que (C.1) = (C.2), ja només ens queda comprovar que

$$\frac{(c-1)(a+n-1)(b+n-1)}{n(c+n-1)} - (2c-a-b-1) + \frac{(c-a)(c-b)}{c+n-1}$$

és el mateix que

$$\frac{(a+n-1)(b+n-1)}{n} - (c+n-2).$$

Igualant ambdues expressions es veu fàcilment mitjançant un simple procés de càlcul que són efectivament el mateix, i per tant es comprova que els coeficients de x^n de les expressions (I.1) i (I.2) són el mateix, i per tant com que això és cert per a qualsevol valor de n tenim per comparació de coeficients que (I.1)=(I.2) com volíem veure.

Per continuar amb la demostració definirem per u_n el coeficient del terme x^n de la sèrie $F(a,b;c-1;x)$, és a dir:

$$u_n = \frac{(a)_n(b)_n}{(c-1)_n n!}.$$

Així doncs podem reescriure (I.2) com:

$$\begin{aligned}
c(c-1)(1-x)F(a,b;c-1;x) &= c(c-1)(1-x)\sum_{n\geq 0} u_n x^n \\
&= c(c-1)\left(\sum_{n\geq 0} u_n x^n - \sum_{n\geq 1} u_{n-1}x^n\right) \\
&= c(c-1)\left(u_0 + \sum_{n\geq 1}(u_n - u_{n-1})x^n\right) \\
&= c(c-1)\left(1 + \sum_{n\geq 1}(u_n - u_{n-1})x^n\right).
\end{aligned}$$

Considerant ara la suma parcial $N-$èsima:

$$\sum_{n=1}^{N}(u_n - u_{n-1})x^n,$$

si feim tendir $N \to \infty$ tendrem que la part dreta de l'expressió anterior podrà ser escrita de la forma següent:

$$1 + \sum_{n=1}^{N}(u_n - u_{n-1})x^n.$$

Ara, si feim tendir $x \to 1$, tendrem que:

$$1 + \sum_{n=1}^{N}(u_n - u_{n-1}) = 1 + u_N - u_0 = u_N.$$

Vegem ara que $u_N \to 0$ quan $Re(c-a-b) > 0$. Fixem-nos primer de tot que:

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{(a)_n(b)_n}{n!(c-1)_n} = \frac{\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \cdot \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)}}{\Gamma(n+1)\frac{\Gamma(c+n-1)}{\Gamma(c-1)}} \\
&= \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \cdot \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n-1)\Gamma(n+1)}.
\end{aligned}$$

Ara aplicant la proposició 2.3 tenim que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n-1)\Gamma(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!n^a \cdot (n-1)!n^b}{(n-2)!n^c \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} n^{a+b-c}.$$

D'aquí podem dir que u_N tendirà a zero sempre que $Re(c-a-b) > 0$. Aleshores, arribats a aquest punt podem dir que la part dreta de la igualtat (I.1)=(I.2) tendeix a 0, i per tant que (I.1) també tendeix a 0 amb les condicions descrites. És a dir que:

$$c(c-1-2c+a+b+1))F(a,b;c;1) + (c-a)(c-b)F(a,b;c+1;1) = 0.$$

De forma que si reescrivim la igualtat anterior obtenim que:

$$F(a,b;c;1) = \frac{(c-a)(c-b)}{c(c-a-b)} F(a,b;c+1;1).$$

Si ara repetim aquest procés pel següent valor enter de ens quedarà que

$$F(a,b;c;1) = \frac{(c-a)(c-b)}{c(c-a-b)} \frac{(c+1-a)(c+1-b)}{(c+1)(c+1-a-b)} F(a,b;c+2;1).$$

Si ho repetim m vegades obtindrem que

$$F(a,b;c;1) = \frac{(c-a)_m(c-b)_m}{(c)_m(c-a-b)_m} F(a,b;c+m;1).$$

Ara considerant el corol·lari 2.2 tendrem que:

$$(c-a)_m = \frac{\Gamma(c-a+m)}{\Gamma(c-a)},$$

de forma que si feim el mateix raonament per les altres funcions d'increment factorial obtindrem que:

$$\begin{aligned}
\frac{(c-a)_m(c-b)_m}{(c)_m(c-a-b)_m} &= \frac{\frac{\Gamma(c-a+m)}{\Gamma(c-a)} \frac{\Gamma(c-b+m)}{\Gamma(c-b)}}{\frac{\Gamma(c+m)}{\Gamma(c)} \frac{\Gamma(c-a-b+m)}{\Gamma(c-a-b)}} \\
&= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \cdot \frac{\Gamma(c-a+m)\Gamma(c-b+m)}{\Gamma(c+m)\Gamma(c-a-b+m)}.
\end{aligned}$$

Vegem ara que quan feim límit de la part dreta de la igualtat fent tendir m a infinit aquest tendeix a 1, és a dir:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\Gamma(c-a+m)\Gamma(c-b+m)}{\Gamma(c+m)\Gamma(c-a-b+m)} = 1.$$

Si aplicam novament la proposició 2.3:

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} \frac{\Gamma(c-a+m)\Gamma(c-b+m)}{\Gamma(c+m)\Gamma(c-a-b+m)} &= \lim_{m\to\infty} \frac{(m-1)!m^{c-a} \cdot (m-1)!m^{c-b}}{(m-1)!m^c \cdot (m-1)!m^{c-a-b}} \\
&= \lim_{m\to\infty} m^{c-a+c-b-c-c+a+b} \\
&= \lim_{m\to\infty} m^0 = 1.
\end{aligned}$$

I per tant d'aquesta forma hem demostrat que:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{(c-a)_m(c-b)_m}{(c)_m(c-a-b)_m}=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

Vegem finalment per acabar la demostració que :

$$\lim_{m\to\infty}F(a,b;c+m;1)=1.$$

Considerem $v_n(a,b,c)$ el coeficient de x^n a la sèrie $F(a,b;c;x)$. Considerant també que $m>|c|$, podem escriure la següent cadena de desigualtats. Obtenim així la següent cadena de desigualtats:

$$\begin{aligned}
v_n(a,b,c+m) &= \left|\frac{(a)_n(b)_n}{n!(c+m)_n}\right| \\
&= \left|\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)\cdot b(b+1)\cdots(b+n-1)}{n!(c+m)(c+m+1)\cdots(c+m+n-1)}\right| \\
&\leq \frac{|a|(|a|+1)\cdots(|a|+n-1)|b|(|b|+1)\cdots(|b|+n-1)}{n!(m-|c|)(m-|c|+1)\cdots(m-|c|+n-1)} \\
&= \frac{(|a|)_n(|b|)_n}{n!(m-|c|)_n} \\
&= v_n(|a|,|b|,m-|c|),
\end{aligned}$$

de forma que:

$$\begin{aligned}
|F(a,b;c+m;1)-1| &\leq \sum_{n=1}^{\infty}|v_n(a,b,c+m)| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}|v_n(|a|,|b|,m-|c|)| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(|a|)_n(|b|)_n}{n!(m-|c|)_n} \\
&= \frac{|ab|}{m-|c|}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(|a|+1)_{n-1}(|b|+1)_{n-1}}{n!(m-|c|+1)_{n-1}} \\
&< \frac{|ab|}{m-|c|}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(|a|+1)_{n-1}(|b|+1)_{n-1}}{(n-1)!(m-|c|+1)_{n-1}} \\
&= \frac{|ab|}{m-|c|}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(|a|+1)_{n}(|b|+1)_{n}}{n!(m-|c|+1)_{n}} \\
&= \frac{|ab|}{m-|c|}\sum_{n=0}^{\infty}v_n(|a|+1,|b|+1,m-|c|+1),
\end{aligned}$$

on aquesta darrera sèrie convergirà anàlogament com hem vist abans amb u_n, quan $m-|c|+2-|a|-1-|b|-1>0$, és a dir quan $m>|c|+|a|+|b|$, i per tant:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{|ab|}{m-|c|}\sum_{n=0}^{\infty}v_n(|a|+1,|b|+1,m-|c|+1)=0,$$

concloent d'aquesta forma que:

$$\lim_{m\to\infty}F(a,b;c+m;1)=1.$$

Arribats a aquest punt hem comprovat que efectivament

$$F(a,b,;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},$$

sempre que $Re(c-a-b>0)$.

□

2.4 Treballant amb la base de dades

Per acabar amb aquest capítol repassarem un poc el que hem vist fent uns quants exemples, utilitzant les identitats que hem descrit a l'anterior secció. Partirem sempre d'una sèrie que en principi és difícil de calcular, la reescriurem amb la notació que hem explicat per identificar-la i així poder utilitzar la base de dades de les sèries hipergeomètriques per poder donar una expressió del resultat molt més senzilla i fàcil de calcular.

Exemple 2.4. Sigui

$$f(n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}}.$$

Primer de tot, calcularem la raó de la sèrie, i en donarem una expressió en factors lineals de k, vegem-ho:

$$\frac{t_{k+1}}{t_k}=\frac{\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{2n-1}{k+1}}}{\frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}}}=\frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\cdot\frac{(2n-1)!}{k!(2n-1-k)!}}{\frac{(2n-1)!}{(k+1)!(2n-k-2)!}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!)}}=\frac{(2n-k-2)!(n-k)!}{(n-k-1)!(2n-k-1)!}=\frac{n-k}{2n-k-1}.$$

Recordem però que el factor $k+1$ ha d'aparèixer al denominador, de forma que l'afegirem compensant el numerador obtenint la següent expressió de la raó:

$$\frac{t_k}{t_{k+1}}=\frac{(k-n)(k+1)}{(k-2n+1)(k+1)}.$$

Ara, fixem-nos que el primer terme de la nostra suma és 1, de forma que ens queda:

$$f(n)={}_2F_1\left[\begin{matrix}1 & -n\\ -2n+1 & -\end{matrix};1\right].$$

Si ara observam la llista d'identitats que hem presentat abans, podem observar que aquesta sèrie hipergeomètrica compleix les condicions de la identitat de Gauss, ja que recordem que $n \in \mathbb{Z}^+$. Aleshores tenim que:

$$f(n) = {}_2F_1\left[\begin{matrix} 1 & -n \\ -2n+1 & - \end{matrix};1\right] = \frac{\Gamma(-n)\cdot\Gamma(-2n+1)}{\Gamma(-2n)\cdot\Gamma(-n+1)} = \frac{(-n-1)!(-2n)!}{(-2n-1)!(-n)!}.$$

No obstant fixem-nos que en el resultat que hem obtingut hi apareixen factorials negatius, de forma que no som capaços de calcular el valor d'aquesta funció factorial. Per resoldre aquest problema farem servir la raó que es forma amb dos factorials negatius, prendrem un límit apropiat de forma que l'expressió es podrà donar d'una manera diferent que sí sabrem calcular.

En el nostre cas anem a calcular primer quina és la raó que es forma a l'hora de calcular $\frac{(-2n)!}{(-n)!}$. Per fer-ho suposarem que n no és un enter positiu però que el podem acostar tant com vulguem a un enter positiu de forma que $n \to \mathbb{Z}^+$. Així podrem utilitzar la fórmula de reflexió (Teorema 2.2), demostrada anteriorment:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

on fixem-nos que utilitzant la definició de la funció Γ, podem reescriure aquesta igualtat de la següent forma:

$$(-z)! = \frac{\pi}{(z-1)!\,\sin \pi z}.$$

Així doncs tenim que:

$$\begin{aligned} \frac{(-2n)!}{(-n)!} &= \frac{\pi}{(2n-1)!\,\sin(2n\pi)} \cdot \frac{(n-1)!\,\sin(n\pi)}{\pi} \\ &= \frac{\pi}{(2n-1)!\,2\sin(n\pi)\cos(n\pi)} \cdot \frac{(n-1)!\,\sin(n\pi)}{\pi} \\ &= \frac{n(n-1)!}{2n(2n-1)!}(-1)^n = (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Per altra banda, d'una forma similar ens queda que:

$$\frac{(-n-1)!}{(-2n-1)!} = \frac{(-n-1)!}{(-2n-1)!} \cdot \frac{-2n}{-2n} = \frac{2(-n)!}{(-2n)!)} = 2\cdot(-1)^n \cdot \frac{(2n)!}{n!},$$

on finalment ens quedarà que:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{k}} = \frac{(-n-1)!(-2n)!}{(-2n-1)!(-n)!} = 2.$$

Exemple 2.5. Considerem la sèrie:

$$f(n) = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}\binom{2k}{k}\binom{4n-2k}{2n-k}.$$

Anem primer a calcular la raó entre dos termes consecutius:

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{(-1)^{k+1}\binom{2n}{k+1}\binom{2k+2}{k+1}\binom{4n-2k-2}{2n-k-1}}{(-1)^k\binom{2n}{k}\binom{2k}{k}\binom{4n-2k}{2n-k}}.$$

