Universitat de les Illes Balears

escola politècnica superior

Treball Final de Grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Normes triangulars i operacions relacionades: teoria i aplicacions

SARA LÓPEZ MIGUEL

Tutors

Gaspar Mayor Forteza Joan Torrens Sastre

Escola Politècnica Superior
Universitat de les Illes Balears
Palma, 11 de juliol de 2017

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Normes triangulars i operacions relacionades: teoria i aplicacions

SARA LÓPEZ MIGUEL

Tutors

Gaspar Mayor Forteza Joan Torrens Sastre

Escola Politècnica Superior
Universitat de les Illes Balears
Palma, 11 de juliol de 2017

Als meus pares, per tot el que signifiquen.
A la meva germana, per totes les rialles.
A les matemàtiques, per ensenyar-me que no hi ha res més perillós que no arriscar-se.
A tots aquells que gaudeixen de les matemàtiques
i que tenen la màgica capacitat de contagiar-ho.

Agraïments

Aquest treball és un recull dels coneixements que he assolit durant el curs i intenta reflexar l'àmplia visió que els dos tutors m'han aportat sobre el tema. A la vegada, pretén ser una lectura que pugui ser entesa per tothom, però que a la vegada sigui de qualitat matemàtica.

La realització d'aquest treball fi de grau ha significat moltes coses. Vaig començar descobrint la definició de norma triangular, que ja sonava geomètricament interessant. Al final, va resultar ser, més bé, algebraicament, lògicament, borrosament i analíticament interessant.

Ha significat poder dedicar un any a un mateix tema i poder posar un peu en l'àmbit de la investigació a través de l'estudi de diversos articles i llibres, així com de conéixer el que és escriure una memòria completa que reculli el que he descobert durant el meu petit viatge per aquest món.

M'ha servit per afiançar molts dels conceptes que he anat adquirint al llarg del Grau de Matemàtiques, així com per aportar-me coneixements nous, donat que el tema de les normes triangulars no apareix al currículum de cap asignatura. També ha significat demostrar-me a mi mateixa que he assolit una maduresa matemàtica que no tenia quan vaig començar.

A més, he trobat molt interessant les matemàtiques que s'empren en l'àrea de la lògica borrosa i de les normes triangulars i les portes a noves aplicacions que queden obertes.

Per tot això, m'agradaria dedicar un agraïment especial a les dues persones que han guiat aquest treball final de grau.
A Gaspar Mayor, per ser una font d'inspiració des del primer dia, per entendre les matemàtiques i per saber transmetre com si d'un conte es tractàs tots els raonaments que fan connectar els conceptes de manera que tot quedi relacionat. Per la seva bona disposició des de l'inici, per descobrir-me aquest món apassionant i pel seu consell principal: *feina, feina i més feina.*

A en Joan Torrens, per la seva dedicació i per haver acceptat el repte de continuar amb la direcció d'un treball final de grau ja començat. Per haver agafat la meva feina i encaminar-la correctament adaptant-la respectuosament al temps que teníem, als objectius que volíem assolir i a la nostra forma de treballar. Voldría també agraïr-li la paciència i la comprensió i haver donat resposta a tots els meus dubtes sempre

acompanyant-les de paraules d'ànims.

Ha estat un autèntic plaer capbussar-me en tot aquest món sota la seva guia. Si hagués de tornar a començar, no m'ho pensaria dues vegades.

Amb tot, em sento molt orgullosa d'haver triat el món de les matemàtiques, que es fa més apassionant a mesura que avança el camí.

Fa falta tenir alguna cosa especial, deien.

Certament,
la única diferència entre el que tu fas
i el que no vas elegir
es diu curiositat.

Es tracta d'anar més enllà,
Voler saber més.
Com.
Quan.
Per què.

Es tracta de tenir el valor de demanar,
no només als altres sinó a tu mateix,
i la paciència per enfrontar
la inmensitat que acompanya
a totes les coses desconegudes.

Que al final la vida és una bijecció
entre les preguntes que em faig
i les respostes que no sé.

Aprendre que, a vegades,
el que menys necessites per mirar el món
és el sentit comú,
que cegarà la teva ment
i tancarà les portes
a la meravellosa manera de mirar-lo des d'un altre lloc.

Que 2+2 només és 4
si no veus més enllà.

"Que sí, mare,
que inverteixo el meu temps en coses
que ni es toquen, ni es veuen.
Que només són escrites en un altre idioma,
sense accents,
sense frases,
i a vegades sense paper.

Que estic sa però una mica boig;
al cap i a la fi la bogeria
és només qüestió de majories."

Tenir el valor d'admetre
que no entenc l'amor, no entenc la mort

i que, definitivament, no entenc
la diferència entre algebraic i transcendent.

I que si alguna cosa va malament,
sempre s'està a temps
de fer un canvi de paràmetres.

Que al final aixeques la mirada,
tan aprop del buit com de l'infinit,
i t'atreveixes
a assegurar-li al món
que ets capaç d'enfrontar, analitzar i entendre qualsevol cosa,
excepte tal vegada l'amor,
que mai ha tingut sentit.

Que et sents orgullós d'haver-ho intentat,
de no haver cregut en els límits,
per molt que tendissin a infinit.

I que ens convencin,
que fins que no caigui
el pes d'una contradicció
o d'un maleït contraexemple,
no hi haurà Déu ni polític
que ens faci creure el contrari.
Que si no hi ha prova no hi ha delicte,
contrarecíprocament parlant.

Permet-me que aclareixi doncs,
que no són els teus ulls els que canvien
en passar del desconeixement
a trobar el sentit al que veus.

Permet-me dir-te
que no has de tenir res especial,
únicament necessites
no creure en l'impossible.

Que tot comença per voler saber més,
i tot acaba
en el precís moment
en que te n'adones
de que no té fi.

Sara López Miguel.

Resum

***Paraules clau**: t-norma, t-conorma, lògica borrosa, implicació, funció d'agregació, uninorma, nulnorma, còpula.*

Les normes triangulars (t-normes) són al darrere de moltes investigacions actuals. Entre altres, la teoria dels conjunts borrosos, la intel·ligència artificial o el tractament d'imatges són àrees que s'han desenvolupat considerant aquestes funcions.

En aquest treball es fa una introducció a les normes triangulars, posant èmfasi en les que són contínues. Es presenten resultats que les relacionen amb les t-conormes i que permeten construïr-les a partir d'altres funcions. També es presenten els cinc tipus més habituals de t-normes i es donen algunes propietats fins arribar a la classificació de les t-normes contínues com a sumes ordinals de t-normes arquimedianes.

A més, es proporciona una visió més amplia d'aquestes funcions plantejant algunes de les seves aplicacions en camps com la probabilitat, la teoria dels conjunts borrosos o les finances. També s'emmarquen en un context més general: el de les funcions d'agregació. Es dona la classificació d'aquestes funcions i diversos exemples de cada classe.

Es procura destacar la relació entre els conceptes entre distints capítols, a fi de que finalment es tingui, de manera autocontinguda, una base teòrica i una idea de les possibles aplicacions i ampliacions de les t-normes.

Sumari

Agraïments **v**

Resum **ix**

Sumari **xi**

Índex de figures **xiii**

Índex de taules **xv**

1 Introducció **1**

2 Una introducció a les t-normes **3**
2.1 Definicions bàsiques i propietats 3
2.1.1 Normes triangulars 3
2.1.2 Conormes triangulars 13
2.1.3 Continuïtat 20
2.2 Propietats algebraiques elementals 22
2.3 Caracterització de les t-normes contínues 29
2.3.1 Construcció de t-normes 29
2.3.2 Representació de t-normes 39

3 Aplicacions de les t-normes **47**
3.1 Les t-normes en la teoria d'espais mètrics probabilístics 47
3.2 Les t-normes en la teoria dels conjunts borrosos 47
3.2.1 Conjunts borrosos 48
3.2.2 Lògica borrosa 48
3.2.3 Raonament aproximat 51
3.3 Les t-normes i les funcions d'agregació 56
3.4 Les t-normes en probabilitats, estadística, finances i economia: còpules 56

4 Operadors relacionats **57**
4.1 Definició i propietats 57
4.1.1 Propietats 59
4.2 Classificació 62
4.2.1 Funcions d'agregació conjuntives 62
4.2.2 Funcions d'agregació mitjanes 63
4.2.3 Funcions d'agregació disjuntives 67

4.2.4 Funcions d'agregació mixtes 67

5 Annex 1: El naixement de les normes triangulars 77
5.1 Els orígens 77
5.2 Comparació amb els axiomes actuals 79
5.3 L'inici de moltes coses 80

6 Annex 2: Còpules 81
6.1 Còpules 81
6.2 Quasi-còpules 83

7 Conclusions 85

A Apendix 87

Bibliografia 91

Índex de figures

2.1 Gràfica 3D de T_M 5
2.2 Perfil 3D de T_M 5
2.3 Altra vista 3D de T_M 5
2.4 Gràfica 3D de T_P 5
2.5 Perfil 3D de T_P 5
2.6 Gràfica 3D de T_L 6
2.7 Perfil 3D de T_L 6
2.8 Gràfica 3D de T_D 6
2.9 Perfil 3D de T_D 6
2.10 Gràfica 3D de T_{nM} 7
2.11 Perfil 3D de T_{nM} 7
2.12 Altra vista 3D de T_{nM} 7
2.13 Gràfica de contorn de T_M 8
2.14 Gràfica de contorn de T_P 8
2.15 Gràfica de contorn de T_L 8
2.16 Gràfica de contorn de T_D 8
2.17 Gràfica de contorn de T_{nM} 8
2.18 Gràfica 3D de S_M 14
2.19 Perfil 3D de S_M 14
2.20 Altra vista 3D de S_M 15
2.21 Gràfica 3D de S_P 15
2.22 Perfil 3D de S_P 15
2.23 Gràfica 3D de S_L 15
2.24 Perfil 3D de S_L 15
2.25 Altra vista 3D de S_L 16
2.26 Gràfica 3D de S_D 16
2.27 Perfil 3D de S_D 16
2.28 Gràfica 3D de S_{nM} 16
2.29 Perfil 3D de S_{nM} 16
2.30 Gràfica de contorn de S_M 17
2.31 Gràfica de contorn de S_P 17
2.32 Gràfica de contorn de S_L 17
2.33 Gràfica de contorn de S_{nM} 17
2.34 Gràfica de contorn de S_D 17
2.35 Zoom gràfica de contorn de S_D 17
2.36 Cas 1 27

2.37 Cas 2.1 27
2.38 Cas 2.2 28
2.39 Generador additiu de T_L. 33
2.40 Generador additiu de T_P. 34
2.41 Generador additiu t^{SS}_{-20} 35
2.42 Gràfica 3D de T^{SS}_{-20}. 35
2.43 Generador additiu t^{SS}_{2} 35
2.44 Gràfica 3D de T^{SS}_{2}. 35
2.45 Generador additiu $t^{F}_{10^6}$ 36
2.46 Gràfica 3D de $T^{F}_{10^6}$. 36
2.47 Generador additiu t^{H}_{20} 37
2.48 Gràfica 3D de T^{H}_{20}. 37
2.49 Suma ordinal ($\langle 0.2, 0.3, T_L\rangle, \langle 0.5, 0.8, T_P\rangle, \langle 0.8, 1, T_L\rangle$): gràfica 3D i de contorn. 40
2.50 Representació dels valors que pren la t-norma T_a. 45

3.1 Temperatura *Molt alta*. 53
3.2 Temperatura *Més o menys alta*. 53

4.1 Amb la Proposició 15 podem assegurar que aquesta és l'estructura d'una uninorma amb neutre $e \in]0,1[$. 69
4.2 Estructura d'una uninorma amb neutre $e \in]0,1[$. 70
4.3 Estructura de $\mathcal{U}^{c}_{T,S,e}$. 71
4.4 Estructura de $\mathcal{U}^{d}_{T,S,e}$. 71
4.5 Estructura d'una nulnorma amb anul·lador $a \in]0,1[$ que es pot deduïr de la Proposició 19. 72
4.6 Estructura d'una nulnorma amb anul·lador $a \in]0,1[$. 73
4.7 Estructura de $\mathcal{V}_a$. 74
4.8 Gràfica 3D de $\mathcal{V}_{0.2}$. 74
4.9 Gràfica 3D de $\mathcal{V}_{0.5}$. 74
4.10 Gràfica 3D de $\mathcal{V}_{0.7}$. 74
4.11 Gràfica 3D de $\mathcal{V}_{0.9}$. 74

6.1 Representació gràfica de la propietat de 2-creixement 82

Índex de taules

2.1 Taula resum del conjunt d'elements idempotents, nilpotents i divisors de zero d'algunes t-normes. 23

3.1 Analogia entre les expressions de la implicació borrosa i la booleana. 51

4.1 Propietats d'algunes de les funcions d'agregació més conegudes. 62

5.1 Comparació de conceptes de distància. 78
5.2 Comparació de l'axiomàtica per t-normes. 79

CAPÍTOL 1

INTRODUCCIÓ

Els darrers avanços en lògica borrosa, en control de riscs financers o en la teoria d'espais mètrics probabilístics són molt coneguts. Aquests han permès, per exemple, desenvolupar aparells electrònics intel·ligents, mètodes de tractament d'imatges cada vegada més sofisticats, han aconseguit que els bancs asumeixin menors riscs i dissenyar millors carteres o inclús canviar la concepció de distància entre dos punts, de manera que deixi de ser un simple nombre i passi a ser una probabilitat.

Tots aquests avanços, no obstant, tenen una cosa en comú: en la consecució de tots ells ha intervingut el concepte de **norma triangular**. Aquestes funcions s'amaguen darrera de multitud d'àrees d'investigació i resulten conformar un món molt interessant de propietats i classificacions que s'ha anat expandint i enriquint des de la seva aparició al 1942.

L'objectiu d'aquest treball és doble. Per una part, és presentar d'una forma clara el concepte de norma triangular (t-norma per abreujar), així com les propietats que la fan interessant.
Per una altra part, es pretén donar al lector una visió àmplia del que envolta a les t-normes. Per això, es descriuen algunes de les aplicacions que poden tenir aquests operadors en altres camps de coneixement i es parla del context en que es troben situades. Així, s'analitzen els orígens i el desenvolupament de les normes triangulars i es presenten operadors estretament relacionats, com són les funcions d'agregació.

El Capítol 2 conforma la base teòrica. En aquest capítol, l'estudi teòric s'acompanya de les cinc t-normes més conegudes i es fa especial èmfasi en les t-normes contínues, ja que són les més estudiades i les que s'empren principalment en les aplicacions. A més, es donen resultats que ens permeten construïr t-normes de dues maneres diferents.

El Capítol 3 és un recull de diferents aplicacions de les t-normes en altres camps, en especial en el món de la lògica borrosa i el raonament aproximat, encara que de

manera teòrica. En aquest apartat es destaquen els aspectes lògic, probabilístic i analític de les t-normes i es dóna importància a la relació que les t-normes tenen amb el desenvolupament de cada camp.

Al Capítol 4 ens allunyam una mica de les t-normes per veurer-les en un marc més ampli: el de les funcions d'agregació. En aquest capítol es parla, en especial, de les uninormes i les nulnormes, que es poden veure com a generalitzacions de les t-normes i les t-conormes.

En el primer annex es descriu breument quin és l'orígen de les t-normes i s'analitza l'article original en què es donà per primera vegada la seva definició.
El segon annex recull les definicions de còpula i quasi-còpula com una ampliació del Capítol 4, així com alguns resultats que, de nou, ens tornen a dur a una relació entre les còpules i les t-normes contínues.

Finalment, a l'Apèndix s'inclou el codi emprat per generar les gràfiques que acompanyen les explicacions durant tota la memòria.

CAPÍTOL 2

UNA INTRODUCCIÓ A LES T-NORMES

2.1 Definicions bàsiques i propietats

2.1.1 Normes triangulars

Definició 1. Una *norma triangular* o *t-norma* és una operació binària $T : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ que satisfà els següents axiomes per qualsevols $x, y, z \in [0,1]$:

- Commutativitat:
$$T(x,y) = T(y,x). \tag{T1}$$
- Associativitat:
$$T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z). \tag{T2}$$
- Monotonia:
$$T(x,y) \leqslant T(x,z) \quad \text{si} \quad y \leqslant z. \tag{T3}$$
- Condició de frontera:
$$T(x,1) = x. \tag{T4}$$

Encara que aquests són els axiomes necessaris per tenir una t-norma, podem deduïr directament de la definició que una t-norma T safisfà en realitat per a qualsevol $x \in [0,1]$ unes condicions més generals.

Proposició 1. *Sigui T una t-norma, aleshores, per $x \in [0,1]$:*

$$T(0,x) = T(x,0) = 0, \tag{2.1}$$

$$T(1,x) = x. \tag{2.2}$$

Demostració. Aplicant les propietats (T1), (T3) i (T4) tenim

$$0 \leqslant T(x,0) = T(0,x) \leqslant T(0,1) = 0 \Rightarrow T(x,0) = T(0,x) = 0.$$

D'altra banda, gràcies a (T1) i (T4) tenim (2.2). □

Definició 2. La *regió zero* d'una t-norma T és el conjunt dels punts $(x, y) \in [0,1]^2$ tals que $T(x, y) = 0$, és a dir:

$$R_T = \{(x, y) \in [0,1]^2 \ \mid \ T(x, y) = 0\}.$$

Gràcies a la Proposició 1, sabem que tots els punts de la forma $(x, 0)$ i $(0, x)$ amb $x \in [0,1]$ formen part de la regió zero de qualsevol t-norma.
Si la regió zero de T es redueix a aquests punts, es diu que T té *regió zero trivial*.

La Proposició 1 ens fa veure que les t-normes coincideixen en la frontera del quadrat unitat $[0,1]^2$. Aquest fet es pot veure clarament a les Figures 2.1-2.12.

A més, per una t-norma T tenim la monotonia a les dues components, i.e:

$$T(x_1, y_1) \leqslant T(x_2, y_2) \qquad \text{per } x_1 \leqslant x_2 \text{ i } y_1 \leqslant y_2. \tag{2.3}$$

Aquesta generalització és possible gràcies a (T3) i (T1):

$$T(x_1, y_1) \leqslant T(x_1, y_2) = T(y_2, x_1) \leqslant T(y_2, x_2) = T(x_2, y_2).$$

Exemple 1. Els quatre exemples bàsics de t-normes són els següents:

- Mínim
$$T_M(x, y) = \min(x, y)$$
- Producte
$$T_P(x, y) = x \cdot y$$
- De Lukasiewicz
$$T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$$
- Producte dràstic
$$T_D(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) \in [0,1[^2, \\ \min(x, y) & \text{en altre cas.} \end{cases}$$

A més, podem trobar un exemple de t-norma molt interessant i important:

- Mínim nilpotent
$$T_{nM}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x + y \leqslant 1 \\ \min(x, y) & \text{en altre cas.} \end{cases}$$

Podem veure la representació en 3D de les t-normes a les Figures 2.1-2.12. La barra del costat de les gràfiques indica els valors que prenen les t-normes.
Així, per exemple, a la t-norma mínim els valors de la component z van augmentant a mesura que augmenten els valors dels eixos x i y fins arribar a 1, ja que anam aplicant la funció mínim. La diagonal es manté fixa també, ja que és el mínim entre dos valors iguals.

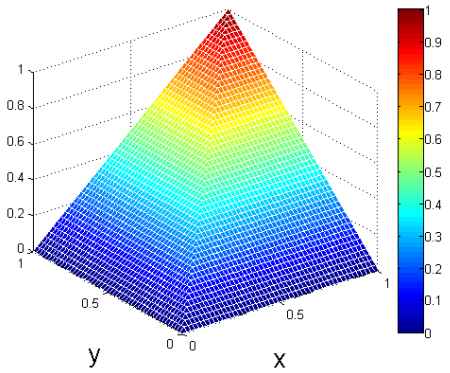

Figura 2.1: Gràfica 3D de T_M

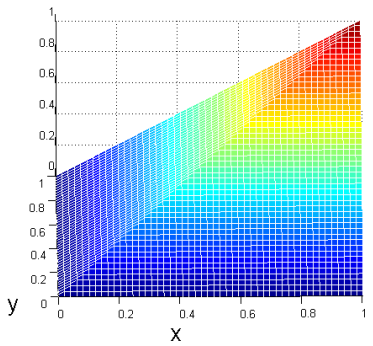

Figura 2.2: Perfil 3D de T_M

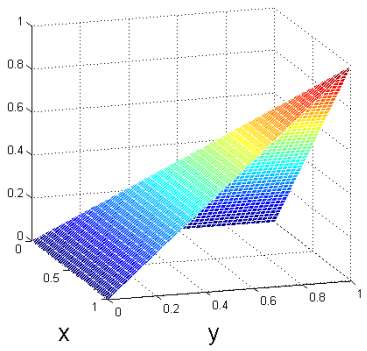

Figura 2.3: Altra vista 3D de T_M

Passa una cosa semblant a la gràfica de T_P, però ara no tendrem la diagonal marcada: el producte de dos valors iguals x, y no és ni x ni y.
Aquestes dues t-normes, T_M i T_P són les úniques dels cinc exemples que tenen clarament regió zero trivial.

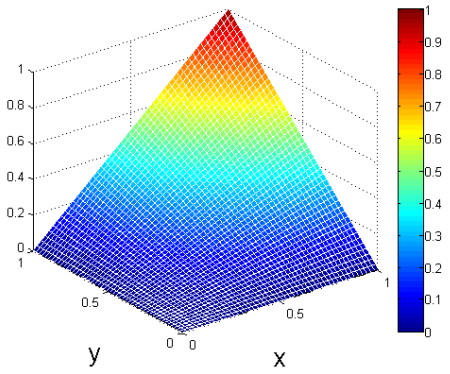

Figura 2.4: Gràfica 3D de T_P

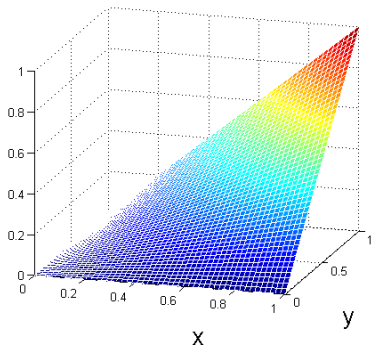

Figura 2.5: Perfil 3D de T_P

Com és normal, a la representació de la t-norma T_L apareix una part en que l'eix z val completament zero. Això serà quan $x+y-1 \leqslant 0$, és a dir, quan $y < 1-x$. Podem veure marcada la recta $y = 1-x$ que marca el límit de la regió zero de T_L. Així, la regió zero de T_L és $R_{T_L} = \{(x,y) \in [0,1]^2 \ \mid \ x+y \leqslant 1\}$.

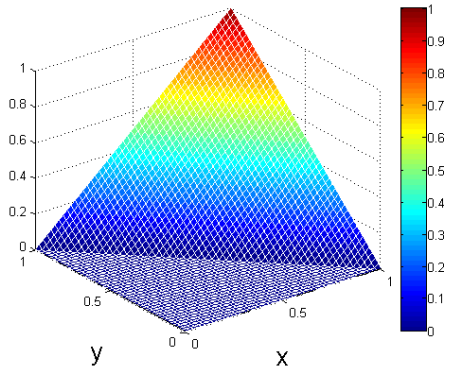

Figura 2.6: Gràfica 3D de T_L

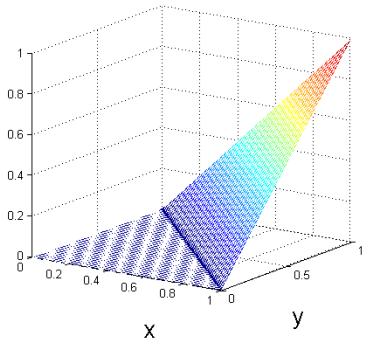

Figura 2.7: Perfil 3D de T_L

La gràfica de T_D representa una superfície amb tota la base amb valor nul en l'eix z. Com tota la superfície és de color blau, vol dir que només es mantenen les fronteres amb valors no nuls. Així, la regió zero de T_D és $R_{T_D} =]0,1[^2 \cup \{(1,0),(0,1)\}$.

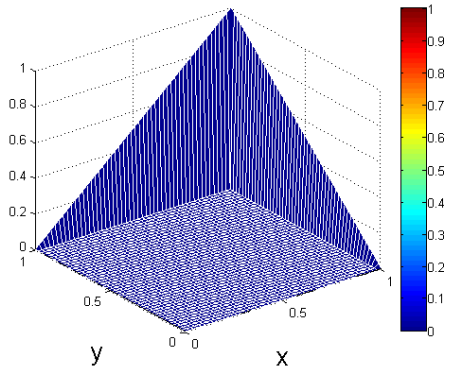

Figura 2.8: Gràfica 3D de T_D

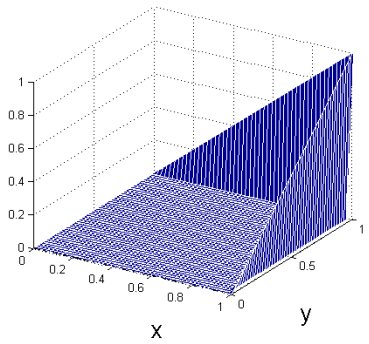

Figura 2.9: Perfil 3D de T_D

En el cas de la t-norma mínim nilpotent, fixem-nos en les Figures 2.10-2.12 que la regió zero d'aquesta t-norma és la mateixa que la de T_L. La resta de la t-norma agafa la forma de T_M.

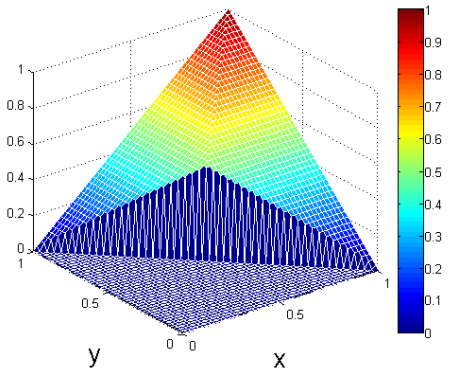

Figura 2.10: Gràfica 3D de T_{nM}

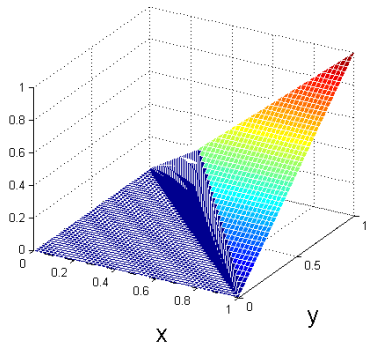

Figura 2.11: Perfil 3D de T_{nM}

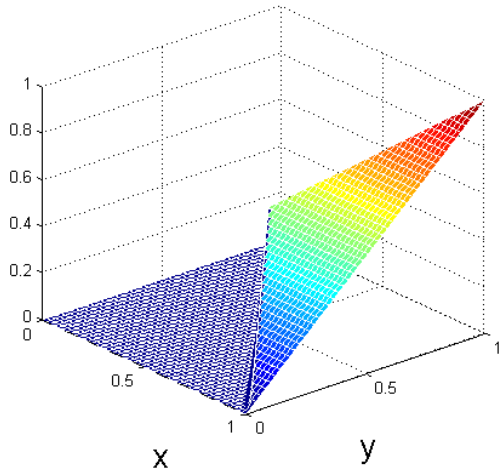

Figura 2.12: Altra vista 3D de T_{nM}

A les Figures 2.13-2.17 trobam les gràfiques de contorn de les cinc t-normes. Aquest tipus de gràfica ens permet veure les corbes a les quals les t-normes tenen un valor constant, és a dir, la corba uneix punts amb el mateix valor. Ens serveixen d'ajuda per tenir clara la forma de cada t-norma en l'espai 3-dimensional.

Per exemple, a la Figura 2.16 queda clar que els únics punts on la t-norma pren valors no nuls són el punts (x, y) tals que $x = 1$ ó $y = 1$.

$\diamondsuit$

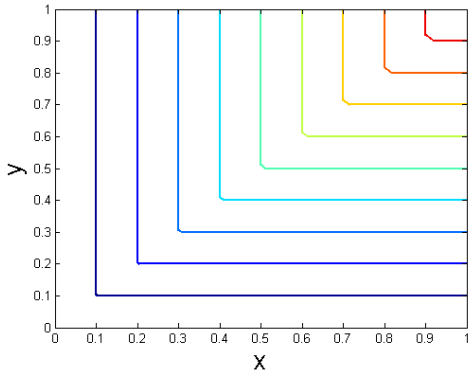

Figura 2.13: Gràfica de contorn de T_M

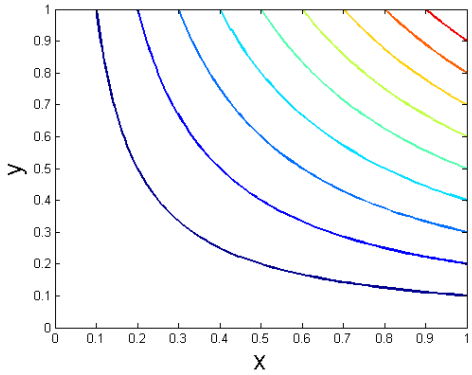

Figura 2.14: Gràfica de contorn de T_P

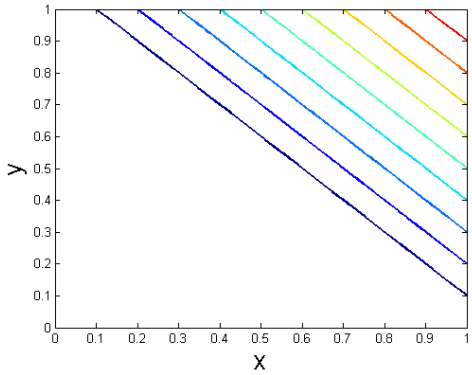

Figura 2.15: Gràfica de contorn de T_L

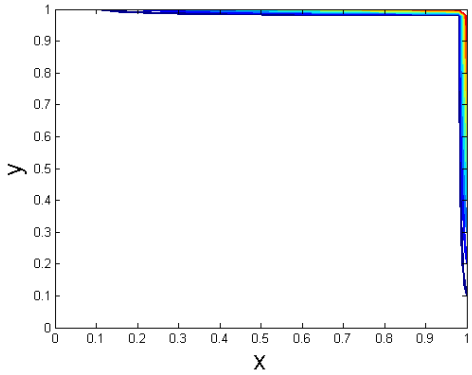

Figura 2.16: Gràfica de contorn de T_D

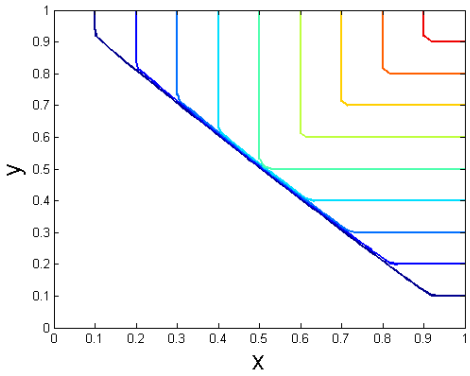

Figura 2.17: Gràfica de contorn de T_{nM}

Proposició 2. *Les cinc funcions de l'Exemple 1 són t-normes.*

Demostració. Detallarem només la prova de l'associativitat per a T_L, T_D i T_{nM}, ja que són els únics casos no trivials.

