Universitat de les Illes Balears

escola politècnica superior

Treball Final de Grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

La Teoria de Punt Fix i les seves Aplicacions a la Teoria d'Equilibri

MARINA MORENO PONS

Tutor
Óscar Valero Sierra

Escola Politècnica Superior
Universitat de les Illes Balears
Palma, 9 de gener de 2018

Eva María Matute deia que la vida ens l'hem de fabricar un mateix, que ens hem d'inventar la vida perquè acaba sent veritat. Jo no hi podria estar més d'acord i per jo és un somni fet realitat haver-me construït i arribat fins aquí. Per aquest motiu aquest treball va dedicat a totes les persones que varen creure en mi, que no tenien cap dubte que seria capaç. Ho agraesc sobretot a la meva família, amics, companys i professors sense ells, el camí no hauria estat tan fàcil, agradable i confortable.

SUMARI

Resum

L'objectiu principal d'aquest treball és introduir al lector en el món de la teoria de punt fix. En les següents pàgines es presenten els pilars de la teoria de punt fix i com aquesta permet resoldre diferents tipus de problemes relacionats amb les àrees mencionades.

En concret, en el Capítol 1, introduirem els diferents tipus bàsics de funcions contractives que es troben a la literatura i n'exposarem alguns exemples. De tots ells, ens restringirem a estudiar-ne dos en el capítols posteriors: les funcions k-contractives i les contractives. En el Capítol 2 introduirem, demostrarem i explicarem la importància del Teorema de Punt Fix de Banach. Per altra part, en el Capítol 3 exposarem el model econòmic lineal de l'oferta i demanda del mercat i l'algoritme del PageRank de Google. A més, mostrarem com el Teorema de Punt Fix de Banach permet resoldre el model i l'algoritme de Google mencionats. En tercer lloc, en el Capítol 4 donarem diferents teoremes que es poden entendre com generalitzacions del Teorema de Banach. Per tant, s'obtendrà la existència i unicitat de punt fix en alguns casos en què el Teorema de Banach no pot ser aplicat. Finalment, s'ha afegit un capítol d'annexos on trobarem detallats alguns resultats auxiliars i algoritmes utilitzats al llarg del treball amb la finalitat d'aconseguir una lectura més fluida i àgil del cos del treball.

CAPÍTOL 1

INTRODUCCIÓ

1.1. Introducció

"*Les matemàtiques són la creació més bella i més poderosa de l'esperit humà* ". Amb les paraules del matemàtic que ha donat peu aquest treball volíem començar aquestes primeres pàgines. En efecte, fou Stefan Banach qui les recità. Aquest matemàtic d'origen polonès fou considerat un dels matemàtics més influents del segle XX. Es va guanyar la seva reputació per ser uns dels creadors de l'anàlisi funcional modern i com a prova tenim una llarga llista de teoremes, elements i paradoxes que porten el seu nom, com ja sigui l'espai de Banach, el teorema del punt fix de Banach, la paradoxa de Banach−Tarski i un llarg etcètera.

Per què tanta importància de qui fou i què va fer aquest home? La resposta es troba en les pàgines d'aquest treball, en el sentit que explicarem uns dels seus resultants més importants, el demostrarem i veurem la importància i la potència que té a l'hora de resoldre diferents problemes.

En definitiva, un dels nostres objectius amb aquest treball és donar les eines necessàries per poder resoldre, a més de garantir l'existència i unicitat, aquests tipus d'equacions:

$$x = T(x) \; x \in M \tag{1.1}$$

Les funcions T i l'espai de definició M que considerarem no podran ser uns qualssevol. Usualment, ens haurem de situar sobre espais mètrics **complets**, és a dir, aquells espais on podem definir una mètrica i qualsevol successió de **Cauchy** hi és convergent. A més les funcions que emprarem seran k-**contractives**.

Una pregunta que ens pot passar pel cap si mai hem intentat resoldre un problema d'aquest tipus és: per què necessitam la hipòtesi de què les successions de Cauchy siguin convergents? Doncs, perquè una de les nostres vies per arribar a la solució desitjada serà mitjançant la construcció d'una successió de Cauchy per la qual voldrem que el seu límit sigui el punt fix de la funció amb la qual estam treballant.

El nostre objectiu serà resoldre el problema (1.1) mitjançant un mètode iteratiu, en el qual amb cada pas del mètode ens estarem acostant cada pic més a la solució. Per aquest fi, utilitzarem el Teorema de Punt Fix de Banach. La gràcia i la potència d'aquest teorema, com veurem, és que podem arribar a la solució donat qualsevol terme inicial pel qual comencem a construir la successió. És a dir, la solució del problema (1.1) vendrà donada per qualsevol punt $x_0 \in M$, que anirem iterant mitjançant l'operador, de la següent forma:

$$x_{n+1} = T(x_n) \quad n = 0, 1, 2, 3... \tag{1.2}$$

fins trobar un punt suficientment proper a la solució desitjada.

Tal i com hem indicat, el Teorema de Punt Fix de Banach en basa en l'ús de funcions contractives. A continuació, introduirem les nocions de contractivitat bàsiques que poden ser trobades en la literatura. En particular, dues d'elles, la k-contractivitat i la contractivitat seran d'interés pel nostre treball.

1.1.1. Operadors contractius

Sobre un espai mètric (X, d) podem trobar diferents tipus d'operadors $T : M \subset X \to X$. Anem a exposar-ne alguns que es consideren bàsics en la teoria del punt fix i la relació entre ells.

En primer lloc, trobam l'operador **k-contractiu**, els quals es defineixen com aquells operadors T que compleixen:

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y) \quad \forall x, y \in M$$

amb $0 \leq k < 1$.

En segon lloc, trobam l'operador **no expansiu** que és aquell operador que compleix la desigualtat anterior amb $k = 1$

En tercer lloc, trobam l'operador **Lipschitz continu**, que és aquell operador que compleix la desigualtat anterior amb $0 \leq k < \infty$

En quart lloc, trobam l'operador **contractiu**, que compleix que:

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y) \;\forall x, y \in M, \text{ amb } x \neq y$$

En conseqüència tenim la següent relació entre els diferents operadors:

k-contractiu $\Rightarrow$ contractiu $\Rightarrow$ no expansiu $\Rightarrow$ Lipschitz continu

Vegem-ho amb un poc més de detall. Vegem en primer lloc que k**-contractiu** $\Rightarrow$ **contractiu**:

En efecte, tenim un operador T que compleix: $d(T(x),T(y)) \leq kd(x,y)\ \forall x,y$ del seu domini, per un $k \in [0,1[$. Si $k \in]0,1[$ es té que $kd(x,y) < d(x,y)\ \forall x \neq y$ i en conseqüència $d(T(x),T(y)) \leq kd(x,y) < d(x,y)\ \forall x \neq y$, és a dir, que l'operador T també és contractiu.

Per altra banda si $k = 0$ es té que $d(T(x),T(y)) \leq 0 \Rightarrow d(T(x),T(y)) = 0 < d(x,y) \forall x,y \in M$ amb $x \neq y$ del seu domini, per tant també es té que l'operador és contractiu.

En segon lloc, vegem que **contractiu** $\Rightarrow$ **no expansiu**:

Si, tenim un operador T que compleix: $d(T(x),T(y)) < d(x,y)\ \forall x \neq y$. En particular, també compleix que, si $k = 1$: $d(T(x),T(y)) < d(x,y) \leq d(x,y) \leq kd(x,y)\ \forall x \neq y$. Per altra banda, si $x = y$ la desigualtat s'obté trivialment:

$$0 = d(T(x),T(x)) \leq d(x,x) = 0$$

Finalment, és clar que **no expansiu** $\Rightarrow$ **Lipschitz continu**:

En efecte, tenim un operador T que compleix: $d(T(x),T(y)) \leq d(x,y)\ \forall x,y$. En particular la funció també serà Lipschitz contínua prenent $k = 1$.

Vegem-ne un exemple de cada un d'ells. Suposem que ens trobam a l'espai mètric $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

En primer lloc, considerem el següent operador $T(x) = \frac{x}{\pi}$. Aquest és un exemple d'operador k-*contractiu* ja que com és una funció contínua i derivable en $\mathbb{R}$ podem aplicar el Teorema del Valor Mitjà (Teorema 17 a l'Annex A.1.1) i obtenim que:

$$|T(x) - T(y)| = |T'(\xi)(x-y)| = \left|\frac{1}{\pi}\right| |x-y| = \frac{1}{\pi}|x-y| \quad \forall \xi \in]x,y[,\ \forall x,y \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

on $k = \frac{1}{\pi} \in [0,1)$.

En segon lloc, $T(x) = \sqrt{x^2+1}$ és un exemple d'operador *contractiu* ja que com és una funció contínua i derivable en $\mathbb{R}$ podem aplicar el Teorema del Valor Mitjà i obtenim que:

$$|T(x)-T(y)| = |T'(\xi)(x-y)| = \left|\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}\right| |x-y| < |x-y| \quad \forall \xi \in]x,y[,\ \forall x,y \in \mathbb{R},\text{ amb } x \neq y \tag{1.4}$$

ja que $0 \leq \left|\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}\right| < 1\ \forall \xi \in]x,y[,\ \forall x,y \in \mathbb{R}$.

En tercer lloc, un operador *no expansiu* podria ser el següent: $T(x) = sin(x)$. T és continua i derivable en $\mathbb{R}$, llavors aplicant el Teorema del Valor Mitjà obtenim que:

$$|T(x) - T(y)| = |T'(\xi)(x-y)| = |cos(\xi)||x-y| \leq k|x-y|, \quad \forall \xi \in]x,y[, \ \forall x,y \in \mathbb{R}$$

on $k = 1$ és el valor màxim de $|cos(\xi)|$ per a $\xi \in]x,y[, \ \forall x,y \in \mathbb{R}$

En quart lloc, un operador *Lipchitz continu* podria ser el següent: $T(x) = x - cos(x)$. T és continua i derivable en $\mathbb{R}$, llavors aplicant el Teorema del Valor Mitjà es té que:

$$|T(x) - T(y)| = |T'(\xi)(x-y)| = |1 + sin(\xi)||x-y| \leq k|x-y|, \quad \forall \xi \in]x,y[, \ \forall x,y \in \mathbb{R}$$

on $k = 2$ és el valor màxim de $|1 + sin(\xi)|$ per a $\xi \in]x,y[, \ \forall x,y \in \mathbb{R}$

Els operadors k-contractius i contractius són els que resulten involucrats en la majoria d'aplicacions de la teoria de Punt Fix. La utilitat dels operadors esmentats serà il·lustrada en el Capítol 3. El Teorema de Banach es centra (com es veurà en el Captítol 2) en la utilització de funcions k-contractives, en aquest cas, en el capítol esmentat s'estudiarà la importància d'aquest resultat i les seves hipòtesis. No obstant, existeixen ocasions en què les funcions de les que es requereix un anàlisi de la existència i unicitat de solucions no són contractives en cap dels sentits anteriorment mencionats. En aquesta direcció, en el Capítol 4 mostrarem com l'ús de funcions auxiliars permetran relaxar la hipòtesi de k-contracció mitjançant generalitzacions del Teorema de Banach.

Per altra banda, també donarem un resultat per funcions contractives. L'estudi de punt fix pels operadors contractius en els proporcionarà el denominat **Teorema de Nemytskii-Edelstein** tal i com mostrarem en el Capítol 4. En aquest cas, la relaxació de la hipòtesi de la contractivitat ens durà a enfortir les hipòtesis sobre l'espai on està definida. Per aquest motiu, haurem de demanar la **compacitat** de l'espai, és a dir, haurem d'exigir la hipòtesi que qualsevol successió contengui una successió convergent.

Per escriure aquest capítol introductori ens hem basat en el primer capítol de la referència [1].

CAPÍTOL 2

Teorema de Punt Fix de Banach

2.1. Teorema de Punt Fix de Banach

Un dels teoremes més importants de la teoria de punt fix és el Teorema de Punt Fix de Banach. A continuació abordarem el resultat:

Teorema 1 (Teorema del Punt Fix de Banach)**.** *Sigui (X,d) un espai mètric complet, si suposam que:*

i) Tenim un operador $T: M \subset X \to M$

ii) M és un conjunt tancat no buit en un espai mètric complet (X,d)

iii) T és un operador $k-$contractiu, és a dir:

$$d(T(x),T(y)) \leq kd(x,y) \quad \forall x,y \in M \text{ amb } k \in [0,1[\text{ fixada} \tag{2.1}$$

Llavors, tenim el següent:

a) L'equació donada per (1.1) té solució i és única, és a dir, T té un únic punt fix a M.

b) La successió $\{x_n\}$ d'iteracions donada per (1.2) convergeix al punt fix x per un punt $x_0 \in M$ inicial arbitrari.

c) Per a cada $n = 0,1,2,3...$ es té la següent estimació de l'error a priori:

$$d(x,x_n) \leq k^n(1-k)^{-1}d(x_0,x_1) \tag{2.2}$$

i també una estimació de l'error a posteriori:

$$d(x,x_{n+1}) \leq k^n(1-k)^{-1}d(x_n,x_{n+1}) \tag{2.3}$$

d) Per a cada $n = 0,1,2,3...$ tenim el següent radi de convergència:

$$d(x_{n+1},x) \leq kd(x_n,x)$$

Demostració.

a) *L'equació donada per (1.1) té solució i és única, és a dir, T té un únic punt fix a M.*

Com ens trobam en un espai mètric complet (X,d), sabem que tota successió de Cauchy convergeix, per tant, el que tractarem de fer serà veure que els termes de la successió $\{x_n\}$ que provenen d'iterar l'operador T $(x_{n+1} = T(x_n))$ formen una successió de Cauchy. En conseqüència, vegem que:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall m,n > n_0 : \quad d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

La successió que construïm la començam per un punt $x_0 \in M$. Si $T(x_0) = x_0$, ja hem trobat el punt fix, en cas contrari, anam construint a partir de (1.2) la següent successió:

$$\{x_0, x_1 = T(x_0), x_2 = T(x_1), \ldots, x_n = T(x_{n-1}), \ldots\}$$

Com l'operador T és k-contractiu sabem que compleix la condició (2.1) del teorema i a més els termes de la successió es construeixen a partir de (1.2), en conseqüència es té:

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &\overset{(1.2)}{=} d(T(x_n), T(x_{n-1})) \\ &\overset{(2.1)}{\leq} k d(x_n, x_{n-1}) \\ &\overset{(2.1)}{\leq} k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\overset{(2.1)}{\leq} \vdots \\ &\overset{(2.1)}{\leq} k^n d(x_{n-n+1}, x_{n-n}) \\ &= k^n d(x_1, x_0) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Podem suposar sense perdre generalitat que $m - n > 0$, llavors aplicant en primer lloc la desigualtat triangular i en segon lloc aplicant la cota anterior (2.4) obtenim:

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq d(x_m, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq \qquad \vdots \\ &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\overset{(2.4)}{\leq} k^{m-1} d(x_1, x_0) + k^{m-2} d(x_1, x_0) + \ldots + k^n d(x_1, x_0) \\ &= (k^{m-1} + k^{m-2} + \ldots + k^n) d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Notem que els termes $k^{m-1} + k^{m-2} + \ldots + k^n$ són suma d'una progressió geomètrica i en conseqüència podem calcular el valor de la seva suma:

$$\sum_{i=n}^{m-1} k^i \overset{1}{=} k^n \frac{k^{m-1-n+1} - 1}{k-1} = k^n \frac{k^{m-n} - 1}{k-1} = k^n \frac{1 - k^{m-n}}{1-k} = \frac{k^n - k^m}{1-k}$$

En conseqüència:

[1] Observem que la suma parcial d'una progressió geomètrica la podem trobar detallada en l'Annex A.1.1 a A.8

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq (k^{m-1} + k^{m-2} + \ldots + k^n) d(x_1, x_0) \\ &= \frac{k^n - k^m}{1-k} d(x_1, x_0) \\ &\overset{k^m \geq 0}{\leq} \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

Com el valor $k \in [0,1[$ és un valor fixat, la successió $\{k^n\}_{n=1}^{\infty}$ convergeix cap a 0, és a dir:

$$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists \tilde{n} > 0 : \forall n > \tilde{n}, |k^n - 0| = k^n < \varepsilon_1 \tag{2.5}$$

Notem que la distància entre el punt x_0 i x_1 està fixada, no depèn de n, llavors podem considerar $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon(1-k)}{d(x_0, x_1)}$, en conseqüència tenim:

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1) \overset{(2.5)}{<} \frac{1}{1-k} \varepsilon_1 d(x_0, x_1) = \frac{1}{1-k} \frac{(1-k)\varepsilon}{d(x_0, x_1)} d(x_0, x_1) = \varepsilon$$

Per tant, acabam de veure que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ és successió de Cauchy. Com ens trobam en un espai mètric complet la successió de Cauchy és convergent i per tant: $\exists x \in X : \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$.

Com sabem que T és un operador k-contractiu, en particular, és una funció contínua. Vegem-ho. Sabem que T compleix la hipòtesi (2.1), és a dir:

$$d(T(x), T(y)) \leq k d(x, y) \quad \forall x, y \in M \text{ i } k \in [0,1[\text{ fixada}$$

Vegem que aquesta condició és suficient per provar la continuïtat de T, és a dir, que:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que si } d(x, y) < \delta \Rightarrow d(T(x), T(y)) < \varepsilon$$

Siguin $x, y \in M$, aplicant la contractivitat de l'operador i prenent $\delta = \dfrac{\varepsilon}{k}$ (si $k \neq 0$), obtenim el que volíem veure:

$$d(T(x), T(y)) \overset{(2.1)}{\leq} k d(x, y) < k\delta = \varepsilon$$

En el cas que $k = 0$ implicaria que $d(T(x), T(y)) = 0$ i en conseqüència també seria contínua, ja que:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que si } d(x, y) < \delta \Rightarrow d(T(x), T(y)) = 0 < \varepsilon$$

Acabam de demostrar que T és una funció contínua i per tant sabem que la successió d'imatges convergeix a la imatge del límit de la successió, és a dir, $\{T(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$

convergeix a $T(x)$.

Ara bé, per la forma en la qual hem construït la successió $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tenim que:

$$\{T(x_n)\}_{n=1}^{\infty} = \{x_n\}_{n=2}^{\infty}$$

La primera successió tendeix a $T(x)$ com hem acabat de veure i la segona tendeix a x, com hem demostrar anteriorment, en conseqüència ha de passar que $T(x) = x$, és a dir, que l'operador té un punt fix. A continuació vegem que aquest punt pertany a M.

Sabem que $T(M) \subseteq M$ i com hem pres $x_0 \in M$ llavors es té que $x_n \in M$ $\forall n$. En conseqüència, com tenim una successió on tots els termes pertanyen a un tancat, sabem que el límit d'aquesta successió també pertany a M. En definitiva, queda demostrada la existència de punt fix $x \in M$. Vegem a continuació que també hi ha unicitat:

Suposem que no hi ha unicitat, és a dir, que $\exists x, y$ tals que $x = T(x)$ i $y = T(y)$, llavors aplicant la igualtat (1.1) i la inequació (2.1), es té el següent:

$$d(x,y) \overset{(1.1)}{=} d(T(x),T(y)) \overset{(2.1)}{\leq} kd(x,y)$$

Com que $k \in [0,1[$, si $k = 0$ es té que $d(x,y) \leq 0$ i com d és una mètrica, forçosament $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$.

Per altra banda, si $k \in]0,1[$, l'única manera que es compleixi $d(x,y) \leq kd(x,y)$ és amb $d(x,y) = 0$, així $x = y$ perquè en un altre cas $k \geq 1$.

b) *La successió $\{x_n\}$ convergeix al punt fix x per cada punt $x_0 \in M$ inicial arbitrari.*

Si suposam que començam en x_0 obtenim el punt fix x però començant per un altre punt $\tilde{x}_0 \neq x_0$ obtenim el punt fix $\tilde{x}$, llavors per la unicitat de punt fix donada en l'apartat a) necessàriament ha de passar que $x = \tilde{x}$ i per tant el punt fix és independent del punt x_0 amb el qual començam construint la successió.

c) *Per a cada $n = 0,1,2,3...$ es té la següent estimació de l'error a priori:*

$$d(x,x_n) \leq k^n(1-k)^{-1}d(x_0,x_1)$$

i també una estimació de l'error a posteriori:

$$d(x,x_{n+1}) \leq k^n(1-k)^{-1}d(x_n,x_{n+1})$$

Anem a trobar una estimació de l'error. En primer lloc, a partir de la inequació (2.1) de la hipòtesi i la igualtat (1.2) hem trobat la desigualtat (2.4):

$$d(x_{n+1},x_n) \leq k^n d(x_1,x_0)$$

Aplicant la desigualtat triangular repetidament i la desigualtat (2.4), ens serà fàcil trobar una cota per la distància $d(x_{n+m}, x_n)$:

$$\begin{aligned} d(x_{n+m}, x_n) &\leq d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + d(x_{n+m-1}, x_{n+m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\overset{(2.4)}{\leq} (k^{n+m-1} + k^{n+m-2} + \ldots + k^n) d(x_1, x_0) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Fixem-nos que $k^n + k^{n+1} + \ldots + k^{n+m-2} + k^{n+m-1}$ és una suma d'una progressió geomètrica de raó k. Aquesta suma és igual a:

$$\sum_{i=n}^{n+m-1} k^i \overset{2}{=} k^n \left(\frac{k^{n+m-1-n+1} - 1}{k-1} \right) = k^n \frac{k^m - 1}{k-1} = k^n \frac{1-k^m}{1-k} \underset{k^m \geq 0}{\leq} k^n \frac{1}{1-k} = k^n (1-k)^{-1}$$

Llavors tenim que:

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq k^n (1-k)^{-1} d(x_1, x_0)$$

Finalment si feim $m \to \infty$, obtenim l'error a priori:

$$d(x, x_n) \leq k^n (1-k)^{-1} d(x_1, x_0)$$

En segon lloc, trobem una cota de l'error donats dos termes consecutius de la successió. Per trobar-la utilitzarem la desigualtat triangular, la igualtat (1.2) i la desigualtat (2.1) de la hipòtesi:

$$\begin{aligned} d(x_{n+m+1}, x_{n+1}) &\leq d(x_{n+m+1}, x_{n+m}) + \cdots + d(x_{n+3}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_{n+1}) \\ &\overset{(1.2)}{=} d(T(x_{n+m}), T(x_{n+m-1})) + \cdots + d(T(x_{n+2}), T(x_{n+1})) + d(T(x_{n+1}), T(x_n)) \\ &\overset{(2.1)}{\leq} kd(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + \cdots + kd(x_{n+2}, x_{n+1}) + kd(x_{n+1}, x_n) \\ &\vdots \\ &\overset{(2.1)}{\leq} (k + k^2 + \ldots + k^m) d(x_{n+1}, x_n) \end{aligned}$$

Al igual que en el cas anterior, tenim que $k + k^2 + \ldots + k^m$ és una suma d'una progressió geomètrica, per tant podem calcular la seva suma:

$$\sum_{i=1}^{m} k^i \overset{3}{=} k \frac{k^m - 1}{k-1} = k \frac{k^m - 1}{k-1} = \underset{k^m \geq 0}{\leq} k \frac{1}{1-k}$$

En conseqüència:

$$d(x_{n+m+1}, x_{n+1}) \leq k \frac{1}{1-k} d(x_{n+1}, x_n)$$

Si feim créixer $m \to \infty$ tenim el que volíem veure:

$$d(x, x_{n+1}) \leq k^n (1-k)^{-1} d(x_{n+1}, x_n)$$

[2] Observem que la suma parcial d'una progressió geomètrica la podem trobar detallada en l'Annex A.1.1 a A.8

[3] Observem que la suma parcial d'una progressió geomètrica la podem trobar detallada en l'Annex A.1.1 a A.7

d) *Per a cada* $n = 0, 1, 2, 3...$ *tenim el següent radi de convergència:*

$$d(x_{n+1}, x) \leq k d(x_n, x)$$

Anem a trobar el radi de convergència:

$$d(x, x_{n+1}) \stackrel{(1.1)}{=} d(T(x), T(x_n)) \stackrel{(2.1)}{\leq} k d(x, x_n) \quad \forall n$$

□

Notem que aquesta versió del Teorema de Punt Fix de Banach té com hipòtesi que l'operador està definit dins un tancat M i gràcies a n'aquest fet hem pogut demostrar que el punt fix de l'operador pertany a n'aquest tancat. En el cas que l'operador no hagués estat definit en un tancat s'hagués pogut provar l'existència de punt fix, $x \in X$ però no es podria haver demostrar que $x \in M$.