Desglossant-ho tenim que:

$$\frac{\binom{2n}{k+1}}{\binom{2n}{k}} = \frac{\frac{(2n)!}{(k+1)!(2n-k-1)!}}{\frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}} = \frac{2n-k}{k+1},$$

$$\frac{\binom{2k+2}{k+1}}{\binom{2k}{k}} = \frac{\frac{(2k+2)!}{(k+1)!(k+1)!}}{\frac{(2k)!}{k!k!}} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2},$$

$$\frac{\binom{4n-2k-2}{2n-k-1}}{\binom{4n-2k}{2n-k}} = \frac{\frac{(4n-2k-2)!}{(2n-k-1)!(2n-k-1)!}}{\frac{(4n-2k)!}{(2n-k)!(2n-k)!}}.$$

De forma que,

$$\begin{aligned}\frac{t_{k+1}}{t_k} &= \frac{(-1)^{k+1}\binom{2n}{k+1}\binom{2k+2}{k+1}\binom{4n-2k-2}{2n-k-1}}{(-1)^k\binom{2n}{k}\binom{2k}{k}\binom{4n-2k}{2n-k}} = -\frac{(2n-k)(2k+2)(2k+1)(2n-k)^2}{(k+1)^3(4n-2k)(4n-2k-1)} \\ &= -\frac{(2n-k)^2(2k+1)}{(k+1)^2(4n-2k-1)} = -\frac{(k-2n)^2 2\left(k+\frac{1}{2}\right)}{(k+1)^2 2\left(k-2n+\frac{1}{2}\right)} = \frac{(k-2n)^2\left(k+\frac{1}{2}\right)}{(k+1)^2\left(k-2n+\frac{1}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Fixem-nos també que el primer terme de la nostra sèrie no és 1, en aquest cas el primer terme esdevé $\binom{4n}{2n}$, de forma que a partir de l'expressió que hem obtingut anteriorment de la raó, podem escriure la sèrie hipergeomètrica com:

$$f(n) = \binom{4n}{2n} {}_3F_2\left[\begin{matrix} -2n & -2n & \frac{1}{2} \\ 1 & -2n+\frac{1}{2} & \end{matrix} ; 1\right].$$

Si ens fixam ara en la llista d'identitats podem observar que es compleixen les condicions per aplicar la identitat de Dixon. Si prenem $a=-2n$, $b=-2n$, $c=\frac{1}{2}$, $d=1$, $e=-2n+\frac{1}{2}$, es verifica que: $1+\frac{a}{2}-b-c>0$, $d=a-b+1$ i $e=a-c+1$, de forma que la nostra sèrie podrà ser reescrita de la següent forma mitjançant aquesta identitat:

$$f(n) = \binom{4n}{2n}\frac{(-n)!\left(-2n-\frac{1}{2}\right)!\left(n-\frac{1}{2}\right)!}{(-2n)!n!\left(-n-\frac{1}{2}\right)!\left(-\frac{1}{2}\right)!}.$$

Igual que a l'exemple anterior, hem obtingut una expressió que conté factorials de nombres negatius, de forma que haurem de simplificar-la mitjançant la raó que formen els factorials entre si per obtenir una expressió que sapiguem calcular.

Tal com hem vist a l'exemple anterior, quan prenem valors de n molt pròxims als valors enters tenim que:

$$\frac{(-n)!}{(-2n)!} = (-1)^n\frac{(2n)!}{n!}.$$

Seguint un raonament similar:

$$\begin{aligned}\frac{\left(-2n-\frac{1}{2}\right)!}{\left(-n-\frac{1}{2}\right)!} &= \frac{\pi}{\left(2n-\frac{1}{2}\right)!\sin\left(\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)!}\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)!\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)}{\pi} \\ &= \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)!\cos(n\pi)}{\left(2n-\frac{1}{2}\right)!\cos(2n\pi)} = (-1)^n\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)!}{\left(2n-\frac{1}{2}\right)!}.\end{aligned}$$

De manera que finalment ens queda que:

$$f(n) = \binom{4n}{2n}\binom{2n}{n}\frac{(n-\frac{1}{2})!^2}{(2n-\frac{1}{2})!(-\frac{1}{2})!}.$$

Fixem-nos ara que per qualsevol m enter positiu tenim que

$$\begin{aligned}\left(m-\frac{1}{2}\right)! &= \left(m-\frac{1}{2}\right)\left(m-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)! \\ &= \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 1}{2^m}\left(-\frac{1}{2}\right)! = \frac{(2m)!}{4^m m!}\left(-\frac{1}{2}\right)!\end{aligned}$$

i per tant,

$$\begin{aligned} f(n) &= \binom{4n}{2n}\binom{2n}{n}\frac{(n-\frac{1}{2})!^2}{(2n-\frac{1}{2})!(-\frac{1}{2})!} = \binom{4n}{2n}\binom{2n}{n}\frac{\left(\frac{(2n)!}{4^n n!}\left(-\frac{1}{2}\right)!\right)^2}{\frac{(4n)!}{4^{2n}(2n)!}\left(-\frac{1}{2}\right)!\left(-\frac{1}{2}\right)!} \\ &= \binom{4n}{2n}\binom{2n}{n}\frac{(2n)!^2(2n)!}{n!^2(4n)!} = \frac{(4n)!}{(2n)!(2n)!}\binom{2n}{n}\frac{(2n)!^2(2n)!}{n!^2(4n)!} \\ &= \binom{2n}{n}\frac{(2n)!}{n!^2} = \binom{2n}{n}^2. \end{aligned}$$

Així doncs, hem vist com mitjançant la identitat de Dixon, hem obtingut una expressió molt més simplificada i fàcil de calcular que no pas la que teníem al principi.

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}\binom{2k}{k}\binom{4n-2k}{2n-k} = \binom{2n}{n}^2.$$

D'aquesta forma donarem per acabat el segon capítol d'aquest treball on hem fet un petita introducció de les sèries hipergeomètiques, explicant la notació que s'utilitza i donant-ne uns quants exemples molt interessants. A més hem vist uns quants teoremes i propietats que hem utilitzat per treballar amb la base de dades de les sèries hipergeomètriques, que ens ha ajudat a obtenir expressions més senzilles i bones de calcular en comparació a les sèries donades al principi, les quals tenien una complexitat molt elevada a l'hora de calcular-ne el seu resultat.

A continuació veurem uns quants mètodes que també ens serviran per trobar relacions entre sèries hipergeomètriques i expressions més senzilles d'aquestes per poder calcular el seu resultat d'una forma més òptima. Aquests mètodes, a diferència del que hem explicat, no es recolza en cap base de dades. Els mètodes que veurem presenten algorismes que treballen amb la finalitat de trobar relacions entre els sumands de les sèries.

CAPÍTOL 3

El mètode de Sor Celine

Possiblement, la mare de les proves d'identitats que inclouen sèries hipergeomètriques mitjançant algoritmes computacionals va ser Sor Mary Celine Fasenmyer (veure Annex A.1) amb la seva tesi doctoral defensada a la Universitat de Michigan, l'any 1945. En aquesta tesi, Celine va desenvolupar un mètode recursiu per trobar relacions entre polinomis hipergeomètrics directament de les sèries d'expansió dels polinomis. El mètode de Celine és bastant senzill i efectiu, encara que en moltes ocasions és bastant lent en comparació a altres mètodes que existeixen. Emperò, aquest algoritme és molt important dins aquest àmbit d'estudi ja que va donar moltes idees per algoritmes posteriors més efectius i a més va donar peu a l'existència de teoremes sobre relacions de recurrència que satisfan les sèries hipergeomètriques.

Primer de tot veurem amb un simple exemple d'una sèrie, una petita pinzellada de com funciona aquest algorisme per entendre una mica el seu funcionament. Posteriorment descriurem l'algorisme amb més detall i demostrarem perquè aquest funciona.

Exemple 3.1. Sigui

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}, \qquad n = 0, 1, 2 \ldots.$$

Anem a veure primer de tot quina és la recurrència que segueixen els seus termes. Per això primer de tot definirem cada un dels termes de la suma en funció de n i de k, on recordem que són nombres enters positius tals que $0 \leq k \leq n$.

Sigui doncs:

$$F(n,k) = k\binom{n}{k},$$

una funció de dues variables. El següent objectiu serà trobar una recurrència de la forma:

$$a(n)F(n,k) + b(n)F(n+1,k) + c(n)F(n,k+1) + d(n)F(n+1,k+1) = 0. \tag{3.1}$$

Per simplificar notació a partir d'ara ometrem la variable en les funcions $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$, $d(n)$ escrivint únicament a, b, c, d. La primera passa que es durà a terme serà dividir tot per $F(n,k)$, obtenint d'aquesta forma una expressió com la següent:

$$a + b\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)} + c\frac{F(n,k+1)}{F(n,k)} + d\frac{F(n+1,k+1)}{F(n,k)} = 0, \tag{3.2}$$

on:

$$\begin{aligned}
\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)} &= \frac{k\binom{n+1}{k}}{k\binom{n}{k}} = \frac{\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{n+1}{n+1-k},\\
\frac{F(n,k+1)}{F(n,k)} &= \frac{(k+1)\binom{n}{k+1}}{k\binom{n}{k}} = \frac{\frac{(k+1)n!}{(k+1)!(n-1-k)!}}{\frac{k\cdot n!}{k!(n-k)!}} = \frac{n-k}{k},\\
\frac{F(n+1,k+1)}{F(n,k)} &= \frac{(k+1)\binom{n+1}{k+1}}{k\binom{n}{k}} = \frac{\frac{(k+1)(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}}{\frac{k\cdot n!}{k!(n-k)!}} = \frac{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

D'aquesta forma, obtenim la següent expressió de la recurrència lliure de factorials, únicament composta per funcions racionals de n i k:

$$a + b\frac{n+1}{n+1-k} + c\frac{n-k}{k} + d\frac{n+1}{k} = 0.$$

La següent passa del mètode de Sor Celine consisteix en calcular el mínim comú múltiple per poder ometre el denominador i obtenir finalment una expressió en potències de k. El mínim comú múltiple en el nostre exemple és $k(n+1-k)$, de forma que:

$$a + b\frac{n+1}{n+1-k} + c\frac{n-k}{k} + d\frac{n+1}{k} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{a(n+1-k)k + b(n+1)k + c(n-k)(n+1-k) + d(n+1)(n+1-k)}{(n+1-k)k} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$ank + ak - ak^2 + bnk + bk + cn^2 + cn - 2cnk - ck + ck^2 + dn^2 + 2dn - dnk - dk + d = 0$$
$$\Downarrow$$
$$(c-a)k^2 + [a+b-c-d+n(a+b-2c-d)]k + n^2(c+d) + n(c+2d) + d = 0.$$

Ara bé, aquesta igualtat que hem obtingut s'ha de satisfer per qualsevol valor de n i per qualsevol valor de k, la qual cosa implica que els coeficients d'aquest polinomi de variable k han de ser iguals a 0, obtenint d'aquesta forma un sistema d'equacions compatible indeterminat amb 3 equacions i 4 incògnites a, b, c i d, on recordem que aquestes únicament depenen de n. Vegem-ho:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & n(n+1) & (n+1)^2 \\ n+1 & n+1 & -2n-1 & -(n+1) \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Anem a resoldre el sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & n(n+1) & (n+1)^2 \\ n+1 & n+1 & -2n-1 & -(n+1) \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2+(n+1)f_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & n(n+1) & (n+1)^2 \\ 1 & n+1 & -n & -n-1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De la darrera fila podem deduir fàcilment que $\boxed{a=c}$. Per altra banda de la primera equació ens queda que:

$$n(n+1)c+(n+1)^2 d = 0,$$

d'on obtenim que:

$$\boxed{c = \tfrac{-n-1}{n} d.}$$

Finalment, de la segona equació tenim que:

$$(n+1)b - nc - (n+1)d = 0 \Rightarrow (n+1)b + (n+1)d - (n+1)d = 0 \Rightarrow (n+1)b = 0,$$

obtenint que $\boxed{b=0}$. Així doncs tenim que la solució del nostre sistema d'equacions serà de la forma:

$$(a(n), b(n), c(n), d(n)) = d(n)\left(-1-\frac{1}{n}, 0, -1-\frac{1}{n}, 1\right).$$

Una vegada obtinguda la solució general del nostre sistema d'equacions, podem considerar $d(n) = 1$ i substituir la solució trobada a la relació de recurrència (3.1), obtenint d'aquesta forma una relació de recurrència pels sumands $F(n,k)$, la qual no depèn de k:

$$-\left(1+\frac{1}{n}\right)F(n,k) - \left(1+\frac{1}{n}\right)F(n,k+1) + F(n+1,k+1) = 0. \tag{3.3}$$

Recordem per continuar que:

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} F(n,k).$$

Així, sumant des de $k=0$ fins a n la identitat 3.3, s'obté:

$$-\left(1+\tfrac{1}{n}\right)f(n) - \left(1+\tfrac{1}{n}\right)f(n) + f(n+1) =$$

$$-2\left(1+\tfrac{1}{n}\right)[F(n,0)+F(n,1)+\cdots] + F(n+1,0) + F(n+1,1) + \cdots = 0.$$

A partir de la relació de recurrència que hem trobat (3.3), tenim que es van anul·lant tots els sumands arribant finalment a la conclusió que la recurrència satisfà:

$$f(n+1) = 2\frac{n+1}{n}f(n), \qquad \forall n = 1,2,3,\dots; f(1) = 1.$$

Així doncs, aplicant la recurrència trobada tenim:

$$f(n+1) = 2\frac{n+1}{n}f(n) = 2^2\frac{n+1}{n}\frac{n}{n-1}f(n-1) = \cdots = 2^n(n+1)f(1),$$

concloent d'aquesta forma que:

$$f(n) = n2^{n-1}, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

S'obté així una expressió molt més senzilla i òptima de calcular que no pas la que teníem al principi.