Vegem primer l'associativitat de T_L.
Hem de comprovar si es satisfà (T2), és a dir, si $T_L(x, T_L(y,z)) = T_L(T_L(x,y),z)$ per a $x, y, z \in [0,1]$.
D'una banda tenim:

$$T_L(x, T_L(y,z)) = \max\big(x + \max(y+z-1,0) - 1, 0\big), \tag{2.4}$$

i de l'altra:

$$T_L(T_L(x,y),z) = \max\big(\max(x+y-1,0) + z - 1, 0\big), \tag{2.5}$$

pel que hem de veure que (2.4) i (2.5) són iguals per qualsevols $x, y, z \in [0,1]$.

Demostrarem que (2.4) és equivalent a $\max(x+y+z-2,0)$ i aquest, a la vegada, equivalent a (2.5).

- Suposem que $\max\big(x + \max(y+z-1,0) - 1, 0\big) = 0$. Aleshores:

$$\begin{aligned}
\max\big(x + \max(y+z-1,0) - 1, 0\big) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x - 1 + \max(y+z-1,0) \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \max(y+z-1,0) \leqslant 1 - x \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y+z-1 \leqslant 1-x \Leftrightarrow x+y+z-2 \leqslant 0, \text{ i} \\ 0 \leqslant 1-x \Leftrightarrow x \in [0,1]. \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \max(x+y+z-2,0) = 0.
\end{aligned}$$

- Suposem ara que $\max(x+y+z-2,0) = x+y+z-2$,

$$\begin{aligned}
\max(x+y+z-2,0) = x+y+z-2 \quad &\Leftrightarrow \quad x+y+z-2 \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \quad y+z-1 \geqslant 1-x \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \max\big(x + \max(y+z-1,0) - 1, 0\big) = x+y+z-2.
\end{aligned}$$

  Per tant podem dir que $T_L(x, T_L(y,z)) = \max(x+y+z-2,0)$.
  Fent un raonament anàleg podem obtenir que $T_L(T_L(x,y),z) = \max(x+y+z-2,0)$.

Vegem ara l'associativitat de T_D.
Hem de veure que $T_D(x, T_D(y,z)) = T_D(T_D(x,y),z)$ per $x, y, z \in [0,1]$.
Tenint en compte la definició de T_D, estudiem els casos en els quals prendrà un valor distint de zero.

- $T_D(x, T_D(y,z)) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, y = 1, z \in]0,1], \text{ o bé} \\ x = 1, z = 1, y \in]0,1], \text{ o bé} \\ x \in]0,1[, y = 1, z = 1. \end{cases}$

Als tres casos, $T_D(x, T_D(y,z)) = \min(x,y,z)$.
Fent un raonament anàleg obtenim que $T_D(T_D(x,y),z) \neq 0$ pels mateixos valors que hem trobat abans, i, en ells, val $\min(x,y,z)$. Per tant ja tenim la igualtat.

El cas de la t-norma mínim nilpotent és molt semblant a l'anterior. Sabem que

$$T_{nM}(x, T_{nM}(y,z)) \neq 0 \Leftrightarrow x, y, z \in]0,1] \text{ amb } x + \min(y,z) > 1 \text{ i } y + z > 1,$$

el que es tradueix en que $T_{nM}(x, T_{nM}(y,z)) \neq 0$ si, i només si, $\min(x+y, x+z, y+z) > 1$. En aquest casos, $T_{nM}(x, T_{nM}(y,z)) = \min(x,y,z)$. Amb un raonament anàleg podem provar que $T_{nM}(T_{nM}(x,y),z) \neq 0$ pels mateixos casos, i que en aquests també val $\min(x,y,z)$. □

Aquests cinc exemples de t-normes són importants per distints motius que anirem vegent al llarg dels capítols.

Ara que coneixem la definició de les t-normes i alguns dels exemples bàsics, ens demanam com podriem comparar-ne dues. Doncs bé, com al cap i a la fi són funcions de $[0,1]$ en $[0,1]$, la comparació es fa punt a punt.

Definició 3. Donades dues t-normes T_1 i T_2, direm que T_1 és *menor o igual* que T_2 (T_2 és *major o igual* que T_1) i ho escriurem $T_1 \leqslant T_2$ si $T_1(x,y) \leqslant T_2(x,y)$ per a tot $(x,y) \in [0,1]^2$.

Nota. Escriurem $T_1 < T_2$ quan T_1 sigui menor que T_2 i, a més, $T_1 \neq T_2$ (si per algun $(x_0,y_0) \in [0,1]^2$ es compleix $T_1(x_0,y_0) < T_2(x_0,y_0)$).

En general, comparar dues t-normes no és senzill. De fet, no tenim un ordre total, no totes les t-normes són comparables.
El que sí podem fer és presentar algunes comparacions entre els cinc exemples bàsics de t-normes i establir un ordre entre elles.
Un aspecte molt interessant és poder localitzar totes les t-normes entre dues específiques, que són la menor i la major d'elles.

Exemple 2. (i) El producte dràstic T_D és la t-norma més petita i T_M és la més gran:

$$T_D \leqslant T \leqslant T_M. \tag{2.6}$$

(ii) Podem ordenar les quatre t-normes bàsiques com

$$T_D < T_L < T_P < T_M. \tag{2.7}$$

(iii) A més,

$$T_L < T_{nM} < T_M. \tag{2.8}$$

(iv) En canvi, T_P i T_{nM} són incomparables.

Demostració. (i) De la monotonia en les dues components (2.3) tenim que si T és una t-norma, d'una banda, per a tot $(x,y) \in [0,1]^2$

$$\left.\begin{array}{l} T(x,y) \leqslant T(x,1) = x \\ T(x,y) \leqslant T(1,y) = y \end{array}\right\} \Rightarrow T(x,y) \leqslant \min(x,y) = T_M(x,y)$$

pel que $T \leqslant T_M$.
D'altra banda, sabem que $T(x,y) \geqslant 0 \ \forall (x,y) \in [0,1]^2$; en concret, $T(x,y) \geqslant 0 = T_D(x,y) \ \forall (x,y) \in [0,1[^2$.
Si, pel contrari $x = 1$ ó $y = 1$ podem emprar (T4), recordant que totes les t-normes coincideixen en la frontera de $[0,1]^2$.
Per exemple, $T(1,y) = y = \min(x,y) = T_D(x,y)$ per $x \in [0,1]$.

(ii) Vegem que efectivament $T_L < T_P$.
Hem de veure que per $(x, y) \in [0,1]^2$ es compleix que $\max(x+y-1, 0) < x \cdot y$:

* si $x+y-1 \leqslant 0$, aleshores $T_L(x,y) = 0 \leqslant T_P(x,y) = x \cdot y$, que es compleix per definició.
* si $x+y-1 > 0$, aleshores

$$\begin{aligned} x+y-1 \leqslant x \cdot y \quad &\Leftrightarrow \quad x+y-1-xy \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x(1-y)+(y-1) \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (1-y)(x-1) \leqslant 0, \end{aligned}$$

que efectivament es compleix.
Així tenim que $T_L \leqslant T_P$, però per $(x,y) = (0.8, 0.8)$ tenim que $T_L(0.8, 0.8) = 0.6 < T_P(0.8, 0.8) = 0.64$, pel que $T_L < T_P$.

Per tenir la resta de desigualtats estrictes es poden trobar valors que així ho facin.

(iii) Com ja sabem, $T_{nM} < T_M$ es dóna sempre. Per l'altra banda, si $x+y \leqslant 1$, aleshores $T_L(x,y) = 0 = T_{nM}(x,y)$, i en cas contrari
$T_L(x,y) = x+y-1 \leqslant \min(x,y)$ ja que $T_L(x,y) \leqslant T_M(x,y)$ $\forall (x,y) \in [0,1]^2$.
A més, la desigualtat estricta la podem tenir per exemple amb el valor $x = y = 0.8$.

(iv) Aquest fet és senzill de veure. Per $(x,y) \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} &\text{si } x+y \leqslant 1 \Rightarrow T_{nM}(x,y) = 0 < T_P(x,y), \\ &\text{si } x+y > 1 \Rightarrow T_{nM}(x,y) = \min(x,y) = T_M(x,y) > T_P(x,y). \end{aligned}$$

□

◊

El següent resultat ens permet veure com les t-normes T_M i T_D estan completament determinades pel seus valors a la diagonal del quadrat unitat. Això no passa de forma habitual: es poden trobar t-normes diferents amb la mateixa diagonal. Exemples d'aquest fet es poden trobar a [2]. De fet, es poden trobar infinites t-normes diferents amb la mateixa diagonal, com es dedueix de la demostració de la Proposició 7.11 a [1].

Proposició 3. *(i) La única t-norma T que satisfà $T(x,x) = x$ per tot $x \in [0,1]$ és T_M.*

(ii) La única t-norma T que satisfà $T(x,x) = 0$ per a tot $x \in [0,1[$ és T_D.

Demostració. Sigui T una t-norma.

(i) Suposam que per qualsevol $x \in [0,1]$ es satisfà $T(x,x) = x$. Aleshores per $(x,y) \in [0,1]^2$ amb $y \leqslant x$, gràcies a (T3) i (T1):

$$y = T(y,y) \leqslant T(x,y) = T(y,x) \leqslant T_M(x,y) = y,$$

el que significa que $T = T_M$.

(ii) Suposem que es satisfà $T(x,x)=0$ per cada $x \in [0,1[$. Aleshores, per $(x,y) \in [0,1[^2$ amb $y \leqslant x$ tenim que $0 \leqslant T(x,y) \leqslant T(x,x) = 0$ i per (T1) tenim que

$$T(x,y) = T(y,x) = 0 \qquad \forall (x,y) \in [0,1[^2.$$

En altre cas, és a dir, si $x=1$ ó $y=1$, emprant (T4) tendríem que

$$T(x,y) = T(y,x) = \min(x,y),$$

pel que $T = T_D$.

□

El fet que les t-normes siguin associatives ens permet estendrer-les de forma única a una operació definida en $[0,1]^n$ per a qualsevol n.

Per cada n-tupla $(x_1,\dots,x_n) \in [0,1]^n$ definim

$$\top_{i=1}^{n}(x_i) = T\left(\top_{i=1}^{n-1}(x_i), x_n\right) = T(x_1,x_2,\dots,x_n). \tag{2.9}$$

En particular, si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$, escriurem

$$x_T^{(n)} = T(x,x,\dots,x), \tag{2.10}$$

que anomenarem la *potència enèsima* de x respecte de T.
A més, per conveni, escriurem per cada $x \in [0,1]$

$$x_T^{(0)} = 1 \qquad x_T^{(1)} = x. \tag{2.11}$$

Fixem-nos en que (2.9) és una manera d'estendre una t-norma inductivament. Per exemple:

$$\begin{aligned}
&\top_{i=1}^{1}(x_i) = x_1\\
&\top_{i=1}^{2}(x_i) = T\left(\top_{i=1}^{1}(x_i), x_2\right) = T(x_1,x_2)\\
&\top_{i=1}^{3}(x_i) = T\left(\top_{i=1}^{2}(x_i), x_3\right) = T\left(T(x_1,x_2), x_3\right).
\end{aligned}$$

Exemple 3. Les formes exteses de les quatre t-normes bàsiques i del mínim nilpotent són:

- $T_M(x_1,\dots,x_n) = \min(x_1,\dots,x_n)$
- $T_P(x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i$
- $T_L(x_1,\dots,x_n) = \max\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - (n-1), 0\right)$
- $T_D(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} x_i & \text{si } x_j = 1 \forall j \neq i,\\ 0 & \text{altrament.}\end{cases}$
- $T_{nM}(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant 1\\ \min(x_1,\dots,x_n) & \text{en cas contrari,}\end{cases}$

◊

2.1.2 Conormes triangulars

Definició 4. Una *conorma triangular (t-conorma)* és una operació binària $S : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ tal que, per a tots $x, y, z \in [0,1]$, satisfà els axiomes (T1),(T2),(T3) i

$$S(x,0) = x, \tag{S4}$$

el que vol dir que una t-conorma només difereix d'una t-norma en l'axioma (T4), en la condició de frontera.

També es pot definir una t-conorma com la operació dual d'una t-norma, i, de fet, així és com es van definir per primera vegada.
Vegem la manera de caracteritzar les t-conormes mitjançant la dualitat i que les dues definicions són equivalents.

Proposició 4. *Una funció $S : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ és una t-conorma si i només si existeix una t-norma T tal que per a tot $(x,y) \in [0,1]^2$*

$$S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y). \tag{2.12}$$

Es diu, aleshores, que S és la t-conorma dual *de T.*

Demostració. Sigui T una t-norma tal que es satisfà (3.1) per una funció $S : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ i per qualsevols $(x,y) \in [0,1]^2$. Aleshores, vegem que S satisfà els axiomes (T1)-(T3) i (S4). Per $x, y, z \in [0,1]$:

(T1): Donat que T és una t-norma és commutativa:

$$S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y) = 1 - T(1-y, 1-x) = S(y,x)$$

(T2): Gràcies a (3.1) i a l'associativitat de T:

$$\begin{aligned} S(S(x,y),z) &= S(1 - T(1-x,1-y), z) = 1 - T(T(1-x,1-y), 1-z) \\ &= 1 - T(1-x, T(1-y,1-z)) = S(x, 1 - T(1-y,1-z)) \\ &= S(x, S(y,z)). \end{aligned}$$

(T3): Donats $y \leqslant z$, emprant la monotonia de T obtenim la de S:

$$\begin{gathered} y \leqslant z \\ 1 - y \geqslant 1 - z \\ T(1-x,1-y) \geqslant T(1-x,1-z) \\ 1 - T(1-x,1-y) = S(x,y) \leqslant S(x,z) = 1 - T(1-x,1-z). \end{gathered}$$

(S4): Gràcies a la propietat (T4) de T:

$$S(x,0) = 1 - T(1-x,1) = 1 - (1-x) = x.$$

Per tant, S és la t-conorma dual de la t-norma T.

Recíprocament, si la funció definida per S és una t-conorma, vegem que aleshores existeix una t-norma T tal que es satisfaci (3.1) $\forall (x,y) \in [0,1]^2$.
La construïm: $T(x,y) = 1 - S(1-x, 1-y)$. És fàcil comprovar que satisfà (T1)-(T4), pel que és t-norma i satisfà (3.1). □

Exemple 4. Les cinc t-conormes bàsiques són

- Màxim
$$S_M(x,y) = \max(x,y)$$
- Suma probabilística
$$S_P(x,y) = x + y - x \cdot y$$
- De Lukasiewicz
$$S_L(x,y) = \min(x+y, 1)$$
- Suma dràstica
$$S_D(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in]0,1]^2, \\ \max(x,y) & \text{en altre cas.} \end{cases}$$
- Màxim nilpotent
$$S_{nM}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x+y \geqslant 1, \\ \max(x,y) & \text{en altre cas.} \end{cases}$$

A les Figures 2.18-2.27 trobam les representacions en tres dimensions de les t-conormes. S'han inclòs algunes vistes més de les superfícies per clarificar la seva forma.

Podem veure a les Figures 2.18-2.20 que hi ha més valors en color vermell que en blau i que els valors que pren la t-conorma van augmentant a mesura que augmenten els valors dels eixos x i y, ja que feim el màxim. A més, els valors de la diagonal que creua el cub hi són marcats: el màxim entre x i y quan $x = y$ és x.

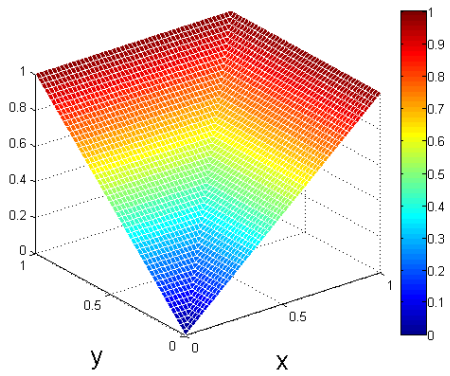

Figura 2.18: Gràfica 3D de S_M

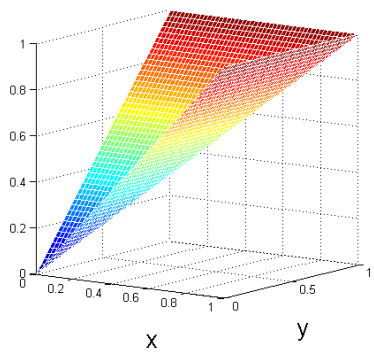

Figura 2.19: Perfil 3D de S_M

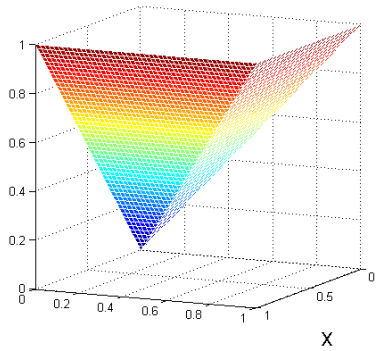

Figura 2.20: Altra vista 3D de S_M

En el cas de la t-conorma suma probabilística, la diagonal no es manté.

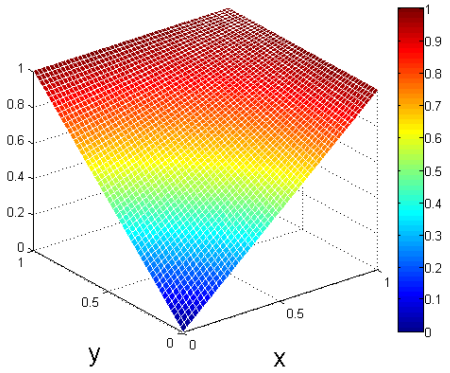

Figura 2.21: Gràfica 3D de S_P

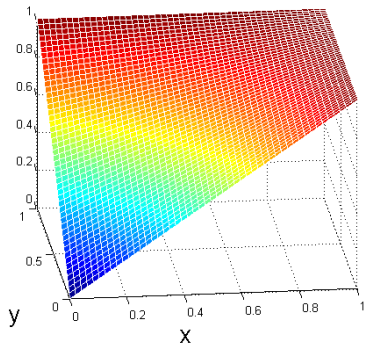

Figura 2.22: Perfil 3D de S_P

A la gràfica de S_L veim com als punts $(x, y) \in [0,1]^2$ tals que $x + y \geqslant 1$ la t-conorma val exactament 1, ja que en aquestes condicions $\min(x + y, 1) = 1$.

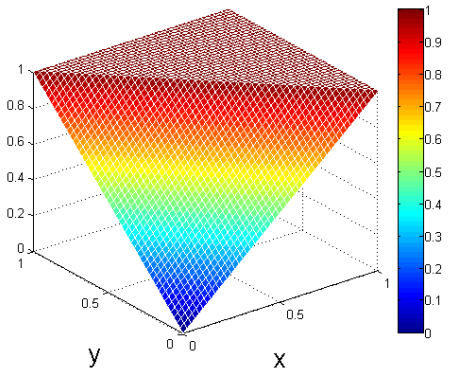

Figura 2.23: Gràfica 3D de S_L

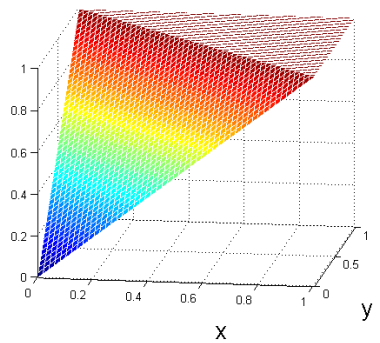

Figura 2.24: Perfil 3D de S_L

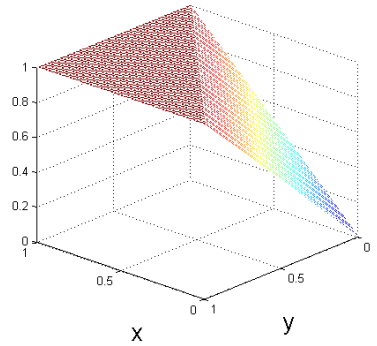

Figura 2.25: Altra vista 3D de S_L

A la gràfica de S_D trobam que tots els valors són 1 excepte per aquells punts $(x, y) \in [0,1]^2$ en que $x = 0$ ó $y = 0$, encara que a la gràfica apareixen dibuixades les bandes com si un punt al pla $y = 0$ que no sigui a la diagonal pogués tenir un valor no nul. Cada banda del mateix color correspon a la t-conorma quan x pren un valor sobre la diagonal.

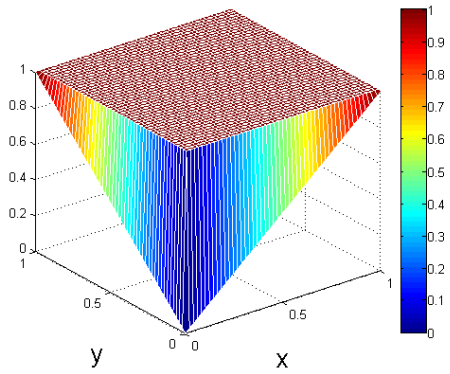

Figura 2.26: Gràfica 3D de S_D

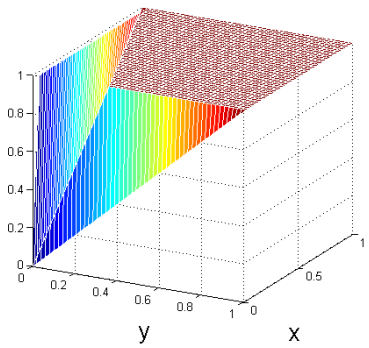

Figura 2.27: Perfil 3D de S_D

Finalment, a les Figures 2.28 i 2.29 trobam la t-conorma màxim nilpotent.

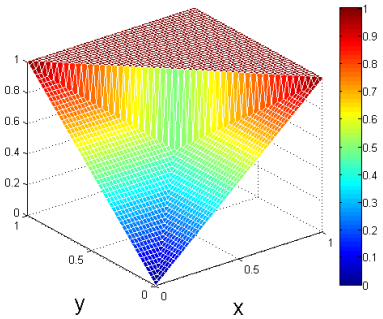

Figura 2.28: Gràfica 3D de S_{nM}

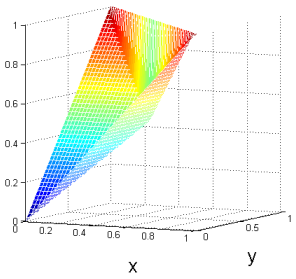

Figura 2.29: Perfil 3D de S_{nM}

A les Figures 2.30-2.35 tornam a representar els gràfics de contorn, però ara per a les t-conormes.

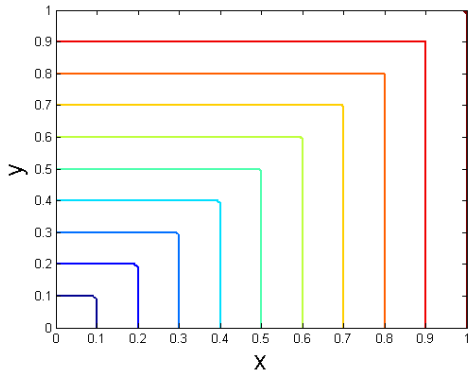

Figura 2.30: Gràfica de contorn de S_M

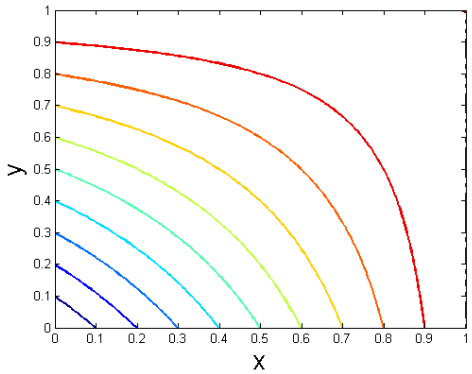

Figura 2.31: Gràfica de contorn de S_P

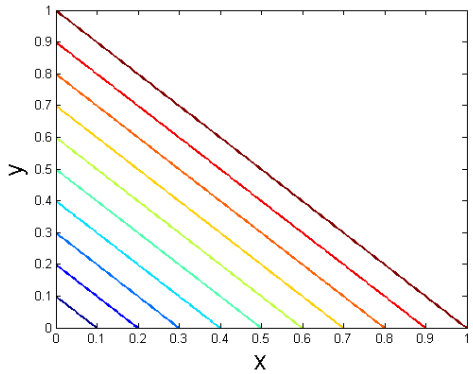

Figura 2.32: Gràfica de contorn de S_L

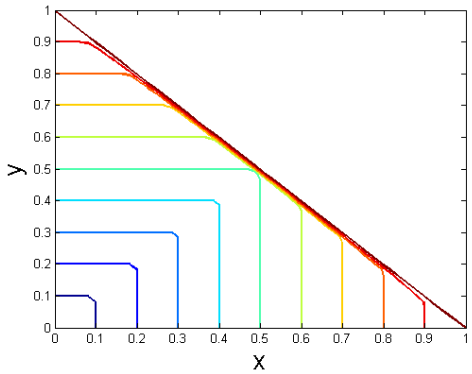

Figura 2.33: Gràfica de contorn de S_{nM}

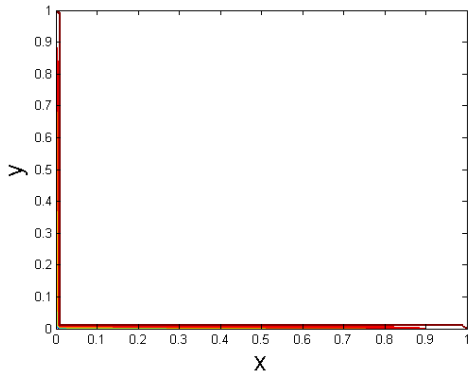

Figura 2.34: Gràfica de contorn de S_D

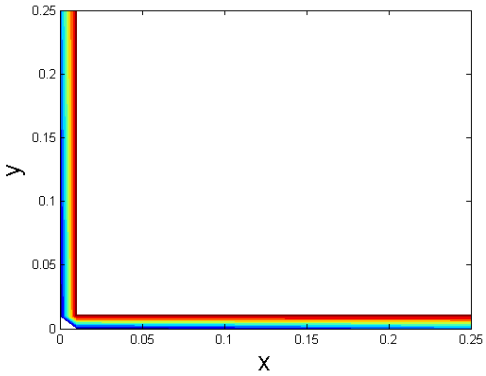

Figura 2.35: Zoom gràfica de contorn de S_D

$\diamondsuit$

La dualitat entre t-normes i t-conormes ens permet traduïr algunes propietats de t-normes a t-conormes:

(i) Cada t-norma és la operació dual d'alguna t-conorma.
Aquest fet ve donat per la Proposició 4.
Per exemple, podem trobar una relació de dualitat entre els cinc exemples bàsics de t-normes i t-conormes:

- T_M és la t-norma dual de S_M
- T_P és la t-norma dual de S_P
- T_L és la t-norma dual de S_L
- T_D és la t-norma dual de S_D
- T_{nM} és la t-norma dual de S_{nM}.

És fàcil comprovar que totes satisfan la relació (3.1). A més, les gràfiques ens poden donar una idea de què significa que siguin duals: mirant les Figures 2.1 i 2.18 ó 2.13 i 2.30, per exemple, es veu clarament que són "complementàries".

(ii) Tal i com vam fer amb les t-normes, també podem deduïr dues propietats més per a les t-conormes dels axiomes que les defineixen:

$$S(1,x) = S(x,1) = 1, \tag{2.13}$$

$$S(0,x) = x, \tag{2.14}$$

pel que totes les t-normes coincideixen en la frontera del cub $[0,1]^2$. És a dir, quan x ó y pertanyen a $\{0,1\}$.

(iii) Observem el següent: siguin T_1 i T_2 t-normes tals que $T_1 \leqslant T_2$ i siguin S_1 i S_2 les t-conormes duals de T_1 i T_2, respectivament. Aleshores

$$S_1(x,y) = 1 - T_1(1-x,1-y) \geqslant 1 - T_2(1-x,1-y) = S_2(x,y) \Rightarrow S_1 \geqslant S_2.$$

És a dir, la dualitat canvia l'ordre.
Aleshores la t-conorma més petita és la t-conorma màxim S_M, mentre que la més gran és la suma dràstica S_D, i.e, per qualsevol t-conorma S es satisfà

$$S_M \leqslant S \leqslant S_D. \tag{2.15}$$

Si ens fixam en la representació d'aquestes t-conormes (Figures 2.18 i 2.8) tot concorda, ja que la t-conorma màxim té molts pocs punts on valgui 1, mentre que T_D val 1 en quasi tots els punts; basta fixar-se en l'àrea de color vermell obscur (valors més propers a 1) de les superfícies.
Tanmateix, vegem-ho explícitament fent ús de la dualitat:

Demostració. Com hem dit, la t-conorma S_M és la dual de la t-norma mínim, pel que podem escriure $S_M(x,y) = \max(x,y) = 1 - T_M(1-x,1-y)$.
Sigui S una t-conorma qualsevol i $x,y \in [0,1]$. Per una banda,

$$S(x,y) = 1 - T(1-x,1-y) \overset{(1)}{\geqslant} 1 - T_M(1-x,1-y) = S_M(x,y),$$

i d'altra banda,

$$S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y) \overset{(2)}{\leqslant} 1 - T_D(1-x, 1-y) = S_D(x,y),$$

on (1) i (2) vénen donats de tenir en compte que T_M és la t-norma més gran i T_D la més petita, respectivament.
Gràficament, això vol dir que qualsevol representació d'una t-conorma serà una superfície continguda entre les de S_M i S_D. □

Fixem-nos en la facilitat que ens aporta poder fer ús de la dualitat per a demostrar propietats de les t-conormes a partir de les t-normes.