La importància d'aquest teorema rau en que ens assegura l'existència i unicitat del tipus de solucions del tipus (1.1), sigui quina sigui l'estimació inicial de la mateixa. No obstant, a l'hora de trobar l'esmentada solució també ens és útil sabre una fita del nombre d'iteracions que haurem de realitzar per arribar a una bona aproximació, i un cop hem fixat el nombre d'iteracions també ens resulta una informació valuosa trobar una fita que ens digui com d'enfora ens hem quedat de la solució. Aquesta informació ens la proporciona la estimació de l'error a priori i a posteriori, respectivament. A més, el radi de convergència ens està dient que tenim convergència lineal cap a la solució, ja que a cada pas de la iteració anam reduint la distància al punt fix, com a mínim el valor de la constant de contractivitat k per la distància de la iteració anterior al punt fix.

2.1.1. Importància de les hipòtesis del Teorema de Punt Fix de Banach

En l'enunciat d'un teorema és fonamental no tenir hipòtesis redundants o sobrants, per aquest motiu, en aquest apartat el que farem serà donar diferents exemples on fallaran en alguna de les hipòtesis del Teorema del Punt Fix de Banach i comprovarem que no obtendrem cap punt fix:

1. Suposem que el domini de l'operador *no és un tancat*. Considerem l'operador introduït en la Secció 1.1.1 del Capítol 1: $T :]0,1[\rightarrow]0,1[$ tal que $T(x) = \frac{x}{\pi}$ en l'espai mètric complet $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Aquest és un operador $\frac{1}{\pi}$−contractiu, com hem vist anteriorment, però com el seu domini de definició no és un tancat, el límit de la successió d'iterar un element $x_0 \in]0,1[$ no té perquè caure dins el mateix conjunt, com és el cas.

   A continuació mostrarem una imatge que compara la recta de punts fixos amb l'operador:

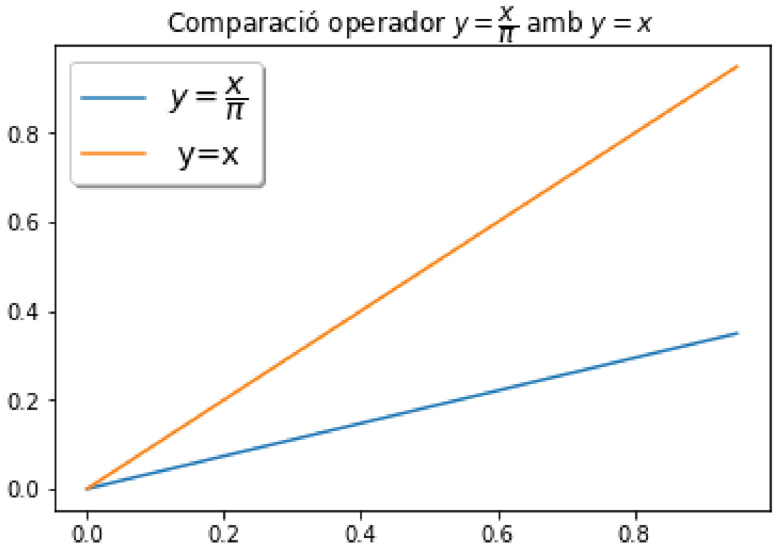


Figura 2.1: Primer exemple d'operador sense punt fix

Com podem observar, l'operador tendeix cap el 0, però com aquest no pertany al domini de l'operador, no té punt fix.

2. Suposem que l'operador no és k-contractiu. Considerem l'espai mètric complet $([1,\infty),|.|)$[4] Recuperem l'operador introduït en la secció 1.1.1 del Capítol 1: $T(x):[1,\infty) \to [1,\infty),\ T(x) = \sqrt{x^2+1}$. Com l'operador és contractiu es té que: $0 \leq d(T(x),T(y)) < d(x,y)$. Demostrarem molt fàcilment perquè no té punt fix. Si en tingués, $\exists x \in [1,\infty[$ tal que:

$$\sqrt{x^2+1} = x$$
$$\Updownarrow$$
$$|x^2+1| = x^2+1 = x^2$$
$$\Updownarrow$$
$$1 = 0$$

Hem arribat a una contradicció de suposar que l'operador té punt fix. Observem que l'operador en realitat és contractiu.

3. Suposem que el domini i la imatge de l'operador no coincideixen, com és el cas del següent operador $\frac{1}{2}$-contractiu: $T:[0,1] \to [2,2.5]$, amb $T(x) = \dfrac{x}{2}+2$, observem que $[0,1]$ i $[2,2.5]$ són intervals tancats de $\mathbb{R}$.

[4]Sabem que $([1,\infty),|.|)$ és espai mètric complet per ser un subespai tancat de $(\mathbb{R},|.|)$, que és complet.

Demostrarem perquè no té punt fix. Si en tingués, $\exists x \in [0,1]$ tal que:

$$\frac{x}{2} + 2 = x$$
$$\Updownarrow$$
$$x + 4 = 2x$$
$$\Updownarrow$$
$$x = 4 \notin [0,1]$$

Com la solució anterior no pertany al domini de l'operador T, $x = 4$ no és punt fix de l'operador.

La Figura 2.2 il·lustra gràficament el fet que l'operador T que hem considerat no té punt fix en el domini.

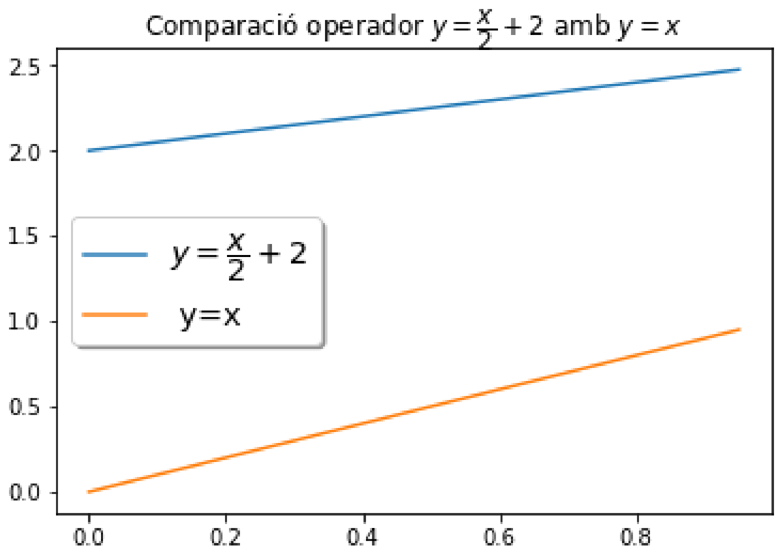


Figura 2.2: Tercer exemple d'operador sense punt fix

4. Finalment, no podem tenir un operador de la següent forma: $T : \emptyset \to \emptyset$ ja que el punt punt fix ha de pertànyer al domini de definició de l'operador.

2.1.2. Importància del Teorema de Banach: resolució d'equacions no lineals

Les hipòtesis del Teorema de Punt Fix de Banach venen donades en termes molt generals, per aquest motiu, podem considerar com a operadors k-contractius funcions de variable real que fins i tot no són lineals, com demostrarem en l'exemple 2.1.1. Per tant, la importància del Teorema de Punt Fix de Banach ve donada per la possibilitat de resoldre equacions no lineals (obtenir punt fix d'equacions no lineals) amb la mateixa tècnica amb la que resoldríem equacions lineals.

Tal i com hem indicat en el Capítol 1, per trobar un punt fix d'una funció T, es tractaria de resoldre la següent equació:

$$x = T(x), \quad x \in [a,b] \tag{2.7}$$

a partir del següent mètode iteratiu. Començant en un punt inicial $x_0 \in [a,b]$:

$$x_{n+1} = T(x_n), \quad n: 1,2,3,\ldots \tag{2.8}$$

Com a conseqüència del Teorema de Punt Fix de Banach (Teorema 1) tenim el següent resultat:

Corol·lari 2. *Sigui $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq b$. Suposem que:*

i) $T : [a,b] \to [a,b]$ *és una funció de variable real.*

ii) $|T(x) - T(y)| \leq k|x-y|\ \forall x, y \in [a,b]$ *i per* $k \in [0,1[$ *fixat. Llavors tenim el següent:*

a) *L'equació (2.7) té una única solució* x*. A més,* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *on* $x_n = T^n(x_0)$ *per a qualsevol* $x_0 \in [a,b]$.

b) *Coneixem una cota de l'error abans de construir la successió d'iterats:*

$$|x_n - x| \leq k^n(1-k)^{-1}|x_1 - x_0|, \ n = 0,1,2,\ldots \tag{2.9}$$

c) *Coneixem una cota de l'error donat dos elements consecutius de la successió d'iterats:*

$$|x_{n+1} - x| \leq k(1-k)^{-1}|x_{n+1} - x_n|, \ n = 0,1,2,\ldots \tag{2.10}$$

d) *Tenim convergència lineal cap a la solució* x

$$|x_{n+1} - x| \leq k|x_n - x|, \ n = 0,1,2,\ldots \tag{2.11}$$

Demostració. Prenent $X = \mathbb{R}$, $M = [a,b]$ i $d(x,y) = |x-y|$ es compleixen totes les hipòtesis del Teorema del Punt Fix de Banach, aleshores queda demostrat el corol·lari anterior ja que tenim que M és un conjunt tancat no buit en l'espai mètric complet $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ i a més estam suposant que tenim un operador k-contractiu $T : [a,b] \to [a,b]$. □

El següent exemple il·lustra la utilitat del Teorema de Punt Fix de Banach, a través del Corol·lorari 2 per resoldre ecuacions no lineals.

Exemple 2.1.1.

Per comprovar la potència d'aquest teorema, l'utilitzarem per trobar un punt fix de la següent funció $T(x) = \cos(\cos(x))$[5] o equivalentment, per resoldre la següent equació no lineal $\cos(\cos(x)) - x = 0$. Observem que:

$$\cos(\cos(x)) = x \Leftrightarrow \cos(\cos(x)) - x = 0 \tag{2.12}$$

En primer lloc, hem de comprovar que aquesta funció compleix les hipòtesis del teorema, per poder assegurar l'existència i unicitat del punt fix.

[5] La funció de l'exemple està basada en la pàgina 35 de la referència [2]

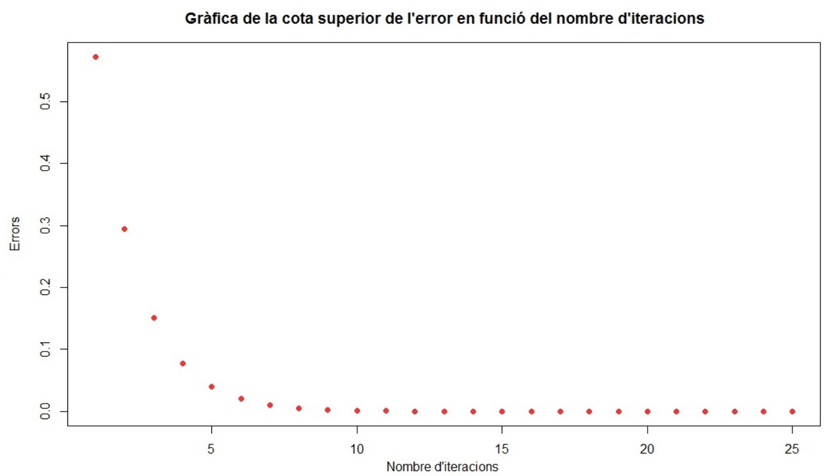
La primera hipòtesi que hem de verificar del teorema és que la imatge de l'operador coincideixi amb el domini d'aquest. Com la funció que estam considerant és una composició d'una funció cosinus, la imatge d'aquesta es trobarà en l'interval $[-1,1]$, en conseqüència, per a què puguem demostrar que l'operador T té punt fix, l'hauríem de definir de la següent forma: $T(x) = \cos(\cos(x)) : [-1,1] \to [-1,1]$. Notem que el conjunt de definició és un tancat de l'espai mètric complet $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Ens falta veure que l'operador és k-contractiu. Com la funció T és contínua i derivable en tot $\mathbb{R}$ podem aplicar el Teorema del Valor Mitjà:

$$\begin{aligned} d(T(x),T(y)) &= |T(x)-T(y)| = |T'(\xi)(x-y)| \\ &= |\sin(\cos(\xi))\sin(\xi)| \\ &= |\sin(\cos(\xi))||\sin(\xi)| \\ &\le |\sin(\cos(\xi))| \\ &\le |\sin(\cos(0))||x-y| \\ &= kd(x,y), \text{ on } \xi \in (-1,1) \text{ i } k = |\sin(\cos(0))| = 0.841471 \end{aligned}$$

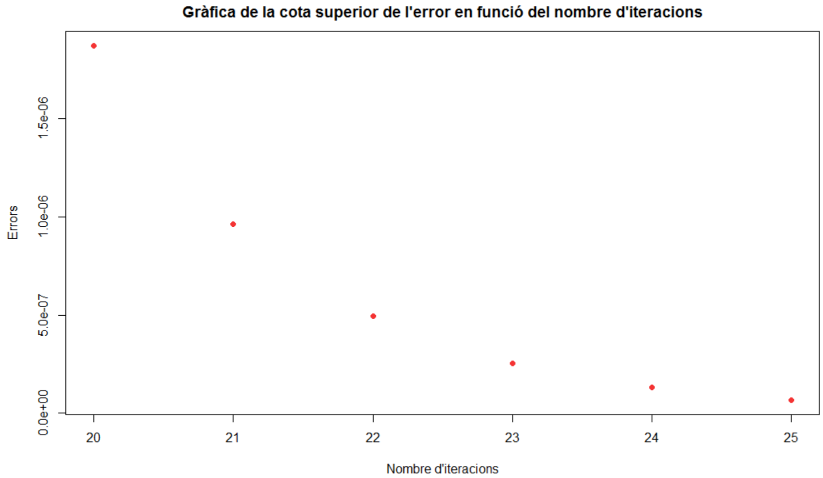
Així, T és una funció 0.841471-contractiva.

Llavors es compleixen totes les hipòtesis del Teorema del punt Fix de Banach i en conseqüència la funció T té un únic punt fix a $[-1,1]$.

Abans de calcular el punt fix de la funció el que podem calcular és una estimació de quin serà el nombre d'iteracions que haurem de realitzar per poder obtenir una solució amb un error acceptable. Per poder calcular aquesta estimació recorrerem a l'estimació a priori que ens dóna el Teorema 2. En el següent gràfic podem veure com evoluciona l'error cada pic que construïm un nou terme de la successió:



Com podem observar, a partir de la desena iteració l'error comença a ser pràcticament 0. Posem que volem aconseguir una exactitud de 10^{-7}, si ampliam la gràfica, veim que amb unes 22 o 23 iteracions ja obtindríem el resultat esperat:



Vegem que amb un nombre menor o igual d'iteracions obtenim un error de l'ordre de 10^{-7}. Calculem a partir del paquet de software R [6] els termes de la successió donada per la funció que ens permetran arribar al punt fix de la funció, és a dir, a resoldre (2.12):

Iteració	$\mathbf{x_n}$
1	0.0000000
2	0.5403023
3	0.6542898
4	0.7013688
5	0.7221024
6	0.7314040
7	0.7356047
8	0.7375069
9	0.7383692
10	0.7387603
11	0.7389378
12	0.7390183
13	0.7390548
14	0.7390714
15	0.7390789
16	0.7390823
17	0.7390838
18	0.7390845
19	0.7390849
20	0.7390850
21	0.7390851
22	0.7390851

Taula 2.1: Termes de la successió de l'operador $T(x) = \cos(\cos(x))$

[6] Podem trobar a l'Annex A.2.1 el codi utilitzat per dur a terme els següents càlculs.

Com podem apreciar, a partir de la iteració 21, amb la precisió de 7 decimals que ens proporciona R, obtenim un punt fix $x = 0.7390851$ per l'operador anterior. Com podem observar hem obtingut la solució de l'equació plantejada amb la exactitud esperada amb menys de 22 iteracions.

Efectivament, si pintam la funció anterior podem observar que el punt fix es troba sobre el valor anterior:

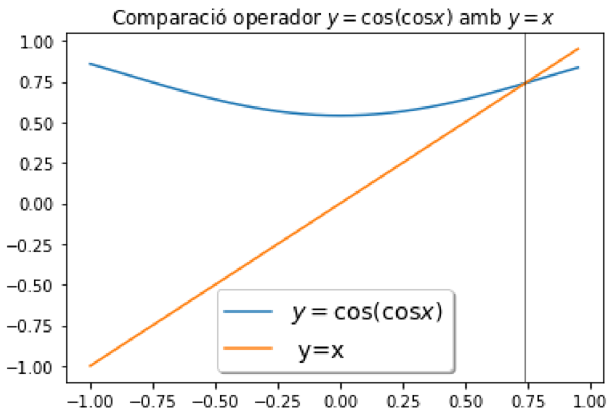


Figura 2.3: Exemple d'operador amb punt fix

La funció anterior ha estat escollida per demostrar que triant adequadament un operador, podem trobar una solució numèrica a una equació de forma computacionalment senzilla i més directa que no pas intentar trobar la solució analítica.

Ens agradaria tancar el Capítol 2 amb dos resultats que, de nou, mostren la potència del Teorema del Punt Fix de Banach. En particular, el següent resultat ens assegura que si tenim un operador que compleix les hipòtesis del Teorema de Banach i una successió $\{y_n\}$ que és molt propera a la seva successió d'imatges per l'operador T, llavors la successió $\{y_n\}$ també tendeix al punt fix de l'operador, és a dir, podem obtenir el punt fix de l'operador sense utilitzar la successió d'iteracions.

Teorema 3. *Sigui (X,d) un espai mètric complet i $T : X \to X$ un operador k-contractiu amb $k \in]0,1[$ amb un punt fix $x_0 \in M$. Sigui $\{\varepsilon_n\}$ una successió de nombres reals positius la qual compleix que $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. A més, tenim una successió $\{y_n\} \subseteq X$ amb $y_0 \in X$ que satisfà:*

$$d(y_{n+1}, T(y_n)) \leq \varepsilon_n \tag{2.13}$$

Aleshores, $\lim_{n\to\infty} y_n = x_0$

Demostració. Per comprovar que el límit de la successió $\{y_n\}$ és x_0, el que hem de veure és:

$$\forall \varepsilon' > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq N \ d(y_n, x_0) < \varepsilon'$$

Llavors, el que farem a continuació serà fitar la distància de y_n a x_0. En primer lloc, aplicam la desigualtat triangular:

$$d(y_n, x_0) \leq d(y_n, T^n(y_0)) + d(T^n(y_0), x_0)$$

En segon lloc, intentem acotar $d(y_n, T^n(y_0))$, tornant a aplicar la desigualtat triangular:

$$\begin{array}{rcl}
d(y_n, T^n(y_0)) & \leq & d(y_n, T(y_{n-1})) + d(T(y_{n-1}), T^n(y_0)) \\
 & = & d(y_n, T(y_{n-1})) + d(T(y_{n-1}), T(T^{n-1}(y_0))) \\
 & \overset{T \text{ contractiu}}{\leq} & d(y_n, T(y_{n-1})) + kd(y_{n-1}, T^{n-1}(y_0)) \\
 & \overset{(2.13)}{\leq} & \varepsilon_{n-1} + kd(y_{n-1}, T^{n-1}(y_0)) \\
 & \leq & \varepsilon_{n-1} + k\varepsilon_{n-2} + k^2 d(y_{n-2}, T^{n-2}(y_0)) \\
 & \vdots & \\
 & \leq & k\left(\cdots\left(kd(T(y_0), y_1) + \varepsilon_1\right)\cdots\right) + \varepsilon_{n-1} \\
 & \overset{(2.13)}{\leq} & k(\cdots(k\varepsilon_0 + \varepsilon_1)\cdots) + \varepsilon_{n-1} \\
 & = & \sum_{i=0}^{n-1} k^{n-1-i}\varepsilon_i
\end{array}$$

Vegem el darrer pas amb un poc més de detall. Anem a demostrar-ho per inducció. Comencem pel cas base $n = 1$:

$$\sum_{i=0}^{1-1} k^{1-1-i}\varepsilon_i = \sum_{i=0}^{0} k^{-i}\varepsilon_i = \varepsilon_0$$

Vegem-ho també pel cas $n = 2$ per tenir-ho més clar:

$$\sum_{i=0}^{2-1} k^{2-1-i}\varepsilon_i = \sum_{i=0}^{1} k^{1-i}\varepsilon_i = k\varepsilon_0 + \varepsilon_1$$

Un cop provat el cas base, passem al pas inductiu. Suposem certa la igualtat fins el pas $n-1$ i vegem que es compleix per n. Sigui la nostra hipòtesi de inducció $k(\cdots(k\varepsilon_0 + \varepsilon_1)\cdots) + \varepsilon_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} k^{n-1-i}\varepsilon_i$:

$$\sum_{i=0}^{n} k^{n-i}\varepsilon_i = k^{n-n}\varepsilon_n + \sum_{i=0}^{n-1} k^{n-i}\varepsilon_i = \varepsilon_n + k\sum_{i=0}^{n-1} k^{n-1-i}\varepsilon_i \overset{\text{HI}}{=} k(k(\cdots(k\varepsilon_0 + \varepsilon_1)\cdots) + \varepsilon_{n-1}) + \varepsilon_n$$

Com volíem veure.