Amb aquest simple exemple hem mostrat l'essència de l'algorisme que va proposar Sor Celine. A continuació a la següent secció veurem amb un teorema que el mètode de Sor Celine sempre funciona, és a dir, que sempre podrem trobar una recurrència entre els termes d'una sèrie hipergeomètrica de forma que aquests s'anul·lin. La principal raó d'aquest fet serà degut a que el nombre d'incògnites sempre és més gran que el nombre d'equacions que es generen, i per tant podrem obtenir una solució no trivial del sistema d'equacions. Vegem-ho!

3.1 Teorema Fonamental

Possiblement, el teorema que veurem a continuació és el teorema més important d'aquest treball ja que és el resultat sobre el que reposa l'eficàcia i el sentit tant del mètode de Sor Celine com de gran part dels algorismes que tenen la tasca de trobar relacions de recurrència entre els sumands d'una sèrie hipergeomètrica. El teorema en qüestió diu que existeix una relació de recurrència entre els termes de la sèrie de la forma $F(n+i, k+j)$ on i, j són valors enters que van des de 0 fins a uns certs I i J.

Definició 3.1. *Una funció $F(n,k)$ s'anomena un terme hipergeomètric propi si aquest pot ser escrit de la forma:*

$$F(n,k) = \begin{cases} P(n,k)\dfrac{\prod_{i=0}^{uu}(a_i n + b_i k + c_i)!}{\prod_{i=1}^{vv}(u_i n + v_i k + w_i)!}x^k, & \text{si } \forall i \ (a_i n + b_i k + c_i) \notin \mathbb{Z}^- \\ 0, & \text{altrament,} \end{cases} \tag{3.4}$$

on:

1. *x és una constant real,*
2. *P és un polinomi amb coeficients reals,*
3. *els a_i, b_i, u_i i v_i són nombres enters, i*
4. *uu i vv són nombres enters positius.*

Tal com hem definit F a 3.4, direm que F estarà ben definida en el punt (n,k) si cap dels valors del conjunt $\{a_i n + b_i k + c_i\}_{i=0}^{uu}$ és un enter negatiu.

Per exemple si consideram el terme $\binom{n+k}{k+1}5^k$, aquest és un terme hipergeomètric propi ja que aquest pot ser escrit de la forma que hem descrit a 3.4:

$$F(n,k) = \binom{n+k}{k+1}5^k = \frac{(n+k)!}{(k+1)!(n-1)!}5^k.$$

Cal dir que no sempre un terme té la forma que hem descrit a 3.4. Emperò, en ocasions un terme que inicialment no sembla hipergeomètric propi, es pot transformar de la forma presentada a 3.4. Per exemple, suposem que tenim un terme de la forma $F(n,k) = \frac{1}{2n+3k+1}$. Òbviament aquest no té la forma que desitjam, però considerant que es pot reescriure com:

$$\frac{1}{2n+3k+1} = \frac{(2n+3k)!}{(2n+3k+1)!},$$

podrem dir que és efectivament un terme hipergeomètric propi. Com a segon exemple, si consideram $F(n,k) = 1/(n^2-k^2)$, aquest és també un terme hipergeomètric propi, ja que:

$$\frac{1}{n^2-k^2} = \frac{1}{(n-k)(n+k)} = \frac{(n+k-1)!(n-k-1)!}{(n+k)!(n-k)!}.$$

Emperò, com hem dit abans no sempre podrem reescriure un terme i que ens quedi de la forma 3.4. Per exemple el terme $F(n,k) = \frac{1}{n^2+k^2}$ no és un terme hipergeomètric propi ja que ens és impossible factoritzar el denominador.

Teorema 3.1. ***(Teorema Fonamental)***
Sigui $F(n,k)$ un terme hipergeomètric propi tal que $F(n,k) \neq 0$ per a tot n i per a tot k. Aleshores F satisfà una relació de recurrència lliure de k. És a dir, existeixen enters positius I i J, i polinomis $a_{i,j}(n)$ amb $i = 0,\dots,I$ i $j = 0,\dots,J$, no tots zero, tals que es satisfà

$$\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J} a_{i,j}(n)F(n-j,k-i) = 0, \tag{3.5}$$

i tots els valors que s'obtenen de F en 3.5 estan ben definits.

Abans de veure la demostració en si d'aquest teorema, veurem uns quants resultats molt importants que s'empraran a l'hora de fer la demostració del teorema fonamental. Aquests resultats són bàsicament relacions que es produeixen en certs casos dels termes hipergeomètrics propis. Abans hem vist com amb segons quines expressions racionals podíem transformar-les de forma que aquestes tenguessin factorials al numerador i al denominador per tal d'encaixar amb la forma de F descrita a 3.4. En aquests resultats veurem el procés invers. Veurem com a partir de expressions amb nombres factorials aquestes es poden simplificar per obtenir-ne expressions racionals de polinomis. Vegem-ho:[1]

[1] A partir d'aquí farem un abús de llenguatge escrivint $x!$ quan vulguem escriure $\Gamma(x+1)$ amb $x \in \mathbb{R}$ no enter negatiu. Veure el capítol 2 per veure les propietats de la funció Γ.

1. Suposem la funció $f(n) = (an+b)!$ on a i b són nombres reals, aleshores:

$$\frac{f(n-j)}{f(n)} = \frac{(a(n-j)+b)!}{(an+b)!} = \frac{(an+b-aj)!}{(an+b)!},$$

considerant sempre j un nombre enter positiu. Arribats aquí hem de distingir dos casos en funció de a:

$$\frac{f(n-j)}{f(n)} = \begin{cases} ((an+b)(an+b-1)\cdots(an+b-aj+1))^{-1} & \text{si } a \geq 0, \\ (an+b-aj)(an+b-aj-1)\cdots(an+b+1) & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

2. Considerem una funció amb dues variables de la forma $F(n,k) = (an+bk+c)!$. Considerant sempre enters $i, j \geq 0$, tenim que:

$$\begin{aligned} \frac{F(n-j,k-i)}{F(n,k)} &= \frac{(a(n-j)+b(k-i)+c)!}{(an+bk+c)!} \\ &= \frac{(an-aj+bk-bi+c)!}{(an+bk+c)!} \\ &= \frac{(an+bk+c-(aj+bi))!}{(an+bk+c)!}. \end{aligned}$$

Igual que hem fet abans aquí també hem de distingir casos, on tendrem que $\frac{F(n-j,k-i)}{F(n,k)}$ serà igual a:

$$\begin{cases} ((an+bk+c)(an+bk+c-1)\cdots(an+bk+c-(aj+bi)+1))^{-1} & \text{si } aj+bi \geq 0, \\ (an+bk+c-(aj+bi))(an+bk+c-(aj+bi)-1)\cdots(an+bk+c+1) & \text{si } aj+bi < 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Amb la finalitat de demostrar el teorema, definirem la següent notació per abreviar escriptura. Definirem les funcions de creixement factorial (cf) i de descens factorial (df) de la següent forma:

$$\mathrm{cf}(x,y) = \prod_{j=1}^{x}(y+j), \tag{3.7}$$

$$\mathrm{df}(x,y) = \prod_{j=0}^{x-1}(y-j), \tag{3.8}$$

on en el cas que x no sigui un enter positiu ambdós productes seran iguals a 1.

Ara, amb aquesta nova notació podem reescriure 3.6 tal com veurem a continuació d'una forma més abreujada:

$$\begin{cases} (\mathrm{df}(aj+bi, an+bk+c))^{-1} & \text{si } aj+bi \geq 0, \\ \mathrm{cf}(|aj+bi|, an+bk+c) & \text{si } aj+bi < 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Vist això, anem a considerar ara una funció $F(n,k)$ que no estigui composta únicament d'un únic factor $(an+bk+c)!$, sinó més bé que sigui un quocient que tengui gran quantitats de factors al numerador i al denominador tal com hem descrit anteriorment a 3.4:

$$F(n,k) = P(n,k)\frac{\prod_{i=0}^{uu}(a_i n + b_i k + c_i)!}{\prod_{i=1}^{vv}(u_i n + v_i k + w_i)!}x^k.$$

Anem ara a calcular la raó $\rho = F(n-j,k-i)/F(n,k)$ que es produiria amb aquesta F més gran. Òbviament, en aquest cas obtendríem una expressió on tant el numerador com el denominador de la raó ρ estarien formats per polinomis de variables n i k, de forma que ρ serà una funció racional de variables (n,k), que escriurem de la següent forma:

$$\rho(n,k) = \frac{\gamma(n,k)}{\delta(n,k)},$$

on tenint en compte el que hem vist a 3.9, el numerador $\gamma(n,k)$ vendrà donat per:

$$P(n-j,k-i)\prod_{\substack{s=1\\ a_s j+b_s i<0}}^{uu}\mathrm{cf}(|a_s j+b_s i|,a_s n+b_s k+c_s)\prod_{\substack{s=1\\ u_s j+v_s i\geq 0}}^{vv}\mathrm{df}(u_s j+v_s i,u_s n+v_s k+w_s),\tag{3.10}$$

i per altra banda el denominador $\delta(n,k)$ vendrà donat per:

$$P(n,k)x^i\prod_{\substack{s=1\\ a_s j+b_s i\geq 0}}^{uu}\mathrm{df}(a_s j+b_s i,a_s n+b_s k+c_s)\prod_{\substack{s=1\\ u_s j+v_s i<0}}^{vv}\mathrm{cf}(|u_s j+v_s i|,u_s n+v_s k+w_s).\tag{3.11}$$

Arribats a aquest punt, i havent demostrat els anteriors resultats previs sobre els termes hipergeomètrics propis i les relacions que es produeixen entre ells, ja tenim tot el que necessitam per demostrar el teorema fonamental.

Demostració. Primer de tot dividirem la part esquerra de 3.5 per $F(n,k)$. Ho podem fer ja que per hipòtesi $F(n,k)\neq 0$. D'aquesta forma, considerant el que hem vist abans, obtindrem l'expressió següent:

$$\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J}a_{i,j}(n)\frac{\gamma_{i,j}(n,k)}{\delta_{i,j}(n,k)},\tag{3.12}$$

on $\gamma_{i,j}(n,k)$ i $\delta_{i,j}(n,k)$ tenen la forma que hem descrit a 3.10 i 3.11 respectivament.

La següent passa que es durà a terme en aquesta demostració serà escriure tota la suma 3.12 sense polinomis al denominador. Per això haurem de multiplicar el numerador pel mínim comú múltiple del conjunt de polinomis que apareixen al denominador. Denotarem aquest mínim comú múltiple per Δ.

Primer de tot, si ens fixam amb 3.11 podem notar que el terme $P(n,k)$ apareix en tots els termes $\delta_{i,j}$ del denominador de 3.12, per tant aquest formarà part del mínim comú múltiple Δ que cercam.

Per continuar definirem la següent notació:

$$x^+ = \max\{x,0\}; \qquad \text{on } x\in\mathbb{R}.$$

D'aquesta forma tenim que per tots els nombres reals a,b:

$$\max\{|aj+bi| : aj+bi<0; 0\leq i\leq I; 0\leq j\leq J\} = (-a)^+J + (-b)^+I,$$

$$\max\{aj+bi : aj+bi \geq 0; 0 \leq i \leq I; 0 \leq j \leq J\} = a^+ + b^+ I.$$

Gràcies a aquesta notació podrem seguir calculant el mínim comú múltiple de tots els $\delta_{i,j}$ del denominador. Per a cada s, el mínim comú múltiple de totes les funcions de descens factorial que apareixen a 3.11 és:

$$\mathrm{df}((a_s)^+ J + (b_s)^+ I, a_s n + b_s k + c_s).$$

Per altra banda el mínim comú múltiple de totes les funcions de creixement factorial que apareixen a 3.11 és:

$$\mathrm{cf}((-u_s)^+ J + (-v_s)^+ I, u_s n + v_s k + w_s),$$

on podem concloure que:

$$\Delta = P(n,k) \cdot df((a_s)^+ J + (b_s)^+ I, a_s n + b_s k + c_s) \cdot cf((-u_s)^+ J + (-v_s)^+ I, u_s n + v_s k + w_s). \tag{3.13}$$

Si ara multiplicam l'expressió 3.12 per 3.13, obtindrem una expressió de la suma lliure de polinomis al denominador. De fet obtindrem una suma de polinomis de k amb coeficients A_i que dependran òbviament de n:

$$\sum_{i=0}^{I} \sum_{j=0}^{J} a_{i,j}(n) \left[A_0^{i,j}(n) + A_1^{i,j}(n)k + \ldots + A_{n_{i,j}}^{i,j}(n) k^{n_{i,j}} \right]. \tag{3.14}$$

Si ara agrupam 3.14 en base a la variable k, tindrem com a resultat una expressió polinòmica amb coeficients que dependran de n:

$$P_0(n) + P_1(n)k + P_2(n)k^2 + \ldots + P_N(n)k^N, \tag{3.15}$$

per algun $n \in \mathbb{N}$. Arribats a aquest punt, si igualam 3.15 a 0, obtindrem una igualtat que s'ha de satisfer per a qualsevol valor de k, de forma que per a que la igualtat sigui certa cada un dels coeficients $P_i(n)$ ha de ser igual a zero. Així doncs obtindrem un sistema de $N+1$ equacions per resoldre:

$$\begin{cases} P_0(n) &= 0, \\ P_1(n) &= 0, \\ \quad\vdots & \\ P_N(n) &= 0. \end{cases}$$

Ara, notem que, considerant el grau de la variable y,

$$\mathrm{grau}(\mathrm{cf}(x,y)) = \mathrm{grau}(\mathrm{df}(x,y)) = x,$$

ja que en ambdós es realitzen x productes i per tant s'obté que el grau de y serà x. D'aquesta forma tendrem que:

$$\mathrm{grau}(\mathrm{cf}((a_s)^+ J + (b_s)^+ I, a_s n + b_s k + c_s)) = (a_s)^+ J + (b_s)^+ I.$$

Aleshores, quan multipliquem les expressions tant de descens com de creixement factorial, els graus de k es sumaran, obtenint d'aquesta forma que el valor de N dependrà linealment de I i J, de forma que aquest serà $c_1 I + c_2 J + c_3$.