Exemple 5. En el cas dels quatre exemples bàsics de t-conormes, els podem ordenar de la següent manera:

$$S_M \overset{(1)}{<} S_P \overset{(2)}{<} S_L \overset{(3)}{<} S_D. \tag{2.16}$$

A més,

$$S_M \overset{(4)}{<} S_{nM} \overset{(5)}{<} S_L. \tag{2.17}$$

Per altra banda, S_P i S_{nM} no són comparables.

Demostració. (1), (3) i (4) es compleixen naturalment perquè sabem que S_M i S_D són les t-conormes més petita i més gran, respectivament, i perquè,a més, podem trobar valors que fan les desigualtats estrictes:

Si $x = y = 0.5$	$S_M(0.5, 0.5) = 0.5 < S_P(0.5, 0.5) = 0.75$,
Si $x = 0.5, y = 0.1$	$S_L(0.5, 0.1) = \min(0.6, 1) = 0.6 < S_D(0.5, 0.1) = 1$,
Si $x = 0.8, y = 0.8$	$S_M(0.8, 0.8) = 0.8 < S_{nM}(0.8, 0.8) = 1$.

Les desigualtats (2) i (5) es compleixen ja que $T_P > T_L$ i $T_{nM} > T_L$ i la no comparabilitat entre S_P i S_{nM} es dedueix igualment del mateix fet entre T_P i T_{nM}.

Si ho miram des del punt de vista gràfic, de nou veim amb facilitat que es compleix: es podrien comparar les t-conormes segons la quantitat de superfície de color vermell obscur: quanta més zona d'aquest color, més grans són els valors que pren la t-conorma. □

◇

(iv) Es pot fer la mateixa generalització amb les t-conormes que amb les t-normes, ja que comparteixen la propietat associativa, de manera que

$$S_{i=1}^{n}(x_i) = S\left(S_{i=1}^{n-1}(x_i), x_n\right) = S(x_1, \ldots, x_n).$$

De fet, $S_{i=1}^{n}(x_i) = 1 - \top_{i=1}^{n}(1 - x_i)$.

2.1.3 Continuïtat

Recordem que per a una funció binària $F : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ la continuïtat com a funció de dues variables no és, en general, equivalent a la continuïtat en cada variable. Vegem a continuació que per a funcions monòtones, i per tant per a t-normes i t-conormes, sí que tenim aquesta equivalència.

Proposició 5. *Una funció $F : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ creixent en cada variable és contínua si, i només si, és contínua en cada component. És a dir, si i només si $\forall x_0, y_0 \in [0,1]$ tant la secció horitzontal $F(x_0, \cdot) : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ com la secció vertical $F(\cdot, y_0) : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ són contínues.*

Demostració. Si una funció $F : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ és contínua, aleshores també ho és en cada component.
D'altra banda, suposem que F és una funció contínua en cada component, i.e, $F(x_0, \cdot)$ i $F(\cdot, y_0)$ són contínues.
Volem veure que F és contínua en un punt genèric (x_0, y_0), és a dir, si $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ són dues successions tals que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ i $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$, aleshores, per a qualsevol $\epsilon > 0$ existeix un $k \in \mathbb{N}$ tal que $||F(x_n, y_n) - F(x_0, y_0)|| < \epsilon \quad \forall n \geqslant k$.
Fixem-nos en que, com F és una funció en $[0,1]$ podem escriure
$||F(x_n, y_n) - F(x_0, y_0)|| = |F(x_n, y_n) - F(x_0, y_0)|$.

Fixem doncs un $\epsilon > 0$ i un $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$. Siguin $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dues successions en $[0,1]$ convergents tals que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ i $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$.
Podem construïr doncs quatre successions monòtones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tals que pera tota $n \in \mathbb{N}$ tenim

$$\begin{array}{lll} a_n \leqslant x_n \leqslant b_n & \text{on} & (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow x_0, \quad (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \searrow x_0 \\ c_n \leqslant y_n \leqslant d_n & \text{on} & (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow y_0, \quad (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \searrow y_0. \end{array} \tag{2.18}$$

F és contínua en la segona component, i.e, $F(x_0, \cdot)$ és contínua, per tant

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists N_1 \in \mathbb{N} \ \ : \ \ \forall n \geqslant N_1 \Rightarrow |F(x_0, c_n) - F(x_0, y_0)| < \epsilon.$$

És a dir, $\forall n \geqslant N_1$,

$$-\epsilon < F(x_0, c_n) - F(x_0, y_0) < \epsilon. \tag{2.19}$$

Fent el mateix raonament per $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tenim que existeix un $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geqslant N_2$,

$$-\epsilon < F(x_0, d_n) - F(x_0, y_0) < \epsilon. \tag{2.20}$$

Aleshores, $\forall n \geqslant N = \max(N_1, N_2)$,

$$F(x_0, y_0) - \epsilon \overset{(1)}{<} F(x_0, c_N) \overset{(2)}{\leqslant} F(x_0, y_n) \overset{(3)}{\leqslant} F(x_0, d_N) \overset{(4)}{<} F(x_0, y_0) + \epsilon, \tag{2.21}$$

on:

(1) és gràcies a (2.19),que tenim ja que $F(x_0, \cdot)$ és contínua,

(2) és dóna ja que $y_n \geqslant c_N$ per (2.18) i que $F(x_0, \cdot)$ és monòtona creixent,

(3) és per monotonia i per (2.18),

(4) és gràcies a (2.20).

D'altra banda, per ser F contínua en la primera component, en particular sabem que per a la N triada anteriorment, $F(\cdot, c_N)$ i $F(\cdot, d_N)$ també són funcions continues. Això implica, per definició, que

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists M_1 \geqslant 0 \;\; : \;\; \forall m \geqslant M_1 \Rightarrow |F(a_m, c_N) - F(x_0, c_N)| < \epsilon,$$

en particular per $m = M_1$:

$$-\epsilon < F(a_{M_1}, c_N) - F(x_0, c_N) < \epsilon. \tag{2.22}$$

De la mateixa manera tenim que $\exists M_2 \geqslant 0$ tal que

$$-\epsilon < F(b_{M_2}, d_N) - F(x_0, d_N) < \epsilon. \tag{2.23}$$

Triant $M = \max(M_1, M_2)$, tenim que $\forall m \geqslant M$ i $n \geqslant N$

$$F(x_0, c_N) - \epsilon \overset{(1)}{<} F(a_M, c_N) \overset{(2)}{\leqslant} F(x_m, y_n) \overset{(3)}{\leqslant} F(b_M, d_N) \overset{(4)}{<} F(x_0, d_N) + \epsilon,$$

on

(1) és gràcies a (2.22),

(2) és donat per que F és monòtona creixent en les dues components i (2.18),

(3) és per monotonia i per (2.18),

(4) és gràcies a (2.23).

Aleshores tenim

$$F(x_0, c_N) - \epsilon < F(x_m, y_n) < F(x_0, d_N) + \epsilon. \tag{2.24}$$

Si elegim $K = \max(M, N)$, aleshores per a tot $k \geqslant K$ tenim, gràcies a (2.21) i a (2.24),

$$F(x_0, y_0) - \epsilon - \epsilon < F(x_0, c_N) - \epsilon < F(x_m, y_n) < F(x_0, d_N) + \epsilon < F(x_0, y_0) + \epsilon + \epsilon,$$

és a dir,

$$|F(x_m, y_n) - F(x_0, y_0)| < 2\epsilon.$$

Així, queda demostrat que F és contínua en (x_0, y_0). □

Ja que podem parlar de continuïtat en una variable, en l'àmbit de les t-normes es parla també de la continuïtat lateral i es diu, per exemple, que una t-norma T és contínua per l'esquerra si les seves seccions horitzontal i verticals ho són.

El mínim nilpotent T_{nM} fou la primera t-norma contínua per l'esquerra però no contínua que va aparéixer (veure [2]) i donà lloc a l'esmentat estudi.

Al present treball ens centrarem principalment en les t-normes contínues, però l'estudi de les t-normes contínues per l'esquerra ha estat també molt important en el tema (veure [2]).

2.2 Propietats algebraiques elementals

En aquest apartat estudiarem algunes propietats elementals de les t-normes i, en especial, d'aquelles que són contínues. De fet, s'ha duit a terme una simplificació de molts resultats considerant t-normes contínues.

Presentem en primer lloc algunes definicions importants per poder estudiar aspectes algebraics de les t-normes.

Definició 5. Donada T una t-norma, direm que:

- Un element $a \in [0,1]$ és un *element idempotent* de T si $T(a,a) = a$. Els elements 0 i 1 s'anomenen els elements idempotents trivials de T, ja que ho són de totes les t-normes.

- Un element $a \in]0,1[$ és un *element nilpotent* de T si existeix alguna $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_T^{(n)} = 0$.
  Fixem-nos en que els extrems 0 i 1 s'exclouen de la definició anterior. Notem que, gràcies a la definició (2.10) de potència enèsima, 0 sempre sería un element nilpotent (ja que $a_T^{(n)} = 0$ per a qualsevol $n \in \mathbb{N}$), mentre que 1 no sería mai un element nilpotent.

- Un element $a \in]0,1[$ és un *divisor de zero* de T si existeix algun $b \in]0,1[$ que satisfà $T(a,b) = 0$. De nou, els extrems 0 i 1 s'exclouen de la definició; el 0 sempre sería un divisor de zero trivial i 1 no ho podria ser mai.

Observació 1. (i) Els elements de $]0,1[$ no poden ser idempotents i nilpotents a la vegada.

Vegem-ho: si $a \in]0,1[$ és un element idempotent de T es complirà $a_T^{(2)} = a$ i per inducció tendrem que $a_T^{(n)} = a \ \forall n \in \mathbb{N}$, que mai (per cap $n \in \mathbb{N}$) serà zero, pel que no pot ser un element nilpotent.

(ii) Si un element és nilpotent d'una t-norma T, aleshores també n'és un divisor de zero.

Suposem $a \in]0,1[$ nilpotent de T. Triam la menor $n \in \mathbb{N}$ tal que $T(a, \overset{(n)}{\ldots}, a) = 0$, i així $T(a, a_T^{(n-1)}) = 0$ amb $a_T^{(n-1)} > 0$; podrem prendre $b = a_T^{(n-1)} \in]0,1[$ i a serà un divisor de zero de T.

(iii) El recíproc no és cert: un element divisor de zero de T no té per què ser nilpotent.

La t-norma T_{nM} ens serveix com a contraexemple, ja que tots els elements en $]0,1[$ són divisors de zero mentre que només els elements de $]0,0.5]$ són nilpotents.

Aquestes afirmacions es poden veure fàcilment: els divisors de zero són els $a \in]0,1[$ ja que sempre podem trobar una $b \in]0,1[$ tal que $a + b \leqslant 1$.

Tenint en compte la extensió

$$T_{nM}(x_1,\dots,x_n)=\begin{cases}0 & \text{si } \sum_{i=1}^n x_i \leqslant 1\\ \min(x_1,\dots,x_n) & \text{en cas contrari,}\end{cases}$$

veim que per $x\in]0,1[$,

$$T_{nM}(x,\overset{(n)}{\dots},x)=\begin{cases}0 & \text{si } nx\leqslant 1\\ x & \text{en cas contrari.}\end{cases}$$

Per tant, sabem que sempre existeix una $n\in\mathbb{N}$ que satisfaci $x\leqslant\frac{1}{n}$ sempre i quan $x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$ (tenint en compte que $x^{(1)}_{T_{nM}}=x$ per conveni).

Exemple 6. Examinem aquestes propietats en els quatre exemples bàsics de t-normes i la t-norma mínim nilpotent. La Taula 2.1 resumeix quins elements de $]0,1[$ satisfan les propietats anteriors per cada t-norma.

	Conjunts d'elements no trivials		
	idempotents	divisors de zero	nilpotents
T_M	$]0,1[$	$\emptyset$	$\emptyset$
T_D	$\emptyset$	$]0,1[$	$]0,1[$
T_L	$\emptyset$	$]0,1[$	$]0,1[$
T_P	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
T_{nM}	$]0.5,1[$	$]0,1[$	$]0,0.5]$

Taula 2.1: Taula resum del conjunt d'elements idempotents, nilpotents i divisors de zero d'algunes t-normes.

Considerem les extensions de les t-normes donades a l'Exemple 3.

- En el cas de T_M, sabem per la Proposició 3 que és la única t-norma a la qual tots els elements de $[0,1]$ en són idempotents. És fàcil veure, per la pròpia definició de la t-norma, que cap element de $]0,1[$ pot ser element nilpotent ni divisor de zero de T_M.

- Per la t-norma producte dràstic T_D és fàcil també comprovar que tots els elements de $]0,1[$ en són elements nilpotents i divisors de zero.
  Prenent $a\in]0,1[$ i basant-nos en la definició de la forma extesa de T_D, per una banda $T_D(a,\overset{(n)}{\dots},a)=0$ per qualsevol $n\in\mathbb{N}$, i per l'altra banda $T_D(a,b)=0$ triant $b\in]0,1[$.

  També és senzill comprovar que els seus únics elements idempotents són els trivials en $[0,1]$, ja que $T_D(a,a)=a\Leftrightarrow a=0$ ó $a=1$.

- T_L té tots els elements de $]0,1[$ com a elements nilpotents i divisors de zero. Vegem-ho.
  Per $a\in]0,1[$,

$$T_L(a,\overset{(n)}{\dots},a)=\max\left(\sum_{i=1}^n a-(n-1),0\right)=\max(n(a-1)+1,0).$$

Donat que $a \in]0,1[$ i prenent $n \in \mathbb{N}$ suficientment gran podem tenir $T_L(a, \overset{(n)}{\ldots}, a) = \max(n(a-1)+1, 0) = 0$, de manera que a és nilpotent de T_L.

Per veure que a és divisor de zero, la condició és que existeixi un $b \in]0,1[$ tal que $T_L(a,b) = \max(a+b-1, 0) = 0$, però aquest fet és equivalent a veure que existeix un $b \in]0,1[$ tal que $a+b-1 \leqslant 0$, i sempre podrem trobar un b que satisfaci $0 < b \leqslant 1-a < 1$, pel que a és divisor de zero de T_L.

Així mateix podem comprovar que el conjunt d'elements idempotents no trivials de T_L en $]0,1[$ és buit:

$$T_L(a,a) = \max(2a-1, 0) = a \Leftrightarrow a = 0 \text{ ó } a = 1.$$

- De la pròpia definició de T_P es dedueix que no té elements idempotents, divisors de zero o nilpotents en $]0,1[$.
- En quant a T_{nM}, ja hem vist els seus conjunts d'elements nilpotents i divisors de zero a la Observació 1 i trobar el seu conjunt d'elements idempotents és trivial.

$\diamondsuit$

Vegem ara algunes propietats relatives a les definicions anteriors pel cas en que T sigui una t-norma contínua.
Començem per caracteritzar els elements idempotents d'una t-norma contínua:

Proposició 6. *Si T és una t-norma contínua, aleshores $a \in [0,1]$ és un element idempotent de T si i només si per a tots els $x \in [0,1]$ es satisfà $T(a,x) = \min(a,x)$.*

Demostració. Considerant qualsevol $x \in [0,1]$ i una $a \in [0,1]$ i suposant que $T(a,x) = min(a,x)$, en particular tenim $T(a,a) = min(a,a) = a$, i per tant a és un element idempotent de T.
D'altra banda, si $a \in [0,1]$ és un element idempotent de T, vegem que es compleix $T(a,x) = min(a,x)$ per a qualsevol $x \in [0,1]$:

- Si $x \in [a,1]$, gràcies a la monotonia de les t-normes (T3) tenim

  $$a = T(a,a) \leqslant T(a,x) \leqslant T(a,1) = a$$

  I per tant $T(a,x) = a = \min(x,a)$.

- Si $x \in [0,a]$:

  Ja que $T(a,0) = 0$ i $T(a,a) = a$, tenint en compte que T és contínua, existeix una $z \in [0,a]$ tal que $T(a,z) = x$.
  Fent servir la propietat associativa de les t-normes obtenim

  $$T(a,x) = T(a,T(a,z)) = T(T(a,a),z) = T(a,z) = x = min(a,x)$$

  I per tant

  $$T(a,x) = \min(a,x) \quad \forall x \in [0,1].$$

□

També podem caracteritzar el conjunt d'elements idempotents de la següent manera:

Corol·lari 1. *Sigui T una t-norma contínua, aleshores el seu conjunt d'elements idempotents és un conjunt tancat de* $[0,1]$.

Demostració. Diguem I al conjunt d'elements idempotents d'una t-norma contínua T i $\bar{I}$ a la seva clausura en $[0,1]$.
Com sabem, I serà un subconjunt tancat de $[0,1]$ si i només si es compleix $I = \bar{I}$.

$I \subseteq \bar{I}$ es compleix sempre per definició. Vegem que també es compleix $I \supseteq \bar{I}$:
Prenem $x \in \bar{I}$. Existirà una successió $\{x_n\}_n$, $n \in \mathbb{N}$, d'elements $x_n \in I$ tal que $x = \lim x_n$. Aleshores, tenint en compte que T és una t-norma contínua i que els x_n en són elements idempotents:

$$T(x,x) = T(\lim x_n, \lim x_n) = \lim T(x_n, x_n) = \lim x_n = x.$$

Per tant, x és un element idempotent de T, i.e, $x \in I$. □

Algunes t-normes tenen propietats algebraiques addicionals com ser arquimedianes o estrictament monòtones. Vegem les definicions d'aquests conceptes.

Definició 6. Sigui T una t-norma, direm que és

- *estrictament monòtona* si $T(x,y) < T(x,z)$ per $x > 0$ i $y < z$.
- *arquimediana* si per cada $(x,y) \in]0,1[^2$ existeix una $n \in \mathbb{N}$ amb $x_T^{(n)} < y$.

Proposició 7. *Sigui T una t-norma. Si T és estrictament monòtona, aleshores només té elements idempotents trivials i, a més, no té divisors de zero.*

Demostració. Sigui T estrictament monòtona, pel que satisfà $T(x,y) < T(x,z)$ per $x > 0$, $y < z$ amb $x, y, z \in [0,1]$.

D'una banda, sabem que $T(0,0) = 0$ i $T(1,1) = 1$, però per la resta d'elements $x \in]0,1[$ tenim $T(x,x) < T(x,1) = x$, pel que $T(x,x) < x$, els elements $x \in]0,1[$ no poden ser idempotents.

D'altra banda, si suposam que existeix algun element $a \in]0,1[$ divisor de zero de T tenim que existeix $b \in]0,1[$ tal que $T(a,b) = 0$. Per la monotonia (T3) de T es satisfà

$$0 \leqslant T\left(a, \frac{b}{2}\right) \leqslant T(a,b) = 0,$$

pel que $T\left(a, \frac{b}{2}\right) = T(a,b) = 0$, que contradiu la condició de que T sigui estrictament monòtona. □

En el cas de t-normes contínues la propietat arquimediana es pot caracteritzar mitjançant els elements idempotents de la t-norma.

Teorema 1. *Sigui T una t-norma contínua.*
Aleshores, T és arquimediana si i només si els únics elements idempotents de T són els trivials (0 i 1).

Demostració. Suposem que T és una t-norma contínua i arquimediana, i que $x \in]0,1[$ és un element idempotent de T.

Aleshores, $x_T^{(2)} = T(x,x) = x$. Suposem cert que $x_T^{(n-1)} = x$ per $n \in \mathbb{N}$ i vegem si és cert per $n \in \mathbb{N}$ per inducció:

$$x_T^{(n)} \overset{(1)}{=} T\left(x_T^{(n-1)}, x\right) \overset{(2)}{=} T(x,x) = x,$$

on (1) ve donat per l'associativitat (T2) de T i (2) per la hipòtesi d'inducció.
Per tant, $\forall n \in \mathbb{N}$ es satisfà $x_T^{(n)} = x$, fet que contradiu que T sigui arquimediana.

D'altra banda, sigui $(x,y) \in]0,1[^2$, vegem que existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_T^{(n)} < y$, és a dir, que $\lim_{n\to\infty} x_T^{(n)} = 0$.
Diguem $\lim_{n\to\infty} x_T^{(n)} = a$, aleshores:

$$\begin{aligned} T(a,a) &= T\left(\lim_{n\to\infty} x_T^{(n)}, \lim_{n\to\infty} x_T^{(n)}\right) \\ &\overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} T\left(x_T^{(n)}, x_T^{(n)}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} x_T^{(2n)} \\ &= a, \end{aligned}$$

on (1) és gràcies a la continuïtat de T.
Com hem vist, $T(a,a) = a$, a és un element idempotent de T, però només podrà ser $a = 0$ ó $a = 1$ donat que T només té elements idempotents trivials. Ja que $\{x_T^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ és decreixent i que $x \in]0,1[$, podem descartar el cas $a = 1$ i obtenim el que buscavem. □

Exemple 7. Gràcies a aquest resultat i a la Taula 2.1 podem veure fàcilment que T_M no és una t-norma arquimediana, mentre que T_P, T_L i T_D sí ho són.
A més, T_P és la única que és estrictament monòtona. ♢

Si combinam la continuïtat amb algunes propietats algebraiques podem obtenir dues classes molt importants de t-normes:

Definició 7. Sigui T una t-norma. Deim que és

- *estricta* si és contínua i estrictament monòtona.
- *nilpotent* si és contínua i si cada $a \in]0,1[$ és un element nilpotent de T.

Exemple 8. Amb el que hem vist anteriorment, podem trobar un exemple clar de cada família de t-normes: T_P és estricta, mentre que T_L és una t-norma nilpotent. ♢

Finalment, vegem que per a qualsevol subconjunt tancat J de $[0,1]$ que contengui $\{0,1\}$ podem trobar una t-norma contínua T de manera que el seu conjunt d'elements idempotents sigui exactament J.

Teorema 2. *Per cada conjunt J tal que $\{0,1\} \subseteq J \subseteq [0,1]$ existeix una t-norma T contínua tal que J és el seu subconjunt d'elements idempotents si i només si existeix un conjunt A format per un nombre numerable d'índexos i, a més, $(]a_\alpha, b_\alpha[)_{\alpha\in A}$ és una família de subintervals oberts i disjunts dos a dos de $[0,1]$ tal que*

$$\bigcup_{\alpha\in A}]a_\alpha, b_\alpha[\ = [0,1] \setminus J.$$

Demostració. Sigui T una t-norma contínua i J el seu subconjunt d'elements idempotents.
Gràcies al Corol·lari 1 sabem que J és un tancat i per tant el seu complementari $[0,1] \setminus J$ és un obert. Aleshores, $[0,1] \setminus J$ és una unió finita o numerable d'intervals oberts disjunts dos a dos. En aquest cas, però, podem detallar com s'obtindrien aquests oberts.

Fixam $x_0 \in [0,1] \setminus J$. Com no és un element idempotent de T però es compleix la propietat (T3), tenim que $T(x_0, x_0) < x_0$.
Anomenam

$$a_{x_0} = \max\{x \in [0, x_0[\mid T(x,x) = x\},$$

$$b_{x_0} = \min\{x \in]x_0, 1] \mid T(x,x) = x\},$$

de manera que en $]a_{x_0}, b_{x_0}[$ no hi ha elements idempotents de T però els extrems a_{x_0}, b_{x_0} sí que són idempotents gràcies a que T és contínua.

A més a més, per cada $x_0, y_0 \in [0,1] \setminus J$ amb $x_0 \neq y_0$ els intervals $]a_{x_0}, b_{x_0}[$ i $]a_{y_0}, b_{y_0}[$ són disjunts o iguals. Vegem-ho:

Suposem que $x_0 < y_0$ sense pèrdua de generalitat. Així, sempre tendrem que $a_{x_0} \leqslant a_{y_0}$ i $b_{x_0} \leqslant b_{y_0}$.

Cas 1: És clar que si $b_{x_0} \leqslant a_{y_0}$ aleshores els intervals són disjunts.

Cas 2: Suposem que $a_{y_0} < b_{x_0}$. Tendrem dues possibilitats per x_0:

- Cas 2.1: Si $a_{y_0} < x_0 < b_{x_0}$.
  Suposem que $a_{x_0} < a_{y_0} < x_0$, aleshores a_{y_0} seria un element idempotent situat en $[0, x_0[$ i major que el màxim a_{x_0}, fet que ens porta a una contradicció amb la definició de a_{x_0}.
- Cas 2.2: Si $x_0 < a_{y_0} < b_{x_0}$ aleshores a_{y_0} seria un element idempotent situat en $]x_0, 1]$ i menor que l'ínfim b_{x_0}, fet que contradiu la definició de b_{x_0}.

A les Figures 2.36-2.38 podem veure una petita idea de la situació en cada cas.

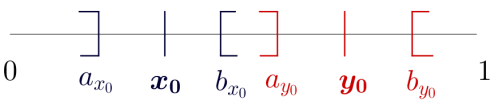

Figura 2.36: Cas 1

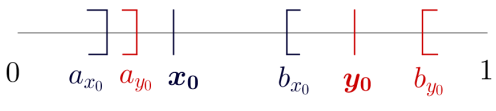

Figura 2.37: Cas 2.1

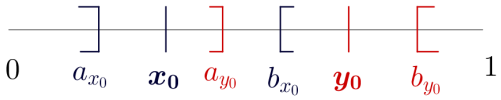

Figura 2.38: Cas 2.2

A més, els intervals no són buits, ja que $x_0 \in]a_{x_0}, b_{x_0}[$.

Aleshores cada interval conté algun nombre racional, que podem emprar com a índex pel corresponent interval. Com els intervals són disjunts dos a dos ó són iguals, el conjunt A dels índexos tendré com a màxim tants elements com nombres racionals en $[0,1]$. Per tant, A serà un subconjunt numerable o finit de $[0,1] \setminus J$.

Anem a demostrar ara l'altra implicació.
Sigui J un subconjunt de $[0,1]$ que satisfà

$$\bigcup_{\alpha \in A}]a_\alpha, b_\alpha[= [0,1] \setminus J,$$

on A és un conjunt d'índexs finit o numerable i $(]a_\alpha, b_\alpha[)_{\alpha \in A}$ és una família de subintervals de $[0,1]$ oberts i disjunts dos a dos.
Així, podem escriure $[0,1] \setminus J = \bigcup_{\alpha \in A} J_\alpha$, on, per cada $\alpha \in A$, $J_\alpha =]u_\alpha, v_\alpha[$ per $u_\alpha, v_\alpha \in [0,1]$ i $(J_\alpha)_{\alpha \in A}$ és una família finita o numerable de subintevals oberts de $[0,1]$ disjunts dos a dos.
Fixem-nos en que $J_\alpha \cup J_\beta$ amb $\alpha \neq \beta$ no és un interval.
Aleshores, la funció $T : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ definida per

$$T(x,y) = \begin{cases} u_\alpha + \frac{(x-u_\alpha)(y-u_\alpha)}{v_\alpha - u_\alpha} & \text{si } (x,y) \in J_\alpha \times J_\alpha, \\ \min(x,y) & \text{en altre cas}, \end{cases} \tag{2.25}$$

és una t-norma tal que el seu subconjunt d'elements idempotents és J per definició. Vegem-ho a continuació:

- El subconjunt d'elements idempotents de T és J:

  Sigui B el conjunt d'elements idempotents de T. Vegem que $B = J$.

  Si prenem $x \in J$, aleshores és clar que $(x,x) \notin J_\alpha \times J_\alpha$ per a cap α i per tant $T(x,x) = \min(x,x) = x$; és a dir, $x \in B$.
  Si, pel contrari, prenem un $x \in B$, aleshores $T(x,x) = x$:

– Suposem que $x \notin J$, és a dir, $x \in J_\alpha$ per algun $\alpha \in A$. En aquest cas,

$$\begin{aligned} T(x,x) = x \quad &\Longleftrightarrow \quad u_\alpha + \frac{(x-u_\alpha)(x-u_\alpha)}{v_\alpha - u_\alpha} = x \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{x^2 - u_\alpha x + u_\alpha v_\alpha}{v_\alpha - u_\alpha} = x \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2 - x(u_\alpha + v_\alpha) + u_\alpha v_\alpha = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{u_\alpha + v_\alpha \pm \sqrt{(u_\alpha - v_\alpha)^2}}{2} \\ &\Longleftrightarrow \quad x = u_\alpha \text{ ó } x = v_\alpha, \end{aligned}$$

el que és una contradicció, ja que havíem suposat que $x \in J_\alpha =]u_\alpha, v_\alpha[$.

– T és una t-norma: A la següent secció veurem que (2.25) és en realitat la suma ordinal dels sumands $\left(\langle u_\alpha, v_\alpha, T_p\rangle\right)$ per $\alpha \in A$, i per tant és t-norma.

□

2.3 Caracterització de les t-normes contínues

En aquest apartat volem veure una caracterització de les t-normes contínues. Per començar, presentam alguns mètodes de construcció de t-normes a partir de t-normes ja existents. Introduirem dues eines fonamentals per la construcció: els generadors additius i les sumes ordinals.

2.3.1 Construcció de t-normes

Generadors additius

La primera construcció que veurem es farà mitjançant funcions d'una variable anomenades habitualment generadors additius.