Recordem que estam intentant demostrar que el límit de la successió $\{y_n\}$ és x_0 i per demostrar això hem de fitar la distància $d(y_n, x_0)$. Per aconseguir-ho fitarem $\sum_{i=0}^{n-1} k^{n-1-i}\varepsilon_i$. Per fer-ho recordem que tenim una successió de nombres reals positius $\{\varepsilon_n\}$ amb límit 0, és a dir, sabem el següent:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{N} : \forall s \geq M\ \varepsilon_s < \varepsilon$$

En conseqüència, el que farem serà dividir el sumatori anterior en dues parts, una per la qual puguem fitar els ε_i i una altra els que no:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} k^{n-1-i}\varepsilon_i &= \sum_{i=0}^{M-1} k^{n-1-i}\varepsilon_i + \sum_{i=M}^{n-1} k^{n-1-i}\varepsilon_i \\ &< \sum_{i=0}^{M-1} k^{n-1-i}\varepsilon_i + \varepsilon \sum_{i=M}^{n-1} k^{n-1-i} \\ &= k^n \sum_{i=0}^{M-1} k^{-(1+i)}\varepsilon_i + \varepsilon \sum_{i=M}^{n-1} k^{n-1-i}\end{aligned}$$

Observem que podem suposar que $n-1 \geq M$, perquè en cas contrari $\sum\limits_{i=0}^{M-1} k^{n-1-i}\varepsilon_i$ es pot fitar directament.

Calculem una fita de la següent suma geomètrica $\sum_{i=M}^{n-1} k^{n-1-i}$:

$$\sum_{i=M}^{n-1} k^{n-1-i} = \sum_{i=0}^{n-1-M} k^i \overset{7}{=} \frac{k^{n-M}-1}{k-1} = \frac{1-k^{n-M}}{1-k} \overset{k^{n-M}>0}{<} \frac{1}{1-k}$$

És a dir, podem dur a terme les següents fites:

$$\sum_{i=0}^{n-1} k^{n-1-i}\varepsilon_i < k^n \sum_{i=0}^{M-1} k^{-(1+i)}\varepsilon_i + \varepsilon\frac{1}{1-k}$$

Tornant un poc més enrere, ara podem fitar $d(y_n, T^n(y_0))$:

$$d(y_n, T^n(y_0)) \leq \sum_{i=0}^{n-1} k^{n-1-i}\varepsilon_i < k^n \sum_{i=0}^{M-1} k^{-(1+i)}\varepsilon_i + \varepsilon\frac{1}{1-k}$$

Sigui $k^n \sum_{i=0}^{M-1} k^{-(1+i)}\varepsilon_i = k^n S$, sabem que aquest terme es va acostant a 0 a mesura que augmentam n, ja que recordem que $k \in]0,1[$ i S és un valor fixat. En conseqüència, la successió $\lim\limits_{n\to\infty} k^n S = 0$. Així:

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \; \exists R \in \mathbb{N} : \; \forall n \geq R, \; Sk^n < \varepsilon_1$$

Així doncs, podem fitar $d(y_n, T^n(y_0))$ com:

$$d(y_n, T^n(y_0)) < k^n S + \varepsilon\frac{1}{1-k} < \varepsilon_1 + \varepsilon\frac{1}{1-k}$$

Per altra banda, com T és un operador k-contractiu i es compleixen les hipòtesis del teorema de Banach sabem que la successió $\{T^n(y_0)\}$ té com a límit el punt fix x_0, en conseqüència, aplicant límits també sabem que es compleix que $\lim\limits_{n\to\infty} d(T^n(y_0), x_0) = 0$, és a dir:

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \; \exists P \in \mathbb{N}, \; \forall n \geq T : \; d(T^n(y_0), x_0) < \varepsilon_2$$

[7] Observem que la suma parcial d'una progressió geomètrica la podem trobar detallada en l'Annex A.1.1 a A.7

A la vegada, podem seguir fitant $d(y_n, x_0)$. En efecte, $\forall \varepsilon' = \varepsilon_1 + \varepsilon \frac{1}{1-k} + \varepsilon_2 > 0$ si prenem com a $N = \max\{M, R, P\}$, aleshores:

$$\begin{aligned} d(y_n, x_0) &\leq d(y_n, T^n(y_0)) + d(T^n(y_0), x_0) \\ &< \varepsilon_1 + \varepsilon \frac{1}{1-k} + \varepsilon_2 = \varepsilon' \end{aligned}$$

Com volíem veure.

□

A continuació, veurem com fins i tot en aquells casos en què els operadors no són contractius però si ho són una potència seva també podem garantir la existència i unicitat de punt fix.

Teorema 4. *Sigui (X, d) un espai mètric complet, suposem $T : X \to X$ un operador pel qual es sap que una potència entera seva, T^N és un operador k-contractiu. Aleshores T té un únic punt fix.*

Demostració. Com ens trobam en un espai mètric complet i $T^N : X \to X$ és un operador k-contactiu, pel Teorema de Punt Fix de Banach, sabem que té un únic punt fix al qual anomenarem x. És a dir, es compleix que: $T^N(x) = x$ i a més, tenim el següent:

$$T^{N+1}(x) = T(T^N(x)) = T(x)$$

Per altra banda, reescrivint el pas anterior:

$$T(x) = T^{N+1}(x) = T^N(T(x))$$

Obtenim que $T(x)$ és un punt fix de l'operador T^N. Com sabem que el punt fix de T^N és únic ha de passar que $T(x) = x$.

Acabam de veure que x és un punt fix de T, vegem que és únic. Per això, suposem que el punt fix no és únic, és a dir, que $\exists x, y \in X$ tal que $T(x) = x$ i $T(y) = y$. Aleshores:

$$T(y) = y \Rightarrow T^N(y) = y$$

$$T(x) = x \Rightarrow T^N(x) = x$$

Resulta que x i y també són punts fixos de T^N. Per unicitat del punt fix de T^N es té que $x = y$. En conseqüència T té un únic punt fix. □

Notem que en el teorema anterior, no tenim cap hipòtesi sobre T, ni tan sols es demana que sigui contínua.

Vegem a continuació un exemple de funció per la qual no podem aplicar el Teorema de Banach perquè no és k-contractiva, però podem demostrar la existència i unicitat de punt fix gràcies al teorema anterior. La funció de la qual ens estam referint és:

$$T(x) = \cos(x) : [-1, 1] \to [-1, 1]$$ [8]

Vegem que aquesta funció no és k-contractiva. Aplicant el Teorema del Valor Mitjà 17 obtenim:

$$|\cos(x) - \cos(y)| \leq |\sin(\xi)||x - y| \ \forall x, y \in [-1,1] \text{ amb } \xi \in]x, y[\text{ suposant } x \leq y$$

Però $|\sin(\xi)| \leq 1$, per tant la constant de k-contractivitat no la podem prendre entre $[0,1[$. Recuperarem l'Exemple 2.1.1. Aquí estàvem treballant amb la funció $g(x) = \cos(\cos(x))$, la qual havíem demostrat que era 0.841471-contractiva en l'espai mètric complet $(\mathbb{R}, |.|)$. Con la funció g és una potència entera de la nostra T, aplicant el teorema anterior podem assegurar l'existència i unicitat de punt fix per T. En la següent gràfica es pot observar que efectivament té punt fix, i a més, és el mateix punt fix de g ($x = 0.7390851$):

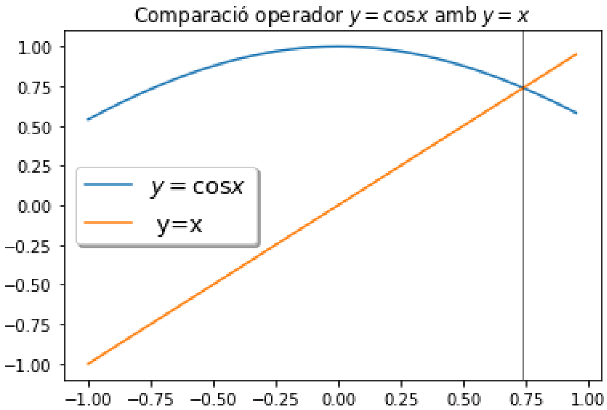


Figura 2.4: Exemple d'operador amb punt fix

Per escriure aquest primer capítol ens hem basat en el primer capítol de la referència [1], en la referència [3] i en la referència [4].

[8] Ens restringim en aquest interval donat que si aquest operador té un punt fix, haurà de ser dins $[-1,1]$

CAPÍTOL 3

Aplicacions del Teorema de Punt Fix

En aquest capítol podem trobar dos exemples on aplicam el Teorema de Punt Fix de Banach.

El primer exemple serà una aplicació econòmica, en la qual analitzam l'existència d'equilibri de mercat considerant que la seva dinàmica ve donada exclusivament per la interacció de la llei de l'oferta i la demanda.

En segon lloc, també analitzarem, des del punt de vista de la teoria del punt fix, un dels algoritmes més importants de Google: el **Page Rank**.

3.1. Aplicació econòmica

Teoria de punt fix, llei d'oferta i demanda i equilibri de mercat

En primer lloc, per poder explicar com trobar un preu estable d'un determinat producte hem d'explicar com es regula els preus de qualsevol bé del mercat. En concret, aquesta idea es basa en la **llei de la oferta i la demanda**, la qual estableix a partir d'un preu el nombre d'unitats de producte que els demandants estan disposats a adquirir i els oferents estaran disposats a fabricar.

Una hipòtesi normal en economia és suposar que la demanda és una funció decreixent i contínua en funció del preu, és a dir, a mesura que augmenta el preu d'un producte el consumidor (agregat) estarà disposat a adquirir-ne una menor quantitat del mateix; a partir d'aquí ens referirem a ella com $D(P)$ on P és el preu com a variable independent. Per altra banda, és normal suposar que la oferta és una funció creixent i contínua en funció del preu, ja que a mesura que augmenta el preu del producte els oferents (agregats) estan disposats a fabricar-ne més per obtenir major benefici; a partir d'aquí ens referirem a ella com $S(P)$ on P és el preu com a variable independent.

Matemàticament, el preu d'equilibri ve donat per la intersecció de les dues funcions oferta i demanda. És a dir, la situació d'equilibri es dóna quan s'ha suplert la demanda i no hi ha excedents, en conseqüència no és necessari reajustar el preu del producte per augmentar el benefici en el següent període i per tant arribam a la situació d'estabilitat. Vegem-ho amb més detall.

La variació de preus de mercat es produeix com a conseqüència de l'efecte de les forces competitives del mercat, regulades per les funcions d'oferta i demanda. Suposem sense perdre generalitat que, donat un preu inicial P_0 del producte, obtenim excedent d'aquest, llavors els oferents del producte, a fi de augmentar el seu propi guany en el pròxim període disminueixen el preu del producte per a què els consumidors n'adquireixen més i així evitar tornar a produir excedent. D'altre banda, si ocorre el cas contrari, donat un preu P_0, obtenim una manca d'abundància del producte en el mercat, a fi d'augmentar el propi benefici dels oferents, aquests en el pròxim període augmentaran el preu del producte.

En definitiva, la regulació dels preus del mercat és un vaivé de pujades i baixades de preus fins que s'arriba a un punt on no hi ha excedent del producte o manca d'abundància. En aquest punt es suposa que s'ha arribat a la situació d'equilibri i el preu s'ha de mantenir constant en el temps. Donades les funcions d'oferta i demanda, vegem en quines situacions podem assegurar l'existència d'equilibri mitjançant tècniques de punt fix.

Considerem P_0 el preu de mercat inicial d'un determinat producte. Podem suposar que aquest preu és superior al preu d'equilibri (P_E), és a dir, tenim que $P_0 > P_E$ (es procedeix de manera anàloga si $P_E > P_0$). Llavors donades $S(P)$ i $D(P)$ les funcions d'oferta i demanda respectivament podem calcular la quantitat del producte que s'ha d'oferir:

$$S(P_0) = Q_S^0$$

i la quantitat del producte que es consumirà:

$$D(P_0) = Q_D^0$$

Com que les funcions demanda i oferta són funcions contínues i estrictament decreixent i creixent[1], respectivament, com hem suposat que $P_0 > P_E$ tendrem que $Q_S^0 > Q_D^0$. La Figura 3.1 il·lustra l'esmentat anteriorment:

[1] En conseqüència, les seves funcions inverses existeixen.

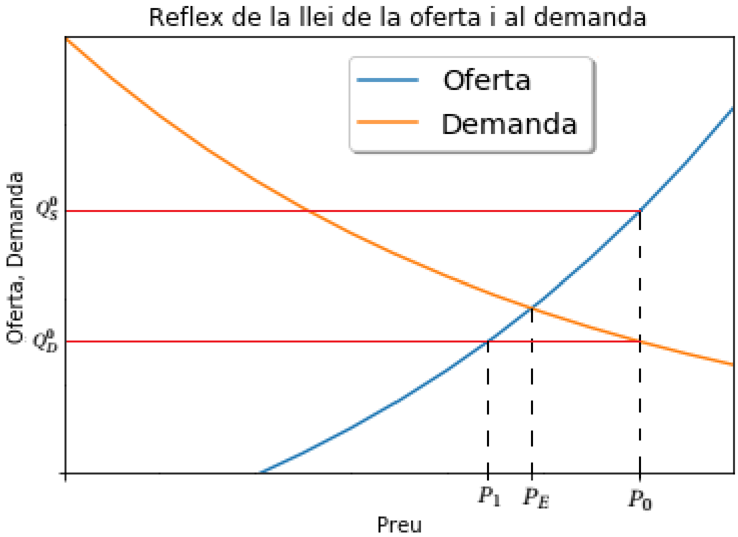


Figura 3.1: Model oferta i demanda donat un preu P_0

És a dir, que obtenim un excedent de $Q_S^0 - Q_D^0$, en conseqüència, la resposta dels oferents serà disminuir el preu del producte de tal manera que no s'hagués produït aquest excedent. És a dir, es cerca un preu $P_1 < P_0$ tal que $D(P_1) = Q_S^0 = Q_D^1$. Així doncs, podem expressar P_1 de la següent forma:

$$P_1 = D^{-1}(Q_S^0) = D^{-1}(S(P_0)) \tag{3.1}$$

Si ara tenim que $P_1 < P_E$, aleshores $Q_D^1 > Q_S^1 = S(P_1)$ i hi ha manca del producte. Aleshores en el següent període voldríem calcular quin és el preu del producte pel qual estarien disposats a pagar els consumidors, de manera que no faltés cap unitat del producte, és a dir, volem trobar P_2 que ha de complir $D(P_2) = Q_S^1$, i en conseqüència:

$$P_2 = D^{-1}(Q_S^1) = D^{-1}(S(P_1))$$

Podem començar a intuir que el preu del producte vendrà modelat de la següent forma:

$$P_{k+1} = D^{-1}(S(P_k)) \ \forall k : 1, 2, \ldots 1$$

És a dir, que l'operador que proporciona la dinàmica de preus de mercat és de la forma següent:

$$f(P) = D^{-1}(S(P))$$

Una de les formes per saber amb quines condicions aquest operador és $k-$contractiu, és utilitzar el Teorema del Valor Mitjà, com ja hem fet anteriorment:

$$\begin{aligned} d(D^{-1}(S(P_i)), D^{-1}(S(P_j))) &= |D^{-1}(S(P_i)) - D^{-1}(S(P_j))| \overset{\text{TVM}}{=} |D^{-1}(S(P))'||P_0 - P_1| \\ &= |D^{-1}(S(P))'||d(P_j), d(P_i)| \text{ on } P \in]P_i, P_j[\text{ suposant que } P_i \geq P_j \end{aligned}$$

Si aconseguim fitar $|D^{-1}(S(P))'| = k < 1$ llavors podem assegurar que l'operador és $k-$contractiu. Calculem què val el valor absolut d'aquesta derivada:

$$D^{-1}(S(P))' = (D^{-1}(S(P)))' \cdot S'(P) = \frac{S'(P)}{D'(P)}$$

Recordem que volem: $|D^{-1}(S(P))'| = \left|\frac{S'(P)}{D'(P)}\right| = k < 1 \Rightarrow |S'(P)| < |D'(P)|$. En definitiva, si volem que l'operador sigui $k-$contractiu, les funcions d'oferta i demanda han de complir $|S'(P)| < |D'(P)|\ \forall P$. D'aquí es dedueix l'existència d'un punt d'quilibri de mercat i es modela la dinàmica del mateix mitjançant la successió d'iteracions induïdes pe l'operador k-contractiu.

Ara que ja sabem com construir aquests operadors, anem a aplicar-ho a les funcions oferta i demanda del model econòmic lineal. A continuació estudiarem aquest model, en el qual, les funcions d'oferta i demanda són funcions lineals i calcularem en quines condicions podem obtenir l'equilibri de mercat.

Model de mercat lineal

En primer lloc, veurem el model clàssic de regulació de l'oferta i la demanda. Suposarem que la oferta i la demanda es poden modelar mitjançant les següents funcions lineals:

$$\begin{aligned} S(P) &= -\gamma + \delta P \\ D(P) &= \alpha - \beta P \end{aligned}$$

on $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

Notem que el signe dels paràmetres anteriors obliguen que les funcions oferta i demanda siguin creixent i decreixent respectivament i a més sempre existeix un preu mínim $\left(P = \frac{\gamma}{\delta}\right)$[2] pel qual els oferents agregats no estan disposats a fabricar per menys i un preu màxim pel qual els consumidors no estaran disposats a pagar més $\left(P = \frac{\alpha}{\beta}\right)$[3].

Per trobar el preu d'equilibri, com hem explicat anteriorment, construirem l'operador que va donant la dinàmica dels preus en cada instant del temps i veurem en quines condicions podem assegurar l'existència i unicitat de punt fix, és a dir, quines són les hipòtesis que hauríem d'assumir per les nostres funcions d'oferta i demanda per les quals arribaríem a una situació d'equilibri de preus.

Com hem descrit anteriorment, l'operador el podem construir de la següent manera:

$$f(P) = D^{-1}(S(P)) \tag{3.2}$$

[2] Aquest preu s'obté anul·lant la funció de l'oferta
[3] Aquest preu s'obté anul·lant la funció de la demanda

Aleshores com $D^{-1} = P(D) = \dfrac{\alpha - D}{\beta}$, l'operador és el següent:

$$f(P) = \frac{\alpha + \gamma - \delta P}{\beta} \tag{3.3}$$

On podem suposar que $f : \left[\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right] \to \left[\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right]$.

Per poder aplicar el Teorema de Banach, vegem en quines condicions es té que l'operador anterior és k-contractiu. Com estam en funcions de variable real, podem considerar l'espai mètric complet $\left(\left[\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right], d_2\right)$:

$$\left|f(P_1) - f(P_2)\right| = \left|\frac{\alpha + \gamma - \delta P_1}{\beta} - \frac{\alpha + \gamma - \delta P_2}{\beta}\right| = \left|\frac{\delta}{-\beta}(P_1 - P_2)\right| = \left|\frac{\delta}{-\beta}\right| |P_1 - P_2|$$

En definitiva, l'operador $f(P)$ és k-contractiu si $\left|\dfrac{\delta}{-\beta}\right| < 1 \Rightarrow |\delta| < |-\beta| \overset{\delta,\beta>0}{\Rightarrow} \delta < \beta$. Notem que $-\beta = D'(P)$ i $\delta = S'(P)$.

Llavors, com f és un operador k-contractiu en un espai mètric complet definit en un tancat, podem afirmar pel Teorema del Punt Fix de Banach que té un únic punt fix, el qual és el preu d'equilibri de mercat. A més, aquest punt fix el podem trobar iterant l'operador que descriu la dinàmica del preu de mercat.

Donat que hem obtingut un operador senzill, podem calcular sense problema quin és el punt fix d'aquest operador, basta imposar $P = f(P)$:

$$\frac{\alpha + \gamma - \delta P}{\beta} = P$$
$$\Downarrow$$
$$P = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} \overset{\alpha,\beta,\gamma,\delta>0}{>} 0$$

Per comprovar la potència del Teorema de Punt Fix de Banach, anem a comprovar que numèricament, iterant l'operador f, haguéssim arribat al mateix resultat, amb un exemple concret que numèricament anirem iterant i partint de qualsevol preu de mercat inicial, és a dir, d'un preu que estigui inclòs en l'interval $\left[\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right]$. Considerem:

$$S(P) = -30 + 8.4P$$
$$D(P) = 40 - 8.5P$$

Notem que $8.4 = |\delta| < |-\beta| = 8.5$, aleshores sabem que l'operador donat per (3.3) serà k-contractiu i en conseqüència, podem aplicar el teorema del punt fix de Banach.