Per altra banda el nombre d'incògnites $a_{i,j}(n)$ que cercam també depèn òbviament de I i J, on tendrem en cada cas que el nombre d'incògnites serà $(I+1)(J+1)$.

Arribats a aquest punt estam en condicions de finalitzar amb la demostració d'aquest teorema. Tal com hem dit el nombre d'incògnites serà de l'ordre IJ i en canvi el nombre d'equacions serà de l'ordre $c_1 I + c_2 J + c_3$ amb c_1, c_2 i c_3 fixats. D'aquesta forma si feim créixer els valors de I i J a consciència, tendrem que el nombre d'incògnites serà major que el nombre d'equacions, donant lloc a un sistema compatible indeterminat amb infinites solucions depenent d'un o diversos paràmetres. Arribats aquí hem vist que sempre podrem trobar valors de I i J tal que la recurrència 3.5 tendrà solució, tal com volíem demostrar. □

3.2 L'algorisme general de Sor Celine

En aquest apartat descriurem l'algorisme de Sor Celine en general i seguidament veurem uns quants exemples més. Sigui doncs una suma de la forma

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} F(n,k),$$

la qual sigui doblement hipergeomètrica, és a dir, que els quocients:

$$\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)} \quad \text{i} \quad \frac{F(n,k+1)}{F(n,k)}$$

són funcions racionals de variables n i k. El nostre objectiu és trobar una fórmula de recurrència per $f(n)$. Tal com hem vist a l'exemple 3.1 anteriorment, la primera passa que s durà a terme serà trobar una relació de recurrència pels sumands $F(n,k)$, de forma que es satisfaci la següent condició:

$$\sum_{i=0}^{I} \sum_{j=0}^{J} a_{i,j}(n) F(n-j, k-i) = 0. \tag{3.16}$$

És a dir, la principal tasca del nostre algorisme serà trobar els coeficients $a_{i,j}(n)$, de forma que aquests depenguin únicament de n i compleixin la condició 3.16. L'algorisme cercarà també els I, J pertinents més petits pels quals la condició esmentada es pugui complir. Anem a desglossar a continuació l'algorisme de Sor Celine, passa per passa.

1. Fixarem els valors de la prova I i J. Per començar fixarem $I = J = 1$.

2. Suposarem ara la recurrència 3.16, amb coeficients $a_{i,j}(n)$ per determinar.

3. Dividirem cada terme de 3.16 per $F(n,k)$, on seguidament simplificarem cada raó $F(n-j, k-i)/F(n,k)$ simplificant les raons dels factorials que contenen cada un d'ells i obtenint d'aquesta forma sumes de funcions racionals que dependran únicament de n i de k.

4. Escriurem l'expressió obtinguda a la passa 3, sota el mateix denominador fent el mínim comú múltiple, per seguidament treure'l factor comú. D'aquesta forma el denominador desapareixerà i ordenant-lo ens quedarà un polinomi de variable k amb coeficients que dependran de n.

5. Si igualam cada uns dels coeficients del polinomi de k obtingut a la passa anterior a 0, obtindrem un sistema lineal on les incògnites d'aquest sistema seran els $a_{i,j}$.

6. En el cas que el sistema anterior no tengui solució és retornarà a la primera passa de l'algorisme incrementant el valor de I i/o J per cercar una relació de recurrència d'un ordre més gran.

Fixem-nos que a l'exemple 3.1, es poden identificar cada una d'aquestes passes i a més podem observar que en aquell cas en concret els valors de I i J eren iguals a 1, fet que ens ha ofert la possibilitat de poder resoldre el problema a mà sense necessitat de cap ordinador. Emperò això no és sempre tan fàcil. Moltes vegades no tenim la sort de poder trobar uns $a_{i,j}(n)$ tals que satisfacin la relació de recurrència 3.16 amb uns índexs de I i J tan petits. Per aquest motiu ens serà de gran ajuda automatitzar computacionalment aquest procés. Vegem-ho:

Algorisme de cerca de la recurrència

```
celine[F_, ii_, jj_] :=
  Module[{yy, zz, ll, tt, uu, i, j},
  yy = Sum[Sum[a[i, j] F[n + i, k + j]/F[n, k], {i, 0, ii}], {j, 0, jj}];
  zz = Collect[
  Numerator[
  FullSimplify[Numerator[Together[yy]]/Denominator[Together[yy]]]],
     k];
  ll = CoefficientList[zz, k];
  tt = Flatten[Table[a[i, j], {i, 0, ii}, {j, 0, jj}]];
  uu = Flatten[Simplify[Solve[ll == 0, tt]]];
  uu]
```

Ara explicarem què fa aquest algorisme passa per passa:

1. Les entrades d'aquest algorisme són la funció $F(n,k)$ de la qual es vol trobar la recurrència i els índexs *ii* i *jj* que són I i J respectivament.

2. Primer de tot definim les variables que s'utilitzaran.

3. A continuació a yy es sumen les funcions F corresponents en funció dels índex ii i jj que s'han donat. $a[i,j]$ són les incògnites del problema que hem de resoldre. Finalment ho dividim tot per $F(n,k)$ tal com fèiem a 3.2.

4. Amb zz prenem el numerador que s'ha obtingut després de posar-ho tot baix el mateix denominador comú i ho ordenam tenint en compte les diferents potències de k.

5. A ll guardam cada un dels coeficients del polinomi de k guardat a zz, les quals faran d'equacions del sistema que haurem de resoldre.

6. Amb tt definim el vector d'incògnites.

7. Finalment amb uu igualam cada una de les equacions de ll a zero indicant que les incògnites són tt i resolem el sistema.

8. En el cas que el sistema tengui solució, l'algorisme la retornarà i per tant haurem acabat.

Per altra banda, si el sistema no té solució, aleshores haurem d'incrementar el valor/s de ii i/o jj de l'entrada de l'algorisme.

Per provar que aquest algorisme funciona, farem servir el mateix exemple 3.1 que hem vist anteriorment per poder comprovar els resultats obtinguts. Això ho veurem a la següent secció d'exemples.

3.3 Exemples

Anem ara a fer uns quants exemples per provar el funcionament de l'algorisme que hem explicat.

Exemple 3.2. Tornem a l'exemple que ja hem resolt anteriorment a mà en el que teníem que:

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}, \qquad n = 0,1,2...$$

En aquest cas la funció d'entrada del nostre algorisme serà

$$F(n,k) = k\binom{n}{k}.$$

Executem l'algorisme.

```
In[1]:= celine[F, 1, 1]

Out[1]= {a[0, 0] -> a[0, 1],
      a[1, 0] -> 0,
      a[1, 1] -> -((n a[0, 1])/(1 + n))}
```

Veim com l'algorisme ens ha retornat una solució del problema, on s'ha de tenir en compte que $a[0,0] = a$, $a[1,0] = b$, $a[0,1] = c$, $a[1,1] = d$. D'aquesta forma obtenim que $a = c$, que $b = 0$ i que $d = -\frac{nc}{n+1}$ o també que $c = -\frac{(n+1)d}{n}$, que és efectivament la mateixa solució que vam obtenir a l'exemple 3.1. Seguint doncs el mateix raonament que ja vam mostrar obtenim que:

$$f(n) = n2^{n-1} \qquad \forall n \geq 0.$$

Exemple 3.3. Considerem la suma:

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} 2^k\binom{n}{k}, \qquad n = 0,1,2...$$

Anem a aplicar el mètode de Sor Celine per trobar una expressió més simple d'aquesta funció. Per començar tenim que:

$$F(n,k) = 2^k\binom{n}{k} = 2^k\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Anem doncs a aplicar l'algorisme a aquesta funció per tal de poder trobar una solució a la recurrència 3.16 en aquest cas. Vegem-ho:

```
In[2]:= celine[F, 1, 1]

Out[2]= {a[0, 1] -> 1/2 a[0, 0],
    a[1, 0] -> 0,
    a[1, 1] -> -(1/2) a[0, 0]}
```

D'aquesta forma hem trobat que una solució per a la recurrència és:

$$(a_{0,0}, a_{1,0}, a_{0,1}, a_{1,1}) = \left(a, 0, \frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}a\right).$$

Aleshores si prenem $a = 1$, tendrem que la següent recurrència serà certa:

$$F(n,k) + \frac{1}{2}F(n,k+1) - \frac{1}{2}F(n+1,k+1) = 0.$$

Ara tenint en compte que $f(n) = \sum_{k=0}^{n} F(n,k)$ i juntament amb la recurrència trobada, obtindrem que:

$$f(n) + \frac{1}{2}f(n) - \frac{1}{2}f(n+1) \Rightarrow 3f(n) = f(n+1).$$

Així doncs, amb aquesta relació que hem trobat, podrem dir que:

$$f(n+1) = 3f(n) = 3(3f(n-1)) = \cdots = 3^n f(1) = 3^{n+1}$$

ja que $f(1) = 3$. D'aquesta forma hem arribat a la conclusió de que:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n, \qquad \forall n \geq 0.$$

CAPÍTOL 4

Algorisme de Gosper

En aquest nou capítol veurem un altre mètode, l'anomenat mètode de Gospe, que va ser proposat per Bill Gosper (veure Annex A.2), per escriure sèries hipergeomètriques d'una forma més simple amb la finalitat de que el càlcul d'aquestes sigui més òptim. Per tal de poder-ho fer, el que intentarà el mètode de Gosper serà donar una expressió de la suma hipergeomètrica en forma tancada.

Definició 4.1. *Una funció $f(n)$ es diu que està en forma tancada si aquesta és igual a la combinació lineal d'un nombre fixat r de termes hipergeomètrics, els quals poden dependre de n. El valor enter r és conegut i independent de n.*

El nostre objectiu serà el següent: donada una sèrie hipergeomètrica, trobar una expressió d'aquesta sense que hi aparegui el signe de sumatori. Senzillament el que volem és trobar una fórmula tancada que depengui de la variable n de la sèrie hipergeomètrica, i que ens doni el resultat de la sèrie per qualsevol valor de n sense haver de fer cap sumatori, únicament substituint el valor de n a la fórmula i que aquesta ens retorni el resultat.

Per començar anem a explicar una mica en que consistirà aquest mètode. Considerem una sèrie hipergeomètrica:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} t_k, \tag{4.1}$$

on recordem que t_k és el terme a sumar, i per tant la seva raó:

$$r(k) = \frac{t_{k+1}}{t_k}, \tag{4.2}$$

és una funció racional de k. El nostre objectiu serà intentar escriure s_n en forma tancada. Per això investigarem si a partir del terme hipergeomètric t_n, donat per $t_n = s_{n+1} - s_n$, existeix un altre terme hipergeomètric z_n que compleixi:

$$z_{n+1} - z_n = t_n. \tag{4.3}$$

En el cas que hàgim pogut trobar aquest z_n, podrem escriure la suma s_n com la suma d'un terme hipergeomètric i una constant, ja que:

$$z_n = z_{n-1} + t_{n-1} = z_{n-2} + t_{n-2} + t_{n-1} = \ldots = z_0 + \sum_{k=0}^{n-1} t_k = z_0 + s_n$$

i per tant:

$$s_n = z_n + c, \tag{4.4}$$

on $c = -z_0$.

Per això, la principal pregunta que ens hem de fer és: donat un terme hipergeomètric t_n, existirà un altre terme hipergeomètric z_n tal que $z_{n+1} - z_n = t_n$?