Definició 8. Un *generador additiu* $t : [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$ d'una t-norma T és una funció estrictament decreixent i contínua per la dreta en 0, amb $t(1) = 0$, tal que per qualsevol $(x,y) \in [0,1]^2$ satisfà

$$t(x) + t(y) \in Ran(t) \cup [t(0), \infty], \tag{2.26}$$

$$T(x,y) = t^{(-1)}(t(x) + t(y)), \tag{2.27}$$

on $t^{(-1)} : [0, t(0)] \longrightarrow [0,1]$ ve definida per

$$t^{(-1)}(x) = \begin{cases} t^{-1}(x) & \text{si } x \leqslant t(0), \\ 0 & \text{si } x > t(0). \end{cases}$$

La condició (2.27) també es pot escriure com

$$T(x,y) = t^{-1}\left(\min(t(0), t(x) + t(y))\right). \tag{2.28}$$

En el cas en que el generador additiu t sigui una funció contínua, llavors la condició (2.26) es satisfà trivialment i la t-norma corresponent $T(x,y) = t^{-1}\big(\min(t(0), t(x)+t(y))\big)$ és clarament una t-norma contínua.

El següent teorema bàsicament ens diu, per una banda, que generadors additius continus porten a t-normes contínues arquimedianes que sempre seran o bé estrictes, o bé nilpotents (depenent del valor del generador en 0), i d'altra banda, que una t-norma contínua i arquimediana sempre està generada per un generador additiu continu.

Teorema 3. *Sigui $T : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ una funció. Aleshores, T és una t-norma contínua arquimediana si, i només si, T té un generador additiu continu $t : [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$.*
A més a més, T és estricta si, i només si, $t(0) = \infty$ i T és nilpotent si, i només si, $t(0) < \infty$.

Demostració. Suposem que la funció $T : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ té un generador additiu continu $t : [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$, pel que $T(x,y) = t^{-1}(\min(t(0), t(x)+t(y)))$ per $(x,y) \in [0,1]^2$. Fàcilment es pot comprovar que T és associativa, commutativa i monòtona creixent. A més, per $y \in [0,1]$, $T(1,y) = t^{-1}\big(\min(t(0), t(1)+t(y))\big) = t^{-1}\big(\min(t(0), t(y))\big) = y$, pel que T és una t-norma.

Clarament, si t és continu, T és contínua. Aleshores, gràcies al Teorema 1 serà suficient veure que els seus únics elements idempotents són els trivials.
Efectivament, sigui $x \in]0,1]$ un element idempotent de T. Llavors,

$$\begin{aligned} T(x,x) = x \quad &\Leftrightarrow \quad t^{-1}(\min(t(0), 2t(x)) = x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2t(x) < t(0) \quad \text{i} \quad 2t(x) = t(x) \\ &\Leftrightarrow \quad t(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 1. \end{aligned}$$

Per tant, els únics elements idempotents de T són 0 i 1; T és arquimediana.

Vegem que T és estricta suposant que $t(0) = \infty$.
Si $t(0) = \infty$, llavors

$$T(x,y) = t^{-1}\big(\min(t(0), t(x)+t(y)\big) = t^{-1}\big(t(x)+t(y)\big),$$

i es veu clarament que T és estrictament creixent per ser-ho t i t^{-1}.

Demostrem a continuació que si $t(0) < \infty$ aleshores T és nilpotent.
Es pot veure fàcilment per inducció que

$$\top_{i=1}^{n}(x_i) = t^{-1}\left(\min\left(t(0), t(x_1) + \cdots + t(x_n)\right)\right).$$

En particular,

$$x_T^{(n)} = t^{-1}\left(\min\left(t(0), n\,t(x)\right)\right). \tag{2.29}$$

Donades les característiques del generador, si $t(0) < \infty$, aleshores $t(x) > 0\ \forall x \in]0,1[$ i per la propietat arquimediana dels nombres reals podem trobar una $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot t(x) \geqslant t(0)$. És a dir, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $x_T^{(n)} = t^{-1}(t(0)) = 0$. Així, per cada element $x \in]0,1[$ podem trobar una $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_T^{(n)} = 0$, i.e T és nilpotent.

Tenim doncs:

$$\text{Si } t(0) = \infty \Rightarrow T \text{ és estricta} \tag{2.30}$$

$$\text{Si } t(0) < \infty \Rightarrow T \text{ és nilpotent} \tag{2.31}$$

Vegem ara els recíprocs per reducció a l'absurd.
Suposem que T és nilpotent però $t(0) = \infty$. Si és així, per (2.30) T ha de ser estricta i $x_T^{(n)} = t^{-1}(nt(x)) \neq 0 \ \forall x \in]0,1[$ i $\forall n \in \mathbb{N}$ (ja que $t^{-1}(nt(x)) = 0 \Leftrightarrow nt(x) > t(0) = \infty$, que és absurd), pel que T no pot ser nilpotent. És contradicció.

Anàlogament podem demostrar el recíproc de (2.30).

Suposem ara que T és una t-norma contínua i arquimediana. Per ser arquimediana, satisfà la propietat del límit: $\forall a \in]0,1[$, $\lim_{n\to\infty} a_T^{(n)} = 0$.
Ara bé, vegem que mentre $a_T^{(n)} \neq 0$, aquest decreixement és estricte, i.e, si $a_T^{(n)} > 0$, aleshores $a_T^{(n)} > a_T^{(n+1)}$: si fos $a_T^{(n)} = a_T^{(n+1)}$, inductivament veuríem que
$a_T^{(n)} = a_T^{(2n)} = \left(a_T^{(n)}\right)_T^{(2)}$, pel que $T\left(a, \overset{(2n)}{\ldots}, a\right) = T\left(T(a,\ldots,a), T(a,\ldots,a)\right)$.
Aleshores, $a_T^{(n)} \in \{0,1\}$, i és un element idempotent de T. Com que T és arquimediana i contínua els únics idempotent són 0, 1 i per tant, $a_T^{(n)} = 0$, el que és una contradicció.

Introduïm ara la definició de *potència racional*. Per $a \in [0,1]$,

$$a_T^{(1/n)} = \sup\{z \in [0,1] \ \mid \ z_T^{(n)} < a\} = \sup\{z \in [0,1] \ \mid \ T(z, \overset{(n)}{\ldots}, z) < a\}. \tag{2.32}$$

Per continuïtat, $T\left(a_T^{(1/n)}, \ldots, a_T^{(1/n)}\right) = \left(a_T^{(1/n)}\right)_T^{(n)} \leqslant a$, però per definició de suprem, en realitat $\left(a_T^{1/n}\right)_T^{(n)} = a$. A més a més, com T és contínua i arquimediana es verifica

$$\lim_{n\to\infty} a_T^{(1/n)} = 1 \quad \forall a \neq 0. \tag{2.33}$$

Definim aleshores

$$a_T^{(m/n)} = \left(a_T^{(1/n)}\right)_T^{(m)}, \tag{2.34}$$

que està ben definit i verifica les regles de potències.

Podem donar la funció

$$\begin{array}{rcl} h \ : \mathbb{Q}\cap]0,\infty[& \longrightarrow & [0,1] \\ r & \longrightarrow & h(r) = a_T^{(r)}. \end{array}$$

Per ser T contínua i per (2.33) es veu fàcilment que h és contínua. A més,

$$h(r+s) = a_T^{(r+s)} = T\left(a_T^{(r)}, a_T^{(s)}\right) \leqslant a_T^{(r)} = h(r),$$

i per tant h és decreixent. De fet, ho és estrictament a l'antiimatge de $]0,1]$, ja que si $h\left(\frac{m}{n}\right) > 0$:

$$h\left(\frac{p}{q} + \frac{m}{n}\right) \leqslant h\left(\frac{mq+1}{nq}\right) = \left(a_T^{\left(\frac{1}{nq}\right)}\right)_T^{(mq+1)} < \left(a_T^{\left(\frac{1}{nq}\right)}\right)_T^{mq} = h\left(\frac{m}{n}\right).$$

Podem estendre h a $[0,\infty]$ per continuïtat. Definim,

$$\begin{array}{rcl} H \ : [0,\infty] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longrightarrow & H(x) = \inf\{h(r) \ \mid \ r \in \mathbb{Q} \cap [0,x]\}, \end{array}$$

i obtenim una funció contínua i decreixent tal que

$$H(x+y) = a_T^{(x+y)} = T\left(a_T^{(x)}, a_T^{(y)}\right) = T\left(H(x), H(y)\right).$$

A més, és estrictament decreixent a l'antiimatge de $]0,1]$.

Sigui ara $t = H^{(-1)} : [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$. Aquesta serà una funció contínua, estrictament decreixent amb $t(1) = 0$ i tal que $H \circ t = Id_{[0,1]}$. Així,

$$T(x,y) = T\left(H(t(x)), H\left(t(y)\right)\right) = H\left(t(x) + t(y)\right) = t^{(-1)}\left(t(x) + t(y)\right),$$

pel que t és el generador additiu continu de T. □

Per una altra banda, es pot veure una certa unicitat dels generadors additius llevat d'una constant multiplicativa $k > 0$.

Proposició 8. *Si t_1 i t_2 són dos generadors additius continus d'una mateixa t-norma T, llavors existeix $k > 0$ tal que $t_1 = kt_2$.*

Demostració. Siguin t_1 i t_2 dos generadors additius d'una t-norma T. Llavors, per la pròpia definició de generador additiu tendrem

$$T(x,y) = t_1^{(-1)}\left(t_1(x) + t_1(y)\right) = t_2^{(-1)}\left(t_2(x) + t_2(y)\right) \quad \text{per } x, y \in [0,1]. \tag{2.35}$$

Fent el canvi

$$\left\{ \begin{array}{l} u = t_2(x) \\ v = t_2(y) \end{array} \right\}, \tag{2.36}$$

obtenim que $\forall u, v \in [0, t_2(0)]$ que satisfacin $u + v \in [0, t_2(0)]$ es compleix que $t_2^{(-1)}(u+v) = t_2^{-1}(u+v)$.
Del canvi (2.36) podem deduïr

$$t_2^{-1}(u) = x \Rightarrow (t_1 \circ t_2^{-1})(u) = t_1(x), \tag{2.37}$$

$$t_2^{-1}(v) = y \Rightarrow (t_1 \circ t_2^{-1})(v) = t_1(y), \tag{2.38}$$

i per tant, (2.35) queda com

$$t^{(-1)}\left((t_1 \circ t_2)^{-1}(u) + (t_1 \circ t_2^{-1})(v)\right) = t_2^{-1}(u+v). \tag{2.39}$$

Si $u + v \in [0, t_2(0)[$, aleshores podem tenir l'expressió:

$$t^{(-1)}\left((t_1 \circ t_2^{-1})(u) + (t_1 \circ t_2^{-1})(v)\right) = t_2^{-1}(u+v) \neq 0, \tag{2.40}$$

i per tant podem escriure

$$t^{(-1)}\left((t_1 \circ t_2^{-1})(u) + (t_1 \circ t_2^{-1})(v)\right) = t^{-1}\left((t_1 \circ t_2)^{-1}(u) + (t_1 \circ t_2^{-1})(v)\right) \tag{2.41}$$

Aplicant la funció t_1 obtindrem finalment:

$$(t_1 \circ t_2^{-1})(u) + (t_1 \circ t_2^{-1})(v) = (t_1 \circ t_2^{-1})(u+v). \tag{2.42}$$

Gràcies a la continuïtat de t_1 i t_2^{-1} també es satisfaria (2.42) en el cas en que $u+v \in [0, t_2(0)]$.

Així, la funció $\varphi = t_1 \circ t_2^{-1}$ verifica l'equació funcional de Cauchy $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ i és contínua. Amb les condicions de continuïtat i monotonia que satisfà la funció φ podem assegurar que la solució a l'equació funcional és $\varphi(x) = kx \ \forall x \in [0, t_2(0)]$ per algun $k > 0$.
És a dir,

$$(t_1 \circ t_2^{-1})(x) = kx \quad \forall x \in [0, t_2(0)] \quad \text{per algun } k > 0,$$

i fent el canvi $t_2(y) = x \leftrightarrow y = t_2^{-1}(x)$,

$$t_1(y) = k t_2(y) \quad \forall y \in [0,1], \text{ per } k > 0.$$

Fixem-nos en que necessàriament $k > 0$, ja que els generadors t_1 i t_2 prenen valors en $[0, \infty]$ i no tendria sentit considerar $k \leqslant 0$.

□

Així, si T és estricta qualsevol generador verificarà $t(0) = \infty$, mentre que si T és nilpotent tots verificaran $t(0) < \infty$. A més, amb una k adequada poden aconseguir que $t(0) = 1$; si això passa, llavors direm que aquest t és un *generador normalitzat* de T.

Exemple 9. Vegem alguns exemples de generadors additius de t-normes conegudes.

(i) Amb el generador additiu $t(x) = 1 - x$ podem obtenir T_L (veure Figura 2.39).

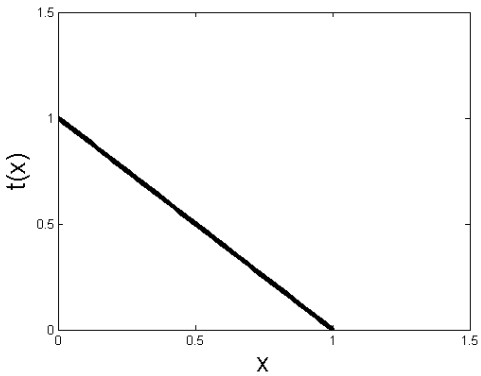

Figura 2.39: Generador additiu de T_L.

Podem comprovar fàcilment que es compleixen les condicions per a que sigui un generador additiu de T_L: és estrictament decreixent, $t(1) = 0$ i considerant que $t^{-1}(x) = t(x)$, tenim que $\forall x, y \in [0,1]$

$$\begin{aligned} t^{-1}\big(\min(t(0), t(x) + t(y)\big) &= t^{-1}\big(\min(1, 2 - x - y)\big) \\ &= 1 - \min(1, 2 - x - y) \\ &= \max(0, x + y - 1) = T_L(x, y). \end{aligned}$$

Fixem-nos en que, com hem dit, T_L és arquimediana, ja que és generada per un generador additiu, i que $t(0) < \infty$ ens indica que és nilpotent, com ja sabíem.

Fixem-nos també en que el generador t és normalitzat i que $t_2(x) = k(1-x)$ també és un generador additiu de T_L per qualsevol $k > 0$. És fàcil comprovar-ho tenint en compte que $t_2^{-1}(x) = 1 - \frac{x}{k}$:

$$\begin{aligned} t_2^{-1}\big(\min(t_2(0), t_2(x) + t_2(y)\big) &= t_2^{-1}\big(k\min(1, 2-x-y)\big) \\ &= 1 - \frac{1}{k}k\min(1, 2-x-y) \\ &= T_L(x, y). \end{aligned}$$

(ii) La següent funció és un generador additiu de T_P:

$$t(x) = \begin{cases} -\log(x) & \text{si } x \in [0,1[, \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

En aquest cas $t(0) = \infty$, el que ens porta a confirmar el que ja sabíem: T_P és estricta i arquimediana. Podem veure'n una representació a la Figura 2.40.

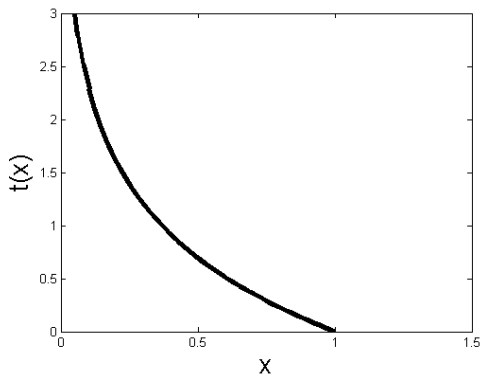

Figura 2.40: Generador additiu de T_P.

◊

Exemple 10. A continuació presentam alguns exemples de famílies interessants de t-normes. Encara que aquestes famílies estan definides per distints valors de λ, aquí només presentam els valors del paràmetre que fan que les t-normes siguin contínues i arquimedianes. Per exemple:

(i) La família $\left(T_\lambda^{SS}\right)$ de t-normes *Schweizer-Sklar* és

$$T_\lambda^{SS}(x, y) = \begin{cases} T_M(x, y) & \text{si } \lambda = -\infty, \\ T_P(x, y) & \text{si } \lambda = 0, \\ T_D(x, y) & \text{si } \lambda = \infty, \\ \left(\max\left(x^\lambda + y^\lambda - 1, 0\right)\right)^{1/\lambda} & \text{si } \lambda \in]-\infty, 0[\cup]0, \infty[, \end{cases} \tag{2.43}$$

però les t-normes d'aquesta família són contínues i arquimedianes per $\lambda \in]-\infty,\infty[$, i venen generades per

$$t_\lambda^{SS}(x) = \begin{cases} \frac{1-x^\lambda}{\lambda} & \text{si } \lambda \in]-\infty,0[\cup]0,\infty[\\ -\log(x) & \text{si } \lambda = 0. \end{cases} \tag{2.44}$$

En aquest cas, es pot veure que per $\lambda \in]-\infty,0[$ són estrictes i en canvi per $\lambda \in]0,\infty[$ són nilpotents. A les Figures 2.41 i 2.42 es troben representats el generador additiu i la gràfica en 3D de la t-norma estricta T_{-20}^{SS}, mentre que a les Figures 2.43 i 2.44 apareix el generador additiu i la representació de la t-norma nilpotent T_2^{SS}.

Si ens fixam, per $\lambda = 1$ tenim que $T_1^{SS} = T_L$, pel que aquesta família conté els quatre exemples bàsics de t-normes.

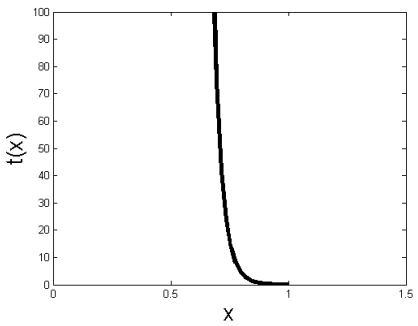

Figura 2.41: Generador additiu t_{-20}^{SS}

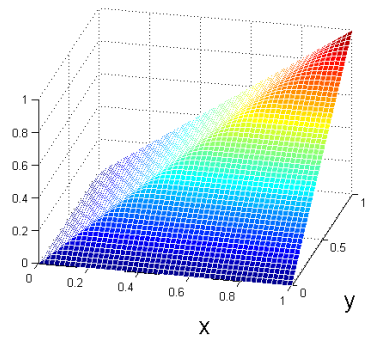

Figura 2.42: Gràfica 3D de T_{-20}^{SS}.

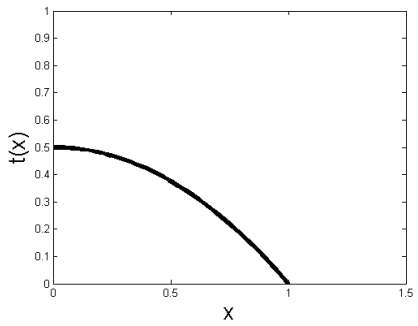

Figura 2.43: Generador additiu t_2^{SS}

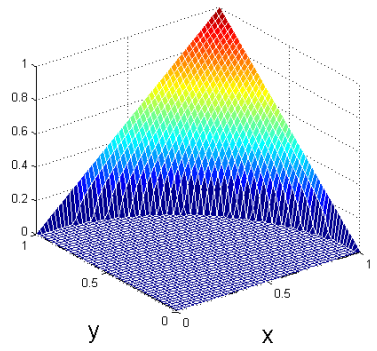

Figura 2.44: Gràfica 3D de T_2^{SS}.

(ii) El conjunt de t-normes contínues i arquimedianes de la família $\left(T_\lambda^F\right)_{\lambda\in[0,\infty]}$ de t-normes *Frank* venen donades per:

$$T_\lambda^F(x,y) = \begin{cases} T_P(x,y) & \text{si } \lambda = 1, \\ T_L(x,y) & \text{si } \lambda = \infty, \\ \log_\lambda\left(1 + \frac{(\lambda^x-1)(\lambda^y-1)}{\lambda-1}\right) & \text{si } \lambda \in]0,1[\cup]1,\infty[, \end{cases} \tag{2.45}$$

Fixem-nos en que aquesta família inclou les dues t-normes presentades a l'Exemple 9.
Aquestes t-normes estan generades per

$$t_\lambda^F(x) = \begin{cases} -\log(x) & \text{si } \lambda = 1, \\ 1-x & \text{si } \lambda = \infty, \\ \log\left(\frac{\lambda-1}{\lambda^x-1}\right) & \text{si } \lambda \in]0,1[\cup[1,\infty[. \end{cases} \tag{2.46}$$

Totes les t-normes contínues i arquimedianes T_λ^F amb $\lambda \in]0,\infty[$ són estrictes, mentre que si $\lambda = \infty$, $T_\infty^F = T_L$ és una t-norma nilpotent.
A les Figures 2.45 i 2.46 es pot trobar el generador i la gràfica de $T_{10^6}^F$.

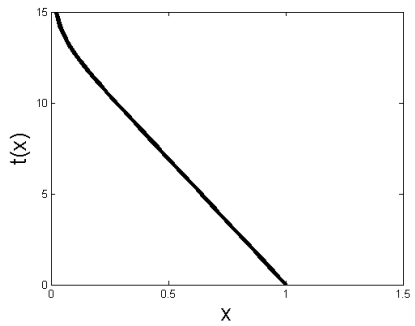

Figura 2.45: Generador additiu $t_{10^6}^F$

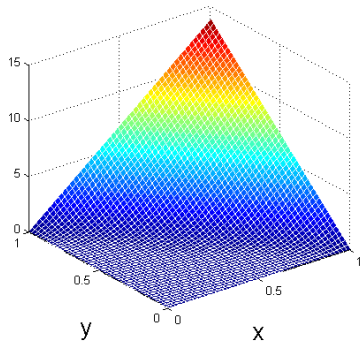

Figura 2.46: Gràfica 3D de $T_{10^6}^F$.

(iii) El conjunt de t-normes contínues i arquimedianes de la família $\left(T_\lambda^H\right)$ de t-normes *Hamacher* venen donades per

$$T_0^H(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases} \tag{2.47}$$

amb generador $t_0^H(x) = \frac{1-x}{x}$, i en general, per

$$T_\lambda^H(x,y) = \frac{xy}{\lambda + (1-\lambda)(x+y-xy)} \quad \text{si } \lambda \in]0,\infty[, \tag{2.48}$$

amb generador

$$t_\lambda^H(x) = \log\left(\frac{\lambda + (1-\lambda)x}{x}\right). \tag{2.49}$$

Totes elles són estrictes.
Podem veure'n un exemple a les Figures 2.47 i 2.48.

◊

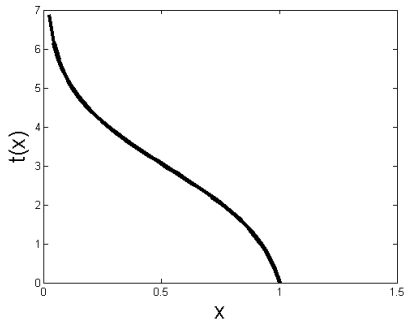

Figura 2.47: Generador additiu t_{20}^{H}

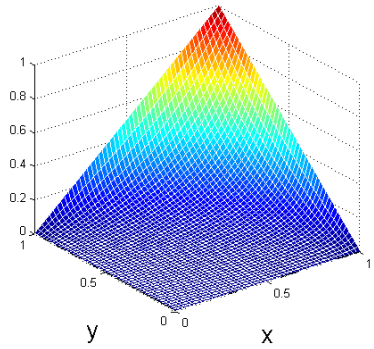

Figura 2.48: Gràfica 3D de T_{20}^{H}.

Sumes ordinals

Presentam a continuació un mètode per construïr noves t-normes a partir de famílies d'altres t-normes.

Definició 9. Sigui $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ una família de t-normes i $(]a_\alpha, b_\alpha[)_{\alpha\in A}$ una família de subintervals oberts, disjunts dos a dos i no buits de $[0,1]$.
Aleshores la funció $T : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ definida per

$$T(x,y) = \begin{cases} a_\alpha + (b_\alpha - a_\alpha)\cdot T_\alpha\left(\frac{x-a_\alpha}{b_\alpha-a_\alpha}, \frac{y-a_\alpha}{b_\alpha-a_\alpha}\right) & \text{si } (x,y)\in[a_\alpha,b_\alpha]^2, \\ \min(x,y) & \text{en altre cas,} \end{cases} \tag{2.50}$$

s'anomena la *suma ordinal* dels *sumands* $\langle a_\alpha, b_\alpha, T_\alpha\rangle$ per $\alpha\in A$.
L'escriurem com

$$T = (\langle a_\alpha, b_\alpha, T_\alpha\rangle)_{\alpha\in A}.$$

Proposició 9. *Sigui $T = (\langle a_\alpha, b_\alpha, T_\alpha\rangle)_{\alpha\in A}$ una suma ordinal de t-normes. Aleshores,*

(i) T és una t-norma.

(ii) T és contínua si, i només si T_α és contínua per cada $\alpha\in A$.

Demostració. Vegem cada part per separat.

Prova de (i)

Vegem que T donada per (2.50) és efectivament una t-norma. Sabem que T satisfà les propietats (T1), (T3) i (T4) perquè T_α i T_M les satisfan.
Vegem la propietat associativa (T2): donades $x,y,z\in[0,1]$, aleshores $T(T(x,y),z) = T(x,T(y,z))$.

- Si $x,y,z\in[a_\alpha,b_\alpha]$ per algun $\alpha\in A$, T és associativa per ser-ho T_α $\forall\alpha\in A$.
- Si $x < a_\alpha \leqslant y, z \leqslant b_\alpha$ tenim, d'una banda:

$$T(T(x,y),z) = T(\min(x,y),z) = T(x,z) = \min(x,z) = x,$$

i de l'altra,

$$T(x, T(y,z)) = \min(x, T(y,z)) = x,$$

ja que per monotonia tenim $T(y,z) \geqslant T(a_\alpha, a_\alpha) = a_\alpha > x$. Així, obtenim $T(x, T(y,z)) = T(T(x,y), z)$.

- Si $a_\alpha \leqslant y, z \leqslant b_\alpha < x$, d'un costat

$$T(T(x,y),z) = T(\min(x,y),z) = T(y,z),$$

i de l'altre

$$T(x, T(y,z)) = \min(x, T(y,z)) = T(y,z),$$

donada la monotonia en les dues variables: $T(y,z) \leqslant T(x,1) = x$.

- Si de x, y i z no n'hi ha dos que pertanyin al mateix interval, aleshores

$$T(T(x,y),z) = \min(x,y,z) = T(x, T(y,z)).$$

La resta de casos es demostrarien de manera anàloga.

Prova de (ii)

Considerem la funció bijectiva i estrictament creixent

$$\begin{array}{rcl} \varphi_\alpha : [0,1] & \longrightarrow & [a_\alpha, b_\alpha] \\ x & \longmapsto & a_\alpha + (b_\alpha - a_\alpha)\cdot x. \end{array} \tag{2.51}$$

Aleshores, per cada $\alpha \in A$ podem definir[1] T_α com

$$\begin{array}{rcl} T_\alpha : [0,1]^2 & \longrightarrow & [0,1] \\ (x,y) & \longmapsto & T_\alpha(x,y) = \varphi_\alpha^{-1}\left(T\left(\varphi_\alpha(x), \varphi_\alpha(y)\right)\right). \end{array} \tag{2.52}$$

Si T és contínua, donada T_α definida per (2.52) i considerant que T i les funcions φ_α i φ_α^{-1} són contínues, aleshores T_α també és contínua.

Provem a continuació el recíproc. Gràcies a la Proposició 5, serà suficient amb demostrar que per cada $x \in [0,1]$ la funció $T(x_0, \cdot)$ és contínua.
Fixem-nos en que aquesta funció és

$$T(x,\cdot) = \begin{cases} a_\alpha + (b_\alpha - a_\alpha)\cdot T_\alpha\left(\frac{x-a_\alpha}{b_\alpha - a_\alpha}, \frac{\cdot - a_\alpha}{b_\alpha - a_\alpha}\right) & \text{si } (x,\cdot) \in [a_\alpha, b_\alpha]^2, \\ \min(x,\cdot) & \text{en altre cas,} \end{cases} \tag{2.53}$$

- Si $x_0 \in [0,1] \setminus \bigcup_{\alpha\in A}[a_\alpha, b_\alpha]$, aleshores $T(x_0,\cdot) = \min(x_0,\cdot)$, que és una funció contínua.
- Si, pel contrari, $x_0 \in [a_\alpha, b_\alpha]$ per algun $\alpha \in A$, aleshores ens trobam en la primera part de la funció (2.53), que sabem que és contínua ja que T_α ho és.

[1] Es demostra que T_α definida per (2.52) és una t-norma a la demostració del Teorema 4 més endavant.

A més, comprovam la continuïtat vegent que en els extrems a_α i b_α coincideix amb l'altre tros de la funció. Gràcies a les propietats (2.1) i (T4) de les t-normes, d'una banda,

$$a_\alpha + (b_\alpha - a_\alpha) \cdot T_\alpha\left(\frac{x_0-a_\alpha}{b_\alpha-a_\alpha}, \frac{a_\alpha-a_\alpha}{b_\alpha-a_\alpha}\right) = a_\alpha + (b_\alpha - a_\alpha) \cdot T_\alpha\left(\frac{x_0-a_\alpha}{b_\alpha-a_\alpha}, 0\right)$$

$$= a_\alpha + (b_\alpha - a_\alpha) \cdot 0 = a_\alpha = \min(x_0, a_\alpha).$$

I de l'altra,

$$a_\alpha + (b_\alpha - a_\alpha) \cdot T_\alpha\left(\frac{x_0-a_\alpha}{b_\alpha-a_\alpha}, \frac{b_\alpha-a_\alpha}{b_\alpha-a_\alpha}\right) = a_\alpha + (b_\alpha - a_\alpha) \cdot T_\alpha\left(\frac{x_0-a_\alpha}{b_\alpha-a_\alpha}, 1\right)$$

$$= a_\alpha + \cancel{(b_\alpha - a_\alpha)} \cdot \left(\frac{x_0-a_\alpha}{\cancel{b_\alpha-a_\alpha}}\right) = x_0 = \min(x_0, b_\alpha).$$

□

Hem de dir que el concepte de suma ordinal es pot aplicar també a altres operacions binàries a l'interval unitat com a t-conormes (i la suma ordinal serà una t-conorma) o a còpules[2] (donant una còpula).