A la Figura 3.2 podem trobar representades les funcions oferta i demanda anteriors:

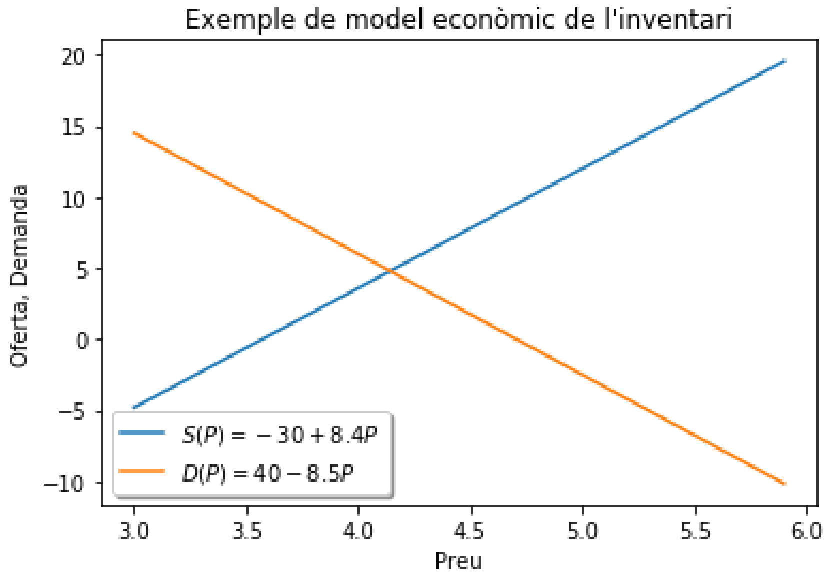


Figura 3.2: Rectes de l'oferta i demanda del model

Podem observar, que les dues rectes es tallen al voltant de quatre unitats monetàries, vegem que analíticament obtenim un resultat coherent amb la gràfica. Anteriorment hem calculat que el preu d'equilibri ve donat per:

$$P = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} = \frac{40 + 30}{8.4 + 8.5} = 4.142011$$

Podem observar que obtenim un preu d'equilibri amb concordança amb la gràfica anterior. Vegem si iterant l'operador arribam al mateix resultat.

Amb condició inicial $P_0 = \dfrac{\frac{\gamma}{\delta} + \frac{\alpha}{\beta}}{2} = 4.138655$ calcularem iterats de l'operador fins que la diferència ambdós iterats consecutius sigui menor que la precisió que ens dóna el paquet de software R.

Si executam el codi que apareix a l'Annex A.2.2obtendrem el següent resultat: $P_E = 4.142011$ i hem arribat a la solució amb 746 iteracions. Com podem observar, hem obtingut el mateix resultat que de la forma analítica.

3.2. Aplicació al Page Rank de Google

Quan pensam en cercar qualsevol tipus d'informació no se'ns ve cap altre idea que la d'obrir el navegador de Google i esperar trobar la resposta desitjada en les primeres pàgines que ens ofereix aquest gran motor de cerques. En les pròximes línies desemmascararem que hi ha darrere una de les primeres versions del famós algoritme de Page Rank de Google i veurem com la teoria de punt fix (i també el Teorema de Punt Fix de Banach) juguen un roll fonamental en la implementació d'aquest.

3.2.1. Com funciona el Page Rank de Google

El Page Rank intenta reflectir la probabilitat què un usuari, navegant aleatòriament o a través d'enllaços, pel conjunt de les pàgines web, arribi a una pàgina concreta. Com es duu a terme aquest càlcul? Doncs, aquest càlcul es basa en suposar que tenim un conjunt finit N de pàgines web que es relacionen de certa manera entre elles. Aquesta relació no és més que la de contar quantes vegades una pàgina s'enllaça amb les altres.

La raó principal per la qual el cercador de Google és un del més utilitzats del món rau en el fet que és capaç de mostrar-nos el que necessitam en les primeres posicions de la seva cerca, per tant la següent qüestió a respondre és: Com ordena les pàgines que ens mostra? Amb quin criteri consideram que una pàgina és més important que una altra? Els creadors del Page Rank, Sergey Brin i Larry Page , varen decidir que la importància d'una pàgina depèn linealment de la importància de les pàgines que l'enllacen. A continuació veurem que definir la importància d'una pàgina web d'aquesta forma, ens permet resoldre el problema com si fos trobar el punt fix d'un operador matricial. És per aquest motiu que hem decidit introduir el Page Rank a n'aquest treball.

Suposem que tenim N pàgines webs: $P_1, P_2, \ldots, P_N$ i definim λ_i com el nombre d'enllaços que surten de la pàgina $P_i,\ i \in \{1, \ldots, N\}$

S'entén que quan més referenciada estigui una pàgina, més importància sobre les altres tendrà, però no és el mateix que et referencii una pàgina amb un total de dos enllaços sortints que ho faci una que compta amb 2000. D'aquesta manera definim la importància d'una pàgina web P_i de la següent forma:

$$\mathrm{Imp}(P_i) = \sum_{j \in L_i} \frac{1}{\lambda_j} \mathrm{Imp}(P_j) \qquad 1 \leq i \leq N$$

on L_i denota el conjunt de pàgines web que enllacen la pàgina P_i. A més, considerarem la importància com una magnitud no negativa.

D'aquesta forma, trobar la importància de cada pàgina es basa en resoldre el següent sistema lineal:

$$\begin{cases} \mathrm{Imp}(P_1) = f_2(P_1)\mathrm{Imp}(P_2) + \ldots + f_i(P_1)\mathrm{Imp}(P_i) + \ldots + f_N(P_1)\mathrm{Imp}(P_N) \\ \vdots \\ \mathrm{Imp}(P_i) = f_1(P_i)\mathrm{Imp}(P_1) + \ldots + f_{i-1}(P_i)\mathrm{Imp}(P_{i-1}) + f_{i+1}(P_i)\mathrm{Imp}(P_{i+1}) + \ldots + f_N(P_i)\mathrm{Imp}(P_N) \\ \vdots \\ \mathrm{Imp}(P_N) = f_1(P_N)\mathrm{Imp}(P_1) + f_2(P_N)\mathrm{Imp}(P_2) + \ldots + f_{i-1}(P_N)\mathrm{Imp}(P_{i-1}) + \ldots + f_{N-1}(P_N)\mathrm{Imp}(P_{N-1}) \end{cases}$$

on $f_i(P_j) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda_i} & \text{si} \quad P_j \in L_i \\ 0 & \text{si} \quad P_j \notin L_i \end{cases}$

I expressant matricialment:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Imp}(P_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathrm{Imp}(P_i) \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathrm{Imp}(P_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f_2(P_1) & \dots & f_i(P_1) & \dots & \dots & f_N(P_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ f_1(P_i) & \dots & f_{i-1}(P_i) & 0 & f_{i+1}(P_i) & \dots & f_N(P_i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ f_1(P_N) & f_2(P_N) & \dots & f_i(P_N) & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Imp}(P_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathrm{Imp}(P_i) \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathrm{Imp}(P_N) \end{pmatrix}$$

Sigui $v = \big(\mathrm{Imp}(P_1), \dots, \mathrm{Imp}(P_i), \dots, \mathrm{Imp}(P_N)\big) \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ i H la matriu del sistema anterior, volem trobar un punt fix de H amb totes les coordenades positives i esbrinar si és únic o no:

$$v = Hv \tag{3.4}$$

La gran avantatge d'haver definit la importància d'una pàgina web de la forma anterior rau en el fet que la nostra matriu H ara és una **matriu estocàstica**, és a dir, tenim una matriu quadrada on totes les entrades són no negatives i la suma de totes les seves entrades per columna sumen la unitat. Gràcies a n'aquest fet, podrem assegurar la existència d'un punt fix com veurem i estudiarem en la Secció 3.2.2 degut a les bones propietats d'aquest tipus de matriu.

Notem que aquest sistema pot presentar una incoherència en el cas que en el conjunt de totes les pàgines web n'hi hagi una que sigui enllaçada per altres però que a la vegada aquesta no enllaci cap pàgina web. En la columna corresponent d'aquesta pàgina web, la matriu H estaria formada per ceros i conseqüència H no seria estocàstica. Aquestes pàgines webs reben el nom de *node penjat*. El problema el solucionen canviant el ceros de la columna corresponent de la pàgina del node penjat per $\frac{1}{N}$, és a dir, suposar que aquesta pàgina web conflictiva s'enllaça amb totes les altres, incluida ella mateixa. D'aquesta forma contribuïm en una importància de $\frac{1}{N}$ per a cada pàgina i convertim la matriu H en estocàstica. A més, notem que aquest canvi és mínim si consideram un conjunt de pàgines web molt gran, ja que $\lim_{N\to\infty} \dfrac{1}{N} = 0$, com serà el cas que veurem més endavant. Aquesta transformació per la matriu H l'anomenarem H_1.

Exemple de la matriu del Page Rank

Suposem que tenim el següent graf de relacions d'enllaços per les següents cinc pàgines web:

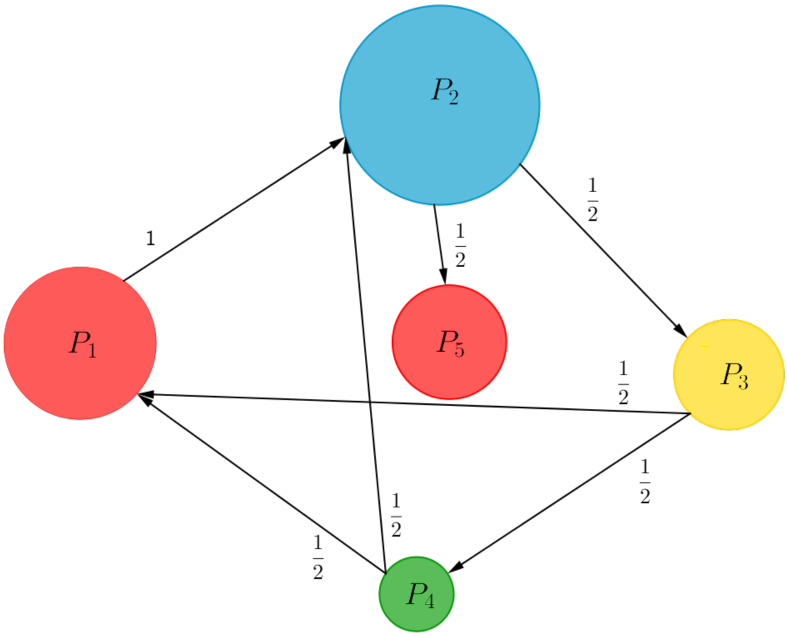


Figura 3.3: Graf de relacions de 5 pàgines web

Com podem observar, la pàgina P_1 enllaça amb la pàgina P_2 en conseqüència $\lambda_1 = \frac{1}{1} = 1$. En segon lloc, la pàgina P_2 enllaça amb la pàgina P_3 i P_5, per tant, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. En tercer lloc, la pàgina P_3 enllaça amb la pàgina P_1 i P_4, aleshores $\lambda_3 = \frac{1}{2}$. En quart lloc, la pàgina P_4 enllaça amb la pàgina P_1 i P_2, conseqüentment $\lambda_4 = \frac{1}{2}$. Finalment, la pàgina P_5 no enllaça amb cap altre pàgina, és a dir, tenim un node penjat, en conseqüència per a que la matriu del sistema que obtenguem sigui estocàstica hem d'imposar que la pàgina P_5 s'enllaça amb totes les pàgines, incluida ella mateixa i per tant $\lambda_5 = \frac{1}{5}$.

Aleshores, es tractaria de resoldre el següent sistema:

$$\begin{pmatrix} \text{Imp}(P_1) \\ \text{Imp}(P_2) \\ \text{Imp}(P_3) \\ \text{Imp}(P_4) \\ \text{Imp}(P_5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Imp}(P_1) \\ \text{Imp}(P_2) \\ \text{Imp}(P_3) \\ \text{Imp}(P_4) \\ \text{Imp}(P_5) \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

A les pàgines següents veurem com podem resoldre sistemes com el que tenim aquí.

3.2.2. Matrius estocàstiques i les seves bones propietats

Amb anterioritat hem parlat de les matrius estocàstiques, recordem breument la seva definició:

***Definició* 3.1** (Matriu estocàstica)**.** *Una matriu quadrada es diu que és estocàstica quan està formada per termes no negatius i la seva suma per columnes és igual a 1.*

Recordem que el nostre objectiu és trobar una solució no negativa al següent problema:

$$v = Hv$$

on H és una matriu estocàstica.

Anem a exposar i demostrar la primera propietat d'aquest tipus de matrius:

Teorema 5. *Tota matriu estocàstica de dimensió $N \times N$ té un punt fix en $\Pi_N : \{x \in \mathbb{R}^N_+ : ||x||_1 = 1\}$*

Per la demostració d'aquest teorema, utilitzarem la versió convexa del Teorema del Punt Fix de Brouwer:

Teorema 6 (Versió convexa del Teorema de Brouwer)**.** *Sigui C un conjunt tancat, acotat i convex de $\mathbb{R}^N$. Llavors, cada aplicació contínua definida de $C \to C$ té un punt fix.*[4]

En conseqüència, per demostrar el Teorema 5 haurem de veure que la transformació lineal A que indueix la matriu estocàstica H és contínua i està definida de $\Pi_N \to \Pi_N$. Per altra banda, haurem de demostrar també que Π_N és un conjunt tancat, acotat i convex. Fixem-nos que si demostram que té un punt fix en aquest conjunt també haurem demostrat que el punt fix té entrades no negatives i almenys una de positiva (ja que la norma d'aquest punt ha de valer 1 perquè pertany a Π_N).

Demostració. En primer lloc, demostrarem que el conjunt Π_N és tancat. Sabem que per una aplicació contínua, la seva antiimatge d'un tancat és un tancat i com la aplicació norma és una aplicació contínua i el conjunt Π_N és l'antiimatge del conjunt $\{1\}$ que és tancat, llavors Π_N és un conjunt tancat. Per altra part, la demostració que el conjunt està acotat és trivial, ja que tots els punts d'aquest conjunt tenen norma 1. Finalment vegem que és un conjunt convex. Si recordam com es defineix la norma 1 tenim que el conjunt Π_N es pot escriure com: $\Pi_N : \{x \in \mathbb{R}^N_+ : |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_N| = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^N_+ : x_1 + x_2 + \ldots + x_N = 1\}$, és a dir, per cada N el conjunt Π_N defineix un hiperplà i en conseqüència és convex. Vegem-ho amb una mica més de detall:

Per veure que Π_N és un conjunt convex, el que hem de veure és que $\forall t \in [0,1]$ i $\forall x, y \in \Pi_N$ es té que $(1-t)x + ty \in \Pi_N$, en definitiva, hem de veure que $||(1-t)x + ty||_1 = 1$, vegem-ho:

$$\begin{aligned}
||(1-t)x + ty||_1 &= \sum_{i=1}^N |(1-t)x_i + ty_i| \\
&\overset{t,1-t,x_i,y_i \geq 0 \forall i}{=} \sum_{i=1}^N (1-t)x_i + ty_i \\
&= \sum_{i=1}^N (1-t)x_i + \sum_{i=1}^N ty_i \\
&= (1-t)\sum_{i=1}^N x_i + t\sum_{i=1}^N y_i \\
&\overset{x,y \in \Pi_N}{=} = 1 - t + t = 1
\end{aligned}$$

[4] La demostració d'aquest teorema no s'inclourà en aquest treball donada la extensió d'aquesta i la limitació en quant extensió es refereix d'aquest propi treball.

En conseqüència acabam de demostrar que el conjunt Π_N és convex.

Anem a demostrar que $A(\Pi_N) \subseteq \Pi_N$. Sigui x un vector tal que $||x||_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_N| = 1$, vegem que $A(x) \in \Pi_N$[5]:

$$\begin{pmatrix} h_{11} & \ldots & h_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N1} & \ldots & h_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 h_{11} + x_2 h_{12} + \ldots + x_N h_{1N} \\ \vdots \\ x_1 h_{N1} + x_2 h_{N2} + \ldots + x_N h_{NN} \end{pmatrix}$$

Si sumam les components del vector resultat, en valor absolut, ens hauria de donar la unitat:

$$|x_1 h_{11} + x_2 h_{12} + \ldots + x_N h_{1N}| + \ldots + |x_1 h_{N1} + x_2 h_{N2} + \ldots + x_N h_{NN}|$$

$$\overset{x_i, h_{kj} \geq 0}{=} x_1 h_{11} + x_2 h_{12} + \ldots x_N h_{1N} + \ldots\ldots + x_1 h_{N1} + x_2 h_{N2} + \ldots + x_N h_{NN}$$

$$= (h_{11} + \ldots + h_{N1})\, x_1 + (h_{12} + \ldots + h_{N2})\, x_2 + \ldots + (h_{1N} + \ldots\ldots + h_{NN})\, x_N$$
$$\overset{H \text{ estocàstica}}{=} x_1 + x_2 + \ldots + x_N \overset{x \in \Pi_N}{=} 1$$

Acabam de veure que $A(\Pi_N) \subseteq \Pi_N$. Vegem ara que A és contínua:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \ ||x - x_0||_1 < \delta \Rightarrow ||A(x) - A(x_0)||_1 < \varepsilon$$

De la igualtat anterior es dedueix que $||A(x)||_1 = ||Hx||_1 = ||x||_1$ per tant A és contínua, com volíem veure.

En definitiva, tenim que $A(\Pi_N) \subseteq \Pi_N$ i és contínua sobre un conjunt tancat, fitat i convex, en conseqüència, aplicant la versió convexa del Teorema de Brouwer tenim que A té un punt fix i a més aquest punt fix, per trobar-se definit sobre Π_N, sabem que les seves components són no negatives i a més, almenys n'hi ha una de positiva.

□

Com hem acabat de demostrar, per a qualsevol matriu estocàstica, es té un punt fix no negatiu i de norma 1, la següent pregunta que ens hem de plantejar ara és si és únic aquest punt fix. Per respondre aquesta pregunta abans hem d'introduir què és una parella de Perron:

***Definició* 3.2** (Parella pròpia de Perron)**.** *Donada una matriu H quadrada positiva, considerem el seu valor propi $\lambda > 0$ i vector propi $x > 0$ positius*[6]*. Al conjunt (λ, x) se'l denomina com parella pròpia de Perron. Al valor propi λ se li denomina valor propi de Perron i al vector propi x se li denomina vector propi de Perron.*

Un cop definit què és una parella pròpia de Perron, podem exposar el seu teorema:

[5] Això és equivalent a demostrar que el producte matricial entre la matriu estocàstica H i el vector x pertany a Π_N

[6] Sabem que existeixen pel següent teorema.

Teorema 7 (Teorema de Perron)**.** *Cada matriu quadrada positiva H té una única parella pròpia de Perron. A més, entre tots els possibles valors propis de H el valor propi de Perron és el de mòdul major.*

Demostració. La demostració d'aquest teorema la podem trobar a l'Annex A.1.1. □

Amb aquest teorema podem demostrar el següent corol·lari, el qual ens proporciona no tan sols existència de solucions al problema que pretenem resoldre, sinó també la unicitat:

Corol·lari 8. *Si H és una matriu estocàstica i positiva de dimensió $N \times N$, llavors existeix un únic vector $x \in \Pi_N$ tal que $Hx = x$.*

Demostració. En primer lloc, com la matriu H és estocàstica, pel Teorema 5, sabem que existeix un punt fix x en Π_N: $Hx = x$. Vegem que és únic. Pel Lema 1 de l'Annex A.1.1, com H és positiva i $x \in \Pi_N \subset \mathbb{R}^N_+$, aleshores $Hx > 0$. Per ser x punt fix tenim que $Hx = x > 0$. És a dir, que tenim una parella de vector propi i valor propi de Perron amb $\lambda = 1 > 0$ i $x > 0$. Pel Teorema de Perron 7 sabem que aquesta parella és única. En conseqüència, si suposam que existeix un altre punt fix de la matriu H, és a dir, una parella de valor i vector propi $(1, y)$ amb $y \neq x \in \Pi_N$, com la parella de Perron és única, ha de passar que $y = x$ i per tant queda demostrada la unicitat de punt fix.

□

Fins el moment, el nostre objectiu ha estat trobar condicions necessàries per poder assegurar la existència i unicitat de punt fix donada una matriu estocàstica. Recordem que, hem començat a estudiar aquest problema, quan volíem trobar solució al problema 3.4, que deriva de trobar numèricament la importància de les pàgines web. Si ens fixam, la matriu del sistema que hem obtingut és estocàstica, però no és positiva, donat que pot tenir entrades nules. En conseqüència, no podem aplicar res del que hem estat demostrant fins ara. Com arreglam el problema? Doncs considerant la següent matriu, la qual anomenarem matriu de Google:

$$G = dH_1 + \frac{1-d}{N}E$$

on H_1 és la matriu transformada de la matriu H donada per 3.4, $E_{N\times N}$ és una matriu de uns i d és un factor que satisfà $0 < d < 1$.

La següent qüestió que ens plantejam és: realment aquesta matriu de Google compleix les hipòtesis amb les quals hem estat treballant fins ara? És una matriu positiva i estocàstica? Vegem-ho.

En primer lloc, podem afirmar que la matriu G és una matriu amb totes les entrades positives perquè és suma d'una matriu no negativa dH_1 (ja que H_1 ho és i està multiplicada per un escalar positiu) i una estrictament positiva $\dfrac{1-d}{N}E$ (ja que E és una matriu de uns multiplicada per un escalar també positiu).

En segon lloc, vegem que G és una matriu estocàstica. Per això, vegem que la suma de les seves columnes és 1:

$$\begin{aligned}
G &= dH_1 + \frac{1-d}{N}E = d\begin{pmatrix} h_{11} & \dots & h_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N1} & \dots & h_{NN} \end{pmatrix} + \frac{1-d}{N}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} dh_{11} & \dots & dh_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ dh_{N1} & \dots & dh_{NN} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1-d}{N} & \dots & \frac{1-d}{N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1-d}{N} & \dots & \frac{1-d}{N} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} dh_{11} + \frac{1-d}{N} & \dots & dh_{1N} + \frac{1-d}{N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ dh_{N1} + \frac{1-d}{N} & \dots & dh_{NN} + \frac{1-d}{N} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Anem a sumar les columnes d'aquesta matriu:

$$\begin{aligned}
& dh_{1i} + \frac{1-d}{N} + \ldots + dh_{Ni} + \frac{1-d}{N} \ \forall i : 1, \ldots N \\
= \ & N\frac{1-d}{N} + d(h_{1i} + \ldots + h_{Ni}) \\
=^{7} \ & 1 - d + d(h_{1i} + \ldots + h_{Ni}) \\
= \ & 1 - d + d \\
= \ & 1
\end{aligned}$$

Per qualsevol columna de la matriu G la suma dels seves entrades és 1, per tant, podem concloure que G és una matriu estocàstica i positiva, en conseqüència podem aplicar tots els resultats demostrats anteriorment. En definitiva, sabem que existeix un únic vector estocàstic positiu que la matriu G deixa fixa.