L'algorisme de Gosper ens respondrà aquesta pregunta de tal forma que, si la resposta és afirmativa, aleshores podrem expressar s_n com a la suma del terme en qüestió més una constant com hem vist anteriorment, i donat el cas direm que el terme t_n és *sumable-Gosper*. Altrament, si la resposta és negativa, l'equació 4.3 no tendrà solució hipergeomètrica.

4.1 Algorisme de Gosper

Suposem que tenim un terme z_n tal que compleix les condicions que hem esmentat en 4.3, aleshores si calculam la següent raó:

$$\frac{z_n}{t_n} = \frac{z_n}{z_{n+1} - z_n} = \frac{1}{\frac{z_{n+1}}{z_n} - 1} = y(n), \tag{4.5}$$

obtenim una funció racional $y(n)$, i per tant podem escriure:

$$z_n = y(n)\, t_n. \tag{4.6}$$

Si ara substituïm aquest resultat a l'expressió 4.3 obtindrem:

$$\begin{array}{rcl} z_{n+1} - z_n & = & t_n, \\ & \Downarrow & \\ y(n+1)\, t_{n+1} - y(n)\, t_n & = & t_n, \\ & \Downarrow & \\ y(n+1)\, r(n) - y(n) & = & 1. \end{array} \tag{4.7}$$

Fixem-nos que per fer la darrera passa hem dividit tota la igualtat per t_n, i aplicant llavors també la relació 4.2, hem obtingut una relació de recurrència lineal de primer ordre. D'aquesta forma hem passat de tenir un primer problema on havíem de resoldre una equació hipergeomètrica a haver de resoldre una relació de recurrència lineal.

Ara bé, trobar una solució per aquest tipus de relacions lineals no és sempre una feina fàcil i encara que hi ha molt mètodes per poder-ho resoldre va ser Gosper que va donar un mètode molt enginyós el qual redueix la solució del problema a trobar solucions polinòmiques d'una altra recurrència de primer ordre.

Suposem que podem escriure

$$r(n) = \frac{a(n)}{b(n)} \frac{c(n+1)}{c(n)}, \tag{4.8}$$

on $a(n), b(n)$ i $c(n)$ són funcions polinòmiques de variable n, de forma que:

$$\mathrm{mcd}(a(n), b(n+h)) = 1 \qquad \text{per a tot enter } h \in \mathbb{Z}^+ . \tag{4.9}$$

A continuació veurem que donada qualsevol funció racional, existirà sempre una factorització com la que hem descrit a 4.8 i donarem un algorisme de com fer-ho. D'aquesta forma l'algorisme de Gosper trobarà una solució racional no trivial a la relació 4.7 que tendrà la forma següent:

$$y(n) = \frac{b(n-1)x(n)}{c(n)}, \tag{4.10}$$

on $x(n)$ és una funció racional desconeguda. Arribats a aquest punt si substituïm 4.8 i 4.10 a la relació de recurrència 4.7:

$$\begin{aligned}
y(n+1)r(n) - y(n) &= 1 \\
&\Downarrow \\
\frac{b(n)x(n+1)}{c(n+1)} \cdot \frac{a(n)c(n+1)}{b(n)c(n)} - \frac{b(n-1)x(n)}{c(n)} &= 1 \\
&\Downarrow \\
\frac{x(n+1)a(n)}{c(n)} - \frac{b(n-1)x(n)}{c(n)} &= 1 \\
&\Downarrow \\
x(n+1)a(n) - b(n-1)x(n) &= c(n),
\end{aligned} \tag{4.11}$$

obtenim una nova relació de recurrència lineal de primer ordre, on recordem que la solució $x(n)$ que cercam és una funció racional.

Per poder continuar endavant resoldrem el següent teorema on veurem que aquesta funció racional que cercam és concretament una funció polinòmica. Vegem-ho:

Teorema 4.1. *Siguin $a(n), b(n)$ i $c(n)$ polinomis tals que satisfan mcd$(a(n), b(n+h)) = 1$ per a tot enter $h \in \mathbb{Z}^+$. Aleshores si $x(n)$ és una funció racional que satisfà la relació de recurrència 4.11, llavors $x(n)$ és una funció polinòmica.*

Demostració. Suposem que $x(n) = f(n)/g(n)$ on f, g són polinomis de variable n i coprimers entre ells. Aleshores podem reescriure la igualtat 4.11 de la següent forma:

$$a(n)f(n+1)g(n) - b(n-1)f(n)g(n+1) = c(n)g(n)g(n+1). \tag{4.12}$$

Si suposam que el teorema no és cert aleshores tendrem que $g(n)$ no serà una funció constant. Considerem N el nombre enter més gran tal que $\mathrm{mcd}(g(n), g(n+N))$ sigui un polinomi no constant. Vegem primer que aquest N sempre existeix.

Sigui n un nombre enter arbitrari però fixat i considerem el conjunt dels k enters no negatius tal que:

$$\mathrm{grau}(\mathrm{mcd}(g(n), g(n+k)) \geq 1.$$

Òbviament 0 sempre pertany al conjunt anterior ja que $\mathrm{mcd}(g(n), g(n)) = g(n)$, el qual té grau major que 1. Per tant el conjunt anterior és no buit.

Sigui ara $h(n,k) = \text{mcd}(g(n), g(n+k))$, aleshores $h(n,k)|g(n)$. Ara bé, òbviament el nombre de $h(n,k)$'s ha de ser finit ja que el nombre de divisors de $g(n)$ és finit. Siguin doncs:

$$\{h(n,t_1),\dots,h(n,t_l)\}$$

el conjunt de tots els $h(n,k)'s$. Aleshores sempre existirà $N = \text{màx}\{t_1,\dots,t_l\}$ tal com volíem veure.

Considerem ara $u(n)$ un polinomi no constant, irreductible i divisor comú de $g(n)$ i $g(n+N)$. Aleshores està clar que $u(n-N)|g(n)$ i per tant, tenint en compte 4.12 s'obté que:

$$u(n-N)|b(n-1)f(n)g(n+1).$$

Ara, $u(n-N)$ no pot dividir $f(n)$, ja que divideix $g(n)$ i recordem que $f(n)$ i $g(n)$ són polinomis coprimers. Per altra banda $u(n-N)$ tampoc pot dividir $g(n+1)$, ja que si no $u(n)|g(n+1+N)$ i contradiria l'elecció de N. Per tant $u(n-N)|b(n-1)$ o el que és el mateix, $u(n+1)|b(n+N)$.

Fent un raonament anàleg, i partint del fet que $u(n+1)|g(n+1)$, es dedueix a partir de 4.12 que:

$$u(n+1)|a(n)f(n+1)g(n).$$

Per una banda tenim que $u(n+1)$ no pot dividir $f(n+1)$, ja que si no $u(n)|f(n)$ i això no pot ser ja que $u(n)|g(n)$ i $f(n)$ i $g(n)$ són polinomis coprimers. Per altra banda tenim que $u(n+1)$ tampoc pot dividir $g(n)$ ja que si no $u(n)$ seria un factor comú de $g(n-1)$ i $g(n+N)$, i per tant $u(n+1)$ seria un factor comú de $g(n)$ i $g(n+N+1)$ de forma que N no seria el valor més gran tal que $\text{mcd}(g(n), g(n+k)) \geq 1$. Així doncs ha de passar que $u(n+1)|a(n)$.

Així, arribam a la conclusió que $u(n+1)$ és un factor comú de $a(n)$ i $b(n+N)$, contradient la condició 4.9. En conseqüència $g(n)$ és una constant i per tant $x(n)$ és un polinomi com volíem demostrar. □

Amb aquest teorema hem pogut comprovar que efectivament les solucions racionals de l'equació 4.11 són de fet polinòmiques, i per tant hem reduït un problema inicial on havíem de resoldre una equació hipergeomètrica 4.3 a resoldre una recurrència on la solució és un polinomi. Ara, una vegada trobem aquest solució $x(n)$, podrem obtenir z_n de la següent forma utilitzant la igualtat 4.6:

$$z_n = \frac{b(n-1)x(n)}{c(n)} t_n,$$

donant lloc a una solució hipergeomètrica de l'equació 4.3. Més endavant veurem com podem trobar solucions polinòmiques a l'equació 4.11 si és que aquesta en té.

Ja per acabar amb l'explicació de l'algorisme de Gosper, una vegada hem obtingut z_n, és fàcil obtenir quin és el valor de la suma s_n, ja que recordem que $s_n = z_n - z_0$. Si el nostre sumatori començàs amb un valor enter k_0 major que 0, i per tant, t_k no estigués ben definit per k entre 0 i $k_0 - 1$, escriurem $s_n = z_n - z_{k_0}$.

Vegem ara un exemple per veure com és el funcionament d'aquest algorisme.

Exemple 4.1. Sigui

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (4k+1)\frac{k!}{(2k+1)!}.$$

Anem a comprovar si podem expressar aquesta suma en forma tancada. Primer de tot calcularem la raó entre dos termes consecutius. Tenim que cada un dels termes d'aquesta sèrie és de la forma

$$t_k = (4k+1)\frac{k!}{(2k+1)!},$$

i per tant és un terme hipergeomètric. La suma anterior va des de $k=0$ fins a n però el nostre algorisme necessita que vagi des de $k=0$ fins a $n-1$. Sigui doncs $s_n = S_{n-1}$. Si ara en calculam la raó $r(n)$ obtenim que:

$$r(n) = \frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{(4n+5)\frac{(n+1)!}{(2n+3)!}}{(4n+1)\frac{n!}{(2n+1)!}} = \frac{4n+5}{2(4n+1)(2n+3)},$$

on aquesta és una funció racional amb variable n. Ara, si escollim:

$$a(n) = 1, \qquad b(n) = 2(2n+3), \qquad c(n) = 4n+1,$$

tenim que aquestes tres funcions compleixen clarament les condicions 4.8 i 4.9. Seguidament, podem muntar la recurrència 4.11, la qual quedarà de la següent forma a partir de les funcions definides anteriorment:

$$x(n+1) - 2(2n+1)x(n) = 4n+1. \tag{4.13}$$

La següent passa és trobar una solució racional a la recurrència 4.13, que com hem vist al teorema anterior aquesta ha de ser una solució polinòmica. Per cercar aquesta solució anirem provant amb polinomis de grau 0 i anirem incrementant el grau del polinomi fins que trobem el polinomi $x(n)$ que satisfaci 4.13. En aquest cas en particular hem estat afortunats a l'hora de trobar una solució ja que el polinomi constant $x(n) = -1$ compleix la recurrència 4.13. Aleshores hem trobat que:

$$z_n = \frac{b(n-1)x(n)}{c(n)} t_n = \frac{-2(2n+1)}{4n+1}(4n+1)\frac{n!}{(2n+1)!} = -2\frac{n!}{(2n)!},$$

de forma que aquest satisfà que $z_{n+1} - z_n = t_n$ i obtenim així que:

$$s_n = z_n - z_0 = -2\frac{n!}{(2n)!} + 2.$$

Finalment, podem concloure que:

$$S_n = s_{n+1} = 2 - \frac{n!}{(2n+1)!}.$$

Emperò, cal dir que en aquest exemple ens ha resultat veritablement fàcil poder trobar la factorització de la raó 4.8 tal que aquesta compleixi la condició 4.9. També ho ha estat trobar la solució polinòmica de la relació de recurrència 4.11. Òbviament això és un exemple preparat per a que això sigui així, però no sempre ens resultarà tan fàcil poder realitzar aquests passos. Per això, a continuació veurem un algorisme per cada un dels passos per tal de poder fer aquests procediments d'una forma sistemàtica per a qualsevol cas.

Abans de veure aquests passos per separat, generalitzarem primer totes i cada una de les passes que segueix l'algorisme de Gosper.

Algorisme de Gosper

Entrada: Una sèrie hipergeomètrica s_n.

1. S'identifica el terme hiepergeomètric t_n i es calcula la raó $r(n) = \frac{t_{n+1}}{t_n}$ obtenint una funció racional.
2. Es reescriu la raó $r(n) = \frac{a(n)}{b(n)} \frac{c(n+1)}{c(n)}$ on $a(n), b(n), c(n)$ són polinomis que satisfan 4.9.
3. Es cerca una solució polinòmica $x(n)$ no nul·la de la recurrència 4.11 si aquesta existeix; altrament es retorna $\sum_{k=0}^{n-1} t_k$ i acabarà.
4. Es calcula $z_n = \frac{b(n-1)x(n)}{c(n)} t_n$ tal que compleixo la identitat 4.3.
5. Es retorna la sèrie escrita en forma tancada a partir de calcular $z_n - z_0$.

A continuació analitzarem amb més detall com es duen a terme els passos 2 i 3 en qualsevol cas.

4.1.1 Passa 2

En aquesta secció explicarem com podrem obtenir una factorització de $r(n)$ de la forma que hem descrit a 4.8 que verifiqui 4.9. És a dir, donada una funció de la forma $r(n) = f(n)/g(n)$ on f i g són funcions polinòmiques de forma que $mcd(f(n), g(n)) = 1$, volem trobar tres polinomis $a(n), b(n)$ i $c(n)$, de forma que puguem escriure

$$r(n) = \frac{a(n)c(n+1)}{b(n)c(n)},$$

i a més que es compleixi que $mcd(a(n), b(n+h)) = 1$ per qualsevol $h \in \mathbb{Z}^+$.