Exemple 11. (i) Cada t-norma es pot veure com una suma ordinal trivial amb un sol sumand: $T = (\langle 0, 1, T\rangle)$.

(ii) Vegem un exemple de suma ordinal senzill per entendre les seves característiques. Consideram $T = (\langle 0.2, 0.3, T_L\rangle, \langle 0.5, 0.8, T_P\rangle, \langle 0.8, 1, T_L\rangle)$.
Això és

$$T(x,y) = \begin{cases} 0.2 + 0.1\,T_L\left(\frac{x-0.2}{0.1}, \frac{y-0.2}{0.1}\right) & \text{si } (x,y) \in [0.2, 0.3]^2, \\ 0.5 + 0.3\,T_P\left(\frac{x-0.5}{0.3}, \frac{y-0.5}{0.3}\right) & \text{si } (x,y) \in [0.5, 0.8]^2, \\ 0.8 + 0.2\,T_L\left(\frac{x-0.8}{0.2}, \frac{y-0.8}{0.2}\right) & \text{si } (x,y) \in [0.8, 1]^2, \\ \min(x,y) & \text{en altre cas,} \end{cases} \tag{2.54}$$

La representació en 3D de la t-norma resultant de la suma ordinal i el seu gràfic de contorn és a la Figura 2.49. Hem eliminat el color per poder donar importància a les diferències existents en cada part. Com veim, hi ha parts ben diferenciades amb la forma de T_P i T_L, i la resta és T_M.

Com veim, a partir de les t-normes T_L i T_P hem pogut construïr una nova t-norma. ♢

2.3.2 Representació de t-normes

Fins ara hem vist que generadors additius continus ens proporcionen t-normes contínues i arquimedianes.

A continuació veurem que tota t-norma contínua es pot escriure de forma única com una suma ordinal de t-normes continues i arquimedianes.

[2] Més endavant s'introduïrà aquest concepte.

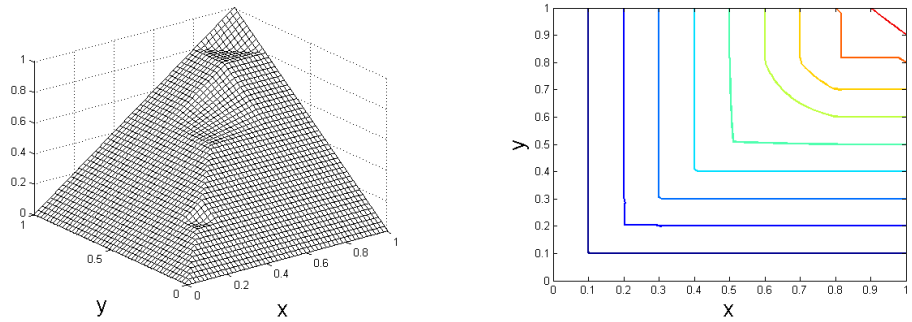

Figura 2.49: Suma ordinal ($\langle 0.2, 0.3, T_L\rangle, \langle 0.5, 0.8, T_P\rangle, \langle 0.8, 1, T_L\rangle$): gràfica 3D i de contorn.

Teorema 4. *Sigui $T : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, és una t-norma contínua si i només si T és únicament representable com a suma ordinal de t-normes contínues arquimedianes.*

Nota. que T sigui únicament representable com a suma ordinal de t-normes contínues arquimedianes vol dir que:

- existeix un conjunt A d'índexs finit o infinit numerable que és únicament determinat,
- existeix una família d'intervals disjunts dos a dos i oberts $(]a_\alpha, b_\alpha[)_{\alpha\in A}$ de $[0,1]$ únicament determinada,
- i existeix una família de t-normes contínues i arquimedianes $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ únicament determinada

tals que $T = (\langle a_\alpha, b_\alpha, T_\alpha\rangle)_{\alpha\in A}$. És a dir, podem expressar T com (2.50).

Demostració. Si podem representar T com una suma ordinal de t-normes contínues, tal i com hem vist a la Proposició 9, T serà una t-norma contínua.

Sigui T t-norma contínua, vegem el recíproc.
Gràcies al Teorema 2 sabem que si I és el conjunt dels seus elements idempotents, aleshores $[0,1] \setminus I$ és buit o bé es pot escriure com la unió finita o numerable d'una família d'intervals oberts disjunts dos a dos de $[0,1]$.

Sabem gràcies a la Proposició 3 que $[0,1] \setminus I = \emptyset$ si i només si T és la t-norma mínim T_M.

En cas contrari, $[0,1] \setminus I = \bigcup_{\alpha\in A}]a_\alpha, b_\alpha[$, on A és un conjunt d'índexs finit o infinit numerable i $(]a_\alpha, b_\alpha[)_{\alpha\in A}$ és una família de subintervals no buits i disjunts dos a dos de $[0,1]$. Com vam veure a la prova del Teorema 2, a_α i b_α són els únics elements idempotents de T de $[a_\alpha, b_\alpha]$ per cada $\alpha \in A$.

Considerem la funció bijectiva i estrictament creixent definida a (2.51). Aleshores, per cada $\alpha \in A$, T_α definida per (2.52) és una t-norma contínua que només té elements idempotents trivials i és arquimediana.

Abans de veure cada una de les afirmacions, convé observar alguns aspectes.
Si fixam un $\alpha \in A$, gràcies a la monotonia (T3) de T tenim que per tot $(x, y) \in [a_\alpha, b_\alpha]^2$

$$a_\alpha = T(a_\alpha, a_\alpha) \leqslant T(x, y) \leqslant T(b_\alpha, b_\alpha) = b_\alpha$$

i per tant

$$T(x, y) \in [a_\alpha, b_\alpha] \quad \forall (x, y) \in [a_\alpha, b_\alpha]^2. \tag{2.55}$$

D'altra banda, per tot $x \in [a_\alpha, 1]$

$$a_\alpha = T(a_\alpha, a_\alpha) \leqslant T(x, a_\alpha) \leqslant T(1, a_\alpha) = a_\alpha$$

pel que

$$T(x, a_\alpha) = a_\alpha. \tag{2.56}$$

Així, amb (2.55) i l'associativitat (T2) de T, podem dir que $\left([a_\alpha, b_\alpha], T|_{[a_\alpha, b_\alpha]^2}\right)$ és un semigrup. Com indica (2.56), a_α actúa com a element absorbent en $[a_\alpha, 1]$. A més, com hem dit abans, els únics elements idempotents de T són els trivials (a_α i b_α).

Vegem a continuació que b_α és l'element neutre en $[0, b_\alpha]$:
Fixem-nos en que per cada $\alpha \in A$

$$\{T(z, b_\alpha) \mid z \in [0, 1]\} = [0, b_\alpha] \tag{2.57}$$

<u>Prova</u>
Prenem $z_0 \in [0, 1]$, gràcies a les propietats (T3) i (T4) de T tenim que

$$0 \leqslant T(z_0, b_\alpha) \leqslant T(1, b_\alpha) = b_\alpha,$$

per tant, $T(z_0, b_\alpha) \in [0, b_\alpha]$.

D'altra banda, si prenem $x \in [0, b_\alpha]$, vegem si es compleix que $x = T(z, b_\alpha)$ per algun $z \in [0, 1]$.
Sabem que:

si $x = 0$ tenim $T(0, b_\alpha) = 0$ amb $z = 0$
si $x = b_\alpha$ tenim $T(1, b_\alpha) = b_\alpha$ amb $z = 1$

Aleshores, per continuïtat de T sempre existeix un $z_0 \in [0, 1]$ tal que $T(z_0, b_\alpha) = x \in [0, b_\alpha]$.

Si tenim en compte (2.57), l'associativitat (T2) de T i la idempotència de b_α:

$$T(x, b_\alpha) = T(T(z, b_\alpha), b_\alpha) = T(z, T(b_\alpha, b_\alpha)) = T(z, b_\alpha) = x \quad \forall x \in [0, b_\alpha]$$

$$\Downarrow$$

$$T(x, b_\alpha) = x \quad \forall x \in [0, b_\alpha].$$

Així doncs, b_α és l'element neutre a $[0, b_\alpha]$ (i en particular a $[a_\alpha, b_\alpha]$). Ara sí podem demostrar cada una de les afirmacions.

Prova:
La funció definida per (2.52):

- és t-norma:
  Comprovem els quatre axiomes:
  - (T1): Commutativitat
    Gràcies a que T és t-norma i per tant compleix (T2):
    $$T_\alpha(x,y) = \varphi_\alpha^{-1}\left(T\left(\varphi_\alpha(x),\varphi_\alpha(y)\right)\right) = \varphi_\alpha^{-1}\left(T\left(\varphi_\alpha(y),\varphi_\alpha(x)\right)\right) = T_\alpha(y,x).$$
  - (T2): Associativitat
    $$\begin{aligned} T_\alpha\left(x, T_\alpha(y,z)\right) &= \varphi_\alpha^{-1}\left(T\left(\varphi_\alpha(x),\varphi_\alpha\left(T_\alpha(y,z)\right)\right)\right) \\ &= \varphi_\alpha^{-1}\left(T\left(\varphi_\alpha(x),\varphi_\alpha\left(\varphi_\alpha^{-1}\left(T\left(\varphi_\alpha(y),\varphi_\alpha(z)\right)\right)\right)\right)\right) \\ &= \varphi_\alpha^{-1}\left(T\left(\varphi_\alpha(x), T\left(\varphi_\alpha(y),\varphi_\alpha(z)\right)\right)\right) \\ &\overset{(1)}{=} \varphi_\alpha^{-1}\left(T\left(T\left(\varphi_\alpha(x),\varphi_\alpha(y),\varphi_\alpha(z),\right)\right)\right) \\ &= T_\alpha\left(T_\alpha(x,y),z\right), \end{aligned}$$
    on (1) ve donada per l'associativitat de T.
  - (T3): Monotonia
    Ve donada per la monotonia de T i per la de φ_α i φ_α^{-1}.
  - (T4): Condició de frontera
    Per $x \in [0,1]$, tenint en compte que b_α és l'element neutre a $[a_\alpha, b_\alpha]$:
    $$T_\alpha(x,1) = \varphi_\alpha^{-1}\left(T\left(\varphi_\alpha(x),\varphi_\alpha(1)\right)\right) = \varphi_\alpha^{-1}\left(T\left(\varphi_\alpha(x), b_\alpha\right)\right) = \varphi_\alpha^{-1}\left(\varphi_\alpha(x)\right) = x.$$
- és contínua: ve donat per la Proposició 9.
- només té elements idempotents trivials:
  Prenent $\alpha \in A$, vegem que $T_\alpha(x,x) = x \Leftrightarrow x = 0$ ó $x = 1$.
  $$T_\alpha(x,x) = \varphi_\alpha^{-1}\left(T\left(\varphi_\alpha(x),\varphi_\alpha(x)\right)\right) = x$$
  $$\Updownarrow$$
  $$\varphi_\alpha(x) = T\left(\varphi_\alpha(x),\varphi_\alpha(x)\right)$$
  $$\Updownarrow$$
  $$\varphi_\alpha(x) \text{ és element idempotent de } T$$
  $$\Updownarrow$$
  $$a_\alpha + (b_\alpha - a_\alpha)\cdot x = \varphi_\alpha(x) \in I$$
  Així, $\varphi_\alpha(x) \in [a_\alpha, b_\alpha]$ i $\varphi_\alpha(x) \in I$, però com hem dit abans, els únics elements idempotents de T en $[a_\alpha, b_\alpha]$ són els extrems. Aleshores
  $$\varphi_\alpha(x) = a_\alpha \quad \text{o bé} \quad \varphi_\alpha(x) = b_\alpha$$
  $$\Updownarrow$$
  $$x = 0 \quad \text{o bé} \quad x = 1$$

- és arquimediana: ve donat pel Teorema 1.

Aleshores, podem comprovar que per qualsevol $\alpha \in A$ i qualsevol $(x, y) \in [a_\alpha, b_\alpha]^2$ tenim que

$$T(x, y) = a_\alpha + (b_\alpha - a_\alpha) \cdot T_\alpha \left(\frac{x - a_\alpha}{b_\alpha - a_\alpha}, \frac{y - a_\alpha}{b_\alpha - a_\alpha} \right). \tag{2.58}$$

<u>Prova:</u>

Tenint en compte (2.51):

$$a_\alpha + (b_\alpha - a_\alpha) \cdot T_\alpha \left(\frac{x - a_\alpha}{b_\alpha - a_\alpha}, \frac{y - a_\alpha}{b_\alpha - a_\alpha} \right) =$$

$$= a_\alpha + (b_\alpha - a_\alpha) \cdot \varphi_\alpha^{-1} \left(T \left(\varphi_\alpha \left(\frac{x - a_\alpha}{b_\alpha - a_\alpha} \right), \varphi_\alpha \left(\frac{y - a_\alpha}{b_\alpha - a_\alpha} \right) \right) \right)$$

$$= a_\alpha + (b_\alpha - a_\alpha) \cdot \varphi_\alpha^{-1} \left(T \left(x, y \right) \right)$$

$$= \varphi_\alpha \left(\varphi_\alpha^{-1} \left(T \left(x, y \right) \right) \right) = T(x, y).$$

Ja tenim una part de (2.50).
Si $(x, y) \in [0, 1]^2$ no pertany a cap $[a_\alpha, b_\alpha]$, suposant sense pèrdua de generalitat que $x \leqslant y$, aleshores existeix algun $b \in [x, y]$ que és idempotent de T.
Llavors per la Proposició 6 tenim que $T(x, b) = \min(x, b) = x$ i $T(b, y) = \min(b, y) = b$.
Per tant,

$$T(x, y) = T(T(x, b), y) = T(x, T(b, y)) = T(x, b) = x = \min(x, y). \tag{2.59}$$

En conclusió, donat que per $(x, y) \in [a_\alpha, b_\alpha]$ tenim (2.58) i que per $(x, y) \notin [a_\alpha, b_\alpha]$ per cap $\alpha \in A$ tenim (2.59), aleshores $T = (\langle a_\alpha, b_\alpha, T_\alpha \rangle)_{\alpha \in A}$. □

Nota. Es pot provar un teorema anàleg per a t-conormes contínues per dualitat. Així, es té que tota t-conorma contínua és una suma ordinal de t-conormes arquimedianes contínues, on les t-conormes arquimedianes són igualment generades per generadors additius $s : [0, 1] \longrightarrow [0, \infty]$ que, en aquest cas, són estrictament creixents i contínues amb $s(0) = 0$. A més, la t-conorma arquimediana és estricta quan $s(1) = \infty$ i nilpotent quan $s(1) < \infty$.

Exemple 12. Sigui $a \in]0, 1[$ fixe, considerem per $(x, y) \in [0, 1]^2$ els següents operadors:

$$T_a(x, y) = \frac{xy}{\max(x, y, a)} \qquad S_a(x, y) = \frac{x + y - xy - \min(x, y, 1 - a)}{\max(1 - x, 1 - y, a)}$$

Vegem que són una t-norma i una t-conorma contínues respectivament i classifiquem-les.

Abans de res, com $\max(1 - x, 1 - y, a) = 1 - \min(x, y, 1 - a)$, podem reescriure S_a com

$$S_a(x, y) = 1 - \frac{(1 - x)(1 - y)}{\max(1 - x, 1 - y, a)}.$$

Així, ens fixam en que

$$S_a(x,y) = 1 - T_a(1-x, 1-y). \tag{2.60}$$

Bastarà veure que T_a és una t-norma contínua i quina és la seva classificació, ja que per (2.60), S_a serà la seva t-conorma dual (veure Proposició 4), i, a més, satisfarà les mateixes propietats algebraiques que la t-norma.

T_a satisfà trivialment les condicions (T1) i (T4). Vegem l'associativitat (T2); tenint en compte que $x, y, z \in [0,1]$ i $a \in]0,1[$, tenim que

$$\begin{aligned}
T_a(T_a(x,y),z) &= \frac{z}{\max(T_a(x,y),z,a)} T_a(x,y) \\
&= xyz\left[\frac{1}{\max\big(xy, z\max(x,y,a), a\max(x,y,a)\big)}\right] \\
&= \frac{xyz}{\max\big(xy, xz, yz, az, xa, ya, a^2\big)} \\
&= T_a(x, T_a(y,z)).
\end{aligned}$$

Comprovem també que T_a és monòtona creixent. Per $y \leqslant z$,

$$\begin{array}{c}
T_a(x,y) = \frac{xy}{\max(x,y,a)} \leqslant \frac{xz}{\max(x,z,a)} = T_a(x,z) \\
\Updownarrow \\
\frac{y}{\max(x,y,a)} \leqslant \frac{z}{\max(x,z,a)}.
\end{array}$$

- Si $a = \max(x,z,a)$, aleshores $a = \max(x,y,a)$ i $\frac{y}{a} \leqslant \frac{z}{a}$ es satisfà.
- Si $x = \max(x,z,a)$, aleshores $x = \max(x,y,a)$ i $\frac{y}{x} \leqslant \frac{z}{x}$ es satisfà.
- Si $z = \max(x,z,a)$, aleshores $y \leqslant \max(x,y,a)$ es satisfà.

Per tant, T_a és una t-norma.

A més és contínua, ja que les seves seccions horitzontal i vertical són contínues. Fixem-nos en que el denominador de la funció $T_a(x,\cdot) = \frac{x}{\max(x,a)}$ no s'anul·la mai donat que $a \in]0,1[$.

Classifiquem T_a. Fàcilment, veim que els elements idempotents de T_a són els $x \in [a,1]$:

$$\text{Per } x \in [0,1], \quad T_a(x,x) = \frac{x^2}{\max(x,a)} = x \Leftrightarrow \max(x,a) = x \Leftrightarrow x \geqslant a. \tag{2.61}$$

D'aquesta manera, recordant el Teorema 1 i la Proposició 7 podem dir que T_a no és una t-norma arquimediana ni és estricta. A més, segons varem vaure a la Observació 1 (i), els elements no poden ser idempotents i nilpotents a la vegada, pel que T_a tampoc és una t-norma nilpotent.

Estudiem quins valors pren la t-norma:

- per $x, y \leqslant a$, $\quad T_a(x,y) = \frac{xy}{a}$,

- per $x, y \geqslant a$, $\quad T_a(x,y) = \frac{xy}{\max(x,y)} = \min(x,y)$,

ja que si $x \leqslant y$, aleshores $T_a(x,y) = x$ i si no, $T_a(x,y) = y$.

En la Figura 2.50 es poden veure representats els valors que pren T_a.

$T_M(x,y)$	$T_M(x,y)$
$\frac{xy}{a}$	$T_M(x,y)$

Figura 2.50: Representació dels valors que pren la t-norma T_a.

D'aquesta manera es veu que T_a és una suma ordinal amb un únic sumand arquimedià i estricte donat per la t-norma producte; és a dir: $T_a = (\langle 0, a, T_P \rangle)$.
Com sabem, una t-conorma satisfà qualsevol de les propietats algebraiques presentades si, i només si, les satisfà la seva t-norma dual. Per això, S_a és una t-conorma contínua que no és arquimediana, contínua ni nilpotent. $\diamondsuit$

CAPÍTOL 3

APLICACIONS DE LES T-NORMES

Una vegada explicat amb profunditat el concepte de norma triangular, l'objectiu d'aquest capítol és presentar un conjunt d'aplicacions d'aquests operadors en diversos camps on les t-normes han estat un element crucial pel seu desenvolupament: els espais mètrics probabilístics, la teoria dels conjunts borrosos, les funcions d'agregació, l'estadística, les probabilitats, les finances i l'economia.

3.1 Les t-normes en la teoria d'espais mètrics probabilístics

Aquesta és la primera aplicació que van tenir les t-normes, ja que, de fet, van néixer com una generalització de la desigualtat triangular, a la que deuen el seu nom, en la construcció dels espais mètrics probabilístics.

Les t-normes han estat fonamentals i es continuen utilitzant en aquest camp. La evolució de les t-normes i el seu paper en els espais mètrics probabilístics es pot trobar a l'Annex 1 d'aquest treball.

A partir de la introducció de les normes triangulars i gràcies a la idea d'emprar aquestes funcions en altres contextes, s'han anat desenvolupant en algunes de les àrees que presentam en aquest capítol.

3.2 Les t-normes en la teoria dels conjunts borrosos

-Professor: En Lluís està suspès i en Pau està aprovat.
-Lluís: Però professor, si només hi ha una dècima de diferència entre ell i jo!

Quantes vegades s'haurà donat aquesta discussió entre alumnes i professors. Aquesta conversació reflexa clarament un sistema de classificació que empra la lògica *crisp*: es defineix la pertenença d'un element a un conjunt amb una funció amb valors en $\{0,1\}$:

val 0 si no hi pertany i 1 si hi pertany. És a dir, o estàs aprovat, o estàs suspès.

Com aquesta, es donen moltes situacions en la vida diària que requereixen d'una mica més de flexibilitat. Per exemple, no és del tot efectiu classificar jugadors de bàsquet com alts o baixos amb un llindar estricte. Si buscam jugadors alts i deim que un jugador és alt a partir d'una alçada de 2 metres, estam descartant o deixant fora del conjunt molts jugadors amb 1.9 metres d'alçada que podrien ser molt adequats pel que cercam.

Un altre exemple és el temps, quan deim les 15 : 30 hores, en realitat ens estam referint a un concepte més lax: entorn de les 15 : 30 hores, poden haver passat segons o ser segons abans, mai o quasi mai serà el moment exacte. El mateix passa amb els colors. Tots sabem el que és el blau, però aquest concepte abarca una gran quantitat de tonalitats distintes. No és exacte.

Conceptes com aquests i altres com "ser jove", "ser un color clar"o "ser intel·ligent"són propis del llenguatge humà i la nostra manera de raonar permet admetre aquesta vaguetat als conceptes.

No obstant, clàssicament a la ciència i a la lògica, en particular, la incertesa es considerava inacceptable, allunyada de la matemàtica i en contradicció amb la precisió i consistència que la caracteritzava. Això es veia reflectit en el disseny de les màquines com els ordenadors.

No va ser fins a la meitat del segle XX, amb la introducció dels conjunts borrosos, que es proposà canviar la concepció de pertinença a un conjunt. S'introduí així un nou punt de vista tolerant amb la incertesa: a partir d'aquest moment és necessària tenir-la en compte, ja que permet expressar o descriure millor la vida quotidiana.

3.2.1 Conjunts borrosos

Recordem que segons la definició clàssica, un conjunt A, que ara anomenarem *conjunt crisp*, està associat a una funció de pertinença $\mu : \mathcal{X} \longrightarrow \{0,1\}$ tal que

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Lofti Zadeh, investigador i enginyer d'origen iraní, va introduïr un concepte anomenat *conjunt borrós* («fuzzy set» en anglès) l'any 1965.

Definició 10. Un *conjunt borrós* és un conjunt caracteritzat per la funció de pertinença $\mu : \mathcal{X} \longrightarrow [0,1]$ tal que $\mu(x)$ és el grau de pertinença de l'element $x \in \mathcal{X}$ al conjunt A.

Aquests tipus de conjunts van marcar la evolució definitiva del pensament borrós. A partir d'aquesta definició es va poder desenvolupar la lògica borrosa.

3.2.2 Lògica borrosa

La inacceptabilitat de la incertesa també es veia reflexada a la lògica clàssica, pel que aquesta àrea està íntimament relacionada amb l'anterior. En la lògica clàssica les pro-

posicions només poden ser certes o falses. Recordem que utilitza relacions lògiques com la negació, la conjunció, la disjunció o la implicació i regles d'inferència com el Modus Ponens o el Modus Tollens.

Amb la introducció dels conjunts borrosos es va poder desenvolupar la *lògica borrosa* com a cas particular de la lògica multivaluada, a la qual les proposicions tenen un cert grau de certesa i a la qual s'introdueixen funcions per poder adaptar els operadors lògics i les regles d'inferència de la lògica clàssica.

La lògica borrosa pren valors en $[0,1]$ i està basada en les t-normes. Aquestes funcions, precisament, són les que principalment han permès adaptar les definicions d'operadors lògics per a la lògica borrosa.
Depenent de quins connectors es considerin i de les interpretacions que se'ls donin obtenim diverses lògiques. Els connectors més habituals i les seves interpretacions són els següents:

Negació

Representada amb $\neg$ a la lògica Booleana, s'interpreta com una funció unària que, naturalment, ha d'enviar 0 a 1 i 1 a 0. La seva interpretació en lògica borrosa es diu també negació.

Definició 11. Una *negació* és una funció decreixent $N : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ tal que $N(0) = 1$ i $N(1) = 0$. A més,

(i) Si N és contínua i estrictament decreixent, es diu que N és *estricta*.

(ii) Si $N \circ N = Id_{[0,1]}$, es diu que N és *forta*.

Així, si $A : \mathcal{X} \to [0,1]$ és un conjunt borrós, la seva negació $N(A)$ és un altre conjunt borrós $N(A) : \mathcal{X} \to [0,1]$ donat per $N(A)(x) = N(A(x))$ per a tot $x \in \mathcal{X}$.

La negació, a més de generalitzar el concepte de negació booleana, també ens permet relacionar les t-normes i les t-conormes a través de la dualitat.

Definició 12. Donada una t-norma T i una negació N estricta, direm que la funció $S : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ és la *t-conorma N-dual de T* si

$$S(x,y) = N^{-1}\left(T\left(N(x), N(y)\right)\right). \tag{3.1}$$

Si N és forta, aleshores $N^{-1} = N$ i es pot aplicar (3.1) a S tornant a obtenir de nou la t-norma T.

Exemple 13. La negació forta més emprada és la *negació estàndard* $N_s(x) = 1 - x$.
La Definició 12 amb N_s és la definició de dualitat que donàrem a la Proposició 4 en el Capítol 2.

Altres negacions són, per exemple, $N(x) = 1 - x^2$, que és estricta però no és forta. $\diamondsuit$

Intersecció o conjunció

Representada per $\cap$ en teoria de conjunts i per $\wedge$ a la lògica proposicional clàssica. En la lògica borrosa aquest operador s'interpreta amb una t-norma. Així, si A i B són conjunts borrosos sobre un $\mathcal{X}$ i T és una t-norma, $A \cap B$ vendria donat per $T(A,B) : \mathcal{X} \longrightarrow [0,1]$ tal que $T(A,B)(x) = T(A(x), B(x))$ per $x \in \mathcal{X}$.

Unió o disjunció

Representada per $\cup$ en teoria de conjunts i per $\vee$ a la lògica proposicional. La seva interpretació sol venir donada per una t-conorma.

De forma anàloga, si A i b són conjunts borrosos sobre $\mathcal{X}$, la seva unió serà $S(A,B) : \mathcal{X} \longrightarrow [0,1]$ donada per $S(A,B)(x) = S(A(x), B(x))$ per a tot $x \in \mathcal{X}$, on S és una t-conorma.

Implicació

Representada clàssicament per $\rightarrow$. És una de les operacions clau en la lògica borrosa i en el raonament aproximat. Si p i q són proposicions borroses, per representar $p \rightarrow q$ es sol usar una funció d'implicació que generalitza la implicació booleana.

Definició 13. Una *funció d'implicació borrosa* és una aplicació $I : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ decreixent en la primera variable i creixent en la segona, tal que $I(0,0) = I(0,1) = I(1,1) = 1$, i $I(1,0) = 0$, de manera que generalitza $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$.

Els quatre exemples més emprats de funcions d'implicació borroses (especialment els dos primers) són els següents. Fixem-nos en que es construeixen a partir de t-normes i t-conormes. Per $x, y \in [0,1]$,

1. S-implicacions: $I(x,y) = S\big(N(x), y\big)$.
2. R-implicacions: $I(x,y) = \sup\{z \in [0,1] \mid T(x,z) \leqslant y\}$.
3. QL-implicacions: $I(x,y) = S\big(N(x), T(x,y)\big)$,
4. D-implicacions: $I(x,y) = S\big(T(N(x), N(y), y\big)$.

Les R-implicacions es poden definir per t-normes qualsevols, però en general s'utilitzen només t-normes contínues per l'esquerra, ja que en aquest cas verifiquen la propietat de residuació:

$$T(x,y) \leqslant z \Leftrightarrow I(x,z) \geqslant y \quad \forall x, y, z \in [0,1]. \tag{3.2}$$

A la Taula 3.1 apareixen els quatre tipus d'implicacions i l'analogia que es pot fer amb la lògica booleana.
Totes les expressions lògiques que representen són equivalents quan les consideram en l'àlgebra booleana, com es pot veure fàcilment. Com a exemple, vegem que les D-implicacions i les S-implicacions coincideixen:

$$(\neg x \wedge \neg y) \vee y \equiv (\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee y) \equiv \neg x \vee y \equiv x \rightarrow y.$$

En canvi, a la lògica borrosa totes les aproximacions són diferents i donen lloc a situacions i propietats diferents.

Tipus	Expressió	Analogia
S-implicacions	$I(x,y) = S\big(N(x), y\big)$	$\neg x \vee y$
R-implicacions	$I(x,y) = \sup\{z \in [0,1] \mid T(x,z) \leqslant y\}$	$\vee\{z \mid x \wedge z \leqslant y\}$
QL-implicacions	$I(x,y) = S\big(N(x), T(x,y)\big)$	$\neg x \vee (x \wedge y)$
D-implicacions	$I(x,y) = S\big(T(N(x), N(y), y\big)$	$(\neg x \wedge \neg y) \vee y$

Taula 3.1: Analogia entre les expressions de la implicació borrosa i la booleana.

Cal comentar que a més dels quatre tipus d'implicacions comentats, n'hi ha molts més que estàn construïts de diverses maneres, algunes de les quals no utilitzen t-normes. Encara així, les més utilitzades són les introduïdes aquí, que, depenent del context en què es treballi, es sol usar una o altra. Aquests tipus d'operadors han estat àmpliament estudiats, donant lloc a diversos *surveys* i fins i tot llibres sencers (veure [6] i [15]).