Notem que ens hem distanciat de la matriu del sistema d'equacions que hem proposat per resoldre el problema original[8] aleshores, ens hauríem de demanar com de bona és la nostra matriu de Google per poder donar-nos una solució fiable al problema de quantificar la importància de les pàgines web. Per començar, hem de remarcar que no treballam amb la matriu que deriva directament del graf, ja que en el cas que tenguem un node penjat hem fet la suposició que aquesta pàgina web s'enllaça amb totes les altres, inclosa ella mateixa, fet que podem observar en la Figura 3.3. És a dir, que fins el moment teníem un model en el qual l'usuari navega de forma uniforme per les pàgines que tenen enllaç i de manera aleatòria amb probabilitat $\frac{1}{N}$ quan arriba a una pàgina que no té cap enllaç. Al afegir-li la matriu $\frac{1}{N}E$ estam contemplant la possibilitat que un usuari no se'n vagi a una de les pàgines enllaçades i es canvii aleatòriament a una altra web.

En conclusió, la matriu G modela el comportament d'un usuari que navega per la web suposant que amb una probabilitat d segueixi navegant entre les pàgines enllaça-

[7] Com que H_1 és una matriu estocàstica, llavors, la suma de les seves entrades per columna és 1.

[8] Aquesta matriu va ser proposada com a millora del primer algoritme del Page Rank.

des i amb una probabilitat $1-d$ ignori tots els enllaços i segueixi per una pàgina nova. Segons investigacions de Google, un paràmetre que dóna bons resultats pel model és $d = 0.85$.

Ara, ja tenim totes les eines per resoldre el problema de la Figura 3.3 anem a resoldre-lo, anem a quantificar la importància de les pàgines web. Per fer-ho introduirem la matriu a WxMaxima i calcularem el vector propi corresponent al valor propi 1.

Amb el codi que apareix a l'Annex A.2.3 podem trobar les instruccions necessàries per trobat el vector propi de valor propi 1. El vector solució que obtenim de resoldre el sistema (3.5) és el següent:

$$(0.19954594, 0.29056553, 0.18492813, 0.14003224, 0.18492813)$$

En definitiva, el nostre problema d'ordenar les pàgines web de la Figura 3.3 segons la seva importància vendria donat per el següent ordre:

$$\mathrm{Imp}(P_2) > \mathrm{Imp}(P_1) > \mathrm{Imp}(P_3) = \mathrm{Imp}(P_5) > \mathrm{Imp}(P_4)$$

Com hem pogut comprovar, el teorema de Brouwer i de Perron ens han donat l'existència i la unicitat de punt fix i hem pogut resoldre el sistema calculant el vector propi corresponent al valor propi 1 de la matriu. Fixem-nos que l'exemple donat consta de 5 pàgines i per aquest motiu hem pogut fer els càlculs per mitjà un software algebraic com $WxMaxima$, però realment Google s'enfronta a un nombre enorme de pàgines per ordenar en importància i en conseqüència a una matriu enorme que seria impossible manejar com ho hem fet fins ara. Per aquest motiu, hem de cercar una alternativa més eficient que ens permeti realitzar els càlculs i solucionar el problema. És aquí, quan intervé el Teorema del Punt Fix de Banach.

3.2.3. Teorema del punt fix de Banach per resoldre el problema del Page Rank

Recordem que per aplicar el teorema de Banach és necessari un operador contractiu definit sobre un tancat (no buit) d'un espai mètric complet.

Vegem que qualsevol matriu estocàstica i positiva defineix un operador k-contractiu:

Teorema 9. *Qualsevol matriu H de dimensió $N \times N$ positiva i estocàstica indueix una contracció sobre el conjunt tancat sobre l'espai mètric* $(\Pi_N, d_{||.||_1})$.

Demostració. Sigui H una matriu positiva i estocàstica, volem veure que la transformació lineal A que indueix H compleixi que és k-contractiva, és a dir, que es compleixi que:

$$||A(x) - A(y)||_1 \leq k||x - y||_1 \ \forall x, y \in \Pi_N, \ k \in [0, 1[$$

Com sabem que H és estocàstica, la suma de les entrades de cada columna és exactament 1, per tant podem trobar un nombre $\varepsilon > 0$ tal que:

$$1 = \sum_{i=1}^{N} h_{ij} > N\varepsilon \tag{3.6}$$

I a més, com totes les entrades de A són positives podem exigir que:

$$h_{ij} > \varepsilon \ \forall i, j \tag{3.7}$$

Per altra banda, sigui E una matriu on totes les seves entrades són igual a 1, anem a definir la matriu B de la següent manera:

$$B = \frac{H - \varepsilon E}{1 - N\epsilon}$$[9]

Vegem que B també és una matriu estocàstica i positiva. Aquesta propietat ens permetrà demostrar la k-contractivitat d'A. En primer lloc, per demostrar que és estocàstica, hem de veure que les entrades de B són no negatives. Notem que podem escriure cada entrada de la matriu B de la següent manera:

$$b_{ij} = \frac{h_{ij} - \varepsilon}{1 - N\varepsilon} > 0$$

Llavors, cada entrada de la matriu és positiva perquè està formada per la divisió de dos nombres positius per (3.7) i (3.6).

Per altra banda, vegem que la suma dels seus elements per columna són la unitat. Llavors:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} b_{ij} &= \sum_{i=1}^{N} \frac{h_{ij} - \varepsilon}{1 - N\epsilon} \\
&= \frac{1}{1 - N\epsilon} \sum_{i=1}^{N} (h_{ij} - \varepsilon) \\
&= \frac{1}{1 - N\epsilon} \left(\sum_{i=1}^{N} h_{ij} - N\varepsilon \right) \\
&\overset{H \text{ estocàstica}}{=} \frac{1}{1 - N\epsilon} (1 - N\varepsilon) \\
&= 1
\end{aligned}$$

En conseqüència, com H és una matriu estocàstica, B també ho és. Ara sí, anem a demostrar la k-contractivitat d'H. Notem que H la podem reescriure com:

$$H = (1 - N\varepsilon)B + \varepsilon E$$

Llavors $\forall x, y \in \Pi_N$:

$$\begin{aligned}
A(x-y) &= H \cdot (x-y) = ((1-N\varepsilon)B + \varepsilon E)\,(x-y) = (1-N\varepsilon)B(x-y) + \varepsilon E(x-y) \\
&= (1-N\varepsilon)B(x-y) + \varepsilon Ex - \varepsilon Ey = (1-N\varepsilon)B(x-y)
\end{aligned}$$

[9] Notem que tal i com hem pres ε el denominador no és pot anular per (3.6)

ja que com $x, y \in \Pi_N$: $Ex = \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i = Ey$.

D'aquesta manera, tenim que:

$$\begin{aligned} ||A(x) - A(y)||_1 &= ||A(x-y)||_1 = ||(1-N\varepsilon)B(x-y)||_1 \\ &= (1-N\varepsilon)||B(x-y)||_1 \overset{10}{\leq} (1-N\varepsilon)||(x-y)||_1 \end{aligned}$$

En conseqüència A indueix una k-contracció amb constant de contractivitat $k = 1 - N\varepsilon \in (0,1)$. □

Ara, ja estam en condicions de poder aplicar el Teorema de Punt Fix de Banach i per tant de resoldre el problema de trobar la importància de les diferents pàgines webs d'una manera molt més eficient que no pas trobar el vector propi de Perron de forma algebraica:

Teorema 10. *Si H és una matriu positiva i estocàstica de dimensió $N \times N$, llavors el seu vector de Perron és el límit de la successió: $\{Ax_i\}_{i=1}$ on $x_i = A^{n-i}x_0$ $n : 1, 2, \ldots$ amb $x_0 \in \Pi_N$.*

Demostració. Per demostrar el teorema anterior el que farem serà veure que podem aplicar el Teorema de Punt Fix de Banach, el que ens donarà un únic punt fix per la matriu. Per altra banda, el corol·lari 8 que ens garantirà que aquest punt fix és l'únic vector de Perron de la matriu.

Per veure que podem aplicar el Teorema de Banach hem de comprovar que es compleixen totes les hipòtesis.

En primer lloc, s'ha de complir que la aplicació lineal A que indueix la matriu H satisfà $A(\Pi_N) \subseteq \Pi_N$. Aquest fet ja l'hem vist en la demostració del Teorema 6 de Brouwer.

En segon lloc, Π_N ha de ser un conjunt tancat no buit en un espai mètric complet. Fet que també hem demostrat en la demostració del Teorema 6 de Brouwer, de fet, és un conjunt tancat en l'espai mètric complet $(\mathbb{R}^N, ||\cdot||_1)$.

En tercer lloc, necessitam un operador $k-$contractiu, un fet que obtenim del Teorema 9.

Com es compleixen totes les hipòtesis del Teorema de Banach, podem afirmar que existeix un únic punt de A. A més el punt fix, al qual anomenarem v sabem que pertany a Π_N. És a dir, que pel Teorema de Punt Fix de Banach sabem que $\exists! v \in \Pi_N : \ A(v) = v$. Per tant, l'únic punt fix és l'únic vector propi de Perron.

En conseqüència, el límit dels iterats de l'operador A que indueix la matriu H ha de ser el seu vector de Perron, és a dir, el seu punt fix.

□

[10] El Teorema 18 de l'Annex A.1.1 ens garanteix que tota matriu estocàstica satisfà que la seva norma $||Hx||_1 \leq ||x||_1 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

En definitiva, hem demostrat que per resoldre el problema de trobar la importància de cada pàgina web, podem fer-ho d'una manera eficient a partir de calcular potències de la matriu G. Anem a resoldre el problema plantejat en la Figura 3.3 per mitjà de l'operador que indueix la matriu G.

Com podem veure a l'Annex A.2.4, hem implementat un petit algoritme que ens calcula potències de G a fi de calcular termes de la successió del Teorema 10. Quan trobam dos termes successius amb una distància menor que la precisió del nostre ordenador, donam per vàlid que hem trobat el punt fix de la matriu G.

Si executam l'algoritme A.2.4 obtendrem que el vector *perron_limitsuccessio* (vector propi de Perron) és:

$$(0.1995459,\ 0.2905655,\ 0.1849281,\ 0.1400322,\ 0.1849281)$$

Com era d'esperar, aquesta solució coincideix amb l'obtinguda amb el mètode basat amb el Teorema de 6 i de 7 exposat en la secció 3.2.2. D'aquesta nova forma tan sols hem hagut d'arribar a les $i = 79$ iteracions per aproximar el punt fix.

En definitiva, el nostre problema d'ordenar les pàgines web de la figura 3.3 segons la seva importància vendria donat pel següent ordre:

$$\mathrm{Imp}(P_2) > \mathrm{Imp}(P_1) > \mathrm{Imp}(P_3) = \mathrm{Imp}(P_5) > \mathrm{Imp}(P_4)$$

3.2.4. Aplicació al graf de la Web Stanford

L'exemple anterior ens ha servit per il·lustrar acadèmicament com es pot resoldre el problema de trobar importància de diferents pàgines web. No obstant això, l'exemple no deixa de ser poc realista i per altra part, donada la dimensió del problema no era realment necessària la utilització del Teorema de Banach. Per aquest motiu ens hem disposat a cercar un conjunt de dades lo suficientment gran com per provar la potència del teorema i enfrontar-me a un problema real.

El conjunt de dades amb el qual treballarem a partir d'ara és el graf de les pàgines web de Stanford de l'any 2002[11]. Cal dir que és una xarxa de grans dimensions, ja que està formada per 281903 nodes i 2312497 arestes.

Donada la magnitud del graf i l'abast tecnològic disposat, ha estat impossible poder treballar amb un subconjunt del graf més gran que 10000 nodes, encara que els càlculs s'hagin realitzat mitjançant la plataforma de Microsoft Azure.

L'algoritme utilitzat, implementat en Python, per realitzar aquest càlcul el podem trobar a l'Annex A.2.5. L'anàlisi descriptiu de la sortida de l'algoritme és el següent:

[11] Podem trobar la font del conjunt de dades a la referència [5]

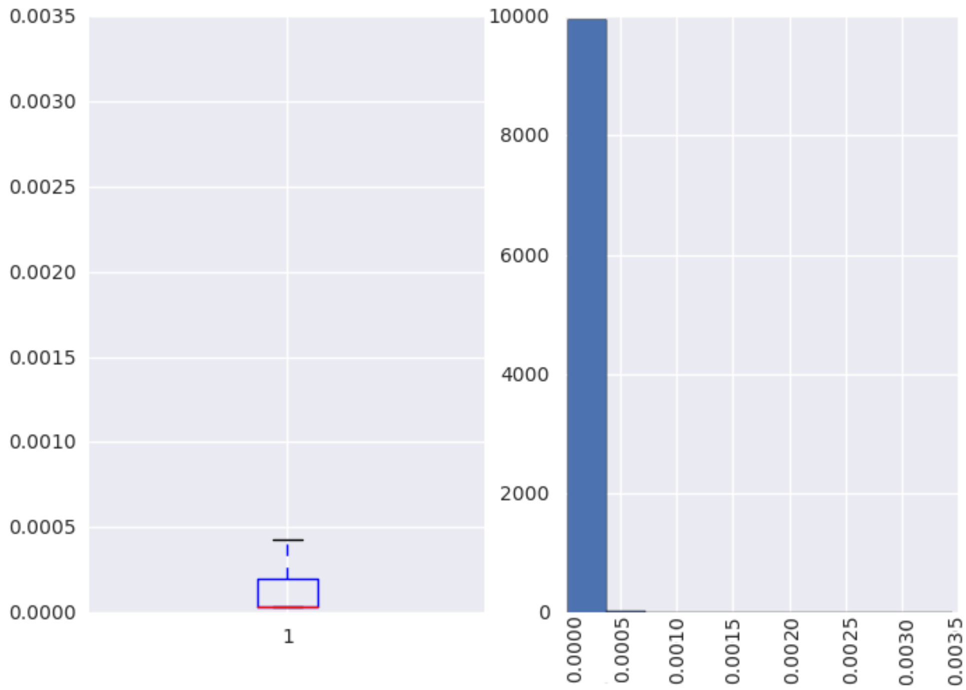
Taula 3.1: Anàlisi descriptiu del Page Rank dels nodes del graf

Nodes	10000
Mitja PR	0.000100
Desviació st. PR	0.000117
Valor mínim PR	0.000038
Primer Quartil	0.000038
Segon Quartil	0.000038
Tercer Quartil	0.000196
Valor màxim PR	0.003444

En primer lloc, podem observar que la desviació típica és major que la mitjana del Page Rank, això ens indica que dins el resultat obtenim valors extrems. Com podem observar, més del 50% dels nodes del graf obtinguts obtenen el mínim valor del Page Rank, llavors podem pensar que la majoria dels nodes tenen una importància mínima sobre la resta de pàgines. A més, cal destacar la gran diferència en importància entre el node amb el major Page Rank i sobre els nodes amb Page Rank mínim, ja que és 90 vegades més important. En particular és 90 vegades més important que el 50% dels nodes.

Per tenir una image més visual dels valors de les dades realitzem un histograma i un diagrama de caixes amb les dades:

Figura 3.4: Histograma i diagrama de caixes dels valors del Page Rank per les pàgines de la Web d'Stanford



Com podríem preveure en l'anàlisi descriptiu de les dades, la majoria de pàgines obtenen un valor molt baix en el seu Page Rank i algunes poques pàgines obtenen valors alts. Aquest fet el podem visualitzar en la mediana del diagrama de caixes i pel fet que no disposam de coa inferior. A més, en l'histograma visualitzam un rang de valors inferiors amb una freqüència absoluta que ocupa pràcticament la totalitat de les dades.

Finalment, per acabar de comentar l'aplicació cal destacar que aplicant el Teorema de Punt Fix de Banach, hem pogut trobar la solució d'aquest problema, de grans dimensions, amb simplement 62 iteracions.

Per escriure l'aplicació econòmica d'aquest capítol ens hem basat en les referències [6] i [7]. Per escriure la aplicació del Page Rank ens hem basat en la referència [8].

CAPÍTOL 4

GENERALITZACIONS

4.1. Generalitzacions del Teorema Punt Fix de Banach

Encara que el Teorema de Punt Fix de Banach és molt potent, tal i com hem mostrat en el Capítol 2 i 3, existeixen casos en què les funcions que estam estudiant no verifiquen la condició de k-contractivitat. Malgrat això, la existència i unicitat de punt fix pot dur-se a terme mitjançant variants del Teorema de Punt Fix de Banach. A continuació ens centrarem en alguna d'aquestes variants.

A continuació un resultat que permet obtenir punt fix d'aplicacions que no arriben a ser k-contractives però mitjançant l'ús d'una altre funció compleix una propietat que recorda a la k-contractivitat.

Teorema 11. *Sigui (X,d) un espai mètric complet i $T : X \to X$. Suposem que existeix una funció $\alpha : \mathbb{R}^+ \to [0,1[$ tal que:*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(t_n) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} t_n = 0 \tag{4.1}$$

i a més es compleix:

$$d(T(x), T(y)) \le \alpha(d(x, y))d(x, y) \ \forall x, y \in X \tag{4.2}$$

Aleshores l'operador T té un únic punt fix $z \in X$ i la successió d'iterats $\{T^n(x)\}$ convergeix a z per a cada $x \in X$.

Demostració. L'objectiu de la demostració és comprovar, com passava amb la demostració del Teorema de Banach, que la successió $\{x_n = T^n(x)\}, x \in X$ és una successió de Cauchy. D'aquesta forma, com ens trobam en un espai mètric complet, la successió de Cauchy és convergent. Finalment veurem que límit d'aquesta successió és el punt fix de l'operador T.

En primer lloc, per veure que la successió és de Cauchy, abans hem de demostrar el següent límit:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0 \tag{4.3}$$

Per demostrar el límit anterior, demostrem que la successió $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ és monòtona decreixent:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(T^n(x), T^{n+1}(x)) = d(T(T^{n-1}(x)), T(T^n(x))) \\ &\stackrel{(4.2)}{\leq} \alpha(d(T^{n-1}(x), T^n(x)))d(T^{n-1}(x), T^n(x)) \\ &\stackrel{\alpha:\mathbb{R}^+\to[0,1[}{<} d(T^{n-1}(x), T^n(x)) = d(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

Com la successió $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ és monòtona decreixent i acotada inferiorment per 0 (ja que d és una mètrica) sabem que és una successió convergent: $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = r \geq 0$. Per demostrar el que límit de la successió és 0, suposem que $r > 0$ i arribem a contradicció.

De (4.2) obtenim:

$$\begin{gathered} d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \alpha(d(x_n, x_{n+1}))d(x_n, x_{n+1}) \ \forall n \geq 1 \\ \Downarrow \\ \frac{d(x_{n+1}, x_{n+2})}{d(x_n, x_{n+1})} \leq \alpha(d(x_n, x_{n+1})) \end{gathered}$$

Aplicant límits:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{d(x_{n+1}, x_{n+2})}{d(x_n, x_{n+1})}\right) \stackrel{\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1})\neq 0}{=} \frac{\lim\limits_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_{n+2})}{\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1})} = \frac{r}{r} = 1$$

I en conseqüència:

$$\begin{gathered} 1 \leq \lim_{n\to\infty} \alpha(d(x_n, x_{n+1})) \\ \Downarrow \\ \lim_{n\to\infty} \alpha(d(x_n, x_{n+1})) = 1 \\ \Downarrow (4.1) \\ \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0 \end{gathered}$$

Com podem observar, hem arribat a una contradicció. Aquesta contradicció ve de suposar que el límit de la successió $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ és diferent de 0, en conseqüència, com volíem veure: $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$.

Ara ja estam en condicions de demostrar que la successió $\{x_n = T^n(x)\}$ és de Cauchy. Vegem que $\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$. Per demostrar-ho, suposarem que $\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) >$

0 i arribem a contradicció.

En primer lloc, apliquem la desigualtat triangular:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\overset{(4.2)}{\leq} d(x_n, x_{n+1}) + \alpha(d(x_n, x_m))d(x_n, x_m) + d(x_{m+1}, x_m) \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$d(x_n, x_m) - \alpha(d(x_n, x_m))d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{m+1}, x_m)$$

$$\Downarrow$$

$$(1 - \alpha(d(x_n, x_m)))d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{m+1}, x_m)$$

$$\Downarrow \alpha : \mathbb{R}^+ \to [0,1[\Rightarrow 1 - \alpha(d(x_n, x_m)) > 0$$

$$d(x_n, x_m) \leq (1 - \alpha(d(x_n, x_m)))^{-1} (d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{m+1}, x_m))$$

Apliquem límits:

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) \leq \lim_{n,m\to\infty} \left[(1 - \alpha(d(x_n, x_m)))^{-1} (d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{m+1}, x_m))\right]$$

$$\Downarrow$$

$$0 < \lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) \leq \lim_{n,m\to\infty} (1 - \alpha(d(x_n, x_m)))^{-1} \lim_{n,m\to\infty} (d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{m+1}, x_m))$$

$$\Downarrow 4.3$$

$$0 < \lim_{n,m\to\infty} (1 - \alpha(d(x_n, x_m)))^{-1} \cdot 0$$

De la desigualtat anterior obtenim que $\lim_{n,m\to\infty}(1 - \alpha(d(x_n, x_m)))^{-1}$ no pot ser finit, i com α és una funció no negativa fitada per 1, tenim que:

$$\lim_{n,m\to\infty} (1 - \alpha(d(x_n, x_m)))^{-1} = +\infty$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n,m\to\infty} \alpha(d(x_n, x_m)) = 1$$

$$\Downarrow \lim_{n\to\infty} \alpha(t_n) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} t_n = 0$$

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$$

Com volíem veure, $\{x_n = T^n(x)\},\ x \in X$ és una successió de Cauchy. En conseqüència, com ens trobam en un espai mètric complet la successió és convergent. Suposem que z és el límit de la successió, per tant: $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = z \in X$. Per acabar de demostrar que z és el punt fix de l'operador, ens queda veure que T és contínua, és a dir:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ : d(x, y) < \delta \Rightarrow d(T(x), T(y)) < \varepsilon$$

Vegem-ho:

$$d(T(x),T(y)) \overset{(4.2)}{\leq} \alpha(d(x,y))d(x,y) < \alpha(d(x,y))\delta \overset{\alpha:\mathbb{R}^+\to[0,1[}{<} \delta$$

Prenent $\delta = \varepsilon$ aconseguim demostrar la continuïtat de T.

Com acabam de demostrar que T és contínua, sabem que la successió d'imatges convergeix a la imatge del límit de la successió, és a dir, $\{T(x_n) = T(T^n(x))\}_{n=1}^{\infty}$ convergeix a $T(z)$. Com ens trobam en un espai mètric, el límit és únic, llavors ha de passar que $T(z) = z$, és a dir, que l'operador té un punt fix.