El cas més senzill i fàcil es dóna quan ocorre que $mcd(f(n), g(n+h)) = 1$ per qualsevol $h \in \mathbb{Z}^+$. En aquest cas basta considerar $a(n) = f(n)$, $b(n) = g(n)$ i $c(n) = 1$.

Ara bé, això no sempre serà així. Suposem ara que $mcd(f(n), g(n+h)) = u(n)$ per algun h. Aleshores $u(n)$ serà un factor comú de $f(n)$ i $g(n+h)$ de forma que podrem escriure $f(n) = \overline{f}(n)u(n)$ i $g(n) = \overline{g}(n)u(n-h)$. Aleshores, es té que

$$r(n) = \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{\overline{f}(n)}{\overline{g}(n)} \frac{u(n)}{u(n-h)}.$$

Per una part la fracció de la dreta formada pel factor comú $u(n)$, aniria formant la fracció $\frac{c(n+1)}{c(n)}$, seguint la següent tècnica:

$$\frac{u(n)}{u(n-h)} = \frac{u(n)u(n-1)u(n-2)\cdots u(n-h+1)}{u(n-1)u(n-2)\cdots u(n-h+1)u(n-h)},$$

obtenint d'aquesta forma el polinomi $c(n)$.

Per altra banda tenim que la fracció $\frac{\overline{f}(n)}{\overline{g}(n)}$ podria definir les funcions $\frac{a(n)}{b(n)}$ respectivament, sempre que $mcd(\overline{f}(n), \overline{g}(n+h)) = 1$ per a tot h, si no fos així, hauríem de repetir el procés fins a aconseguir-ho amb el nou factor comú obtingut.

La pregunta que ens hem de fer ara és: com podem saber si existeix un $h \in \mathbb{Z}^+$ tal que $mcd(f(n), g(n+h)) \neq 1$? Per veure-ho, ho farem mitjançant el polinomi resultant de $f(n)$ i $g(n+h)$ que denotarem com a $R(h)$. Siguin $\alpha_1, \ldots, \alpha_I$ les arrels del polinomi $f(n)$ i $\beta_1, \ldots, \beta_J$ les arrels del polinomi $g(n)$. Tenint en compte que $\beta_j - h$ amb $j = 1, \ldots, J$ seran les arrels del polinomi $g(n+h)$, definim la resultant dels polinomis $f(n)$ i $g(n+h)$ com:

$$Res(f(n), g(n+h)) = \prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{J} (\beta_j - h - \alpha_i) = R(h).$$

Fixem-nos que la resultant no és res més que el producte de totes les diferències que s'obtenen de combinar les arrels dels polinomis $f(n)$ i $g(n+h)$, de forma que si $f(n)$ i $g(n+h)$ tenen una arrel en comú aquesta resultant val zero. A partir d'aquest fet podem dir que:

$$R(\gamma) = 0 \Leftrightarrow mcd(f(n), g(n+\gamma)) \neq 1.$$

Aleshores tenim que la problemàtica de saber si existeix un $h \in \mathbb{Z}^+$ tal que aquest fa que $mcd(f(n), g(n+h)) \neq 1$, es redueix a trobar arrels enteres no negatives de $R(h)$.

Per accelerar el procés i fer que la funció $R(h)$ sigui més senzilla, substituirem $f(n)$ per $\frac{f(n)}{mcd(f(n), f'(n))}$ i $g(n)$ per $\frac{g(n)}{mcd(g(n), g'(n))}$ per tal de llevar les arrels dobles dels polinomis que no ens donaran cap informació ja que únicament volem saber si f i g tenen arrels en comú.

D'aquest fer sorgeix una nova pregunta: com podem trobar arrels enteres del polinomi $R(h)$? Aquesta pregunta es respon depenent del cos K on es troben els coeficients del polinomi $R(h)$. Si tots els coeficients són de $\mathbb{Q}$, és fàcil mitjançant el següent teorema:

Teorema 4.2. *(Teorema de l'arrel racional)*
Sigui:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0,$$

un polinomi tal que a_0 i a_n són enters diferents de 0. Siguin $\alpha = \frac{p}{q}$ amb p, q enters i coprimers, amb $q \neq 0$. Aleshores si $P(\alpha) = 0$; ha de passar que $p | a_0$ i $q | a_n$.

Demostració. La demostració d'aquest teorema és molt senzilla. Suposem que $\frac{p}{q}$ és una arrel racional de $P(x)$ tal que p i q són coprimers. Aleshores tenim que:

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_0 = 0, \tag{4.14}$$

i per tant, reescrit d'una altra forma tenim que:

$$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \ldots + a_1 q^{n-1}) = -q^n a_0,$$

de forma que ha de passar que $p | q^n a_0$. Ara bé com que p i q són coprimers entre si, $p \nmid q^n$, i per tant ha de passar que $p | a_0$. Per altra banda, també podem escriure 4.14 de la següent forma:

$$q(a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \cdots + a_0 q^{n-1}) = -p^n a_n,$$

i per tant tenim que $q|p^n a_n$. Ara bé, $q \nmid p$ ja que son coprimers, per tant $q \nmid p^n$, i aleshores ha de passar que $q|a_n$. $\square$

Si els coeficients del polinomi $R(h)$ són racionals, podem reduir el problema a suposar que els coeficients siguin enters ja que trobant el mínim comú múltiple dels denominadors dels coeficients i multiplicant el polinomi $R(h)$ per aquest mínim comú múltiple, obtenim un altre polinomi amb coeficients enters que té les mateixes arrels que $R(h)$.

Ara el nostre objectiu és trobar arrels enteres del polinomi $R(h)$. Per aquest motiu q (denominador de l'arrel) sempre haurà de ser 1, la qual cosa implica que q sempre dividirà a el terme de major grau. Per tant, el que hem de fer és cercar tots els divisors que siguin enters positius del terme independent, i comprovar si cap d'aquests és una solució del polinomi $R(h)$. Aleshores si trobam un divisor γ del terme independent, enter positiu tal que satisfà que $R(\gamma) = 0$, passarà que el $mcd(f(n), g(n+\gamma)) \neq 1$.

Amb això hem resolt el problema quan el polinomi $R(h)$ té tots els seus coeficients a $\mathbb{Q}$, però què passa quan apareixen coeficients que no són precisament de $\mathbb{Q}$? Com podem trobar les arrels d'aquest polinomi? Per fer-ho, ho farem d'una forma molt general.

Sigui A_k un algorisme que troba arrels enteres de polinomis amb coeficients en un cos k. Suposem ara que tenim la següent extensió del cos k; $K = k(\alpha)$ on $\alpha \notin k$. Aleshores el nostre objectiu és trobar un nou algorisme A_K que sigui capaç de trobar arrels enteres d'un polinomi amb coeficients a K.

Sigui doncs $R \in K[h]$, on els coeficients d'aquest polinomi són funcions racionals de α, de forma que podem escriure:

$$R(h) = \sum_{i=0}^{s} \frac{p_i(\alpha)}{r(\alpha)} h^i = \sum_{j=0}^{t} \frac{q_j(h)}{r(\alpha)} \alpha^j,$$

on $p_i, q_j, r \in k[x]$.

Ara, si existeix un $u \in k$ tal que $R(u) = 0$, aleshores passarà que $\sum_{j=0}^{t} q_j(u)\alpha^j = 0$. Per una part tenim que si α és un element transcendental sobre k, aleshores no existirà cap polinomi amb coeficients a k tal que tengui α com arrel, la qual cosa implica que $q_j(u) = 0$ per a tot $j = 0, 1, \ldots, t$. Per altra banda si α és un element algebraic sobre k de grau d, tendrem que els polinomis $p_i(\alpha)$ seran de grau més petit que d, i per tant $t \leq d-1$. Aleshores haurà de passar també que $q_j(u) = 0$ per a tot $j = 0, 1, \ldots, t$. D'aquesta forma podem concloure que cada una de les solucions de $R(h)$, ha de ser solució també de tots i cada un dels polinomis $q_j(h)$ amb $j = 0, 1, \ldots, t$. Aleshores per resoldre el problema haurem d'aplicar l'algorisme A_k a cada un dels polinomis $q_j(h)$, i si hi ha una solució que és comuna a cada un d'ells aleshores aquesta és també una solució de $R(h)$.

Exemple 4.2. Suposem que tenim el polinomi:

$$R(h) = ((\sqrt[3]{2})^2 - 2\sqrt[3]{2} + 3)h^3 + (-2(\sqrt[3]{2})^2 + \sqrt[3]{2})h^2 - h + (\sqrt[3]{2})^2 + \sqrt[3]{2} - 2.$$

En aquest cas tenim que aquest polinomi pertany al cos $K = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$, que és un cos d'extensió del cos $k = \mathbb{Q}$. Ara podem reescriure el polinomi $R(h)$ de forma que sigui un polinomi en funció de $\sqrt[3]{2}$, vegem-ho:

$$R(h) = (\sqrt[3]{2})^2(h^3 - 2h^2 + 1) + \sqrt[3]{2}(-2h^3 + h^2 + 1) + 3h^3 - h - 2.$$

Per tant tenim que els coeficients d'aquest polinomi reescrit en funció de $\sqrt[3]{2}$ són polinomis de $\mathbb{Q}[h]$:

$$\begin{aligned} q_0(h) &= 3h^3 - h - 2, \\ q_1(h) &= -2h^3 + h^2 + 1, \\ q_2(h) &= h^3 - 2h^2 + 1. \end{aligned}$$

Ara si aplicam l'algorisme $A_{\mathbb{Q}}$ que ja coneixem per trobar arrels enteres a aquest tres polinomis, comprovarem que $h = 1$ és una arrel comuna, i per tant, tendrem que $R(1) = 0$, la qual cosa ens diu que $h = 1$ és una arrel del polinomi $R(h)$.

Arribats aquí, anem a veure l'algorisme de la segona passa del mètode de Gosper.

Passa 2 algorisme de Gosper

2.1
- *Entrada:* $r(n) = K\frac{f(n)}{g(n)}$ on f, g són funcions coprimeres i sense arrels dobles, i K una constant entera.
- Construïm la resultant $R(h) = Res(f(n), g(n+h))$.
- Trobam el conjunt de solucions enteres no negatives de $R(h)$, $\mathscr{S} = \{h_1, h_2, \ldots, h_N\}$ $(N \geq 0, \quad 0 < h_1 < h_2 < \ldots < h_N)$.

2.2
- Assignarem $p_0(n) := f(n)$; $q_0(n) := g(n)$.
- for $j = 1, 2, \ldots, N$ do:
  $u_j(n) := mcd(p_{j-1}(n), q_{j-1}(n+h_j))$;
  $p_j(n) := \frac{p_{j-1}(n)}{u_j(n)}$;
  $q_j(n) := \frac{q_{j-1}(n)}{u_j(n-h_j)}$;
  end .
- $a(n) := K p_N(n)$;
  $b(n) := q_N(n)$;
  $c(n) := \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{h_i} u_i(n-j)$.
- *Sortida:* $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$.

Vegem a continuació que efectivament els polinomis $a(n)$, $b(n)$ i $c(n)$ compleixen les condicions 4.8 i 4.9. Per una banda amb un simple procés de càlcul podem verificar la condició 4.8.

$$\begin{aligned} \frac{a(n)}{b(n)}\frac{c(n+1)}{c(n)} &= K\frac{p_N(n)}{q_N(n)}\prod_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{h_i}\frac{u_i(n+1-j)}{u_i(n-j)} \\ &= K\frac{p_0(n)}{\prod_{i=1}^{N} u_i(n)}\frac{\prod_{i=1}^{N} u_i(n-h_i)}{q_0(n)}\prod_{i=1}^{N}\frac{u_i(n)}{u_i(n-h_i)} \\ &= K\frac{p_0(n)}{q_0(n)} = K\frac{f(n)}{g(n)} = r(n). \end{aligned}$$

Per altra banda, per provar que es compleix 4.9, tenim per definició de p_j, q_j i u_j que:

$$mcd(p_k(n), q_k(n+h_k)) = mcd\left(\frac{p_{k-1}(n)}{u_k(n)}, \frac{q_{k-1}(n+h_k)}{u_k(n)}\right) = 1, \qquad (4.15)$$

per a tot $1 \leq k \leq N$. D'aquest fet en deduïm que efectivament és cert que:

$$mcd(a(n), b(n+h_N)) = mcd(Kp_N(n), q_N(n+h_N)) = 1,$$

però això no és suficient. Hem de veure que es compleix la condició 4.9 per a qualsevol valor de h que sigui un enter no negatiu.

Òbviament si $h \notin \mathscr{S}$ és trivial que és compleix la condició, ja que $R(h) \neq 0$ i per tant $mcd(a(n), b(n+h)) = 1$.