A més de representar implicacions lògiques, les funcions d'implicació són especialment importants també per inferència i raonament aproximat, com veurem a continuació.

3.2.3 Raonament aproximat

El coneixement s'expressa mitjançant el llenguatge però amb el llenguatge no només fem afirmacions sobre el que veiem ("avui fa sol", "el carrer està mullat") també procurem relacionar aquestes afirmacions ("avui fa sol i el carrer està mullat") per tal de poder extreure d'aquesta manera nous coneixements ("per tant, han passat a netejar el carrer"). El procés que ens permet obtenir conclusions a partir d'informació coneguda s'anomena inferència.

De fet, el coneixement sovint s'expressa en forma de regles del tipus *si A aleshores B* i la inferència es duu a terme mitjançant les regles del Modus Ponens i el Modus Tollens.

En l'àmbit borrós, la inferència ens permet fer raonament aproximat. El raonament aproximat és el que ens permet abordar molts problemes reals en què la lògica matemàtica clàssica no és suficient perquè les premises són vagues o incertes. Per exemple, la intel·ligència artificial necessita raonar a partir de dades o premisses imprecises.

En aquest context, les relacions borroses són una eina imprescindible.

Relacions borroses

En la lògica booleana, deim que x està relacionat amb y per la relació R si $R(x,y) = 1$ i deim que x no està relacionat amb y per R si $R(x,y) = 0$. La relació R no pot prendre altres valors. En canvi, a les relacions borroses dos elements poden estar relacionats en un cert grau entre 0 i 1.

Definició 14. Siguin $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ conjunts i $\mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$ el seu producte cartesià. Anomenam una *relació borrosa* R sobre $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ a un subconjunt borrós de $\mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$:

$$\begin{array}{rccc} R: & \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n & \longrightarrow & [0,1] \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \longrightarrow & R(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

En particular, quan $n = 2$ i $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2$, s'anomena una *relació borrosa binària sobre* $\mathcal{X}$. Si, a més, $\mathcal{X}$ és finit, R es representa com una matriu amb entrades en $[0,1]$.

A partir d'ara, i si no es diu el contrari, estudiarem el cas $n = 2$ amb conjunts finits.

Exemple 14. Amb $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_5\}$, sigui R la següent relació borrosa sobre $\mathcal{X}$:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.2 & 0.6 & 0.6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fixem-nos en que $R(x_1, x_1) = 1$ vol dir que x_1 està completament relacionat amb ell mateix segons la relació R. Com $R(x_2, x_1) = 0$, x_2 no està relacionat amb x_1 però x_1 sí ho està amb x_2, ja que $R(x_1, x_2) = 0.8$. ♢

Introduïm a continuació una operació nova per relacions borroses .

Definició 15. La *composició max-min* de dues relacions $R : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \longrightarrow [0,1]$ i $S : \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \longrightarrow [0,1]$ és una nova relació $R \circ S : \mathcal{X} \times \mathcal{Z} \longrightarrow [0,1]$ tal que

$$(R \circ S)(x, z) = \max_{y \in \mathcal{Y}} \big(\min(R(x, y), S(y, z))\big).$$

De fet, podem donar una altra definició més general, en la que no es considera el mínim, sino una t-norma en general.

Definició 16. Considerant T una t-norma i les dues relacions R i S de la Definició 15 , una *composició max-T* és

$$(R \circ_T S)(x, z) = \max_{y \in \mathcal{Y}} \big(T\big(R(x, y), S(y, z)\big)\big).$$

En el cas en que els conjunts no siguin finits, en lloc del màxim considerarem el suprem, i direm que és una *composició sup-T*.

En els casos finits, la composició de relacions es pot dur a terme fent, amb la operació corresponent max – min, el producte de matrius.

Exemple 15. Siguin els conjunts

$$\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$$
$$\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, y_3\}$$
$$\mathcal{Z} = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$$

i considerem les relacions

$$R : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \longrightarrow [0,1]$$
$$S : \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \longrightarrow [0,1]$$

donades per les matrius

$$R = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.8 \\ 0 & 0.7 & 1 \\ 0.4 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 & 0.7 & 0.7 \\ 0.3 & 0.2 & 0 & 0.9 \\ 1 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Llavors, la composició max-min de les dues relacions es fa, amb la corresponent operació, multiplicant files per columnes:

$$R \circ S = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0.2 & 0.5 & 0.7 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Per exemple,

$$\begin{aligned}
(R \circ S)(x_1, z_1) &= \max_{y \in \mathcal{Y}} \big(\min\big(R(x_1, y), S(y, z_1)\big)\big) \\
&= \max\big(\min\big(R(x_1, y_1), S(y_1, z_1)\big), \min\big(R(x_1, y_2), S(y_2, z_1)\big), \min\big(R(x_1, y_3), S(y_3, z_1)\big)\big) \\
&= \max(\min(0.3, 0.9), \min(0.5, 0.3), \min(0.8, 1)) \\
&= \max(0.3, 0.3, 0.8) = 0.8.
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

La composició és associativa, conserva inclusions i ordres, però no és commutativa.

Observació 2. Notem que el que hem fet amb la composició $R \circ S$ generalitza la composició habitual de relacions crisp R i S, on

$$R \circ S(x, z) = 1 \Leftrightarrow \exists y \in \mathcal{Y} \text{ tal que } R(x, y) = 1 \text{ i } S(y, z) = 1.$$

Inferència

Una proposició o predicat borrós és una expressió de la forma x *és* A, on A és un subconjunt borrós sobre un univers $\mathcal{X}$ i x és una variable.
Ara, a diferència de la lògica clàssica, les proposicions no són vertaderes o falses, sino que tenen un valor de veritat.

Exemple 16. Si $\mathcal{X}$ és l'escala centígrada, i x la temperatura, aleshores x podria prendre valors lingüístics com *Molt alta, Alta, Més o menys alta, Mitja, Baixa o Molt baixa*. Cada un d'aquests valors lingüistics està representat per un conjunt borrós A amb funció de pertinença $\mu_A : \mathcal{X} \longrightarrow [0, 1]$. Per exemple, podriem representar el conjunt temperatura *Molt alta* per la funció de la Figura 3.1 i *Més o menys alta* per la de la Figura 3.2.

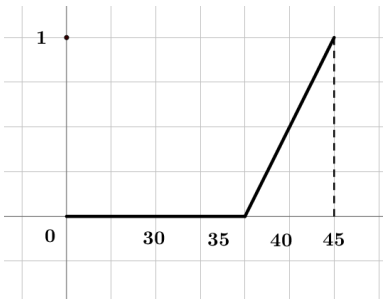

Figura 3.1: Temperatura *Molt alta*.

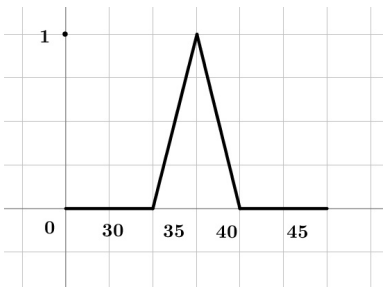

Figura 3.2: Temperatura *Més o menys alta*.

$\diamondsuit$

Podem representar doncs una regla borrosa del tipus *si x és A, llavors y és B* (per exemple: si la temperatura és alta llavors la presió és baixa).
Aquestes regles es representen a través d'una relació:

$$\begin{array}{rccl} R: & \mathcal{X} \times \mathcal{Y} & \longrightarrow & [0,1] \\ & (x,y) & \longrightarrow & R(x,y) = I(A(x), B(y)), \end{array}$$

i s'interpreta (igual que en el cas clàssic) com un condicional, és a dir, com una implicació $A \to B$.

Habitualment, la funció I utilitzada en els condicionals és una funció d'implicació borrosa i generalitza la implicació clàssica, com hem vist.

Realitzam les inferències, base del raonament aproximat principalment a través del Modus Ponens, que, en lògica borrosa és:

$$\begin{array}{l} \text{si } x \text{ és } A, \text{ llavors } y \text{ és } B \\ x \text{ és } A' \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad y \text{ és } B' \end{array}$$

A' és un altre conjunt borrós que pot ser molt pròxim a A, però normalment no és igual. De fet, per això precisament és important la lògica borrosa: ens permet extreure conclusions a partir de premises amb incertesa.

Generalment, la forma d'aplicar el Modus Ponens és a través de d'una regla de composició anomenada *Regla d'inferència de Zadeh*, que ens dóna

$$B'(y) = A'(x) \circ_T R(x,y) = \sup_{x \in \mathcal{X}} T\left(A'(x), I(A(x), B(y))\right), \tag{3.3}$$

on estam utilitzant la composició sup-T i T és una t-norma.

De nou, és clara la importància de les t-normes en el raonament aproximat.

Observació 3. En general, en el raonament aproximat clàssic tenim que

$$\begin{array}{l} \text{si } x \text{ és } A, \text{ llavors } y \text{ és } B \\ x \text{ és } A \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad y \text{ és } B, \end{array}$$

però en el raonament aproximat això no està garantit. En general, és fals. Sol esser,

$$\begin{array}{l} \text{si } x \text{ és } A, \text{ llavors } y \text{ és } B \\ x \text{ és } A \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad y \text{ és } B', \end{array}$$

on B' no és necessàriament igual a B. De fet, aquesta igualtat es satisfarà si

$$\sup_{x \in \mathcal{X}} T\left(A(x), I(A(x), B(y)\right) = B(y),$$

que depèn de la t-norma i de la funció d'implicació que es trii, però que en general és falsa.

Exemple 17. Considerem $T = T_L$ i $I(x,y) = 1 - x + xy \ \forall x, y \in [0,1]$. Comprovem amb la Regla de Zadeh si es verifica $B' = B$ quan partim de $A' = A$.

$$\begin{aligned}
B'(y) &= \sup_{x\in\mathcal{X}} T_L\big(A(x), 1 - A(x) + A(x)B(y)\big) \\
&= \sup_{x\in\mathcal{X}} \big(\max\big(A(x) + 1 - A(x) + A(x)B(y) - 1, 0\big)\big) \\
&= \sup_{x\in\mathcal{X}} \big(\max\big(A(x)B(y), 0\big)\big) \\
&= \sup_{x\in\mathcal{X}} (A(x)B(y)) \\
&\overset{(*)}{=} B(y).
\end{aligned}$$

(*) Tenint en compte que els conjunts borrosos s'agafen sempre normalitzats, és a dir, tals que $A(x) = 1$ per algun $x \in \mathcal{X}$.
Efectivament, aquest és un dels casos pels que es compleix la igualtat.

Si canviam la funció d'implicació triada, això deixa de ser cert.
Amb $I(x,y) = 1 - \max(a,b)$ per $a, b \in [0,1]$, tenim que:

$$\begin{aligned}
B'(y) &= \sup_{x\in\mathcal{X}} T_L\big(A(x), 1 - \max\big(A(x), B(y)\big)\big) \\
&= \sup_{x\in\mathcal{X}} \big(\max\big(A(x) + 1 - \max\big(A(x, B(y)\big) - 1, 0\big)\big) \\
&= \sup_{x\in\mathcal{X}} \big(\max\big(A(x) - \max\big(A(x, B(y)\big), 0\big)\big) \\
&= \sup_{x\in\mathcal{X}} \big(\max\big(\min\big(0, A(x) - B(y)\big), 0\big)\big) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

que no té per què complir-se. ♢

Cal dir que l'ús de les t-normes en l'àmbit de la lògica borrosa per a generalitzar els operadors clàssics com la unió, la intersecció o la implicació va ser un gran pas, ja que en principi foren introduïdes per espais mètrics probabilístics. Les primeres vegades que les t-normes varen ser utilitzades en aquest àmbit es poden trobar a [11] i [12].

És important comentar, també, que la part que hem estudiat en aquesta secció és la que és principalment teòrica, però el raonament aproximat i la lògica borrosa tenen múltiples aplicacions pràctiques, entre les quals s'ha de destacar el tractament d'imatges.

Un altre dels grans avanços obtinguts gràcies a la teoria de conjunts borrosos ha estat la millora dels ordinadors, que cada vegada poden comportar-se d'una manera més autònoma, més semblant als humans, no com a simples màquines de càlcul.
A més, en el camp de la enginyeria, s'ha estudiat aquest concepte per millorar rentadores, càmeres de fotos i video, trens d'alta velocitat, plantes de tractament de residus, etc. Per exemple, el tren automàtic de Sendai, a Japó té un sistema de control que duu a terme canvis de velocitat com si fos un conductor humà expert.

Per l'elaboració d'aquesta secció ens hem basat principalment en [9].

3.3 Les t-normes i les funcions d'agregació

Les t-normes són un tipus important de funcions binàries per molts motius, però un d'ells és que el seu estudi i el de les funcions d'agregació han anat de la mà durant molt de temps. Més tard, els conceptes de funció d'agregació i de t-norma s'anaren expandint i allunyant i ara conformen camps àmpliament desenvolupats.

Les funcions d'agregació, a més d'«agregar» o fusionar informació, generalitzen les normes triangulars. Així, l'axiomàtica que defineix aquestes funcions és menys restrictiva que la de les t-normes.

A Capítol 4 es pot trobar un estudi més complet d'aquestes funcions i la localització de les t-normes en aquest món més ampli.

3.4 Les t-normes en probabilitats, estadística, finances i economia: còpules

Les còpules i les quasi-còpules són tipus de funcions binàries que han estat importants en àmbits com la probabilitat i l'estadística. Prova d'això és que les còpules satisfàn l'anomenat Teorema de Sklar i així ens donen una idea de la dependència entre dues variables aleatòries.

En finances i en economia també han tengut el seu paper, ja que s'usen per la simulació, estimació i càlcul de mesures de risc, entre altres.

La relació entre les còpules i les quasi-còpules amb les t-normes és estreta, més encara en el cas de t-normes contínues i arquimedianes. Es poden trobar les definicions, propietats i alguns resultats importants a l'Annex 2.

CAPÍTOL 4

OPERADORS RELACIONATS

L'agregació té com a objectiu, a través de l'ús simultani de diferents peces d'informació (proporcionades per diverses fonts), l'obtenció d'una conclusió o decisió. L'**agregació** d'informació juga un paper fonamental en diversos sectors i es fa a través de les funcions d'agregació, que són molt utilitzades en aplicacions com SASS ó SQL.

En aquest apartat l'objectiu principal és generalitzar el concepte de t-norma i t-conorma i presentar altres funcions útils i interessants que les engloben. Restringirem el nostre estudi a inputs i outputs d'aquestes funcions que siguin valors de l'interval $[0,1]$.

4.1 Definició i propietats

Les funcions d'agregació són objectes matemàtics que tenen la funció de reduïr un conjunt de nombres a un únic nombre representatiu o significatiu. Exemples d'aquestes funcions són les mitjanes aritmètica, geomètrica o harmònica, que ja eren conegudes fa dos milenis.

Quan, en aplicacions, volem agregar dades, és important assignar a cada tupla d'elements en $[0,1]$ un únic nombre en $[0,1]$. Per exemple, suposem que les notes d'un exàmen de matemàtiques de 10 alumnes són

$$0 \quad 10 \quad 9.1 \quad 8.5 \quad 5.2 \quad 4.3 \quad 2.1 \quad 1.1 \quad 0.5 \quad 3.5$$

Aleshores, la mitjana aritmètica $\bar{x} = 4.43$ ens dóna una idea de com han anat els resultats en general. Notem que si tots els alumnes haguessin tret un 10, la mitjana aritmètica sería 10 i si tots haguessin obtingut un 0, $\bar{x}$ seria 0 també.

Podem definir aleshores els operadors d'agregació com funcions de $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+}[0,1]^n$ en $[0,1]$. Aquest és un concepte molt útil, ja que normalment els nombre d'inputs a agregar no es coneix.

Definició 17. Una *funció d'agregació ampliada* és una funció $\mathbb{A} : \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ que satisfà:

(i) $\mathbb{A}(x_1,\dots,x_n) \leqslant \mathbb{A}(y_1,\dots,y_n)$ per $x_1 \leqslant y_i$ amb $i \in \{1,\dots,n\}$.

(ii) $\mathbb{A}(x) = x \ \forall x \in [0,1]$.

(iii) $\mathbb{A}(0,\dots,0) = 0$.

(iv) $\mathbb{A}(1,\dots,1) = 1$.

Observació 4. El concepte de funció d'agregació és molt dèbil, en el sentit que només necessita de tres condicions per satisfer-se:

- La condició (i) equival a la monotonia creixent respecte de cada variable: si per qualque $i \in \{1,\dots,n\}$ es compleix $x_i \leqslant y_i$, aleshores

  $$\mathbb{A}(x_1,\dots,,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n) \leqslant \mathbb{A}(x_1,\dots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\dots,x_n).$$

  Això concorda amb la nostra definició, ja que s'espera que si un argument creix, l'agregació final creixi o almenys no decreixi, quedant igual.

- La condició (iii) representa el cas en que observem només criteris completament dolents, no satisfactoris. En aquest cas l'agregació total ha de ser també completament negativa, falsa, o no satisfactòria.

  Per exemple, la mitjana aritmètica de 10 valors totalment nuls ha de ser zero.

- Anàlogament, l'axioma (iv) es tradueix en observar només criteris vertaders o completament satisfactoris, cas en el qual l'agregació total ha de ser també vertadera o completament satisfactòria.

- L'agregació o fusió d'un sol input no és una vertadera agregació, per la qual cosa es proposa com a convenció que $\mathbb{A}(x) = x$ per $x \in [0,1]$.

L'operador $\mathbb{A}$ es pot representar per una família $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'operacions n-àries, i.e, funcions $A_n : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$. D'aquesta manera, tenim que

$$\begin{array}{ll} \text{Per } n > 1, & A_n(x_1,\dots,x_n) = \mathbb{A}(x_1,\dots,x_n) \\ \text{Per } n = 1, & A_1(x) = \mathbb{A}(x) = x \quad (A_1 = id_{[0,1]}), \end{array}$$

de manera que cada A_n satisfaria (i), (iii) i (iv).
D'aquesta manera podem treballar sense pèrdua de generalitat a un nivell n qualsevol.

Definició 18. Una *funció d'agregació n-ària* és una funció $A_n : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ que satisfà

(i) $A_n(x_1,\dots,x_n) \leqslant A_n(y_1,\dots,y_n)$ si $x_i \leqslant y_i$ per $i \in \{1,\dots,n\}$.

(ii) $A_n(0,\dots,0) = 0$.

(iii) $A_n(1,\dots,1) = 1$.

D'aquesta manera, si el nombre d'inputs és fixat, diguem-ne n, una funció d'agregació és una funció real de n variables.

Exemple 18. Alguns dels exemples més habituals de funcions d'agregació són els següents.

- Producte: $\prod(x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^n x_i$
- Mitjana aritmètica: $M(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$
- Mitjana geomètrica: $G(x_1,\dots,x_n) = \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n}$
- Mínim: $Min(x_1,\dots,x_n) = \min(x_1,\dots,x_n) = \bigwedge_{i=1}^n x_i$
- Màxim: $Max(x_1,\dots,x_n) = \max(x_1,\dots,x_n) = \bigvee_{i=1}^n x_i$
- Projecció sobre la primera coordenada: $P_F(x_1,\dots,x_n) = x_1$
- Projecció sobre la darrera coordenada: $P_L(x_1,\dots,x_n) = x_n$

$\diamondsuit$

4.1.1 Propietats

Vegem algunes propietats de les funcions d'agregació. Excepte que diguem el contrari, totes les propietats algebraiques i analítiques de $\mathbb{A}$ es defineixen a partir de les propietats de les corresponents funcions A_n.

Definició 19. Per $n \geqslant 2$, donada una funció d'agregació n-ària A_n, direm que és

- *idempotent* si $A_n(x,\dots,x) = x \quad \forall x \in [0,1]$.
- *estrictament monòtona* si satisfà

$$A_n(x_1,\dots,x_n) < A_n(y_1,\dots,y_n)$$

  quan $(x_1,\dots,x_n) \neq (y_1,\dots,y_n)$ i $x_i \leqslant y_i \ \forall i \in \{1,\dots,n\}$.
- *contínua* si ho és en el sentit habitual.
- *simètrica* si $\forall \sigma \in S_n$ i per $(x_1,\dots,x_n) \in [0,1]^n$,

$$A_n(x_1,\dots,x_n) = A_n\left(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}\right).$$

Definició 20. Direm que una funció d'agregació ampliada $\mathbb{A}$ és *associativa* si $\forall n,m \in \mathbb{Z}^+$ es satisfà

$$A_{n+m}(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) = A_2\left(A_n(x_1,\dots,x_n), A_m(y_1,\dots,y_m)\right), \tag{4.1}$$

per $(x_1,\dots,x_n) \in [0,1]^n$ i $(y_1,\dots,y_m) \in [0,1]^m$.

Definició 21. Direm que $e \in [0,1]$ és un *element neutre* de $\mathbb{A}$ si, per cada $n \geqslant 2$,

$$\mathbb{A}(x_1,\dots,x_{i-1},e,x_{i+1},\dots,x_n) = \mathbb{A}(x_1,\dots,x_{i-1}x_{i+1},\dots,x_n), \tag{4.2}$$

on $x_i \in [0,1]$ $\forall i \in \{1,\dots,n\}$.

Definició 22. Direm que $a \in [0,1]$ és un *element anul·lador* de $\mathbb{A}$ si, per cada $n \geqslant 2$,

$$\mathbb{A}(x_1,\dots,x_{i-1},a,x_{i+1},\dots,x_n) = a, \tag{4.3}$$

on $x_i \in [0,1]$ $\forall i \in \{1,\dots,n\}$.

Resumim a continuació alguns dels resultats que es deriven de les definicions anteriors.

Proposició 10. *Si $\mathbb{A}$ és associativa, aleshores està completament determinada per A_2.*

Demostració. En primer lloc, tenim que $\forall n \geqslant 2$ s'ha de complir $A_n(x_1,\dots,x_n) = A_2\left(A_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1}),x_n\right)$ gràcies a l'associativitat i a que $A_1(x_n) = x_n$. Aleshores, tenim A_n definida recursivament a partir d'A_2:

$$\begin{aligned} A_3\left(x_1,x_2,x_3\right) &= A_2\left(A_2(x_1,x_2),x_3\right) \\ A_4\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right) &= A_2\left(A_3(x_1,x_2,x_3),x_4\right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

D'altra banda, sigui A_2 una funció d'agregació binària associativa en el sentit usual, és a dir, quan satisfà

$$A_2\left(x,A_2(y,z)\right) = A_2\left(A_2(x,y),z\right) \quad \forall x,y,z \in [0,1].$$

Aleshores, es pot ampliar a una funció d'agregació ampliada $\mathbb{A}$ de la següent manera:

$$A_n\left(x_1,\dots,x_n\right) = A_2\left(A_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1}),x_n\right),$$

i aquesta serà associativa (es pot veure fàcilment per doble inducció). □

Proposició 11. *(i) Si $\mathbb{A}$ té element neutre, aleshores és únic.*

(ii) Si $\mathbb{A}$ té element anul·lador, aleshores és únic.

Demostració. Prova de (i):
Suposem que e_1 i e_2 són elements neutres de $\mathbb{A}$. Aleshores, han de satisfer la Definicio 21. En particular per $n = 2$. D'una banda,

$$\mathbb{A}(e_1,e_2) = A_2(e_1,e_2) = A_1(e_2) = e_2.$$

De l'altra,

$$\mathbb{A}(e_2,e_1) = A_2(e_2,e_1) = A_1(e_1) = e_1,$$

pel que han de ser iguals.

Prova de (ii):
Suposem que a_1 i a_2 són elements anul·ladors de $\mathbb{A}$. En particular, per $n = 2$, s'ha de satisfer que $A_2(a_1,a_2) = a_1$ i $A_2(a_1,a_2) = a_2$. Han de ser iguals. □

Proposició 12. *Donada una funció d'agregació n-ària A_n, tenim que*

$$A_n \text{ és idempotent} \Leftrightarrow Min(x_1,\dots,x_n) \leqslant A_n(x_1,\dots,x_n) \leqslant Max(x_1,\dots,x_n), \tag{4.4}$$

per $(x_1,\dots,x_n) \in [0,1]^n$.

Demostració. Anomenem, per simplicitat,

$$\begin{aligned} Min(x_1,\dots,x_n) &= \textstyle\bigwedge_{i=1}^n x_i, \\ Max(x_1,\dots,x_n) &= \textstyle\bigvee_{i=1}^n x_i. \end{aligned}$$

Sigui A_n una funció d'agregació idempotent. Aleshores, per les seves característiques, es compleix:

$$\bigwedge_{i=1}^n x_i = A_n\left(\bigwedge_{i=1}^n x_i,\dots,\bigwedge_{i=1}^n x_i\right) \leqslant A_n(x_1,\dots,x_n) \leqslant A_n\left(\bigvee_{i=1}^n x_i,\dots,\bigvee_{i=1}^n x_i\right) = \bigvee_{i=1}^n x_i.$$

Així, satisfà (4.4).

Recíprocament, suposem que una funció d'agregació A_n satisfà (4.4). En concret,

$$x = \bigwedge_{i=1}^n x \leqslant A_n(x,\dots,x) \leqslant \bigvee_{i=1}^n x = x,$$

pel que $A_n(x,\dots,x) = x$ per $x \in [0,1]$, A_n és idempotent.

Notem que per demostrar aquesta implicació no és necessari que A_n sigui una funció d'agregació; qualsevol funció entre el mínim i el màxim serà idempotent. □

Proposició 13. *Si la funció $\mathbb{A}$ és simètrica i associativa, aleshores $A_2(1,0)$ és el seu únic element anul·lador.*

Demostració. Vegem, en primer lloc, que $A_2(A_2(1,0),x) = A_2(1,0)\ \forall x \in [0,1]$.
D'una banda, tenint en compte que $\mathbb{A}$ és associativa, monòtona i simètrica,

$$A_2(A_2(1,0),x) = A_2(1,A_2(0,x)) \leqslant A_2(1,A_2(0,1)) = A_2(1,A_2(1,0)) = A_2(A_2(1,1),0) = A_2(1,0),$$

així que tenim $A_2(A_2(1,0),x) \leqslant A_2(1,0)$. D'altra banda,

$$A_2(A_2(1,0),x) = A_2(1,A_2(0,x)) \geqslant A_2(1,A_2(0,0)) = A_2(1,0),$$

pel que $A_2(A_2(1,0),x) \geqslant A_2(1,0)$ i ja tenim la igualtat.

En general, per $n \geqslant 2$, es pot veure per inducció. Anomenem $a = A_2(1,0)$ per comoditat. Ja hem vist el cas inicial amb $n = 2$. La nostra hipòtesi d'inducció és que es compleixi $A_n(x_1,\dots,x_{i-1},a,x_{i+1},\dots,x_n) = a$. Vegem-ho per $n+1$. Gràcies a l'associativitat i emprant la hipòtesi d'inducció,

$$\begin{aligned} A_{n+1}(x_1,\dots,x_{i-1},a,x_{i+1},\dots,x_n) &= A_2(A_n(x_1,\dots,x_{i-1}a,x_{i+1},\dots,x_n),A_1(x_{n+1})) \\ &= A_2(a,x_1) = a. \end{aligned}$$

□

Exemple 19. A la Taula 4.1 es troben resumides algunes de les propietats que satisfan les funcions d'agregació presentades a l'Exemple 18. Per cada funció, es poden provar fàcilment les propietats que sí es compleixen i es pot trobar un contraexemple per les que no. Per exemple, $\prod$ no és idempotent ja que $\pi\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{2}$.

Totes són contínues. ♢

	Funció d'agregació						
Propietat	$\prod$	M	G	Min	Max	P_F	P_L
simetría	√	√	√	√	√	-	-
idempotència	-	√	√	√	√	√	√
monotonia estricta	-	√	-	-	-	-	-
el. neutre	1	-	-	1	0	-	-
el. anul·lador	0	-	0	0	1	-	-
associativitat	√	-	-	√	√	√	√

Taula 4.1: Propietats d'algunes de les funcions d'agregació més conegudes.

4.2 Classificació

Podem classificar les funcions d'agregació $\mathbb{A}$ en quatre classes:

- Conjuntives: són les que satisfan $\mathbb{A}(x_1,\ldots,x_n)\leqslant Min(x_1,\ldots,x_n)$
- Mitjanes: satisfan $Min(x_1,\ldots,x_n)\leqslant\mathbb{A}(x_1,\ldots,x_n)\leqslant Max(x_1,\ldots,x_n)$
- Disjuntives: les $\mathbb{A}$ tals que $\mathbb{A}(x_1,\ldots,x_n)\geqslant Max(x_1,\ldots,x_n)$
- Mixtes: les que no pertanyen a cap de les tres classes anteriors.

Estudiarem quines característiques tenen les funcions de cada classe i veurem alguns tipus especials de cada grup.

4.2.1 Funcions d'agregació conjuntives

Aquestes són les funcions d'agregació que es troben fitades superiorment per Min. Per aquest motiu, la funció d'agregació ampliada més petita possible
$A_w:\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+}[0,1]^2\longrightarrow[0,1]$ és també la més petita de les conjuntives.
Aquesta ve donada per:

$$A_w(x_1,\cdots,x_n)=\begin{cases}1 & \text{si } (x_1,\ldots,x_n)=(1,\ldots,1),\\ 0 & \text{altrament.}\end{cases}$$

A més, $a=0$ és l'element anul·lador de tota funció d'agregació conjuntiva, ja que si $x_i=0$ per algun $i\in\{1,\ldots,n\}$, $\mathbb{A}(x_1,\ldots,x_n)\leqslant Min(x_1,\ldots,x_n)=0$.

Dins aquest tipus de funcions d'agregació tenim tres classes importants: les t-normes, les còpules i les quasi-còpules.

T-normes

Es tracta de funcions d'agregació associatives, pel que queden determinades completament pel cas binari. Per això, hem estudiat prèviament les t-normes com a funcions $T : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$.