Ens falta demostrar la unicitat del punt fix per l'operador T. Suposem que no és únic i arribem a contradicció. Suposem que $\exists x, y \in X$ tals que $T(x) = x$ i $T(y) = y$. Aleshores, per (4.2) sabem que:

$$d(x,y) = d(T(x),T(y)) \leq \alpha(d(x,y))d(x,y) \overset{\alpha:\mathbb{R}^+\to[0,1[}{<} d(x,y)$$

Com podem veure, obtenim que $d(x,y) < d(x,y)$ que és un absurd. Aquest absurd ve de suposar que l'operador té dos punts fixos diferents, en conseqüència, T té un únic punt fix. □

El següent resultat també ens permet obtenir punt fix d'aplicacions que no són k-contractives però que mitjançant una funció auxiliar compleixen una propietat similar a la k-contractivitat.

Teorema 12. *Sigui (X,d) un espai mètric complet i $T : X \to X$. Suposem que existeix una funció $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ monòtona decreixent per la qual $0 < \psi(r) < r$ i és contínua per la dreta*[1]*. A més si es compleix:*

$$d(T(x),T(y)) \leq \psi(d(x,y)) \forall x,y \in X \tag{4.4}$$

Aleshores l'operador T té un únic punt fix $z \in X$ i la successió d'iterats $\{T^n(x)\}$ convergeix a z per a cada $x \in X$.

Demostració. Per la demostració d'aquest teorema, el que farem serà construir una nova funció a partir de la nostra ψ que compleixi les hipòtesis del Teorema 11 per així poder aplicar-lo i demostrar la existència i unicitat de punt fix.

La funció que construïm $\overline{\psi} : \mathbb{R}^+ \to [0,1[$, ve donada per:

$$\overline{\psi}(t) = \frac{\psi(t)}{t}$$

Per veure que podem aplicar el teorema anterior, en primer lloc haurem de veure que $\overline{\psi}$ satisfà les condicions del Teorema 11, és a dir, si $\lim_{n\to\infty} \alpha(t_n) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} t_n = 0$.

[1]Recordem que una funció és contínua per la dreta si $r_j \downarrow r \geq 0 \Rightarrow \lim_{j\to\infty} \psi(r_j) = \psi(r)$. Aquí, $r_j \downarrow r \geq 0$ indica que la successió monòtona r_j és monòtona decreixent i convergeix a un nombre real no negatiu r.

Per demostrar que aquesta successió $\{t_n\}$ tendeix a 0, el primer que farem serà demostrar que està acotada. Sabem que qualsevol successió de nombres reals fitada conté una subsuccessió convergent. Sigui $\{t_{n_k}\}$ aquesta subsuccessió de $\{t_n\}$ demostrarem que necessàriament té límit 0. Finalment, donades les hipòtesis de les que disposam, provarem que necessàriament la successió $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$.

Com hem dit, en primer lloc demostrarem que $\{t_n\}$ és acotada. Per fer-ho, suposem que no i arribem a contradicció. Com el domini de $\overline{\psi}$ és $\mathbb{R}^+$, si construïm una successió sobre aquest domini que no és acotada, necessàriament $t_n \to +\infty$. Per altra banda, com ψ és una funció monòtona decreixent fitada per 0, es té que $\lim_{n\to\infty} \psi(t_n) = r \geq 0$, en conseqüència:

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\psi}(t_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\psi(t_n)}{t_n} \overset{\lim_{n\to\infty} t_n \neq 0}{=} \frac{\lim_{n\to\infty} \psi(t_n)}{\lim_{n\to\infty} t_n} = \frac{r}{\lim_{n\to\infty} t_n} = 0$$

Com la nostra hipòtesi és que $\lim_{n\to\infty} \overline{\psi}(t_n) = 1$, aleshores hem arribat a una contradicció. La contradicció ve de suposar que la successió $\{t_n\}$ no és acotada, llavors, necessàriament, ho ha de ser.

D'altra banda, sabem que tota successió de nombres reals en podem extreure una subsuccessió monòtona (podem trobar la demostració al Teorema 21 de l'Annex A.1.1), sigui $\{t_{n_k}\}$ aquesta subsuccessió, com $\{t_n\}$ és fitada $\{t_{n_k}\}$ també ho ha de ser. En resum, tenim una subsuccessió monòtona i fitada, aleshores ha de ser convergent. Al límit d'aquesta subsuccessió l'anomenarem t_0.

Suposem que la subsuccessió és monòtona decreixent, és a dir, que si $n_{k_1} < n_{k_2}$ aleshores $t_{n_{k_1}} > t_{n_{k_2}}$, vegem que necessàriament el límit de la subsuccessió ha de ser $t_0 = 0$. Suposem que $\lim_{n_k\to\infty} t_{n_k} = t_0 \neq 0$. Com ψ és contínua per la dreta tenim que si $t_{n_k} \downarrow t_0 \Rightarrow \lim_{n_k\to\infty} \psi(t_{n_k}) = \psi(t_0)$.

Per altra part, recordem que tenim com hipòtesi que $\lim_{n\to\infty} \overline{\psi}(t_n) = 1$. En particular qualsevol subsuccessió seva convergent també tendeix a 1:

$$1 = \lim_{n_k\to\infty} \overline{\psi}(t_{n_k}) = \lim_{n_k\to\infty} \frac{\psi(t_{n_k})}{t_{n_k}} \overset{\lim_{n_k\to\infty} t_{n_k} = t_0 \neq 0}{=} \frac{\lim_{n_k\to\infty} \psi(t_{n_k})}{\lim_{n\to\infty} t_{n_k}} = \frac{\psi(t_0)}{t_0}$$

$$\Downarrow$$

$$\psi(t_0) = t_0$$

Ara bé, estam suposant que $t_0 \neq 0$, en conseqüència ha de passar que $\psi(t_0) < t_0$, el que implica una contradicció amb la igualtat anterior. Aquesta contradicció ve de suposar que $t_0 \neq 0$, en conseqüència ha de passar que $t_0 = 0$.

Acabem de veure que si la subsuccessió de $\{t_n\}$ és una successió decreixent, aquesta té límit 0. Vegem que passa quan suposam que la subsuccessió és monòtona creixent.

Suposem que la subsuccessió és monòtona creixent, és a dir, que si $n_{k_1} < n_{k_2}$ aleshores $t_{n_{k_1}} < t_{n_{k_2}}$, vegem que necessàriament el límit de la subsuccessió també ha de ser $t_0 = 0$. Suposem que $\lim_{n_k\to\infty} t_{n_k} = t_0 \neq 0$. Com la subsuccessió és monòtona creixent:

$$t_{n_{k-1}} \leq t_{n_k} \leq t_0 \overset{\psi \text{ decreixent}}{\Rightarrow} \psi(t_{n_{k-1}}) \geq \psi(t_{n_k}) \geq \psi(t_0)$$

És a dir, tenim una successió $\{\psi(t_{n_k})\}$ decreixent i fitada inferiorment per 0 (ja que ψ ho està), llavors sabem que és convergent. Sigui r el límit d'aquesta successió $\lim_{n_k\to\infty}\psi(t_{n_k}) = r \geq 0$. D'altre banda, recordem que estam suposant que $\lim_{n\to\infty}\overline{\psi}(t_n) = \lim_{n\to\infty}\dfrac{\psi(t_n)}{t_n} = 1$, en conseqüència totes les subsuccessions de $\overline{\psi}(t_n)$ també han de convergir a 1:

$$1 = \lim_{n_k\to\infty}\overline{\psi}(t_{n_k}) = \lim_{n_k\to\infty}\frac{\psi(t_{n_k})}{t_{n_k}} \overset{\lim_{n_k\to\infty} t_{n_k} = t_0 \neq 0}{=} \frac{\lim_{n_k\to\infty}\psi(t_{n_k})}{\lim_{n_k\to\infty} t_{n_k}} = \frac{r}{t_0} \tag{4.5}$$

$$\Downarrow$$

$$r = t_0$$

És a dir que $\lim_{n_k\to\infty}\psi(t_{n_k}) = t_0$.

Ara bé:

$$t_{n_k} \leq t_0 \overset{\psi(t_{n_k})\downarrow t_0}{\leq} \psi(t_{n_k}) < t_{n_k}$$

Com podem observar, hem arribat a n'aquest fet de suposar que $\lim_{n_k\to\infty} t_{n_k} = t_0 \neq 0$. En conseqüència ha de passar que $t_0 = 0$.

En definitiva, acabam de veure que com a mínim, existeix una subsuccessió de $\{t_n\}$ que és convergent cap a 0, de fet, també hem vist que qualsevol subsuccessió que sigui monòtona de $\{t_n\}$ convergeix a 0. De totes formes, recordem que el que volem demostrar és que la nostra successió acotada $\{t_n\}$ tendeix cap a 0. Per veure-ho, suposem que $\{t_n\}$ no convergeix a 0 i arribem a contradicció. Llavors, suposem el següent:

$$\exists \varepsilon' > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \; \exists m \geq n : \; |t_m| \geq \varepsilon' \tag{4.6}$$

Aleshores, si la successió no convergeix a 0, fixat un n pot passar que $|t_m| \geq \varepsilon'$ per un nombre finit de t_m o per un nombre infinit. Dit d'una altra forma, existeixen un nombre finit o infinit de t_m que no pertanyen a l'obert $\mathscr{U} = [0,\varepsilon')$[2]. Si n'existeixen un nombre finit, llavors prenem com a n_0 el màxim enter no negatiu tal que $|t_{n_0}| \geq \varepsilon'$ i com $n_1 = n_0 + 1$. Aleshores ara si serà cert que:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall m \geq n_1 : \; |t_m| < \varepsilon'$$

En conseqüència, $\nexists \varepsilon'$ que compleixi que (4.6) i per tant ha de passar que la successió és convergent a 0.

Finalment, ens queda per tractar el cas en què tenim infinits $t_m \notin [0,\varepsilon')$. En particular, tots aquests termes els podem considerar com una subsuccessió de $\{t_n\}$, anomenem-la $\{t_{n_j}\}$. A més, sabem que tots els termes d'aquesta subsuccessió pertanyen al tancat

[2]Donat que els termes de la successió són tots reals no negatius, podem considerar la topologia induïda per $\mathbb{R}^+$

$[\varepsilon', \infty)$. Com $\{t_{n_j}\}$ és una successió de nombre reals, en podem extreure una subsuccessió monòtona, diguem-li $\{t_{n_{j_p}}\}$. Per altra part, com $\{t_{n_{j_p}}\}$ està fitada, en conseqüència serà convergent. Per ser monòtona haurà de convergir a 0, com hem dit anteriorment. En resum, tenim una successió que convergeix dins un tancat, aleshores el límit de la successió ha de pertànyer al tancat, és a dir: $0 \notin [\varepsilon', \infty)$, que és un absurd. Aleshores la successió $\{t_n\}$ ha de convergir a 0, com volíem veure.

Acabam de demostrar que si $\lim_{n\to\infty} \overline{\psi}(t_n) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} t_n = 0$. A més es té que $\overline{\psi}$ es defineix sobre $\overline{\psi}(t) : \mathbb{R}^+ \to [0, 1)$ ja que:

$$\overline{\psi}(t) = \frac{\psi(t)}{t} < \frac{t}{t} = 1$$

En conseqüència $\overline{\psi}$ compleix part les hipòtesis del Teorema 11.

Per acabar de veure que estam en les condicions del Teorema 11 ens falta veure que la nostra funció $\overline{\psi}$ compleix la desigualtat (4.2), és a dir, hem de veure que:

$$d(T(x), T(y)) \leq \overline{\psi}(d(x, y))d(x, y)$$

Així, podrem aplicar el teorema esmentat i haurem demostrat que T té un únic punt fix i que $\{T^n(x)\}$ convergeix al punt fix de l'operador.

Per les hipòtesis del nostre teorema sabem que:

$$d(T(x), T(y)) \leq \psi(d(x, y))$$

Si $d(x, y) \neq 0$ es té que:

$$d(T(x), T(y)) \leq \frac{\psi(d(x, y))}{d(x, y)} d(x, y) = \overline{\psi}(d(x, y))d(x, y) \qquad x, y \in X$$

I si $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ i la desigualtat també es compleix:

$$0 = d(T(x), T(y)) \leq \overline{\psi}(d(x, y))d(x, y) = 0 \qquad x, y \in X$$

Com volíem veure.

□

En el següent resultat es considera una condició de contractivitat on la funció auxiliar no és contínua i tampoc monòtona decreixent.

Teorema 13. *Sigui (X, d) un espai mètric complet, suposem que $T : X \to X$ compleix:*

$$d(T(x), T(y)) \leq \psi(d(x, y)) \qquad x, y \in M \tag{4.7}$$

on $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ és semi-contínua per la dreta [3] i satisfà que $0 \leq \psi(t) < t$ per $t > 0$. Aleshores l'operador T té un únic punt fix $z \in X$ i la successió d'iterats $\{T^n(x)\}$ convergeix a z per a cada $x \in X$.

[3] Recordem que una funció és semi-contínua per la dreta si $r_j \downarrow r \Rightarrow \limsup_{j\to\infty} \psi(r_j) \leq \psi(r)$. Aquí, $r_j \downarrow r$ indica que la successió monòtona r_j és monòtona decreixent i convergeix a un nombre real r.

Demostració. Sigui $x \in X$ i $x_n = T^n(x)$, $n = 1,2,3,\ldots$, la demostració del teorema passarà en primer lloc, per demostrar que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$. Aquest fet, ens permetrà demostrar que la successió amb la que estam treballant és de Cauchy. Com ens trobam en un espai mètric complet, la successió convergirà dins l'espai. Per la continuïtat de l'operador (que haurem de demostrar) es tendrà que el seu punt fix és el límit de la successió.

Com hem dit, en primer lloc, vegem que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$. Considerem la següent successió $\{d(x_n, x_{n+1})\}$. En efecte, per (4.7), podem demostrar que és una successió decreixent:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(T^n(x), T^{n+1}(x)) = d(T(T^{n-1}(x)), T(T^n(x))) \\ &\overset{(4.7)}{\leq} \psi(d(T^{n-1}(x)), T^n(x)) \overset{\psi(t)<t}{<} d(T^{n-1}(x)), T^n(x)) = d(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

Podem observar que la successió és decreixent i està fitada inferiorment per 0. En conseqüència és convergent i $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = r \geq 0$. Demostrem que $r = 0$, aplicant límits superiors a la següent desigualtat donada per la contractivitat de T:

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi(d(T^{n-1}(x)), T^n(x))$$
$$\Downarrow$$
$$\limsup_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) \leq \limsup_{n\to\infty} \psi(d(T^{n-1}(x)), T^n(x))$$
$$\Downarrow$$
$$r = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = \limsup_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) \leq \limsup_{n\to\infty} \psi(d(T^{n-1}(x)), T^n(x)) \overset{\psi \text{ semi-cont dreta}}{\leq} \psi(r)$$
$$\Downarrow$$
$$r \leq \psi(r)$$
$$\Downarrow \psi(x) < x,\ \forall x > 0$$
$$r = 0$$

Acabam de veure que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$. Demostrem que $\{x_n\}$ és de Cauchy. Per fer-ho, suposem que no i arribem a contradicció. Si $\{x_n\}$ no és de Cauchy es té que:

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall k \in \mathbb{N}\ \exists m_k, n_k \in \mathbb{N} : m_k > n_k \geq k,\ d(x_{m_k}, x_{n_k}) \geq \varepsilon \tag{4.8}$$

Prenem com m_k el nombre natural menor (major que n_k) pel qual es manté la desigualtat anterior. En conseqüència, per qualsevol nombre menor a m_k (denotem-lo amb m'_k: $m_k > m'_k$) ha de passar que:

$$d(x_{m'_k}, x_{n_k}) < \varepsilon$$

Ja que en cas contrari, m_k no seria el menor nombre que compleix (4.8). En particular es compleix per $m'_k = m_k - 1$:

$$d(x_{m_k-1}, x_{n_k}) < \varepsilon \tag{4.9}$$

Per altra banda, com $m_k > n_k \geq k$ i la successió $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ és decreixent, es compleix que:

$$d(x_{m_k}, x_{m_{k-1}}),\ d(x_{m_k}, x_{m_{k+1}}),\ d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \leq d(x_k, x_{k+1}) \tag{4.10}$$

A continuació veurem que $\lim_{k\to\infty} d(x_{m_k}, x_{n_k}) = \varepsilon$. Apliquem la desigualtat triangular a la distància $d(x_{m_k}, x_{n_k})$:

$$\begin{aligned} \varepsilon &\overset{(4.8)}{\leq} d(x_{m_k}, x_{n_k}) \leq d(x_{m_k}, x_{m_{k-1}}) + d(x_{m_{k-1}}, x_{n_k}) \\ &\overset{(4.10)}{\leq} d(x_k, x_{k+1}) + d(x_{m_{k-1}}, x_{n_k}) \overset{(4.9)}{\leq} d(x_k, x_{k+1}) + \varepsilon \end{aligned}$$

Com sabem que $\lim_{k\to\infty} d(x_k, x_{k+1}) = 0$, aplicant límits a la desigualtat anterior:

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon \leq \lim_{k\to\infty} d(x_{m_k}, x_{n_k}) \leq \lim_{k\to\infty} d(x_k, x_{k+1}) + \varepsilon$$
$$\Downarrow$$
$$\varepsilon \leq \lim_{k\to\infty} d(x_{m_k}, x_{n_k}) \leq \varepsilon$$
$$\Downarrow$$
$$\lim_{k\to\infty} d(x_{m_k}, x_{n_k}) = \varepsilon$$

Per altra banda:

$$\begin{aligned} d(x_{m_k}, x_{n_k}) &\leq d(x_{m_k}, x_{m_k+1}) + d(x_{m_k+1}, x_{n_k+1}) + d(x_{n_k+1}, x_{n_k}) \\ &\overset{(4.10)}{\leq} 2d(x_k, x_{k+1}) + d(x_{m_k+1}, x_{n_k+1}) \\ &\overset{(4.7)}{\leq} 2d(x_k, x_{k+1}) + \psi(d(x_{m_k}, x_{n_k})) \end{aligned}$$

Si una altre vegada aplicam límits superiors:

$$\limsup_{k\to\infty} d(x_{m_k}, x_{n_k}) \leq \limsup_{k\to\infty} \left(2d(x_k, x_{k+1}) + \psi(d(x_{m_k}, x_{n_k}))\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\varepsilon = \lim_{k\to\infty} d(x_{m_k}, x_{n_k}) = \limsup_{k\to\infty} d(x_{m_k}, x_{n_k}) \leq \limsup_{k\to\infty} 2d(x_k, x_{k+1}) + \limsup_{k\to\infty} \psi(d(x_{m_k}, x_{n_k}))$$
$$\Downarrow$$
$$\varepsilon \leq \lim_{k\to\infty} 2d(x_k, x_{k+1}) + \limsup_{k\to\infty} \psi(d(x_{m_k}, x_{n_k})) = \limsup_{k\to\infty} \psi(d(x_{m_k}, x_{n_k})) \overset{\psi \text{ semi-cont dreta}}{\leq} \psi(\varepsilon)$$
$$\Downarrow$$
$$\varepsilon \leq \psi(\varepsilon)$$
$$\Downarrow$$
$$\text{Contradicció perquè } \varepsilon > 0!$$

La contradicció ve de suposar que la successió no és de Cauchy, en conseqüència podem afirmar que $\{x_n = T^n(x)\}$ és de Cauchy. Com ens trobam en un espai mètric complet la successió és convergent. Suposem z és el límit de la successió, per tant: $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = z \in X$. Per acabar de demostrar que z és el punt fix de l'operador, ens queda veure que T és contínua, és a dir:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ :\ d(x, y) < \delta \Rightarrow d(T(x), T(y)) < \varepsilon$$

Vegem-ho:

$$d(T(x),T(y)) \overset{(4.7)}{\leq} \psi(d(x,y)) < d(x,y) \overset{\psi(t)<t}{<} \delta$$

Prenent $\delta = \varepsilon$ aconseguim demostrar la continuïtat de T.

Com acabam de demostrar que T és contínua, per tant sabem que la successió d'imatges convergeix a la imatge del límit de la successió, és a dir, $\{T(x_n) = T(T^n(x))\}_{n=1}^{\infty}$ convergeix a $T(z)$. Com ens trobam en un espai mètric, el límit és únic, llavors ha de passar que $T(z) = z$, és a dir, que l'operador té un punt fix.

Ens falta demostrar la unicitat de punt fix per l'operador T. Al igual que hem fet en el Teorema 11, suposem que no és únic i arribem a contradicció. Suposem que $\exists x, y \in X,\ x \neq y$ tals que $T(x) = x$ i $T(y) = y$. Aleshores, per (4.7) sabem que:

$$d(x,y) = d(T(x),T(y)) \leq \psi(d(x,y)) \overset{d(x,y)>0,\ \psi(t)<t}{<} d(x,y)$$

Com podem veure, obtenim que $d(x,y) < d(x,y)$ que és un absurd. Aquest absurd ve de suposar que l'operador té dos punts fixos diferents, en conseqüència, T té un únic punt fix.

□

Observem que el Teorema 12 és un cas particular del Teorema 13.

En el següent resultat es consideren condicions de contractivitat generades per funcions auxiliars que satisfan les mateixes condicions que el Teorema 12, llevat que aquestes són monòtones creixents. Aquest fet ens requerirà treballar amb operadors definits sobre conjunts tancats i fitats d'un espai mètric.

Teorema 14. *Sigui (X,d) un espai mètric complet i M un subconjunt tancat i fitat de X. Suposem que $T: X \to X$ compleix:*

$$d(T(x),T(y)) \leq \varphi(d(x,y)) \qquad x,y \in M \tag{4.11}$$

On $\varphi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ és una funció creixent i contínua per la dreta que satisfà $\varphi(t) < t$ per $t > 0$. Aleshores l'operador T té un únic punt fix $z \in X$ i la successió d'iterats $\{T^n(x)\}$ convergeix a z per a cada $x \in X$. A més, si d_0 és el diàmetre de M, aleshores:

$$d(T^n(x),z) \leq \varphi^n(d_0)$$

i $\varphi^n(d_0) \to 0$ quan $n \to \infty$.

Demostració. Com M és un subconjunt tancat de X, tenim que (M,d) també és un espai mètric complet, llavors com tenim les mateixes hipòtesis que el Teorema 13, ja que qualsevol funció contínua per la dreta és semi-contínua per la dreta. Aleshores podem aplicar el Teorema 13 i queda demostrada l'existència i unicitat de punt fix per l'operador T i a més $\{T^n(x)\}$ convergeix al punt fix. Sigui z aquest punt fix, vegem que:

$$d(T^n(x),z) \leq \varphi^n(d_0)$$

on $d_0 = \sup\{d(x,y):\ x,y \in M\}$. Notem que el diàmetre de M és finit pel fet que M és un conjunt fitat.