Anem a provar-ho quan $h \in \mathscr{S}$. Si ens fixam amb la definició tant de $p_i(n)$ com de $q_i(n)$ a l'algorisme, tenim que:

$$a(n) = Kp_N(n)|p_{N-1}(n)|\dots|p_1(n)|p_0(n) = f(n),$$

$$b(n) = q_N(n)|q_{N-1}(n)|\dots|q_1(n)|q_0(n) = g(n).$$

És a dir que:

$$p_i(n)|p_k(n) \quad \text{si:} \quad i \geq k \qquad (i = 1, ..., N),$$

$$q_j(n)|q_k(n) \quad \text{si:} \quad j \geq k \qquad (j = 1, ..., N),$$

i per tant, amb la igualtat que hem vist a 4.15, tenim que:

$$mcd(p_i(n), q_j(n+h_k))|mcd(p_k(n), q_k(n+h_k)) = 1.$$

Ara, si en particular prenem $i, j = N$ tendrem que k sempre serà més petit o igual que aquests dos i per tant:

$$mcd(a(n), b(n+h_k))|mcd(p_k(n), q_k(n+h_k)) = 1,$$

per a qualsevol valor de $k = 1, \dots, N$, tal com volíem veure.

4.1.2 Passa 3

Ja per acabar amb l'algorisme de Gosper veurem com es duu a terme la tercera passa, la qual farem servir per trobar solucions polinòmiques a la recurrència 4.11:

$$a(n)x(n+1) - b(n-1)x(n) = c(n).$$

Com ja vam demostrar en el teorema 4.1, sabem que la solució d'aquesta relació de recurrència és un polinomi que suposarem de grau d. Si podem ser capaços de conèixer el valor de d, o a la falta d'aquest una fita superior, podríem considerar $x(n)$ un polinomi genèric de grau d dins la recurrència 4.11 i igualar els coeficients d'aquest polinomi tenint en compte les potències de n. D'aquesta forma obtendríem un sistema lineal de solució els coeficients del polinomi en qüestió.

Anem a veure a continuació com ho podem fer per trobar un valor per a d o almenys una fita superior. Per fer-ho distingirem dos casos.

Cas 1: $\deg(a(n)) \neq \deg(b(n))$[1] o $\text{lc}(a(n)) \neq \text{lc}(b(n))$[2].
En aquest cas, el grau del polinomi de la part esquerra de 4.11 serà $d + \max\{\deg(a(n)), \deg(b(n))\}$ que coincidirà amb el grau de $c(n)$. Per tant,

$$d = \deg(c(n)) - \max\{\deg(a(n)), \deg(b(n))\}.$$

[1] $\deg(a(n)) :=$ grau del polinomi $a(n)$.
[2] $\text{lc}(a(n)) :=$terme líder del polinomi $a(n)$.

Cas 2: $\deg(a(n)) = \deg(b(n))$ i $\mathrm{lc}(a(n)) = \mathrm{lc}(b(n)) = \lambda$.
En aquest cas, tenim que els termes líders de la part esquerra de la recurrència 4.11 s'anul·laran. Novament, dins aquest cas, hem de distingir 2 casos més.

2.1 Si els termes d'un grau inferior al grau de l'esquerra no s'anul·len, aleshores el grau total de la part esquerra de 4.11 serà $d + deg(a(n)) - 1$, d'on deduïm que:

$$d = \deg(c(n)) - \deg(a(n)) + 1.$$

2.2 En aquest altre cas suposarem que els termes d'un grau inferior al grau de la part esquerra de 4.11 també s'anul·len. Siguin doncs:

$$\begin{aligned} a(n) &= \lambda n^k + A n^{k-1} + \mathcal{O}(n^{k-2}), && (4.16)\\ b(n-1) &= \lambda n^k + B n^{k-1} + \mathcal{O}(n^{k-2}), && (4.17)\\ x(n) &= C_0 n^d + C_1 n^{d-1} + \mathcal{O}(n^{d-2}), \end{aligned}$$

on $C_0 \neq 0$. Amb les definicions anteriors podem desenvolupar la part esquerra de l'expressió 4.11 de la següent forma:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= C_0 n^d + (C_0 d + C_1) n^{d-1} + \mathcal{O}(n^{d-2}),\\ a(n)x(n+1) &= C_0 \lambda n^{k+d} + (\lambda(C_0 d + C_1) + AC_0) n^{k+d-1} + \mathcal{O}(n^{k+d-2}),\\ b(n-1)x(n) &= C_0 \lambda n^{k+d} + (BC_0 + \lambda C_1) n^{k+d-1} + \mathcal{O}(n^{k+d-2}),\\ a(n)x(n+1) - b(n-1)x(n) &= C_0(\lambda d + A - B) n^{k+d-1} + \mathcal{O}(n^{k+d-2}). && (4.18) \end{aligned}$$

Ara, com que sabem que el terme d'un grau inferior al terme de major grau també ha de desaparèixer, tendrem que el coeficient de n^{k+d-1} de la part dreta de 4.18 s'ha d'anul·lar, de forma que $C_0(\lambda d + A - B) = 0$, i com que $C_0 \neq 0$, ens queda que:

$$d = \frac{B - A}{\lambda}.$$

Així doncs, en aquest segon cas hi ha dues possibilitats pel grau del polinomi $x(n)$. Cal dir però que aquests dos possibles valors per a d han de ser sempre enters no negatius. Donat el cas que les dues possibilitats siguin un nombre enter no negatiu prendrem sempre el més gran dels dos, com una fita. No obstant això, pot passar que hi hagi més d'una solució per a 4.11 i que aquestes siguin de diferent grau.

Exemple 4.3. Considerem la següent recurrència:

$$(n^2 + 2n + 3)x(n+1) - (n^2 + 1)x(n) = -n - 1. \tag{4.19}$$

Volem trobar un polinomi $x(n)$ tal que satisfaci 4.19.

En aquest cas, tant els graus dels polinomis $a(n)$ i $b(n)$ com els coeficients líders de cada un d'ells coincideixen. Aleshores ens trobam davant el cas 2.

Si calculam els dos possibles graus del polinomi $x(n)$ tenim que:

$$\mathcal{D} = \left\{ \deg(c(n)) - \deg(a(n)) + 1, \frac{B - A}{\mathrm{lc}(a(n))} \right\} = \{0, -2\}.$$

Aleshores l'única possibilitat per a d és 0, i per tant que el polinomi $x(n)$ sigui un polinomi constant. Considerarem $x(n) = C_0$ on $C_0 \in \mathbb{R}$. D'aquesta manera si $x(n)$ és una solució ha de satisfer la següent igualtat:

$$C_0(n^2+2n+3) - C_0(n^2+1) = -n-1.$$

Aleshores el possible valor de C_0 ha de satisfer les següents equacions:

$$\begin{cases} 2C_0 n = -n, \\ 3C_0 - C_0 = -1. \end{cases}$$

Observem que $C_0 = -\frac{1}{2}$ és una solució. Aleshores el polinomi constant $x(n) = -\frac{1}{2}$ és una solució de 4.19.

Vegem a continuació l'algorisme complet de la passa 3.

Passa 3 algorisme de Gosper

Entrada: $a(n)$, $b(n)$ i $c(n)$.

3.1 If $\deg(a(n)) \neq \deg(b(n))$ o $\mathrm{lc}(a(n)) \neq \mathrm{lc}(b(n))$ then:

$$\mathscr{D} := \deg(c(n)) - \max\left\{\deg(a(n)), deg(b(n))\right\}$$

else:

$$\mathscr{D} := \left\{\deg(c(n)) - \deg(a(n)) + 1, \frac{B-A}{\mathrm{lc}(a(n))}\right\}$$

then: $\mathscr{D} := \mathscr{D} \cap (\mathbb{N} \cup \{0\})$
If $\mathscr{D} = \emptyset$ then: retornam "No hi ha cap solució polinòmica no nul·la."
else: $d := \max \mathscr{D}$

3.2 Cercam $x(n)$ suposant un polinomi genèric de grau d i igualant els coeficients de la part esquerra amb la part dreta de la igualtat 4.11. Seguidament resolem el sistema que en resulta i obtenim així els coeficients del polinomi genèric $x(n)$ en el cas que el sistema tingui solució.
If $\exists x(n)$ then: retornam $x(n)$
else: retornam "No hi ha cap solució polinòmica no nul·la."

I amb aquesta darrera descripció de la passa 3 de l'algorisme, acabam per complet l'explicació de l'algorisme de Gosper. A continuació veurem uns quants exemples per acabar d'il·lustrar l'algorisme de Gosper.

4.2 Exemples

Exemple 4.4. Donarem en forma tancada la següent sèrie mitjançant el mètode de Gosper:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 2^k.$$

Per començar tendrem que el terme t_k de la suma és

$$t_k = k^2 2^k,$$

i per tant la raó $r(n)$ vendrà donada per

$$r(n) = \frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{(n+1)^2 2^{n+1}}{n^2 2^n} = \frac{2(n+1)^2}{n^2}.$$

En aquest cas es veu a simple vista que una descomposició fàcil de la raó de la forma 4.8 ve donada per: $a(n) = 2$, $b(n) = 1$ i $c(n) = n^2$ on aquestes funcions satisfan la condició 4.9.

Arribats aquí la següent passa serà trobar una solució polinòmica a la relació de recurrència 4.11, que en aquests cas adoptarà la forma següent:

$$2x(n+1) - x(n) = n^2, \tag{4.20}$$

de forma que el polinomi $x(n)$ que cercam haurà de ser de grau 2 per tal de que es satisfaci la igualtat. Per això considerarem el polinomi genèric $x(n) = a_2 n^2 + a_1 n + a_0$ i trobarem quins han de ser els valors del coeficients a_2, a_1 i a_0, tals que facin que $x(n)$ satisfaci la igualtat 4.20. Aleshores a partir del fet que $2x(n+1) - x(n) = n^2$, tendrem que la següent igualtat ha de ser certa:

$$2(a_2(n^2 + 2n + 1) + a_1 n + a_1 + a_0) - (a_2 n^2 + a_1 n + a_0) = n^2.$$

A partir de la igualtat anterior s'obté el següent sistema per resoldre:

$$\begin{cases} 2a_2 - a_2 = 1 \\ 4a_2 + 2a_1 - a_1 = 0 \\ 2a_2 + 2a_1 + 2a_0 - a_0 = 0. \end{cases}$$

Les solucions d'aquests sistema són $a_2 = 1$, $a_1 = -4$ i $a_0 = 6$, de forma que el polinomi que satisfà la relació de recurrència és $x(n) = n^2 - 4n + 6$. A continuació obtindrem l'expressió de z_n:

$$z_n = \frac{b(n-1)x(n)}{c(n)} t_n = \frac{n^2 - 4n + 6}{n^2} n^2 2^n = 2^n(n^2 - 4n + 6).$$

Ara, a partir del fet que $S_n = z_{n+1} - z_0$ ens quedarà que:

$$S_n = 2^{n+1}(n^2 - 2n + 3) - 6.$$

Exemple 4.5. Escriurem en forma tancada la següent suma mitjançant el mètode de Gosper:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^4 4^k}{\binom{2k}{k}}. \tag{4.21}$$

Per començar, tenim que el terme t_k de la suma S_n correspon a:

$$t_k = \frac{k^4 4^k}{\binom{2k}{k}} = \frac{k^4 4^k (k!)^2}{(2k)!}.$$

A continuació calcularem la raó entre dos termes consecutius. Si calculam aquesta ens dóna que:

$$r(k) = \frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{2(k+1)^5}{k^4(2k+1)}.$$

La següent passa de l'algorisme de Gosper és escriure la raó $r(n)$ de la forma 4.8, és a dir, hem de cercar $a(n)$, $b(n)$ i $c(n)$ tals que satisfacin:

$$r(n) = \frac{a(n)}{b(n)}\frac{c(n+1)}{c(n)},$$

juntament amb la condició 4.9. Per fer-ho, seguirem l'algorisme de la segona passa de l'algorisme de Gosper. Per això tendrem que el denominador de l'expressió de la raó trobada sense la constant serà $f(n)$, la costant serà K i el denominador serà $g(n)$, aleshores:

$$f(n) = (n+1)^5, \qquad g(n) = (2n+1)n^4, \qquad K = 2.$$

Ara tenint en compte que l'única arrel de $f(n)$ és $n = -1$, i les arrels de $g(n)$ són $n = -\frac{1}{2}$ i $n = 0$, aleshores la resultant $R(h)$ vendrà definida de la següent forma:

$$R(h) = \left(-\frac{1}{2} - h + 1\right)(-h+1) = \left(h + \frac{1}{2}\right)(h-1).$$

Aleshores si ens fixam amb $R(h)$, l'única arrel entera no negativa és $h_1 = 1$. Anem doncs a continuar amb la segona passa de l'algorisme per trobar $a(n)$, $b(n)$ i $c(n)$. Per fer-ho farem les següents assignacions: $p_0(n) := f(n)$ i $q_0(n) := g(n)$, on a partir d'aquests podem trobar les expressions de les funcions següents:

$$u_1(n) := mcd(p_0(n), q_0(n+h_1)) = mcd((n+1)^5, (n+1)^4(2n+3)) = (n+1)^4,$$

$$p_1(n) := \frac{p_0(n)}{u_1(n)} = \frac{(n+1)^5}{(n+1)^4} = (n+1),$$

$$q_1(n) := \frac{q_0(n)}{u_1(n-h_1)} = \frac{n^4(2n+1)}{n^4} = 2n+1.$$

Ara per acabar amb aquesta segona passa obtindrem que:

$$a(n) := Kp_1(n) = 2(n+1),$$

$$b(n) := q_1(n) = 2n+1,$$

$$c(n) := u_1(n-1) = n^4.$$

Una vegada obtingudes les funcions $a(n)$, $b(n)$ i $c(n)$ que efectivament satisfan la igualtat 4.8 i la condició 4.9, passarem a la següent passa de l'algorisme que consisteix en trobar una solució polinòmica a la recurrència 4.11:

$$x(n+1)a(n) - b(n-1)x(n) = c(n),$$

on amb els $a(n)$, $b(n)$ i $c(n)$ trobats ens queda que la recurrència adopta la forma següent:

$$2(n+1)x(n+1) - (2n-1)x(n) = n^4. \tag{4.22}$$

Per trobar $x(n)$ aplicarem l'algorisme de la passa 3 que hem explicat, d'aquesta forma trobarem quin ha de ser el grau d del $x(n)$ i imposarem que un polinomi genèric d'aquest grau satisfà la recurrència 4.11. A continuació trobarem quins són els coeficients d'aquest polinomi genèric resolent les equacions que s'obtindran igualant els coeficients de les diferents potències de n.