Es pot comprovar fàcilment que qualsevol t-norma satisfà la definició de funció d'agregació amb 1 com a neutre i el 0 com a element anul·lador; de fet, la definició de norma triangular és molt més restrictiva (veure Capítol 2).

Còpules i quasi-còpules

Les còpules foren introduïdes per A. Sklar l'any 1959 en el context de l'estadística i són un tipus de funció d'agregació conjuntiva que ha estat molt útil en estudis d'economia, de finances i d'estadística. El concepte de quasi-còpula és més recent (1993) i va ser introduït al mateix context.
A l'Annex 2 es pot trobar un estudi més ampli d'aquests operadors.

4.2.2 Funcions d'agregació mitjanes

Les funcions d'agregació mitjanes són les que es troben entre les funcions Min i Max i, gràcies a la Proposició 12, sabem que sempre són idempotents. A aquestes funcions també se les anomena **compensatòries**.

Les funcions d'agregació van créixer especialment en aquest àmbit, ja que estaven inicialment pensades per agregar dades i, en aquest context, és òbviament desitjable la propietat «compensatòria» i per tant, la d'idempotència. Tot i així, el seu concepte es va estendre ràpidament per tal d'englobar molts altres tipus de funcions, i d'aquí la classificació donada anteriorment.

La relació amb les t-normes és evident doncs: l'estudi de les normes triangulars i el de les funcions d'agregació han anat de la mà durant molt de temps (i encara ara), de manera que un ha fet créixer l'altre i viceversa.
Com a exemple, les primeres funcions d'agregació que s'utilitzaren foren les combinacions lineals convexes d'una t-norma i d'una t-conorma

$$F(x_1,\dots,x_n) = (1-\lambda)\,T(x_1,\dots,x_n) + \lambda S(x_1,\dots,x_n),$$

i les combinacions exponencials

$$F(x_1,\dots,x_n) = T(x_1,\dots,x_n)^{1-\lambda} + S(x_1,\dots,x_n)^{\lambda}.$$

En ambdós casos la funció resultant F és idempotent si, i només si T i S ho són. És a dir, si prenem T t-norma i S t-conorma, F és idempotent només en el cas en que $T = T_M$ i $S = S_M$.

Dins d'aquesta classe de funcions, la mitjana aritmètica és la més emprada, però n'hi ha moltes altres. Entre elles destacam les mitjanes quasi aritmètiques, les mitjanes aritmètiques ponderades, les quasi aritmètiques ponderades i les OWA'S.

Mitjanes quasi aritmètiques

Definició 23. Sigui funció d'agregació $M_f : \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+}[0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ definida per

$$M_f(x_1,\dots,x_n) = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right), \tag{4.5}$$

on $f : [0,1] \longrightarrow [-\infty,\infty]$ és una funció contínua i estrictament monòtona amb $\{f(0), f(1)\} \neq \{-\infty,\infty\}$. Anomenam *mitjana quasi aritmètica* a M_f.

Observació 5. Notem que la funció f podrà tenir, com a màxim, un dels dos punts $f(0)$, $f(1)$ dins $\{-\infty,\infty\}$.

En general, aquestes funcions d'agregació són sempre simètriques, idempotents i contínues. No tenen element neutre i poden tenir, o no, element anul·lador.

Observació 6. Per qualsevol $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ i $b \in \mathbb{R}$, si f és una funció com les comentades abans, tenim que $M_f = M_{af+b}$.

Com a conseqüència de la observació anterior, si $f(1) \notin \{-\infty,\infty\}$, aleshores podrem trobar una funció $t : [0,1] \longrightarrow [0,\infty]$ contínua, estrictament decreixent amb $t(1) = 0$ tal que $M_f = M_t$.

També tenim el següent resultat:

Proposició 14. $f(1) \notin \{-\infty,\infty\} \Leftrightarrow 1$ *no és element anul·lador de* M_f.

Demostració. D'una banda, suposant que $f(1) \notin \{-\infty,\infty\}$ i que l'1 sí és anul·lador de M_f, en particular, per $n = 2$, tenim que per $x_1 \in [0,1[$

$$\begin{aligned} M_f(x_1,1) = 1 \quad &\Rightarrow \quad f^{-1}\left(\frac{1}{2}\big(f(x_1)+f(1)\big)\right) = 1 \\ &\Rightarrow \quad f(x_1) = f(1), \end{aligned}$$

que no pot passar, ja que f ha de ser estrictament monòtona.

Recíprocament, suposem que 1 no és element anul·lador i que $f(1) = \infty$ (anàlogament si és $-\infty$). Aleshores, $f^{-1}(\infty) = 1$ i per tant tendrem que per $n = 2$, $M_f(x_1,1) = 1$ per qualsevol $x_1 \in [0,1]$, de manera que 1 sí sería anul·lador, fet que contradiu les nostres hipòtesis. □

D'això, se'n deriva el fet que hi ha una correspondència bijectiva entre el conjunt de les t-normes arquimedianes contínues i el conjunt de les mitjanes quasi aritmètiques per les que l'1 no és anul·lador.

En aquest context, la mitjana aritmètica M correspon a T_L, i les dues estàn generades per $t(x) = 1 - x$, mentre que la mitjana geomètrica G seria corresponent a T_P, les dues generades per $t(x) = -\ln(x)$.

Exemple 20. Els operadors arrel-potència $M_p : \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ amb $p \in]-\infty, 0[\cup]0,\infty[$ són un exemple de mitjanes quasi aritmètiques. Estàn definits per

$$M_p(x_1,\dots,x_n) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Notem que $f_p : [0,1] \longrightarrow [-\infty,\infty]$ és tal que $f_p(x) = xp$.

A més,

$$\text{Per } p = 1, \quad M_1(x_1,\dots,x_n) = M(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$\diamondsuit$

Mitjanes aritmètiques ponderades

Definició 24. Per $n \in \mathbb{Z}^+$, un *triangle de pesos* $\Delta = (\Delta_n)_{n\geqslant 1}$ és una família de n-tuples $\Delta_n = (w_{1n},\dots,w_{nn})$ on $\sum_{i=1}^{n} w_{in} = 1$.

Aquest nom es deu a la forma que prendria si ho expressam per cada $n \in \mathbb{Z}^+$ com:

$$\begin{array}{ccccc} & & w_{11} & & \\ & w_{12} & & w_{22} & \\ w_{13} & & w_{23} & & w_{33} \\ & & \vdots & & \end{array}$$

on els elements de cada fila sumen 1.

Definició 25. Donada $n \in \mathbb{Z}^+$ i un triangle de pesos $(\Delta_n)_{n\geqslant 1}$, la funció d'agregació donada per

$$W_\Delta(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} w_{in}x_i, \tag{4.6}$$

es diu *mitjana aritmètica ponderada associada a* Δ_n.

A partir d'ara, si es sobreentén qui és Δ, escriurem simplement W.

Exemple 21. La mitjana aritmètica $M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ és la única funció d'aquesta classe que és simètrica. Notem que el seu triangle de pesos és $\Delta_n = \left(\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n}\right)\ \forall n \geqslant 1$. $\diamondsuit$

En general, totes les mitjanes aritmètiques ponderades són contínues i idempotents.

Exemple 22. Per $n \in \mathbb{Z}^+$ considerem el triangle de pesos donat per

$$\Delta_n = \begin{cases} \left(0,\dots,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,\dots,0\right) & \text{si } n \text{ és parell,} \\ \\ (0,\dots,0,1,0,\dots,0) & \text{si } n \text{ és senar,} \end{cases}$$

on, si n és parell, $w_{in} = \frac{1}{2}$ per $i \in \left\{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1\right\}$, i si n és senar, $w_{in} = 1$ per $i = \frac{n+1}{2}$. Aleshores, tenim que la següent funció és una mitjana aritmètica ponderada:

$$W(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} & \text{si } n \text{ parell,} \\ \\ x_{\frac{n+1}{2}} & \text{si } n \text{ senar.} \end{cases}$$

$\diamondsuit$

Mitjanes quasi aritmètiques ponderades

Definició 26. Sigui $n \in \mathbb{Z}^+$, $\Delta = (\Delta_n)_{n\geqslant 1}$ un triangle de pesos i $f : [0,1] \longrightarrow [-\infty,\infty]$ contínua, estrictament monòtona i $\{f(0), f(1)\} \neq \{-\infty,\infty\}$. Aleshores, una funció d'agregació

$$W_{\Delta,f}(x_1,\ldots,x_n) = f^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} w_{in} f(x_i)\right)$$

es diu una *mitjana quasi aritmètica ponderada.*

En general, aquestes funcions són idempotents i contínues.

Exemple 23. En economia, s'empra la mitjana geomètrica ponderada:

$$G_\Delta(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{w_{in}}.$$

Notem que en aquest cas $f(x) = -\ln(x)$. Comprovem-ho. Sabem que $f^{-1}(x) = e^{-x}$, pel que, seguint la definció,

$$\begin{aligned} G_\Delta(x_1,\ldots,x_n) &= e^{\sum w_{in}\ln(x_i)} \\ &= e^{w_{11}\ln(x_1)+\cdots+w_{nn}\ln(x_n)} \\ &= e^{w_{11}\ln(x_1)}\cdots e^{w_{nn}\ln(x_n)} \\ &= e^{\ln(x_1)^{w_{11}}}\cdots e^{\ln(x_n)^{w_{nn}}} \\ &= x_1^{w_{11}}\cdots x_n^{w_{nn}} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{w_{in}}. \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

OWA'S

Definició 27. Donat un triangle de pesos $\Delta = (\Delta_n)_{n\geqslant 1}$ per $n \in \mathbb{Z}^+$, una funció d'agregació W' donada per

$$W'(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} w_{in} x_i^{'}, \tag{4.7}$$

on $(x_1^{'},\ldots,x_n^{'})$ és una permutació no decreixent de l'input $(x_1,\ldots,x_n)$, és un *operador OWA* associat a Δ_n.

Observació 7. (i) Vegem un exemple de permutació no decreixent: el de $(x_1,\ldots,x_5) = (0.7,,0.1,0.5,0.1,0.3)$ és $(x_1^{'},\ldots,x_n^{'}) = (0.1,0.1,0.3,0.5,0.7)$.

(ii) OWA vol dir «operador de mitjana ponderada ordenat», i prové de l'anglès (*ordered weighted average operator*).

En general, són funcions simètriques, contínues i idempotents.

Exemple 24. Per $n \in \mathbb{Z}^+$, alguns exemples de OWA'S són els següents.

- Mínim.

  És una OWA amb triangle $\Delta = (\Delta_n)_{n\geqslant 1}$ tal que

$$w_{in} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{si } i \neq 1. \end{cases}$$

  Notem que w_{in} és el valor que acompanya a $x_i^{'}$, pel que w_{1n} acompanyarà al més petit dels valors de $(x_1, \ldots, x_n)$.

- Màxim.

  Es defineix a partir del triangle Δ_n tal que

$$w_{in} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n, \\ 0 & \text{si } i \neq n. \end{cases}$$

- Mediana.

  El triangle que la defineix és el mateix que el de l'Exemple 22.

- Mitjana aritmètica M.

  Resulta ser també un OWA, ja que els pesos són iguals per tots els elements de l'input: $\Delta_n = \left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$.

$\diamondsuit$

Els OWA's han estat un dels tipus de funcions d'agregació compensatòries més estudiades i han donat lloc a moltes generalitzacions segons les propietats desitjades.

4.2.3 Funcions d'agregació disjuntives

Les t-conormes són una classe de les funcions d'agregació disjuntives. De nou, podem comprovar que compleixen la definició de funció d'agregació amb elements neutre 0 i anul·lador 1.

Tenim una dualitat entre les funcions d'agregació conjuntives i disjuntives anàloga a l'existent entre t-normes i t-conormes. Així, es poden introduïr fàcilment les co-còpules (duals de les còpules), i així successivament.

4.2.4 Funcions d'agregació mixtes

Aquestes funcions són aquelles que no podem classificar dins de cap dels grups anteriors.

Tant l'element neutre d'una t-norma (l'1) com el d'una t-conorm (que és el 0) són elements de la frontera de l'interval $[0,1]$. No obstant, hi ha moltes operacions que tenen com a element neutre un punt interior de l'interval.

Introduïrem dos tipus importants de funcions d'agregació mixtes: les uninormes i les nulnormes o t-operadors. Com es tracta de funcions d'agregació associatives, només tractarem el cas binari.

Uninormes

El fet que els tres primers axiomes de les t-normes i les t-conormes (T1)-(T3) coincideixin, o el que és el mateix, només es diferenciin en la localització de l'element neutre, va dur a l'estudi d'una nova classe d'operacions binàries que estàn molt relacionades amb les t-normes i les t-conormes.

Definició 28. Una *uninorma* és una funció d'agregació binària $\mathcal{U} : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ tal que

(i) és simètrica,

(ii) és associativa,

(iii) té element neutre $e \in]0,1[$.

La estructura de les uninormes fou estudiada per Fodor, Yager i Rybalov al 1977 (veure [7]), on provaren, entre altres coses, que no hi ha cap uninorma contínua en tot l'interval unitat.

Observació 8. Com una uninorma $\mathcal{U}$ és simètrica i associativa, per la Proposició 13 sabem que $\mathcal{U}(0,1)$ és el seu element anul·lador.

Proposició 15. *Sigui $\mathcal{U}$ una uninorma, es verifica:*

(i) $\mathcal{U}(0,1) \in \{0,1\}$.

(ii) Per $x, y \in [0,1]$, si $\min(x,y) \leqslant e \leqslant \max(x,y)$, aleshores $\min(x,y) \leqslant \mathcal{U}(x,y) \leqslant \max(x,y)$.

Demostració. Vegem cada part per separat.

Prova de (i)

Diguem $a = \mathcal{U}(0,1) = \mathcal{U}(1,0) = a$ i sigui e l'element neutre de la uninorma.

- Si $a \leqslant e$, per monotonia es compleix que $\mathcal{U}(a,0) \leqslant \mathcal{U}(e,0) = 0$, pel que $\mathcal{U}(a,0) = 0$.

  Aleshores, considerant les característiques de la uninorma,

  $$0 = \mathcal{U}(a,0) = \mathcal{U}(\mathcal{U}(1,0),0) = \mathcal{U}(1,\mathcal{U}(0,0)) = \mathcal{U}(1,0).$$

  Així, $\mathcal{U}(1,0) = 0$.

- Si $a > e$, tenim que $\mathcal{U}(1,a) \geqslant \mathcal{U}(1,e) = 1$ i per tant $\mathcal{U}(1,a) = 1$.

  Aleshores,
  $$1 = \mathcal{U}(1,a) = \mathcal{U}(1,\mathcal{U}(1,0)) = \mathcal{U}(\mathcal{U}(1,1),0) = \mathcal{U}(1,0),$$
  i així $\mathcal{U}(1,0) = 1$.

Prova de (ii)

- Si $x \leqslant y$, aleshores
  $$\min(x,y) = x = \mathcal{U}(x,e) \leqslant \mathcal{U}(x,y) \leqslant \mathcal{U}(e,y) = y = \max(x,y).$$
- Si $x > y$ el raonament seria anàleg.

□

Observació 9.

- De fet, si $\mathcal{U}(1,0) = 0$, $\mathcal{U}$ es diu una *uninorma conjuntiva*. En aquest cas, és una extensió de la intersecció booleana clàssica que és simètrica, associativa i monòtona. El seu nom prové de la traducció d'intersecció en anglès «*conjunction*»; no s'ha de confondre amb la classe de funcions d'agregació conjuntives.

  Si, pel contrari, $\mathcal{U}(1,0) = 1$, es diu que $\mathcal{U}$ és una *uninorma disjuntiva* i extén la unió booleana. De nou, el seu nom prové de l'anglès i no s'ha de confondre amb la classe de funcions d'agregació disjuntives.
- La Proposició 15 (ii) ens indica que la estructura de qualsevol uninorma amb element neutre $e \in]0,1[$ serà la que apareix a la Figura 4.1.

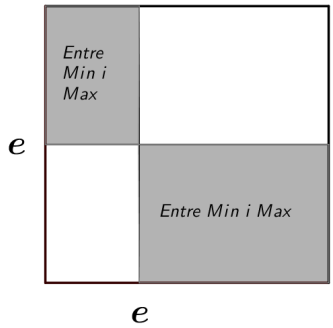

Figura 4.1: Amb la Proposició 15 podem assegurar que aquesta és l'estructura d'una uninorma amb neutre $e \in]0,1[$.

Proposició 16. *Sigui $\mathcal{U}$ una uninorma amb element neutre $e \in]0,1[$. Aleshores, $T_{\mathcal{U}} : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ i $S_{\mathcal{U}} : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ definides per*

$$T_{\mathcal{U}}(x,y) = \frac{1}{e}\mathcal{U}(ex,ey), \tag{4.8}$$

$$\tag{4.9}$$

$$S_{\mathcal{U}}(x,y) = \frac{1}{1-e}\big(\mathcal{U}(e+(1-e)x, e+(1-e)y) - e\big), \tag{4.10}$$

són una t-norma i una t-conorma, respectivament.

Demostració. La comprovació de que satisfan els axiomes de les definicions de t-norma i t-conorma és trivial. □

Aquest resultat ens indica que tenim

$$\mathcal{U}|_{[0,e]^2} = (\langle 0, e, T_{\mathcal{U}}\rangle)|_{[0,e]^2},$$

$$\mathcal{U}|_{[e,1]^2} = (\langle e, 1, S_{\mathcal{U}}\rangle)|_{[e,1]^2}.$$

Per tant, la estructura d'una uninorma $\mathcal{U}$ amb neutre $e \in]0,1[$ té la forma que apareix a la Figura 4.2.

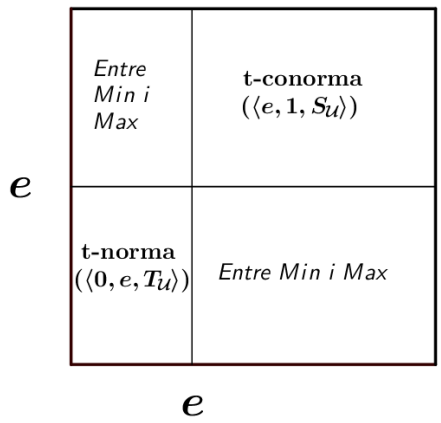

Figura 4.2: Estructura d'una uninorma amb neutre $e \in]0,1[$.

Exemple 25. Siguin T una t-norma, S una t-conorma i e un element en $]0,1[$. Aleshores, les funcions $\mathcal{U}^c_{T,S,e} : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ i $\mathcal{U}^d_{T,S,e} : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ definides per

$$\mathcal{U}^c_{T,S,e}(x,y) = \begin{cases} eT\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right) & \text{si } (x,y) \in [0,e[^2, \\ e + (1-e)S\left(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}\right) & \text{si } (x,y) \in [e,1]^2, \\ \min(x,y) & \text{altrament,} \end{cases} \tag{4.11}$$

$$\mathcal{U}^d_{T,S,w}(x,y) = \begin{cases} eT\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right) & \text{si } (x,y) \in [0,e]^2, \\ e + (1-e)S\left(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}\right) & \text{si } (x,y) \in]e,1]^2, \\ \max(x,y) & \text{altrament,} \end{cases} \tag{4.12}$$

són una uninorma conjuntiva i una uninorma disjuntiva, respectivament. Les seves estructures es poden veure a les Figures 4.3 i 4.4. ♢

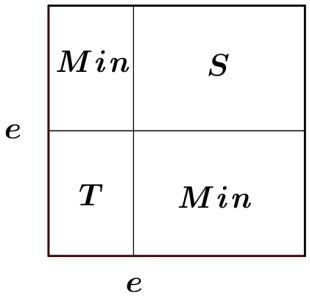

Figura 4.3: Estructura de $\mathcal{U}^c_{T,S,e}$.

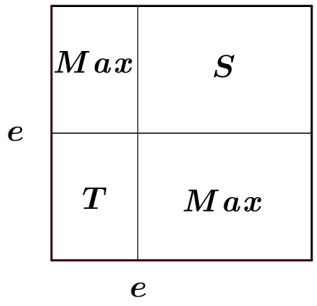

Figura 4.4: Estructura de $\mathcal{U}^d_{T,S,e}$.

Les uninormes amb l'estructura donada a (4.11)(veure Figura 4.3) s'anomenen uninormes de $\mathcal{U}_{\min}$ i les que tenen l'estructura de (4.12) (veure Figura 4.4) s'anomenen uninormes de $\mathcal{U}_{\max}$.
Dins d'aquestes classes es troben les uninormes (amb neutre fixat $e \in]0,1[$) més petita i més gran (respecte de l'ordre puntual). Només cal combinar la t-norma dràstica amb la t-conorma màxim i viceversa.

Proposició 17. *Donat $e \in]0,1[$ fixat, $\mathcal{U}^e_{T_D,S_M,e}$ és la uninorma més petita amb neutre e i $\mathcal{U}^e_{T_M,S_D,e}$ és la més gran amb neutre e.*

Hi ha, però, molts altres tipus d'uninormes (veure [13]). Podem destacar aquí les uninormes representables per la seva analogia amb les t-normes i t-conormes arquimedianes (estrictes).

Proposició 18. *Sigui $e \in]0,1[$ i $h : [0,1] \longrightarrow [-\infty,\infty]$ una aplicació estrictament creixent i contínua amb $h(0) = -\infty$, $h(e) = 0$ i $h(1) = \infty$. Llavors, cada una de les funcions*

$$\mathcal{U}(x,y) = \begin{cases} 0 & si\ (x,y) \in \{(0,1),(1,0)\}, \\ h^{-1}\big(h(x)+h(y)\big) & si\ (x,y) \in [0,1]^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}, \end{cases} \tag{4.13}$$

i

$$\mathcal{U}(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ (x,y) \in \{(0,1),(1,0)\}, \\ h^{-1}\big(h(x)+h(y)\big) & si\ (x,y) \in [0,1]^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}, \end{cases} \tag{4.14}$$

és sempre una uninorma que s'anomena uninorma representable. La funció h s'anomena generador additiu de la uninorma.

Nota. Les primeres uninormes que van aparéixer foren les compensatives (notem que les uninormes de $\mathcal{U}_{\min}$ i $\mathcal{U}_{\max}$ amb $T = T_M$ i $S = S_M$ ho són perquè són idempotents) que vàren ser introduïdes en l'àmbit de l'agregació (veure [7]) però molt aviat, pel caràcter lògic ($\mathcal{U}(0,1) = 0$ o $\mathcal{U}(0,1) = 1$) van ser tractades com a generalitzacions de t-normes i t-conormes i utilitzades en totes les aplicacions comentades de les t-normes.

Nulnormes

Les nulnormes s'introduïren amb aquest nom a [14].

Definició 29. Una *nulnorma* és una funció d'agregació binària $\mathcal{V} : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ tal que

- és simètrica,
- és associativa,
- té un element $a \in]0,1[$ tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(x,0) &= x \quad \forall x \leqslant a, \\ \mathcal{V}(x,1) &= x \quad \forall x \geqslant a. \end{aligned}$$

Observació 10. Com $\mathcal{V}$ és simètrica i associativa, resulta que $\mathcal{V}(0,1)$ és l'anul·lador de $\mathcal{V}$. Però com $a = \mathcal{V}(a,0) = \mathcal{V}(0,a) \leqslant \mathcal{V}(0,1) \leqslant \mathcal{V}(a,1) = a$, tenim que $\mathcal{V}(0,1) = a$ i per tant, a és l'anul·lador de $\mathcal{V}$.

Proposició 19. *Una nulnorma $\mathcal{V}$ pren el valor* $\mathcal{V}(x,y) = a \quad \forall (x,y) \in [0,1]^2 \setminus \big([0,a[^2 \cup [a,1]^2\big)$.

Demostració. Notem primer que del fet $\mathcal{V}(a,0) = \mathcal{V}(a,1) = a$ es dedueix que $\mathcal{V}(a,x) = a$ $\forall x \in [0,1]$. Al cas en que $0 \leqslant x \leqslant a$ i $a < y \leqslant 1$, tenim
$a = \mathcal{V}(x,a) \leqslant \mathcal{V}(x,y) \leqslant \mathcal{V}(a,y) = a$, pel que $\mathcal{V}(x,y) = a$.
Similarment pel cas $a \leqslant x < 1$, $0 \leqslant y < a$. □

D'aquest resultat, podem deduïr que la estructura d'una nulnorma amb element anul·lador $a = \mathcal{V}(0,1)$ és la que apareix a la Figura 4.5.
Podem veure un resultat similar al que presentàvem per les uninormes.

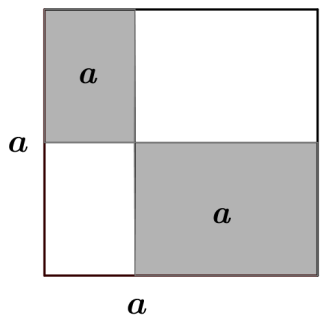

Figura 4.5: Estructura d'una nulnorma amb anul·lador $a \in]0,1[$ que es pot deduïr de la Proposició 19.

Proposició 20. *Per una nulnorma $\mathcal{V}$ amb anul·lador $a \in]0,1[$, les funcions $T_{\mathcal{V}} : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ i $S_{\mathcal{V}} : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ definides per*

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{V}}(x,y) &= \frac{1}{1-a}\big(\mathcal{V}(a+(1-a)x, a+(1-a)y) - a\big), \\ S_{\mathcal{V}}(x,y) &= \frac{1}{a}\mathcal{V}(ax,ay), \end{aligned}$$

són una t-norma i una t-conorma, respectivament.

Demostració. De nou, la comprovació és trivial. □

Així, tenim

$$\mathcal{V}|_{[0,a]^2} = (\langle 0, a, S_{\mathcal{V}}\rangle)|_{[0,a]^2},$$

$$\mathcal{V}|_{[a,1]^2} = (\langle a, 1, T_{\mathcal{V}}\rangle)|_{[a,1]^2}.$$

Per tant, la estructura d'una nulnorma $\mathcal{V}$ amb anul·lador $a \in]0,1[$ té la forma que apareix a la Figura 4.6. Així, per tant, hem vist el següent resultat.

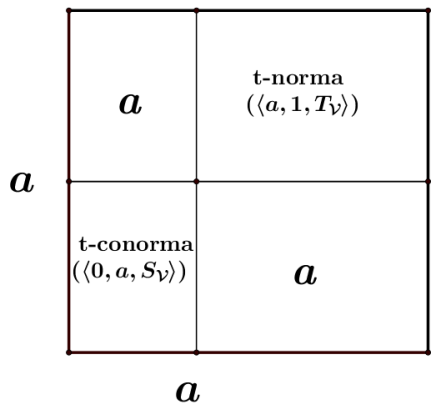

Figura 4.6: Estructura d'una nulnorma amb anul·lador $a \in]0,1[$.

Proposició 21. *Donada una nulnorma $\mathcal{V}$ amb anul·lador $a = \mathcal{V}(0,1)$, existeix una única t-norma $T_{\mathcal{V}}$ i una única t-conorma $S_{\mathcal{V}}$ de manera que $\mathcal{V}$ ve donada per l'expressió:*

$$\mathcal{V}(x,y) = \begin{cases} aS_{\mathcal{V}}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) & \text{si } x, y \leqslant a, \\ a + (1-a)T\left(\frac{x-a}{1-a}, \frac{y-a}{1-a}\right) & \text{si } x, y \geqslant a, \\ a & \text{altrament.} \end{cases} \tag{4.15}$$

A més, $\mathcal{V}$ és contínua si, i només si, ho són $T_{\mathcal{V}}$ i $S_{\mathcal{V}}$.

Observació 11. Conseqüentment, per cada $a \in]0,1[$, existeix una única nulnorma $\mathcal{V}_a$ idempotent amb anul·lador a. Aquesta, ve donada per

$$V_a(x,y) = \begin{cases} \max(x,y) & \text{si } (x,y) \in [0,a[^2, \\ \min(x,y) & \text{si } (x,y) \in [a,1]^2, \\ a & \text{altrament.} \end{cases}$$

A la Figura 4.7 podem trobar l'estructura de la nulnorma idempotent amb anul·lador $a \in]0,1[$.
A les Figures 4.8-4.11 representam la gràfica en tres dimensions de la nulnorma V_a per distints valors de a. Per suposat, amb $a = 0$ correspondria a la gràfica de T_M (Figura 2.1) i amb $a = 1$ seria la gràfica de S_M (Figura 2.18). És interessant veure la progressió de $\mathcal{V}_a$ a mesura que creix el valor de a i com passa de tenir la forma d'una t-norma a la d'una t-conorma.

	a	Min
a	Max	a
	a	

Figura 4.7: Estructura de $\mathcal{V}_a$.

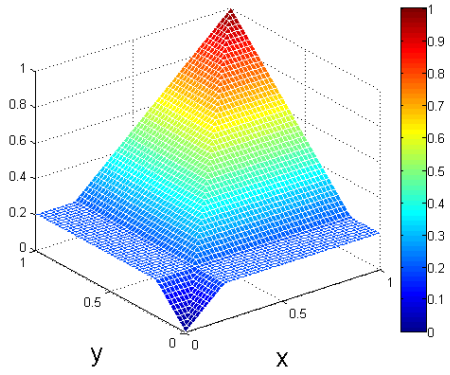

Figura 4.8: Gràfica 3D de $\mathcal{V}_{0.2}$.

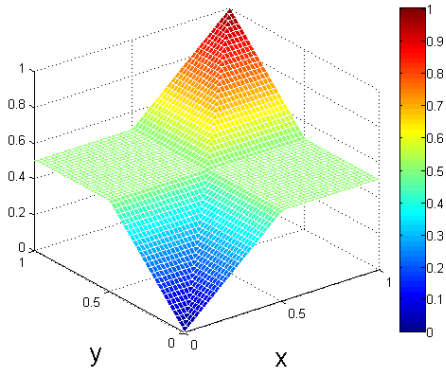

Figura 4.9: Gràfica 3D de $\mathcal{V}_{0.5}$.