Com sabem que la nostra funció φ és creixent, aplicant la desigualtat que ens dóna (4.11) a cada pas en la següent cadena de desigualtats, obtenim el següent:

$$\begin{aligned} d(T^n(x),z) &\overset{(4.11)}{\leq} \varphi(d(T^{n-1}(x),z)) = \varphi(d(T(T^{n-2}(x)),T(z))) \\ &\overset{(4.11),\ \varphi \text{ creixent}}{\leq} \varphi(\varphi(d(T^{n-2}(x),z))) \leq \quad \cdots \quad \leq \varphi^{n-1}(T(x),z) \leq \varphi^n(d(x,z)) \\ &\overset{\varphi^n \text{creixent}^4}{\leq} \varphi^n(d_0) \end{aligned}$$

Com volíem veure. Ens falta veure que $\lim_{n\to\infty} \varphi^n(d_0) = 0$. En primer lloc, com φ és una funció que compleix que $\forall t > 0$ $\varphi(t) < t$ i a més és creixent es té que $\varphi^2(t) = \varphi(\varphi(t)) < \varphi(t)$. Aplicant φ a la desigualtat anterior n vegades, observam que obtenim una successió $\{\varphi^n(t)\}$ decreixent i acotada inferiorment per 0 (ja que φ ho està), en conseqüència $\{\varphi^n(t)\}$ és convergent. Suposem que $\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t) = r > 0$ i arribem a contradicció.

Com φ és contínua per la dreta tenim que:

$$\varphi^n(t) \downarrow r \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \varphi(\varphi^n(t)) = \lim_{n\to\infty} \varphi^{n+1}(t) = \varphi(r)$$

Per altra banda, $\lim_{n\to\infty} \varphi^{n+1}(t) = r$, per unicitat de límits ha de passar que $\varphi(r) = r$ però com $r > 0$ hauria de passar que $\varphi(r) < r$, per tant hem arribat a una contradicció. Aquesta contradicció ve de suposar que $r \neq 0$, aleshores acabam de demostrar que $\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t) = 0$, com volíem veure. □

El següent resultat mostra que el Teorema 14 és cert quan es conserva la monotonia de la funció que indueix la contractivitat i es reemplaça la resta de condicions per una de nova.

Teorema 15. *Sigui (X,d) un espai mètric complet. Suposem que $T : X \to X$ compleix:*

$$d(T(x),T(y)) \leq \varphi(d(x,y)) \qquad x,y \in M \tag{4.12}$$

on $\varphi :]0,\infty[\to]0,\infty[$ és una funció monòtona creixent i satisfà $\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t) = 0,\ t > 0$. Aleshores l'operador T té un únic punt fix $z \in X$ i la successió d'iterats $\{T^n(x)\}$ convergeix a z per a cada $x \in X$.

Demostració. Al igual que hem fet amb anterioritat, la demostració d'aquest teorema passarà per demostrar que la successió $\{T^n(x) = x_n\}$ és de Cauchy, com ens trobam en un espai complet, la successió ha de ser convergent, i a més demostrarem que convergeix al punt fix de l'operador. Per poder poder veure tot això, en primer lloc veurem que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$.

En primer lloc, com sabem que la nostra funció φ és creixent, aplicant la desigualtat que ens dóna (4.12) a cada pas en la següent cadena de desigualtats, obtenim el següent:

[4]Notem que si ψ és creixent, qualsevol potència seva també ho és.

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(T^n(x), T^{n+1}(x)) = d(T(T^{n-1}(x)), T(T^n(x))) \overset{(4.12)}{\leq} \varphi(d(T^{n-1}(x), T^n(x)))$$

És a dir, que $\forall n$ es compleix que:

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \varphi(d(T^{n-1}(x), T^n(x))) \tag{4.13}$$

Per la desigualtat anterior i com φ és creixent:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\overset{(4.13)}{\leq} \varphi(d(T^{n-1}(x), T^n(x))) \overset{(4.13),\ \varphi \text{ creixent}}{\leq} \varphi\left(\varphi\left(d(T^{n-2}(x), T^{n-1}(x))\right)\right) \\ &\leq \cdots \leq \varphi^{n-1} d(T(x), T^2(x)) \leq \varphi^n(d(x, T(x))) \end{aligned}$$

Aplicant límits a la desigualtat anterior:

$$\begin{gathered} d(x_n, x_{n+1}) \leq \varphi^n(d(x, T(x))) \\ \Downarrow \lim_{n\to\infty} \varphi^n(t) = 0,\ t = d(x, T(x)) > 0^{5} \\ \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) \leq \lim_{n\to\infty} \varphi^n(d(x, T(x))) = 0 \\ \Downarrow d \text{ és mètrica} \\ 0 \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) \leq 0 \\ \Downarrow \\ \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0 \end{gathered}$$

En segon lloc, vegem que la nostra successió és de Cauchy, és a dir:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq n_0 :\ d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Per veure això, anem a veure que donades les hipòtesis amb les que comptam podem deduir que $\varphi(t) < t,\ t > 0$. Suposem que no i arribem a contradicció:

$$\varphi(t) \geq t \overset{\varphi \text{ creixent}}{\Rightarrow} \varphi^2(t) \geq \varphi(t) (\geq t) \overset{\text{aplicat } n \text{ vegades}}{\Rightarrow} \varphi^n(t) \geq t \overset{n\to\infty}{\Rightarrow} 0 \geq t \Rightarrow t = 0$$

Com podem veure, tan sols es compleix $\varphi(t) \geq t$ per $t = 0$, en conseqüència es té que:

$$\varphi(t) < t,\ t > 0 \tag{4.14}$$

En particular es compleix que $\forall \varepsilon > 0 :\ \varphi(\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow \varepsilon - \varphi(\varepsilon) > 0$.

D'altra banda, com sabem $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$, tenim que:

$$\forall \varepsilon' = \varepsilon - \varphi(\varepsilon) > 0\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq N,\ d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon - \varphi(\varepsilon) \tag{4.15}$$

[5] En cas contrari, ja hauríem trobat l'existència de punt fix per T i bastaria veure la unicitat com veurem més endavant

A continuació restringirem el nostre operador al següent conjunt:

$$K(x_n,\varepsilon) = \{x \in X : \ d(x_n, x) < \varepsilon\}$$

Vegem que amb aquesta restricció es compleix que: $T : K(x_n,\varepsilon) \to K(x_n,\varepsilon)$, és a dir, si $y \in K(x_n,\varepsilon) \Rightarrow T(y) \in K(x_n,\varepsilon)$. Apliquem la desigualtat triangular:

$$\begin{aligned} d(T(y), x_n) &\leq d(T(y), T(x_n)) + d(T(x_n), x_n) \\ &\overset{(4.12)}{\leq} \varphi(d(y, x_n)) + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\overset{y\in K(x_n,\varepsilon),\varphi \text{ creixent}}{<} \varphi(\varepsilon) + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\overset{(4.15)}{<} \varphi(\varepsilon) + \varepsilon - \varphi(\varepsilon) = \varepsilon \end{aligned}$$

En conseqüència $T(y) \in K(x_n,\varepsilon)$ i aleshores tenim que: $T : K(x_n,\varepsilon) \to K(x_n,\varepsilon)$. És a dir, que *si un element pertany al conjunt $K(x_n,\varepsilon)$, la iteració de les seves imatges per l'operador T també.*

D'altra banda sabem que $K(x_n,\varepsilon)$ no és el conjunt buit, perquè com mínim hi pertany x_n donat que $0 = d(x_n, x_n) < \varepsilon$.

Recordem que ens falta veure que $\exists n_0$, tal que $\forall m \geq n \geq n_0$ tenim que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, és a dir, hem de veure que $x_m \in K(x_n,\varepsilon)$, vegem-ho:

$$x_m = T^m(x) = T^{m-n}(T^n(x)) = T^{m-n}(x_n) \overset{x_n\in K(x_n,\varepsilon)}{\Rightarrow} x_m \in K(x_n,\varepsilon)$$

En conseqüència si prenem $n_0 = N$ tenim que la imatge de qualsevol element de $K(x_n,\varepsilon)$ pertany al mateix conjunt i per tant $\forall m \geq n \geq n_0$ tenim que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, com volíem veure.

Com ens trobam en un espai mètric complet la successió és convergent. Suposem que z és el límit de la successió, per tant: $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = \lim_{n\to\infty} x_n = z \in X$.

Per acabar de demostrar que z és el punt fix de l'operador, ens queda veure que T és contínua, és a dir:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \ : \ d(x, y) < \delta \Rightarrow d(T(x), T(y)) < \varepsilon$$

Vegem-ho:

$$d(T(x), T(y)) \overset{(4.12)}{\leq} \varphi(d(x, y)) \overset{(4.14)}{<} d(x, y) < \delta$$

Prenent $\delta = \varepsilon$ aconseguim demostrar la continuïtat de T.

Com acabam de demostrar que T és contínua, sabem que la successió d'imatges convergeix a la imatge del límit de la successió, és a dir, $\{T(T^n(x))\}_{n=1}^{\infty}$ convergeix a $T(z)$. Com ens trobam en un espai mètric, el límit és únic i llavors ha de passar que $T(z) = z$, és a dir, que l'operador té un punt fix.

Ens falta demostrar la unicitat de punt fix per l'operador T. Suposem que no és únic i arribem a contradicció. Suposem que $\exists x, y \in X,\ x \neq y$ tals que $T(x) = x$ i $T(y) = y$. Aleshores, per (4.12) sabem que:

$$d(x, y) = d(T(x), T(y)) \leq \varphi(d(x, y)) \overset{(4.14),\ d(x,y)>0}{<} d(x, y)$$

Com podem veure, obtenim que $d(x, y) < d(x, y)$ que és un absurd. Aquest absurd ve de suposar que l'operador té dos punts fixos diferents, en conseqüència, T té un únic punt fix.

□

Fins el moment, hem treballat amb funcions k-contractives o amb funcions que, mitjançant una funció auxiliar, complien una propietat que recordava a la k-contractivitat, però que passa amb les funcions contractives, és a dir, amb aquelles que compleixen que $d(T(x), T(y)) < d(x, y)\ \forall x, y \in M,\ x \neq y$? La unicitat i la existència de punt fix ve garantida pel Teorema de Nemytskii-Eldestein, el qual requereix hipòtesis sobre l'espai mètric.

Teorema 16 (Teorema de Nemytskii-Eldestein)**.** *Sigui (X, d) un espai mètric compacte i sigui $T : X \to X$ un operador contractiu. Aleshores T té un únic punt fix x_0, a més, la successió d'iterats $\{T^n(x)\}$ convergeix a x_0 per a cada $x \in X$.*

Demostració. En primer lloc, provarem l'existència de punt fix. Suposem que no té punt fix i arribem a contradicció. Per això definim la funció $\psi : X \to \mathbb{R}^+$ de la següent manera:

$$\psi(x) = d(x, T(x))$$

La funció ψ és una funció contínua i a més està definida sobre un compacte, aleshores ψ assoleix les seves fites sobre el seu conjunt de definició, en particular sabem que ha de assolir el seu mínim per un valor que anomenarem $x_0 \in X$. Recordem que estam suposant que l'operador no té punt fix, en particular, s'ha de complir que $x_0 \neq T(x_0)$:

$$\psi(T(x_0)) = d(T(x_0), T^2(x_0)) \overset{T \text{ contractiva},\ x_0 \neq T(x_0)}{<} d(x_0, T(x_0)) = \psi(x_0)$$

Acabam de veure que el punt $T(x_0)$ és menor que el propi mínim. Aquesta contradicció ve de suposar que $x_0 \neq T(x_0)$, ha de passar que $x_0 = T(x_0)$. Un cop demostrada la existència, anem a veure la unicitat.

Suposem que $\exists x \neq y \in X$ tal que $T(x) = x$ i $T(y) = y$. Com T és una funció contractiva:

$$d(x, y) = d(T(x), T(y)) < d(x, y)$$

Com podem observar, hem arribat a una contradicció. En conseqüència ha de passar que $x = y$ i per tant tenim existència i unicitat de punt fix.

Finalment, vegem que $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = x_0\ \forall x \in X$. Per veure-ho, considerem la següent successió $\{d(T^n(x), x_0)\}$, provem que és decreixent:

$$d(T^{n+1}(x), x_0) = d(T(T^n(x)), T(x_0)) \overset{T \text{ contractiva}}{<} d(T^n(x), x_0)$$

Tenim una successió decreixent i acotada inferiorment per 0 (ja que d és mètrica), en conseqüència és convergent:

$$\lim_{n\to\infty} d(T^n(x), x_0) = r \geq 0 \tag{4.16}$$

D'altra banda, com X és un espai compacte sabem que de la successió $\{T^n(x)\}$ se'n pot extreure una de convergent. Sigui $\{T^{n_r}(x)\}$ aquesta subsuccessió, compleix que

$$\lim_{n_r\to\infty} T^{n_r}(x) = z \in X \tag{4.17}$$

D'aquesta forma tenim:

$$\begin{aligned}
d(z, x_0) &\overset{(4.17),\, d \text{ cont}}{=} \lim_{n_r\to\infty} d(T^{n_r}(x), x_0) \overset{(4.16)}{=} \lim_{n_r\to\infty} d(T^{n_r+1}(x), x_0) \\
&= \lim_{n_r\to\infty} d(T(T^{n_r}(x)), x_0) \overset{d,T \text{ cont}^6}{=} d(T(\lim_{n_r\to\infty} T^{n_r}(x)), x_0) \\
&= d(T(z), x_0)
\end{aligned}$$

Per altra banda, $\lim_{n_k\to\infty} d(T^{n_r}(x), x_0) \overset{(4.16)}{=} r \Rightarrow r = d(z, x_0)$. Si $z \neq x_0$, com l'operador és contractiu, s'ha de complir que:

$$d(T(z), x_0) = d(T(z), T(x_0)) < d(z, x_0)$$

Però acabàvem de veure que $d(z, x_0) = d(T(z), x_0)$. Hem arribat a n'aquesta contradicció de suposar que $z \neq x_0$, aleshores

$$z = x_0 \Rightarrow r = d(z, x_0) = 0$$

i en conseqüència:

$$\lim_{n\to\infty} d(T^n(x), x_0) = r = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} T^n(x) = x_0$$

□

Per escriure aquest capítol de generalitzacions ens hem basat la primera i segona seccions de la referència [4].

[6] T és contínua, és a dir:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ : 0 < d(x, y) < \delta \Rightarrow d(T(x), T(y)) < \varepsilon$$

Vegem-ho:

$$d(T(x), T(y)) \overset{T \text{ contractiva}}{<} d(x, y) = \delta < \delta$$

Prenent $\delta = \varepsilon$ aconseguim demostrar la continuïtat de T.

CAPÍTOL 5

CONCLUSIONS

5.1. Conclusions

A continuació, anem a emfatitzar quins han estat els punts més importants.

En primer lloc, en el Capítol 1, s'han introduït els diferents tipus bàsics de funcions contractives que es poden trobar a la literatura i n'hem exposat alguns exemples. De tots ells, ens hem restringit a estudiar-ne dos: les funcions k-contractives i les contractives. Més endavant, en els Capítols 2, 3 i part del 4 hem continuat estudiant les funcions k-contractives.

Així, en el Capítol 2, hem enunciat i demostrat el Teorema de Punt Fix de Banach. Per fer-ho, el pas clau ha estat construir-nos una successió a partir d'iterar una condició inicial mitjançant l'operador del qual volem trobar el punt fix, i posteriorment hem demostrat que aquesta successió era de Cauchy. Finalment, com estam suposant en tot moment que ens trobam en un espai mètric complet, la successió ha de convergir a un punt de l'espai i, a través de la continuïtat de l'operador, hem acabat per demostrar que aquest límit és el punt fix, i a més, que aquest és independent a la condició inicial elegida. Per altra banda, en el Capítol 2 també hem dut a terme una discussió sobre la importància de les hipòtesis del Teorema de Banach i hem argumentat la importància del mateix. En particular, s'ha enaltit el fet que aquest resultat permet desenvolupar una única tècnica que és útil per resoldre de la mateixa forma equacions lineals i no lineals.

En el Capítol 3 hem pogut donar sortida al Teorema de Punt Fix de Banach. La primera de les aplicacions ha estat econòmica, més concretament hem estudiat analíticament la dinàmica de preus de mercat governat per la llei de l'oferta i la demanda. A més, hem il·lustrat aquest estudi amb un exemple numèric concret, en el qual les lleis de l'oferta i la demanda venien donades per funcions lineals. La segona aplicació ha consistit en discutir la implementació de l'algoritme del PageRank de Google. Per a això, s'ha fet ús de la versió convexa del Teorema de Punt Fix de Brower i del Teorema de Perron per a operadors induïts per matrius estocàstiques. No obstant, s'ha demostrat que el Teorema de Punt Fix de Banach introdueix una tècnica més eficient per a la implementació del PageRank. Finalment, la teoria exposada s'ha aplicat a un exemple concret, el de la web de la Universitat de Standford. Per desenvolupar aquest exemple de gran dimensió, s'han necessitat tan sols 62 iteracions per obtenir el seu corresponent valor del PageRank. Encara que Banach ens asseguri la existència i unicitat de solució independentment de la condició inicial considerada, hem pogut apreciar que el nom d'iteracions que s'ha de realitzar per arribar a la solució és bastant sensible a la condició inicial esmentada, ja que si començam a iterar amb un valor molt enfora del punt fix ens tardarà en convergir més que si iniciem el procés d'iterar a partir d'una condició inicial propera a aquest punt fix.

Encara que el Teorema de Banach realment és molt útil en moltes aplicacions, existeixen situacions en les quals es desitja obtenir l'existència i unicitat de punt fix d'operadors que no satisfan la condició de k-contractivitat del Teorema de Banach. Per aquesta raó, el Capítol 4 hem exposat diverses generalitzacions d'aquest teorema les quals involucren condicions de contractivitat obtingudes mitjançant l'ús de funcions auxiliars que recorden a l'esmentada k-contractivitat. Finalment, en el mateix capítol s'ha exposat el Teorema de Nemytskii-Edelstein el qual garanteix l'existència i unicitat de punt fix per un tipus de funcions que hem tractat en el Capítol 1, les funcions contractives.

APÈNDIX A

ANEXOS

A.1. Anexos

A continuació, exposarem els diferents resultats que no provenen directament de la teoria de punt fix però que ens han estat útils per elaborar aquest treball. Les referències que s'han consultat per a la seva recopilació han estat [8] , [9] i [10]. A més, s'exposen els diferents codis que han estat implementats per als exemples numèrics i les aplicacions.

A.1.1. Teoremes Auxiliars

Teorema 17 (Teorema del Valor Mitjà per funcions escalars)**.** *Sigui $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D obert. Siguin a i $b = a + h$ dos elements de D tals que el segment $[a, b] \subset D$ amb $h \in \mathbb{R}$. Si f és una funció contínua en tots els punts de $[a, b]$ i diferenciable en $]a, b[$, llavors existeix $\xi \in]a, b[$ tal que:*

$$f(a+h) - f(a) = Df(\xi)[h] \qquad \xi = a + \theta h \text{ amb } \theta \in]0,1[$$

Demostració. La demostració d'aquest resultat no s'inclou per ser un resultat bàsic, no relacionat amb el cos del treball i ha estat àmpliament estudiat al llarg dels estudis GMAT. Es pot trobar la demostració a la referència [10] □

El resultat que ve a continuació ha estat molt útil en la demostració del Teorema 9 en el Capítol 3.

Teorema 18. *Sigui H una matriu estocàstica de dimensió NxN i $x \in \mathbb{R}^N$:*

$$||Hx||_1 \leq ||x||_1 \tag{A.1}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} h_{11} & \dots & h_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N1} & \dots & h_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 h_{11} + x_2 h_{12} + \ldots + x_N h_{1N} \\ \vdots \\ x_1 h_{N1} + x_2 h_{N2} + \ldots + x_N h_{NN} \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&||Hx||_1 = |x_1h_{11} + x_2h_{12} + \ldots + x_Nh_{1N}| + \ldots + |x_1h_{N1} + x_2h_{N2} + \ldots + x_Nh_{NN}| \\
&\leq |x_1h_{11}| + |x_2h_{12}| + \ldots |x_Nh_{1N}| + \ldots\ldots + |x_1h_{N1}| + |x_2h_{N2}| + \ldots + |x_Nh_{NN}| \\
&\overset{h_{ij}\geq 0}{=} h_{11}|x_1| + h_{12}|x_2| + \ldots\ldots h_{1N}|x_N| + \ldots + h_{N1}|x_1| + h_{N2}|x_2| + \ldots + h_{NN}|x_N| \\
&= (h_{11} + \ldots + h_{N1})|x_1| + (h_{12} + \ldots + h_{N2})|x_2| + \ldots + (h_{1N} + \ldots\ldots + h_{NN})|x_N| \\
&\overset{H \text{ estocàstica}}{=} |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_N| = ||x||_1
\end{aligned}
$$

Els tres resultats següents han estat emprats per dur a terme la demostració del Corol·lari 8 i del Teorema 10 en el Capítol 3.