Si ens fixam amb els graus de $a(n)$ i $b(n)$, aquests coincideixen i el mateix passa amb els termes líders d'aquests dos polinomis, aleshores ens trobam en el segon cas, on els possibles valors de d són:

$$\mathscr{D} = \left\{\deg(c(n)) - \deg(a(n)) + 1, \frac{B-A}{\operatorname{lc}(a(n))}\right\} = \left\{4-1+1, \frac{1-2}{2}\right\} = \left\{4, -\frac{1}{2}\right\}.$$

Aleshores l'únic valor de d admissible és $d = 4$, i un polinomi genèric d'aquest grau és:

$$x(n) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

on l'objectiu serà trobar quins son els valors de a_0, a_1, a_2, a_3 i a_4 que satisfan 4.22. Per continuar ho farem amb l'ajuda del Mathematica.

```
In[3]:= x[n_] := a4*n^4 + a3*n^3 + a2*n^2 + a1*n + a0

In[4]:= a[n_] := 2 n + 2

In[5]:= b[n_] := 2 n + 1

In[6]:= c[n_] := n^4

In[7]:= Solve[CoefficientList[FullSimplify[x[n + 1] a[n] - b[n - 1] x[n]],
     n] == {0, 0, 0, 0, 1}, {a0, a1, a2, a3, a4}]

Out[7]= {{a0 -> -(2/231), a1 -> 26/693, a2 -> 20/231, a3 -> -(20/99),
  a4 -> 1/11}}
```

Aleshores ja hem trobat quin és el polinomi $x(n)$ que satisfà la recurrència 4.22, i aquest és

$$x(n) = \frac{1}{11}n^4 - \frac{20}{99}n^3 + \frac{20}{231}n^2 + \frac{26}{693}n - \frac{2}{231}.$$

Ara, ja per acabar, la següent passa és construir z_n, que recordem ve donat a partir de:

$$z_n = \frac{b(n-1)x(n)}{c(n)}t_n.$$

```
In[15]:= x[n_] := -(2/231) + n*26/693 + n^2*20/231 + n^3*-(20/99) +
  n^4*1/11
t[n_] := n^4*4^n*(n!)^2/(2 n)!

In[17]:= z[n_] := FullSimplify[b[n - 1]*x[n]*t[n]/c[n]]

In[18]:= z[n]

Out[18]= (4^n (-1 + 2 n) (-6 + n (26 + n (60 + 7 n (-20 + 9 n)))) (n!)^2)
    /(693 (2 n)!)
```

$$z_n = \frac{4^n(2n-1)\left(63n^4 - 140n^3 + 60n^2 + 26n - 6\right)(n!)^2}{693(2n)!}.$$

Finalment, per acabar amb aquest exemple, una vegada coneixem l'expressió de z_n ja som capaços d'escriure S_n en forma tancada, considerant la igualtat 4.4:

$$S_n = z_{n+1} - z_0.$$

```
In[20]:= FullSimplify[Together[z[n + 1] - z[0]]]

Out[20]= 2/693 (-3 + ((3 +
       n (-22 + n (18 + 7 n (16 + 9 n)))) Sqrt[\[Pi]] Gamma[2 + n])/
   Gamma[1/2 + n])
```

D'aquesta forma podem dir que hem estat capaços d'escriure S_n de forma tancada, i aquesta és:

$$S_n = \frac{2}{693}\left(\frac{\sqrt{\pi}(n(n(7n(9n+16)+18)-22)+3)\Gamma(n+2)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} - 3\right),$$

on tenint en compte que:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n+\frac{1}{2}-1\right)\left(n+\frac{1}{2}-2\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n}(2n-1)!!\sqrt{\pi}\,^{3},$$

l'expressió obtinguda de S_n, es pot simplificar per arribar a obtenir la següent expressió:

$$S_n = \frac{2}{693}\left(\frac{2^n\left(63n^4 + 112n^3 + 18n^2 - 22n + 3\right)(n+1)!}{(2n-1)!} - 3\right).$$

[3] Per calular el valor de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ s'ha utilitzat la igualtat demostrada al Teorema 2.2.

CAPÍTOL 5

CONCLUSIONS

El principal objectiu d'aquest treball ha estat introduir les sèries hipergeomètriques i les funcions hipergeomètriques, eines molt utilitzades en distints camps de les matemàtiques. Més concretament, hem donat tres mètodes distints per trobar fórmules tancades de la suma d'una sèrie hipergeomètrica.

El primer mètode s'ha vist al capítol 2 on s'ha realitzat una introducció de les funcions hipergeomètriques i l'estudi de les seves propietats. A continuació hem vist com transformar una sèrie hipergeomètrica en una funció hipergeomètrica amb la finalitat de, a partir de les propietats de les funcions hipergeomètriques, poder trobar una fórmula tancada de la seva suma.

En el capítol 3 hem estudiat el segon mètode anomenat mètode de Sor Celine. Aquest mètode es basa en trobar una relació de recurrència entre termes "desplaçats" de la sèrie hipergeomètrica.

De cara a optimitzar els càlculs del mètode anterior, en l'últim capítol 4 hem analitzat el tercer mètode anomenat algorisme de Gosper. Aquest mètode es basa en escriure la raó entre dos termes consecutius en un quocient de polinomis. A partir d'aquests polinomis, es construeix una relació de recurrència que ha de verificar un cert polinomi desconegut, clau per calcular la fórmula tancada de la nostra sèrie.

A tall de cloenda, podem afirmar que cap dels mètodes que hem revisat compleix completament amb la premissa esperada: pel que fa al mètode de Sor Celine podem lloar la seva fiabilitat en qualsevol dels casos presentats, per contra, sovint ens enfrontem a un procediment extens per tal d'arribar a la solució. D'altra banda, el mètode de Gosper fa un intent d'acurçar els càlculs però no arriba al nivell de contundència de l'anterior. Per això, és probable que l'optimització del càlcul de sèries hipergeomètriques encara requereixi de més estudi i de revisió de més fonts d'informació i/o treballs d'altres investigadors.

APÈNDIX A

Apèndix

A.1 Sor Celine

Mary Celine Fasenmyer (Figura A.1) va néixer el 4 d'octubre de 1906 a l'estat de Pennsylvania, en el si d'una família catòlica. Va créixer a la ciutat de Titusville, on es va experimentar un progrés econòmic causat per l'auge de la indústria del petroli, a la qual es dedicava professionalment el seu pare.

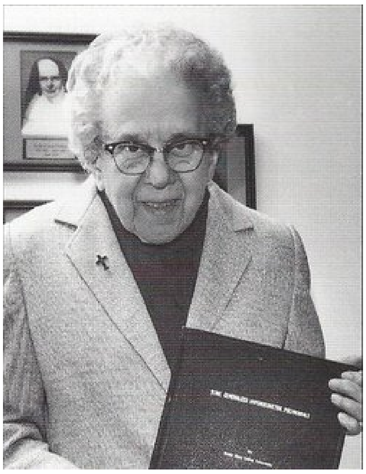

Figura A.1: Sor Mary Celine Fasenmyer.

Celine va començar els seus estudis a l'acadèmia de Sant Joseph, graduant-se al 1923, demostrant ja el seu interès i habilitat per les matemàtiques. Durant els deu anys posteriors, Celine va ensenyar i estudiar al col·legi de Mercyhurst, al qual reafirmà la seva fe catòlica, ordenant-se monja a la congregació de les Germanes de la Misericòrdia. Més endavant, va estudiar matemàtiques a la Universitat de Pittsburgh on es va graduar l'any 1937. Va continuar el seus estudis uns anys després a la Universitat de Michigan on va obtenir el títol de Doctora l'any 1946. La seva tesi doctoral, dirigida per Earl Rainville, titulada "Some Generalized Hypergeometric Polynomials"[10], versa sobre com és possible trobar una relació de recurrència entre els termes d'una suma hipergeomètrica donat l'algoritme corresponent. Posteriorment, va escriure dos articles aprofundint encara més en el tema de la seva tesi [11] i [12].

Finalment, retornà a Mercyhurst per reprendre la seva labor docent, deixant de banda la seva etapa com a investigadora. Va morir el 27 de desembre de 1996 a l'edat de 90 anys per causes naturals.

A.2 Bill Gosper

Bill Gosper és el nom amb el qual és conegut el matemàtic i programador nord-americà Ralph William Gosper Jr., qui nasqué a Pennsauken (Nova Jersey) l'any 1943. Se'l considera, juntament amb Richard Greenblatt, el fundador de la comunitat *hacker*. Pel que fa al seu bagatge acadèmic, va graduar-se en matemàtiques el 1965 a l'Institut Tecnològic de Massachusetts (MIT). Més tard, va cursar programació i es va afiliar al laboratori d'intel·ligència artificial del MIT on va realitzar diverses contribucions en matemàtica computacional i sobretot, al sistema algebraic computacional amb el projecte Macsyma.

Figura A.2: Bill Gosper.

Un altre aspecte interessant, sobre la seva trajectòria, és el seu interès pel *Joc de la vida* de John Conway. Conway va conjecturar l'existència de patrons que creixien indefinidament, i oferí una recompensa al primer que aportés un exemple. Aquest fou Gosper qui aconseguí trobar un patró que complia amb aquesta premissa, anomenant-lo *Dissipador de gliders*. A la dècada de 1970, va començar de practicant a la Universitat d'Stanford per tres anys, on impartia classes i ajudava a Donald Knuth a escriure el volum II de *The Art of Computer Programming*.

Finalment, pel que fa al tema que ens escau, destaquem la seva tasca en el terreny de la representació de fraccions contínues de nombres reals, i per concebre l'algorisme capaç de trobar formes tancades d'identitats hipergeomètriques que rep el seu nom, recollit a l'article [13], i sobre el qual s'ha fet el desenvolupament del capítol 4.

Bibliografia

[1] G. F. Gauss, "Disquisitiones generales circa seriem infinitam," *C.F. Gauss Werke*, no. 3, pp. 123–162, 1812. 1

[2] G. Szego, *Orthogonal Polynomials.* Colloquium Publications, 1939, vol. XXIII. 1

[3] H. S. Wilf and D. Zeliberg, "A fast algorithm for proving terminating hypergeometric identities," *Discrete Math*, no. 80, pp. 207–211, 1990. 1

[4] ——, "The method of creative telescoping," *J. Symbolic Computation*, no. 11, pp. 195–204, 1991. 1

[5] ——, "Rational function certify combinatorial identities," *Bull. (N.S.) of the Amer*, no. 3, pp. 147–158, 1990. 1

[6] M. Petkovsk, H. S. Wilf, and D. Zeilberger, *A=B.* CRC Press, 1996. [Online]. Available: https://www.math.upenn.edu/~wilf/AeqB.html 1

[7] G. E. Andrews, R. Askey, and R. Roy, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications 71.* Cambridge University Press, 1999. 2.2

[8] J. Bonar, *The Gamma Function.* Treasure trove of mathematics, 2017. [Online]. Available: http://vixra.org/pdf/1702.0305v1.pdf 2.2, 2.1, 2.2

[9] W. N. Bailey, *Generalized hypergeometric series No.32.* Cambridge University Press, 1935. 2.3

[10] M. C. Fasenmyer, *Some Generalized Hypergeometric Polynomials.* Universitat de Michigan, 1945. A.1

[11] ——, "Some generalized hypergeometric polynomials," *Bull. Amer. Math*, no. 53, pp. 806–812, 1947. A.1

[12] ——, "A note on pure recurrence relations," *Amer. Math. Monthly*, no. 56, pp. 14–17, 1949. A.1

[13] R. W. Gosper, "Decision procedure for indefinite hypergeometric summation," *Natl. Acad. Sci.*, no. 75, pp. 40–42, 1978. [Online]. Available: https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC411178/pdf/pnas00013-0045.pdf A.2