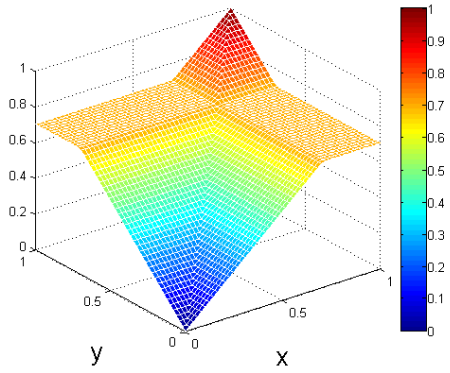

Figura 4.10: Gràfica 3D de $\mathcal{V}_{0.7}$.

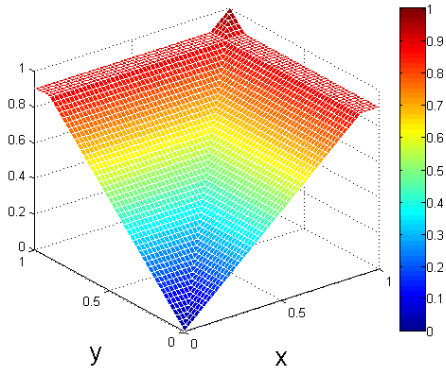

Figura 4.11: Gràfica 3D de $\mathcal{V}_{0.9}$.

Paral·lelament, s'introduiren els anomenats *t-operadors* (veure [10]) com a funcions d'agregació $\mathcal{V}$ simètriques, associatives i tals que les funcions frontera $\mathcal{V}(\cdot,0)$ i $\mathcal{V}(\cdot,1)$ són contínues. El següent resultat demostra que t-operadors i nulnormes són exactament el mateix.

Proposició 22. *Sigui $\mathcal{V}$ un t-operador i sigui $a = \mathcal{V}(1,0)$. Llavors, existeix una única*

t-norma $T_{\mathcal{V}}$ i una única t-conorma $S_{\mathcal{V}}$ de manera que $\mathcal{V}$ ve donat per l'expressió (4.15).

Demostració. En primer lloc, tenim

$$\mathcal{V}(a,0) = \mathcal{V}(\mathcal{V}(1,0),0) = \mathcal{V}(1,\mathcal{V}(0,0)) = \mathcal{V}(1,0) = a,$$

i anàlogament $\mathcal{V}(a,1) = a$, pel que $\mathcal{V}(x,a) = a \ \forall x \in [0,1]$.
De forma idèntica a la Proposició 19, es veu que $\mathcal{V}(x,y) = a$ per a tot (x,y) tal que $\min(x,y) \leqslant a \leqslant \max(x,y)$.

Per una altra banda, tenim que com $a = \mathcal{V}(a,0)$ i $\mathcal{V}(0,0) = 0$, per continuïtat de $\mathcal{V}(\bullet,0)$ tenim que $\forall x \in [0,a]$ $\exists y \in [0,a]$ tal que $\mathcal{V}(y,0) = x$. Però llavors,

$$\mathcal{V}(x,0) = \mathcal{V}\big(\mathcal{V}(y,0),0\big) = \mathcal{V}\big(y,\mathcal{V}(0,0)\big) = \mathcal{V}(y,0) = x,$$

és a dir, $\mathcal{V}(x,0) = x \ \forall x \in [0,a]$.
Anàlogament es veu que $\mathcal{V}(x,1) = x \ \forall x \in [a,1]$ i llavors un raonament idèntic al fet a la Proposició 20 prova el resultat. □

CAPÍTOL 5

ANNEX 1: EL NAIXEMENT DE LES NORMES TRIANGULARS

5.1 Els orígens

El concepte d'*espai mètric* introduït per Maurice Fréchet al 1906 [8] permet descriure matemàticament la *distància* entre, per exemple, punts, funcions, o conjunts. Amb aquest concepte tenim la possibilitat d'associar un nombre real no negatiu que compleixi certes condicions a cada parell d'elements d'un conjunt.

Però què passa quan, per exemple, mesuram la llargària d'un material per fer un experiment físic?. Prenem distintes mesures i anomenam la «distància» entre dos punts a la mitjana dels resultats de les mesures. En moltes situacions a les que s'aplica la teoria dels espais mètrics, associar un únic nombre per cada parell d'elements és, en realitat, una idealització.

Per aquest motiu, en lloc de considerar la distància com un concepte determinat, seria més apropiat considerar-la com un concepte estadístic. Aquesta va ser la idea del matemàtic austríac Karl Menger. El seu objectiu va ser construïr espais mètrics on, en lloc de descriure la distància entre dos punts de l'espai amb un nombre, es definís amb distribucions de probabilitat. Això permetría donar més flexibilitat al concepte i admetre així la incertesa, que fins aleshores no era acceptada al món científic.

Va ser l'any 1942, quan Menger, en ple estudi dels espais mètrics estadístics,[1] publicà l'article *Statistical metrics* [3]. En ell, es descriu un *espai mètric estadístic* com un conjunt S al qual els seus elements (anomenats «punts») p i q estàn relacionats mitjançant una funció de probabilitat $\Pi(x; p, q)$ creixent, definida per valors no negatius de x i que pren valors entre 0 i 1, que a més és contínua per la dreta, convergeix cap a 1 quan x

[1] Avui en dia es diuen espais mètrics probabilístics.

tendeix a infinit i satisfà les següents condicions:

(i) $\Pi(0; p, p) = 1$,

(ii) Si $p \neq q$, aleshores $\Pi(0; p, q) < 1$,

(iii) $\Pi(x; p, q) = \Pi(x; q, p)$,

(iv) $T\left[\Pi(x; p, q), \Pi(y; q, r)\right] \leqslant \Pi(x + y; p, r)$,

on $T(\alpha, \beta)$ és una funció definida per $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ i $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ que satisfà:

(a) $0 \leqslant T(\alpha, \beta) \leqslant 1$,

(b) T és creixent en cada variable,

(c) $T(\alpha, \beta) = T(\beta, \alpha)$,

(d) $T(1, 1) = 1$,

(e) Si $\alpha > 0$, aleshores $T(\alpha, 1) > 0$.

La funció de probabilitat $\Pi(x; p, q)$ és anomenada la *funció distància* de p i q i s'interpreta com la probabilitat de que els punts p i q es trobin a distància menor o igual que x. Per això, és lògic que Π tengui les característiques mencionades, com per exemple que prengui valors entre 0 i 1.

La propietat $\lim_{x\to\infty} \Pi(x; p, q) = 1$ també té sentit, ja que la probabilitat de que dos punts p i q estiguin a distància menor o igual que un nombre x ha de ser més gran a mesura que creix el nombre x.

Com veim, la manera que va trobar Menger d'expressar el concepte de distància en termes estadístics passa per la funció de probabilitat Π. A la Taula 5.1 podem trobar els axiomes que han de complir les distàncies definides per Fréchet i per Menger. Així, es veu clarament quina és la idea d'introduïr els espais mètrics probabilístics.

Espais mètrics	Espais mètrics probabilístics
$d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$	$\Pi(0; p, p) = 1$ Si $p \neq q$, aleshores $\Pi(0; p, q) < 1$
$d(p, q) = d(q, p)$	$\Pi(x; p, q) = \Pi(x; q, p)$
$d(p, r) \leqslant d(p, q) + d(q, r)$	$T\left[\Pi(x; p, q), \Pi(y; q, r)\right] \leqslant \Pi(x + y; p, r)$,

Taula 5.1: Comparació de conceptes de distància.

Per exemple, el tercer axioma que compleix Π es tradueix en que la probabilitat de que la distància entre p i q sigui menor o igual que un nombre $x \geqslant 0$ ha de ser la mateixa que la probabilitat de que q i p es trobin a distància menor o igual que aquest x.

L'axioma (iv) és una generalització de la desigualtat triangular (tractant-se de probabilitats i no de nombres determinats, no tendria sentit emprar-la). Aquesta generalització es va poder fer gràcies a la introducció de la funció T, que en aquest mateix article rep

el nom de ***norma triangular***.

Menger va imposar els axiomes sobre T que necessitava pel seu estudi. Per exemple, amb l'axioma (d) s'assegurà de que si les probabilitats $\Pi(x;p,q)$ i $\Pi(y;q,r)$ eren 1, aleshores necessàriament $\Pi(x+y;p,r)$ sería 1 també. De la mateixa manera, amb (c) i (e) assegurà que si una de les probabilitats $\Pi(x;p,q)$ ó $\Pi(y;q,r)$ era estrictament positiva i l'altra era 1, llavors la probabilitat $\Pi(x+y;p,r)$ també ho sería; això es tradueix en que almenys hi haurà alguna probabilitat de que p i r estiguin a distància menor o igual que $x+y$ quan poguem assegurar amb probabilitat 1 que, per exemple, q i r són a distància menor o igual que y i hi ha alguna probabilitat de que p i q es trobin a distància menor o igual que x.

No obstant, a partir d'aquest moment l'estudi de les normes triangulars es començà a desenvolupar i avui en dia la definició d'aquestes funcions contempla uns altres axiomes. En la següent secció es pot trobar un resum de les diferències entre els axiomes originals i els que actualment determinen una norma triangular.

5.2 Comparació amb els axiomes actuals

És interessant notar com ha anat evolucionant la definició axiomàtica de les t-normes. Els axiomes proposats per Menger foren modificats per Berthold Schweizer i Abe Sklar [4] el 1958, i són aquests els que avui en dia es consideren. A la Taula 5.2 trobam els axiomes que emprà Menger i els de la definició actual (presentada a la Definició 1) per a $x,y,z \in [0,1]$.

Menger 1942	**Actualment**
$T(x,y) = T(y,x)$	$T(x,y) = T(y,x)$
$-----$	$T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z)$
T creixent en cada variable	$T(x,y) \leqslant T(x,z)$ si $y \leqslant z$
$T(1,1) = 1$ Si $x > 0$ aleshores $T(x,1) > 0$	$T(x,1) = x$

Taula 5.2: Comparació de l'axiomàtica per t-normes.

Encara que la condició de commutativitat es manté invariant, podem observar que els axiomes originals són menys restrictius que els actuals, principalment perquè no exigeixen l'associativitat (T2). A més, les condicions de frontera originals també són més febles que (T4).

En quant a la monotonía, els axiomes de Menger exigeixen la monotonía en les dues variables, mentre que als de la definició actual només es requereix en una variable, ja que se'n pot deduïr la monotonía a l'altra a partir de la commutativitat.

5.3 L'inici de moltes coses

Com veim, fa 75 anys que el concepte de *t-norma* es va introduïr a la literatura matemàtica, i encara que en l'article de Menger es presenten les normes triangulars per espais mètrics probabilístics i que va permetre molts avanços en el procés d'admetre la incertesa, va significar també la introducció d'un concepte clau en molts altres camps que es desenvoluparien posteriorment. Des d'aleshores, moltes persones treballen en aplicar aquestes funcions en la lògica borrosa, la economia, les finances, la teoria de la presa de decisions o el tractament borrós d'imatges.

Per tant, gràcies a la gran idea d'adoptar les normes triangulars per desenvolupar altres àrees, s'ha profunditzat molt en les característiques, propietats i classificació d'aquestes funcions. Avui en dia és un camp complet d'investigació, i per tant encara queda per veure tot el que se'n pot derivar.

CAPÍTOL 6

ANNEX 2: CÒPULES

Les còpules són un concepte relativament modern, però que en els darrers anys s'ha anat desenvolupant molt, en part, gràcies a les seves aplicacions en estadística i probabilitats o economía i finances.

Es presenten a continuació les definicions de còpula i quasi-còpula i alguns resultats relacionats.

6.1 Còpules

Definició 30. Una funció binària $C : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ és una *còpula* si satisfà les següents propietats:

(i) És 2-creixent, és a dir, $C(x,y)+C(u,v) \geqslant C(x,v)+C(u,y)$ per $x,y,u,v \in [0,1]$ amb $x \leqslant u$, $y \leqslant v$.

(ii) $C(x,0) = C(0,x) = 0$.

(iii) $C(x,1) = C(1,x) = x$.

Amb la Figura 6.1 notem que dir que C satisfà la propietat de ser 2-creixent equival a dir que si la funció C pren valors A, B, C i D en els punts corresponents (per exemple, $C(x,y) = A$), aleshores es compleix $A+B \geqslant C+D$.

Proposició 23. *Tota còpula C és creixent en cada variable.*

Demostració. Per ser C una còpula és 2-creixent, pel que, en particular, per $y = 0 \leqslant v$ i $x \leqslant u$ amb $x,y,u,v \in [0,1]$ es satisfà

$$C(x,0)+C(u,v) \geqslant C(x,v)+C(u,0)$$

i gràcies a que 0 és l'element anul·lador de C tenim que $C(u,v) \geqslant C(x,v)$. Per tant, C és creixent en la primera variable.

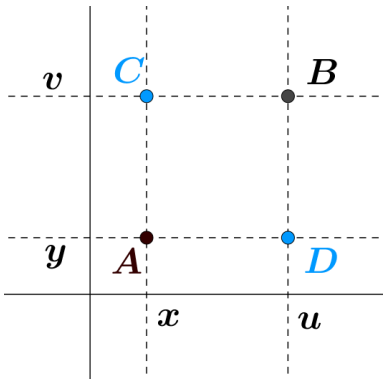

Figura 6.1: Representació gràfica de la propietat de 2-creixement

Anàlogament veuriem, triant $x = 0 \leqslant u$ i $y \leqslant v$ el creixement en la segona variable. □

Les còpules estan, efectivament, fitades superiorment pel mínim i són, per tant, funcions d'agregació conjuntives.

Proposició 24. *Sigui C una còpula. Aleshores, $T_L \leqslant C \leqslant Min$.*

Demostració. D'una banda,

$$\left.\begin{array}{l} C(x,y) \leqslant C(x,1) = x \\ C(x,y) \leqslant C(1,y) = y \end{array}\right\} \Rightarrow C(x,y) \leqslant Min(x,y).$$

D'altra banda, per ser 2-creixent, $C(x,y) + C(1,1) \geqslant C(x,1) + C(1,y) = x + y$, i així,

$$\left.\begin{array}{c} C(x,y) \geqslant x + y - 1 \\ C(x,y) \geqslant 0 \end{array}\right\} \Rightarrow C(x,y) \geqslant \max(x+y-1, 0) = T_L(x,y).$$

□

En general, les còpules no són simètriques ni associatives.

Exemple 26. (i) $\prod, Min$ i T_L són còpules.

(ii) Donat $p \in]0,1[$, $C(x,y) = pxy + (1-p)\min(x,y)$ és una còpula que no és associativa ni simètrica.

◇

També existeix en concepte de còpula n-dimensional (veure [5]).

Les còpules són especialment importants perquè verifiquen el famós teorema de Sklar.

Teorema 5. *(Teorema de Sklar)*
Sigui $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un vector aleatori, $F_{\mathcal{X}}, F_{\mathcal{Y}} : [-\infty, \infty] \to [0,1]$ funcions de distribució marginals i una funció $H_{\mathcal{X}\mathcal{Y}} : [-\infty, \infty]^2 \to [0,1]$. Aleshores, són equivalents:

(i) $H_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}$ és la funció de distribució conjunta de $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

(ii) Existeix una còpula $C_{\mathcal{XY}}$ tal que per a tot $(x,y) \in [-\infty,\infty]^2$ tenim

$$H_{\mathcal{XY}}(x,y) = C_{\mathcal{XY}}\left(F_{\mathcal{X}}(x), F_{\mathcal{Y}}(y)\right).$$

A més, si $F_{\mathcal{X}}$ i $F_{\mathcal{X}}$ són contínues, aleshores $C_{\mathcal{XY}}$ és única. Si no, $C_{\mathcal{XY}}$ és únicament determinada només a $Ran\,(F_{\mathcal{X}}) \times Ran\left(F_{\mathcal{Y}}\right)$.

Es pot trobar una demostració a [5].

D'aquesta manera, la còpula $C_{\mathcal{XY}}$ dóna una idea de la dependència entre les variables $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$. La còpula producte correspon a la independència de les variables, mentre que qualsevol altra estableix un determinat grau de dependència. D'aquí les seves aplicacions en estadística i economia principalment.

6.2 Quasi-còpules

El concepte de quasi-còpula és molt recent, fou introduït el 1993 també en el context de la estadística.

Definició 31. Una funció binària $Q : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ és una *quasi-còpula* si satisfà les següents propietats:

(i) El seu element neutre és l'1.

(ii) Q és 1-Lipschitz, i.e, $|Q(x_1,x_2) - Q(y_1,y_2)| \leqslant |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ per $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0,1]$.

El seu nom prové, naturalment, de que compleixen moltes però no totes les propietats que satisfan les còpules.

Proposició 25. *Tota còpula és quasi-còpula.*

Demostració. Sigui C una còpula. L'objectiu és veure que C és 1-Lipschitz, i.e, que $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0,1]$ tenim $|C(x_1,x_2) - C(y_1,y_2)| \leqslant |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.

Es compleix

$$\begin{aligned} |C(x_1,x_2) - C(y_1,y_2)| &= |C(x_1,x_2) - C(y_1,x_2) + C(y_1,x_2) - C(y_1,y_2)| \\ &\leqslant |C(x_1,x_2) - C(y_1,x_2)| + |C(y_1,x_2) - C(y_1,y_2)|. \end{aligned} \tag{6.1}$$

D'una banda, tenim que $|C(x_1,x_2) - C(y_1,x_2)| \leqslant |x_1 - y_1|$. Vegem-ho.

- Si $y_1 \leqslant x_1$, tenim que $y_1 \leqslant x_1$ i $x_2 \leqslant 1$ i com C és una còpula és 2-creixent, pel que

$$\begin{aligned} C(y_1,x_2) + C(x_1,1) &\geqslant C(y_1,1) + C(x_1,x_2), \\ C(y_1,x_2) + x_1 &\geqslant y_1 + C(x_1,x_2). \end{aligned}$$

  Com C és monòtona creixent compleix que

$$C(x_1,x_2) - C(y_1,x_2) \geqslant C(y_1,x_2) - C(y_1,x_2) = 0,$$

i per tant ens queda

$$0 \leqslant C(x_1, x_2) - C(y_1, x_2) \leqslant x_1 - y_1.$$

- Si $y_1 \geqslant x_1$ anàlogament tenim $x_1 - y_1 \leqslant C(x_1, x_2) - C(y_1, x_2) \leqslant 0$.

D'altra banda, de forma similar podem veure que $|C(y_1, x_2) - C(y_1, y_2)| \leqslant |x_2 - y_2|$.

Aleshores, tornant a (6.1), obtenim el resultat buscat:

$$|C(x_1, x_2) - C(y_1, y_2)| \leqslant |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

□

En general, les quasi-còpules no són simètriques ni associatives, però sí són contínues, ja que vé donat de que siguin 1-Lipschitz. Així, tota còpula també és contínua.

De nou, també existeix el concepte de quasi-còpula n-dimensional (veure [5]).

La relació entre còpules, quasi-còpules i t-normes és molt estreta i ve donada pel següent resultat.

Teorema 6. *Sigui T una t-norma. Són equivalents:*

(i) *T és còpula.*

(ii) *T és quasi-còpula.*

(iii) *T és 1-Lipschitz.*

(iv) *T és suma ordinal de t-normes arquimedianes contínues amb generadors additius convexos.*[1]

Es pot trobar una demostració consultant els Teoremes 9.10 i 9.12, el Corol·lari 9.15 i el Teorema de classificació de t-normes contínues de [1].

Paral·lelament, també tenim:

Teorema 7. *Sigui C una còpula. Llavors C és associativa si, i només si, C és una t-norma contínua.*

Per una prova d'aquest resultat es pot consultar [1].

Observació 12. Llavors, les còpules associatives també són commutatives.

[1] El concepte de funció convexa és l'habitual: f és convexa si està definida sobre un conjunt convex G i per qualsevols dos punts $x, y \in G$ i per $t \in [0,1]$ es satisfà $f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$.

CAPÍTOL 7

CONCLUSIONS

A l'inici d'aquest treball es proposava introduïr de manera clara les t-normes i dibuixar al seu voltant les relacions amb altres operadors i algunes de les seves aplicacions.

Com s'ha pogut comprovar, tots els conceptes que han anat apareixent estàn més o menys relacionats entre si, i en particular, amb les t-normes.
Per exemple, ara sabem que podem identificar una còpula associativa amb una t-norma contínua i arquimediana amb generador additiu convex (o amb una suma ordinal d'aquestes), que una funció binària com la còpula pot donar-nos una idea del grau de dependència entre dues variabes aleatòries, o que amb una t-norma i una t-conorma podem obtenir una nulnorma o una uninorma.

Mostra d'aquesta relació entre conceptes és, per exemple, haver definit la dualitat entre t-normes i t-conormes i després demostrar que les negacions, que en principi eren operadors lògics, hi tenen molt a veure.
Així, depenent des d'on mirem, també podem veure el mínim com una funció d'agregació, una còpula, o una t-norma.

Han resultat interessants, a més, les ampliacions de les propietats algebraiques que ja coneixíem per adaptar-les a les t-normes (com idempotent, arquimedià, nilpotent o divisor de zero), o les ampliacions dels operadors de la lògica booleana a la lògica borrosa.

Destacam alguns punts també importants que s'han pogut veure en el treball:

- A partir dels seus orígens en teoria dels espais mètrics probabilístics, l'ús de la t-norma ha pogut evolucionar cap a molts altres camps.
- Hi ha hagut diversos canvis de pensament que li han donat la volta a conceptes que es coneixien des de feia molt de temps, com la distància o la pertinença a un conjunt. Aquests canvis anaven en la mateixa línia: descriure millor la realitat.
  De fet, pot ser ara ens podriem plantejar no suspendre a un alumne si la seva

nota és inferior al 5, sino donar-li una nota entre 0 i 10 que simbolitzi el grau de coneixement que ha demostrat haver adquirit al llarg del curs.

Hi ha diversos factors que fan que aquest treball pugui ser una bona introducció al món de les t-normes tant per alumnes interessats com per qualsevol persona que vulgui situar les t-normes en un context o utilitzar el treball com un punt de partida en el coneixement de les t-normes, per posteriorment poder desenvolupar estudis en enginyeria.

En primer lloc, en el cas dels estudiants, pot ser interessant fer servir molts objectes matemàtics de la lògica, l'àlgebra, l'anàlisi i l'estadística, ja que pot significar, a més de la introducció d'elements nous (com una altra lògica distinta a la booleana), una manera de repassar o aclarir conceptes ja coneguts.
Amb més motiu encara si es té en compte que aquest és un tema que no pertany al temari del Grau de Matemàtiques.

En segon lloc, la teoría està acompanyada d'exemples i de gràfiques que ajuden a clarificar les definicions i les propietats, a més de notes històriques per situar-se millor en el context matemàtic. A més, com es comenta a l'inici, un dels objectius principals és que el lector pugui entendre les relacions que existeixen entre l'element principal, la t-norma, i la resta d'elements que hi apareixen.

Com hem vist al llarg d'aquest treball, les t-normes són un pilar fonamental en moltes àrees i a la vegada conformen una àrea d'estudi per si mateixes. El món de les t-normes és molt ampli i, clarament, totes les idees presentades es poden ampliar molt més.

En el disseny del treball, s'han intentat triar les parts que han semblat més importants per poder conformar una lectura interessant i autocontinguda. Per tant, aquest treball no pretén esser un recull totalment complet que englobi tot el que es coneix de t-normes, sino que permeti introduïr a qualsevol persona en aquest àmbit i que pugui fer-se una idea de la quantitat de coses que s'hi amaguen.

Queden moltes àrees obertes a la investigació. Una d'elles, que és important i que no apareix en aquest treball, és l'estudi de les t-normes no contínues. En la part més aplicada, hi ha multitud de possibles vies d'aplicació dels operadors introduïts, com pot ser la intel·ligència artificial o la presa de decisions.

Si es vol profunditzar en qualsevol dels temes presentats en aquest treball es pot consultar la bibliografía, on es recullen les fonts consultades.
Per a la realització del present treball s'han consultat diversos llibres i articles. Principalment s'ha seguit [1], però en cada capítol s'ha complementat amb altres materials més específics. Per exemple, al Capítol 3, en la part de conjunts borrosos, la font principal ha estat [9], mentre que per a l'elaboració de l'Annex 1 ha fet falta analitzar l'article [3].
La restricció a t-normes contínues al Capítol 2 ha reduït molt algunes demostacions i teoremes i hem hagut d'adaptar bastants resultats a aquest fet. El maneig de diverses i tan variades fonts ha permès contrastar definicions, resultats i demostracions.

APÈNDIX A

APENDIX

En aquest apèndix es presenta el codi que ha permès generar els gràfics de les funcions.

Tant les gràfiques en tres dimensions com les de contorn de les diferents funcions han estat generades amb `Matlab`.

Per dibuixar en 3D, farem el mateix procés per guardar els valors de les t-normes T_M, T_P i T_L i en el cas de T_D i T_{nM} serà una mica diferent.

En primer lloc definim les variables i crearem dos vectors `X` i `Y` de 50 valors en $[0,1]$; aquests representen els eixos x i y.

```
syms x y
X=linspace(0,1,50);
Y=X;
```

Per les tres primeres, introduïrem les t-normes com a funcions de dues variables i omplirem la matriu Z que representa l'eix z amb els valors que ens torni la t-norma.

```
TM=@(x,y)min(x,y);
TP=@(x,y)x*y;
TL=@(x,y)max(x+y-1,0);

%PER LES TRES PRIMERES T-NORMES:
  Z=matriuZ(X,Y,TL);
```

on `matriuZ` és simplement

```
function[Z] = matriuZ(X,Y,T)
Z=zeros(length(X),length(Y));
for i=1:length(X)
```

```
    for j=1:length(Y)
    Z(i,j)=T(X(i),Y(j));
    end
end
end
```

Per les altres dues t-normes, cream una funció a trossos com aquesta:

```
function[f]=TD(x,y)
if (0<=x)&&(x<1) && (0<=y)&&(y<1)
    f=0;
else
    f=min(x,y);
end
```

Després, omplirem les matrius corresponents entrada a entrada.

```
%PER LA DRÀSTICA:
Z=zeros(length(X),length(Y));
for i=1:length(X)
    for j=1:length(Y)
    Z(i,j)=TD(X(i),Y(j));
    end
end
Z
```

Anàlogament per T_{nM}.

Ara podem dibuixar les t-normes en tres dimensions:

```
%DIBUIXAR TNORMA EN 3D:
s=surf(X,Y,Z,'EdgeColor','white')
xlabel('x','Fontsize',20)
ylabel('y','Fontsize',20)
,'FaceAlpha',0.5
colorbar
```

Per dibuixar el diagrama de contorn d'una t-norma, senzillament empram la funció `contour` amb la matriu Z transposada.

```
%Diagrama de contorn per a les T-normes:
% contour(X,Y,transpose(Z),'linewidth',2)
% xlabel('x','Fontsize',20)
% ylabel('y','Fontsize',20)
```

Per les t-conormes es fa idènticament i per dibuixar una nulnorma simplement la definim com, per exemple:

```
function[f]=Nulnorm(x,y,a)
if (0<=x)&&(x<a) && (0<=y)&&(y<a)
    f=max(x,y);
elseif (a<=x)&&(x<=1) && (a<=y)&&(y<=1)
    f=min(x,y);
else
    f=a;
end
```

Fixem-nos en que ara demanam també a com a input. Després, de manera anàloga podem generar la superfície en 3D.

Per les sumes ordinals seria el mateix procés, però demanant com a inputs les t-normes necessàries i definint la funció com una a trossos.

BIBLIOGRAFIA

[1] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap. *Triangular Norms*. 2000. Kluwer Academic Publishers. 2.1.1, 6.2, 6.2, 7

[2] E.Klement, R.Mesiar. *Logical, algebraic, analytic and probabilistic aspects of triangular norms*. 2005. Elsevier. 2.1.1, 2.1.3

[3] Karl Menger. *Statistical metrics*. October 1942. Vol.28, 535-537. 5.1, 7

[4] B.Schweizer, A.Sklar. *Espaces métriques aléatoires*. 1958. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Paris. Ser. A.247:2092-2094. 5.2

[5] R.B.Nelsen. *An Introduction to Copulas*. 2006. Springer. 6.1, 6.1, 6.2

[6] M.Mas, M.Montserrat, J.Torrens, E.Trillas. *A survey on fuzzy implication functions*. December 2007. IEEE Transactions on fuzzy systems. Vol.15. No.6. 1107-1121. 3.2.2

[7] J.C. Fodor, R.R. Yager, A.Rybalov. *Structure of Uninorms*. 1997. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems. Vol.5, No.4.411-427. 4.2.4, 4.2.4

[8] M.Fréchet. *Sur quelques points du calcul fonctionnel*. 1906. Rendiconti de Circolo Matematico di Palermo. No.22. 1-74. 5.1

[9] H.T. Nguyen, E.A.Walker. *A First Course in Fuzzy Logic*. 2006. Chapman and Hall/CRC. 3.2.3, 7

[10] M. Mas, G.Mayor, J. Torrens. *t-Operators*. 1999. International Journey of Uncertainity, Fuzziness and Knowledge-Based Systems. 7:31-50. 4.2.4

[11] C. Alsina, E. Trillas, L. Valverde. *On some logical connectives for fuzzy sets theory*. 1983. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 93:15-26. 3.2.3

[12] S.Weber. *A general concept of fuzzy connectives, negations and implications based on t-norms ans t-conorms*. 1983. Fuzzy Sets and Systems. 11:115-134. 3.2.3

[13] M.Mas, S.Massanet, D.Ruiz-Aguilera, J.Torrens. *A survey on the existing classes of uninorms*. 2015. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems 29. 1021-1037. 4.2.4

[14] T.Calvo, B. De Baets, J.C. Fodor. *The functional equations of Frank and Alsina for uninorms and nullnorms*.2001/6/16. Fuzzy Sets and Systems.Vol.120. No.3.385-394. 4.2.4

[15] M. Baczynski, B. Jayaram. *Fuzzy Implications*. 2008. Studies in fuzziness and soft computing. Vol.231. Springer.

3.2.2