Lema 1. *Sigui H una matriu positiva de dimensió $M \times N$, llavors $Hx > 0$ si $x \in \mathbb{R}^N_+ \setminus \{0\}$.*

Demostració. Efectuem la multiplicació i vegem que ens queda:

$$
Hx = \begin{pmatrix} h_{11} & \ldots & h_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N1} & \ldots & h_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1h_{11} + x_2h_{12} + \ldots + x_Nh_{1N} \\ \vdots \\ x_1h_{N1} + x_2h_{N2} + \ldots + x_Nh_{NN} \end{pmatrix}
$$

Com H és una matriu positiva, totes les seves entrades són estrictament positives. Per altra part com x és un vector d'entrades no negatives i diferent del vector nul, com estam operant nombres majors o iguals que 0 (i no tots són nuls) és evident que obtendrem un vector positiu no nul. □

Teorema 19. *Sigui H una matriu quadrada positiva de dimensió NxN aleshores té un valor propi positiu i el seu vector propi corresponent és positiu*[1]

Demostració. Considerem la següent funció: $f(x) = \frac{Hx}{||Hx||_1}$. Sabem que $f(x)$ és una funció contínua perquè és una funció lineal de varies variables. A més $f(\Pi_N) \subseteq \Pi_N$. Per aquet fet, podem aplicar la versió convexa del Teorema de Brouwer (Teorema 6) i en conseqüència sabem que té un punt fix a Π_N. Sigui $x_0 \in \Pi_N$ aquest punt fix, es té que:

$$
f(x_0) = \frac{Hx_0}{||Hx_0||_1} = x_0
$$
$$
\Downarrow
$$
$$
Hx_0 = ||Hx_0||_1 x_0
$$

És a dir, que H té un valor propi $\lambda = ||Hx_0||_1 > 0$ amb vector propi x_0. Per veure que x_0 és positiu, basta aplicar el Lema 1 que ens diu que $Hx_0 > 0$ i en conseqüència $x_0 = \lambda^{-1}Hx_0 > 0$. □

Teorema 20 (Teorema de Perron)**.** *Cada matriu quadrada positiva H té una única parella pròpia de Perron.*

[1]Recordem que quan ens referim a una matriu positiva o un vector positiu volem dir que tots les seves entrades són positives

Demostració. Com H és una matriu positiva, pel Teorema 19 sabem que té un valor propi positiu i el seu corresponent vector propi també es positiu, és a dir, H té una parella pròpia de Perron, diguem-li $(\lambda, \mathbf{x})$ i es compleix que

$$H\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{A.2}$$

En primer lloc, vegem que el valor propi d'aquesta parella és únic, en segon lloc veurem que el seu vector propi també ho és.

Per ser H positiva, sabem que H^t també ho és, llavors també li podem aplicar el Teorema 19 i sabem que també té una parella pròpia de Perron $(\mu, \mathbf{y})$ i en conseqüència es compleix que

$$H^t\mathbf{y} = \mu\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{y}^t H = \mu\mathbf{y}^t \tag{A.3}$$

D'altra banda, sabem que:

$$\mu(\mathbf{y}^t\mathbf{x}) = (\mu\mathbf{y}^t)\mathbf{x} \stackrel{(A.3)}{=} (\mathbf{y}^t H)\mathbf{x} = \mathbf{y}^t(H\mathbf{x}) \stackrel{(A.2)}{=} \mathbf{y}^t(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{y}^t\mathbf{x})$$

Com $\mathbf{y}$ i $\mathbf{x}$[2] són vectors propis d'una parella pròpia de Perron, llavors, són positius, en consequència $\mathbf{y}^t\mathbf{x} > 0$ és un valor real estrictament positiu. D'aquesta forma podem dividir tota la cadena de desigualtats anterior per $\mathbf{y}^t\mathbf{x}$ i obtenim que $\mu = \lambda$.

Amb la idea anterior, just acabam de construir la base per la qual demostrarem la unicitat del valor propi de Perron, ja que si ara suposam que existeix una altre parella pròpia $(\alpha, \mathbf{z})$ de Perron de H, és a dir, és compleix que $\alpha > 0$, $\mathbf{z} > 0$ i

$$H\mathbf{z} = \alpha\mathbf{z} \tag{A.4}$$

Seguint el procediment anterior:

$$\mu(\mathbf{y}^t\mathbf{z}) = (\mu\mathbf{y}^t)\mathbf{z} \stackrel{(A.3)}{=} (\mathbf{y}^t H)\mathbf{z} = \mathbf{y}^t(H\mathbf{z}) \stackrel{(A.4)}{=} \mathbf{y}^t(\alpha\mathbf{z}) = \alpha(\mathbf{y}^t\mathbf{z})$$

De la mateixa manera d'abans es veu que $\alpha = \mu$ i com $\mu = \lambda \Rightarrow \alpha = \mu$ i queda demostrada la unicitat pel valor propi de la parella de Perron. Per altra banda, notem que els valors propis de Perron coincideixen per la matriu H i la seva trasposta.

La següent passa serà demostrar la unicitat del vector propi de la parella de Perron. Per això, suposem que aquesta parella no és única, és a dir, suposem que existeixen dues parelles de la forma $(\lambda, \mathbf{x})$ i $(\lambda, \mathbf{y})$ on $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ són linealment independents i arribem a contradicció. Notem que el valor propi de les dues parelles és el mateix, ja que acabam de demostrar la seva unicitat.

Per demostrar la unicitat (excepte homotècies) del vector propi de Perron vegem que si $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ són dos vectors independents i propis de Perron d'una matriu positiva H amb valor propi de Perron corresponent λ, aleshores existeix un valor $a \in \mathbb{R}$ tal que $z = ax - y \geq 0$, però, com a mínim, una de les seves entrades és nul·la. Anem a trobar quin és aquest valor a.

[2]Notem que les dimensions de $\mathbf{y}$ i $\mathbf{x}$ són $N \times 1$ en conseqüència la dimensió de $\mathbf{y}^t\mathbf{x}$ és de 1×1

Denotarem per x_j la posició j-èssima del vector $\mathbf{x}$ i denotarem per y_j la posició j-èssima del vector $\mathbf{y}$. En definitiva volem trobar a tal que $ax \geq y$ tal que per alguns índexs $j \in I \subsetneq \{1,\ldots,N\}$ es compleixi que

$$ax_j > y_j \, j \in I \tag{A.5}$$

i per la resta es compleixi que

$$ax_j = y_j \;\; j \in I^c \tag{A.6}$$

En primer lloc, sabem que si existeix aquest valor a, alguna de les coordenades del vector z resultant haurà de ser no nul·la, ja que sinó tendríem una combinació lineal nul·la amb coeficients no nuls[3] de dos vectors linealment independents.

En segon lloc, com $\mathbf{x}$ és un vector estrictament positiu, podem dividir la inequació (A.5) i la igualtat (A.6) pel seu respectiu valor x_j:

$$a > \frac{y_j}{x_j}$$

$$a = \frac{y_j}{x_j}$$

Per trobar a tal que $z = ax - y \geq 0$, basta prenem $a = \max\left\{\dfrac{y_j}{x_j} : j : 1,\ldots,N\right\}$.

En conseqüència, sabem que existeix un valor a tal que $\mathbf{z} = a\mathbf{x} - \mathbf{y} \geq 0$.

En primer lloc, vegem que z també és un vector propi de la matriu H amb valor propi de Perron corresponent λ:

$$H\mathbf{z} = H(a\mathbf{x} - \mathbf{y}) = aH\mathbf{x} - H\mathbf{y} = a\lambda\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y} = \lambda(a\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{z}$$

Per altra banda, com H és una matriu positiva i $\mathbf{z}$ és un vector no negatiu, en conseqüència pel Lema 1 tenim que $H\mathbf{z} > 0$. Com $\mathbf{z}$ és un vector propi de H amb valor propi de Perron $\lambda > 0$:

$$H\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z} > 0 \Rightarrow \mathbf{z} > 0$$

Per tant, tenim una contradicció. La contradicció ve de suposar que x i y són independents, ja que hem pogut aplicar el lema que ens ha donat la contradicció. En conseqüència x i y són dependents, és a dir, $x = \alpha y$, $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$[4] i obtenim que per cada matriu quadrada positiva es té una única parella de Perron, excepte homotècies.

$\square$

El següent resultat ha estat emprat en el Capítol 4 en el qual s'han obtinguts generalitzacions del Teorema de Punt Fix de Banach.

[3] Donat que $a \neq 0$ perquè contradiríem que y és un vector propi de Perron ja que no seria positiu: $z = ax - y \overset{a=0}{=} -y \geq 0 \Rightarrow y \notin \mathbb{R}^N_+$

[4] A més, $\alpha > 0$ donat que els dos vectors de Perron són estrictament positius.

Teorema 21. *Donada una successió de nombres reals sempre en podem extreure una subsuccessió monotònona.*

Demostració. Considerem $\{x_n\}$ una successió de nombres reals. Per demostrar l'enunciat haurem de distingir entre dos casos: que la successió no sigui fitada o que si ho estigui.

En primer lloc, si la successió no és fitada, és a dir, $\lim x_n = \pm\infty$, llavors per força podrem extreure una successió de termes creixents o decreixents.

En segon lloc, si la successió és fitada, utilitzarem el següent concepte: *Direm que x_j és de contenció si $\forall N > j$ es té que $x_N \geq x_j$.* Aquí podem distingir entre tres casos: existeixen un nombre infinit de termes de contenció, n'existeixen un nombre finit o no n'hi ha cap.

En el primer cas, si suposam que n'existeixen un nombre infinit, considerem com x_{j_1} el primer terme de la successió que és de contenció. Sabem que el següent terme que sigui de contenció x_{j_2}, haurà de complir que $x_{j_2} \geq x_{j_1}$, ja que x_{j_1} és de contenció. Com existeixen infinits termes que són de contenció podem construir una successió creixent amb aquests termes, en conseqüència hem aconseguit una subsuccessió monotòna $\{x_{j_i}\}$.

En el segon cas, si suposam que tan sols existeixen M termes de contenció, considerem el següent terme del darrer terme de contenció: x_{j_M+1}. Com aquest darrer no és de contenció, implica que $\exists i_1 > j_M + 1 \equiv i_0$ tal que $x_{i_0} > x_{i_1}$. Amb la mateixa idea x_{i_1} no pot ser de contenció (ja que $i_1 > i_0$ i el $i_0 - 1 = j_M$ era el darrer), això implica que $\exists i_2 > i_1$ tal que $x_{i_0} > x_{i_1} > x_{i_2}$. Seguint aquest mateix raonament, ens anam construint una successió decreixent, en conseqüència hem aconseguit una subsuccessió monotòna $\{x_{j_i}\}$.

El tercer cas és un cas similar a l'anterior. Prenem un terme qualsevol de la successió, per exemple x_{i_0}. En particular sabem que no serà de contenció, per tant això implica que $\exists i_1 > i_0$ tal que $x_{i_0} > x_{i_1}$. Per altra part, x_{i_1} tampoc és de contenció, en conseqüència sabem que $\exists i_2 > i_1$ tal que $x_{i_0} > x_{i_1} > x_{i_2}$. Seguint aquest mateix raonament, ens anam construint una successió decreixent, en conseqüència hem aconseguit una subsuccessió monotòna $\{x_{j_i}\}$.

La idea de la demostració s'ha pres de [9].

□

Sumes de progressions geomètriques de raó k

Donada una progressió geomètrica $\{a_i\}$ de raó r sabem que:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \frac{a_{n+1} - a_0}{r-1} = \frac{a_0 \cdot r^n - a_0}{r-1} = a_0 \cdot \frac{r^n - 1}{r-1} \tag{A.7}$$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \frac{r \cdot a_n - a_m}{r-1} = a_1 \cdot \frac{(r^n - r^{m-1})}{r-1} = a_m \cdot \frac{(r^{n-m+1} - 1)}{r-1} \tag{A.8}$$

A.2. Codi algoritmes utilitzats

A.2.1. Codi exemple $f(x) = \cos(\cos(x))$

```
x0=0
x1=1
i=0
result=c(10,x0)
while (abs(result[length(result)]-result[length(result)-1])>10**(-8)){
  i=i+1
  x1=cos(cos(x0))
  result=c(result,x1)
  x0=x1
}
result=result[-1]
x0
```

A.2.2. Codi punt fix model lineal de mercat

```
puntfix<-function(alpha,beta,gamma,delta){
  f <- function(P, alpha,beta, gamma,delta) (alpha+gamma -delta * P)/beta
  x0=0 #condicio per entrar al bucle
  x1=(gamma/delta+alpha/beta)/2  #preu inicial
  i=0
  while (abs(x0-x1)>10**(-6) && i<10000){
    i=i+1
    x0=x1
    x1=f(x0, alpha,beta,gamma,delta) #preu final

  }
  return (c(x1,i))

}

puntfix(40, 8.5, 30, 8.4) #exemple de execucio
```

A.2.3. Càlcul del PageRank de l'exemple de 5 pàgines web mitjançant el vector propi

A continuació trobarem el codi amb el qual s'ha resolt el problema (3.5):

Començam per introduir la matriu del sistema:

(%i1) H1: matrix([0,0,1/2,1/2,1/5], [1,0,0,1/2,1/5], [0,1/2,0,0,1/5], [0,0,1/2,0,1/5], [0,1/2,0,0,1/5]);

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \tag{H1}$$

(%i2) E: genmatrix(lambda([i,j], 1), 5, 5);

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{E}$$

(%i4) d:0.85; G:d*H1+(1-d)*E/length(E);

$$0.85 \tag{d}$$

$$\begin{pmatrix} 0.03000000000000001 & 0.03000000000000001 & 0.455 & 0.455 & 0.2 \\ 0.88 & 0.03000000000000001 & 0.03000000000000001 & 0.455 & 0.2 \\ 0.03000000000000001 & 0.455 & 0.03000000000000001 & 0.03000000000000001 & 0.2 \\ 0.03000000000000001 & 0.03000000000000001 & 0.455 & 0.03000000000000001 & 0.2 \\ 0.03000000000000001 & 0.455 & 0.03000000000000001 & 0.03000000000000001 & 0.2 \end{pmatrix} \tag{G}$$

Notem que a causa de la precisió de la manipulació algebraica de Wxmaxima hem obtingut un error de càlcul. Com es tracta de una matriu d'un ordre petit, la modificarem manualment per eliminar aquest error de precisió:

(%i5) G:matrix([0.03,0.03,0.455,0.455,0.2],[0.88,0.03,0.03,0.455,0.2],[0.03,0.455,0.03,0.03,0.2], [0.03,0.03,0.455,0.03,0.2],[0.03,0.455,0.03,0.03,0.2]);

$$\begin{pmatrix} 0.03 & 0.03 & 0.455 & 0.455 & 0.2 \\ 0.88 & 0.03 & 0.03 & 0.455 & 0.2 \\ 0.03 & 0.455 & 0.03 & 0.03 & 0.2 \\ 0.03 & 0.03 & 0.455 & 0.03 & 0.2 \\ 0.03 & 0.455 & 0.03 & 0.03 & 0.2 \end{pmatrix} \tag{G}$$

Ara, cerquem els valors propis de la matriu i prenem el vector propi amb valor propi 1:

(%i6) ratprint:false;

$$\text{false} \tag{ratprint}$$

Si demanam que ens ensenyi els valors propis, veim que el valor propi que cercam (l'unitat) es troba a la quarta posició, llavors, demanam que ens mostri el vector propi que apareix en la quarta posició:

(%i7) vectors:eigenvectors(G)$

(%i9) vectors[1]; vectors[2][4][1];

$$[[-\frac{21097\left(\frac{\sqrt{3}\%i}{2}-\frac{1}{2}\right)}{180000\left(\frac{4913\sqrt{19187}}{32000003^{\frac{3}{2}}}-\frac{3483317}{432000000}\right)^{\frac{1}{3}}}+\left(\frac{4913\sqrt{19187}}{32000003^{\frac{3}{2}}}-\frac{3483317}{432000000}\right)^{\frac{1}{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}\%i}{2}-\frac{1}{2}\right)-\frac{17}{75},$$

(%o8)

$$\left(\frac{4913\sqrt{19187}}{32000003^{\frac{3}{2}}}-\frac{3483317}{432000000}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}\%i}{2}-\frac{1}{2}\right)-\frac{21097\left(-\frac{\sqrt{3}\%i}{2}-\frac{1}{2}\right)}{180000\left(\frac{4913\sqrt{19187}}{32000003^{\frac{3}{2}}}-\frac{3483317}{432000000}\right)^{\frac{1}{3}}}-\frac{17}{75},$$

$$\left(\frac{4913\sqrt{19187}}{32000003^{\frac{3}{2}}}-\frac{3483317}{432000000}\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{21097}{180000\left(\frac{4913\sqrt{19187}}{32000003^{\frac{3}{2}}}-\frac{3483317}{432000000}\right)^{\frac{1}{3}}}-\frac{17}{75},1,0],[1,1,1,1,1]]$$

$$[1,\frac{213226}{146433},\frac{135706}{146433},\frac{40}{57},\frac{135706}{146433}] \quad (\%o9)$$

Com podem observar, el vector propi que ens surt és $[1,\frac{213226}{146433},\frac{135706}{146433},\frac{40}{57},\frac{135706}{146433}]$. Anem a comprovar-ho que efectivament aquest vector deixa fixa la matriu G:

(%i10) G.[1,213226/146433,135706/146433,40/57,135706/146433];

$$\begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.456133521815438 \\ 0.9267446545519111 \\ 0.7017543859649122 \\ 0.9267446545519111 \end{pmatrix} \quad (\%o10)$$

Exactament el mateix vector propi en forma decimal:

(%i11) [1,213226/146433,135706/146433,40/57,135706/146433],float;

[1, 1.456133521815438, 0.9267446545519111, 0.7017543859649122, 0.9267446545519111]
(%o11)

I si ara el normalitzam, obtenim la solució al problema (3.5):

(%i10) [1,1.456133521815438,0.9267446545519111,0.7017543859649122,0.9267446545519111] /apply("+",[1,1.456133521815438,0.9267446545519111,0.7017543859649122, 0.9267446545519111]);

[0.19954594, 0.29056553, 0.18492813, 0.14003224, 0.18492813] (%o10)

A.2.4. Càlcul del PageRank de l'exemple de 5 pàgines web amb el Teorema de Banach

A continuació podem observar l'algoritme que s'ha executat mitjançant el paquet de software *R* per poder resoldre el sistema (3.5) aplicant el Teorema del Punt Fix de Banach:

```
G=matrix(c(0.03,0.03,0.455,0.455,0.2,0.88,0.03
0.03,0.455,0.2,0.03,0.455,0.03,0.03,0.2,0.03,
0.03,0.455,0.03,0.2,0.03,0.455,0.03,0.03,0.2)
```

```
,nrow=5,byrow=T) #Introduim la matriu del graf

d=1                     #Condicio  inicial bucle
potencies=diag(5)       #Matriu identitat de dimensio 5
x0=c(1,0,0,0,0)         #Condicio inicial
x2=x0
i=1



while ( d>10^(-15) &  i<1000){
  power=potencies%*%G;  #Anam calculant les potencies de G
  x1=power%*%x0;        #Calculam els termes de la successio
  d=sum(abs(x2-x1));    #Calculam la distancia amb el terme de
#                        la successio anterior
  potencies=power;      #Afegim una potencia a la matriu G
  i=i+1
  x2=x1}                #Avancam en la successio
perron_limitsuccessio=x1

perron_vectorpropi=c(1.0, 1.4561335218154380,0.9267446545519111,
0.7017543859649122,0.9267446545519111) #vector propi de Perron de G

perron_PI=perron_vectorpropi/sum(abs(perron_vectorpropi))

perron_PI #Vector propi de Perron de G normalitzat

i          #Nombre d'iteracions
```

A.2.5. Codi Python del càlcul del PageRank pel graf de Stanford

El codi emprat per a la implementació del PageRank en l'anàlisi de la pàgina web i la Universitat de Stanford és el següent.

```
from azureml import Workspace
ws = Workspace(
    workspace_id=' ',
    authorization_token=' ',
    endpoint='https://studioapi.azureml.net'
)
ds = ws.datasets['web-Stanford.txt']
frame = ds.to_dataframe()

NODES = 10000
import time
```

```
import sys
import os
import numpy as np

def adj():   #CONTRUIM LA MATRIU H
    with ds.open() as f:
        l=[0]*NODES
        matrix=[[0]*NODES for i in range(NODES)]
        for line in f.readlines()[4:]:
            origin, destiny = (int(x)-1 for x in line.split())
            if origin<NODES and destiny<NODES:
                matrix[destiny][origin]=1 #destiny=fila , origin=columna
                l[origin]+=1
    return(matrix,l)


def H1(matrix,l):    #CONSTRUIM LA MATRIU MODIFICADA H1
    for i in range(NODES):
        for j in range(NODES):
            if  l[i]!=0:
                matrix[j][i]=matrix[j][i]*1/(l[i])
            else:
                matrix[j][i]=1/NODES
    return matrix

def Google(d=0.85):   #CONSTRUIM LA MATRIU G DE GOOGLE
    a=adj()
    matrix_H1=H1(a[0],a[1])
    matrix_google=[[0]*NODES for i in range(NODES)]
    for i in range(NODES):
        for j in range(NODES):
            matrix_google[i][j]=d*matrix_H1[i][j] + (1-d)/NODES
    return matrix_google


def Punt_Fix():      #APLICAM EL TEOREMA DE BANACH
    start_time = time.clock()
    d=1
    potencies=np.identity(NODES)
    x0=potencies[0]
    i=1
    x2=x0
    G=np.array(Google())
    while ((d>10**(-6)) and (i<1000)):
        power=np.dot(potencies,G)
        x1=np.dot(power,x0)
        d=sum(abs(x1-x2))
```

```
        pot=potencies
        potencies=power
        i=i+1
        x2=x1
    x=np.dot(pot,x0)
    print (time.clock() - start_time, "seconds" )
    return [x,i]

PageRank = Punt_Fix()

import pandas as pd
x=pd.DataFrame(PageRank[0])
x.describe()

import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
fig, ax = plt.subplots(ncols=2)

ax[0].boxplot(PageRank[0])
ax[1].hist(PageRank[0])

plt.show()
```

Bibliografia

[1] E. Zeidler, A. Nemeth, and C. Gheorghiu, “Nonlinear functional analysis and its applications,” *Acta Applicandae Mathematicae*, vol. 36, no. 3, pp. 304–305, 1994. 1.1.1, 2.1.2

[2] S. Almezel, Q. H. Ansari, and M. A. Khamsi, *Topics in fixed point theory*. Springer, 2014. 5

[3] F. M. Bonnin, *Introducció a la topologia*. Universitat de València, 1997, vol. 20. 2.1.2

[4] M. A. Khamsi and W. A. Kirk, *An introduction to metric spaces and fixed point theory*. John Wiley & Sons, 2001. 2.1.2, 4.1

[5] “Stanford web graph,” http://snap.stanford.edu/data/web-Stanford.html, 2002. 11

[6] I. Mezník, “Banach fixed point theorem and the stability of the market,” in *Proceedings of the International Conference on Mathematics Education into the 21st Century Project*, 2003. 3.2.4

[7] A. C. Chiang, *Métodos fundamentales de economía matemáticaFundamental methods of mathematical economics*. McGraw-Hill, 2006. 3.2.4

[8] J. H. Shapiro, *A Fixed-point Farrago*. Springer, 2016. 3.2.4, A.1

[9] “Sucesiones Monotonas,” www.ugr.es/~rpaya/documentos/CalculoI/2011-12/Monotonas.pdf. A.1, A.1.1

[10] J. de Burgos, *Cálculo infinitesimal de varias variables*. McGraw-Hill, 1994. A.1, A.1.1