



**Universitat de les
Illes Balears**

Facultat d'Educació

Memòria del Treball de Fi de Grau

Metodologies a classe de matemàtiques. Un passeig històric.

Jaume Moyà Crespí

Grau d'Educació Primària

Any acadèmic 2018-19

DNI de l'alumne: 433229725Y

Treball tutelat per Juan Vicente Riera Clapés
Departament de Matemàtiques

S'autoritza la Universitat a incloure aquest treball en el Repositori Institucional per a la seva consulta en accés obert i difusió en línia, amb finalitats exclusivament acadèmiques i d'investigació	Autor		Tutor	
	Sí	No	Sí	No
	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Paraules clau del treball:

Didàctica, matemàtiques, metodologia, ensenyament, realisme

RESUM

L'ensenyament de les matemàtiques no és un procés estàtic. Des del segle XIX, l'ensenyament de les matemàtiques està en constant evolució, noves metodologies i maneres d'ensenyar sorgeixen. En aquest treball, s'analitzen les principals metodologies que s'han emprat, valorant les seves avantatges i desavantatges. Finalment, es proposa una intervenció didàctica en la qual es pot observar clarament la diferència entre la metodologia d'ensenyament mecanicista i la metodologia d'ensenyament realista.

Paraules clau: didàctica, matemàtiques, metodologies, ensenyament, realisme.

ABSTRACT

Since the 19th century, there are a lot of different methodologies and ways of teaching mathematics that have been changing: These methodologies are in constant evolution. Each year there are plenty of new different methodologies and ways of teaching mathematics. For that reason, in this project I will analyse these methodologies and explain the main advantages and disadvantages of the most important ones.

Moreover, I am going to present a teaching intervention about the main difference between a mechanism methodology and a realistic methodology in the classroom.

Keywords: didactics, mathematics, methodologies, education, realism.

ÍNDIX DE CONTINGUTS

1. INTRODUCCIÓ	5
2. OBJECTIUS	6
3. METODOLOGIA EMPRADA PER DESENVOLUPAR EL TREBALL	8
4. ESTRUCTURA I DESENVOLUPAMENT DELS CONTINGUTS	9
5. PROPOSTA D'INTERVENCIÓ	26
1. Proposta d'intervenció mecanicista.....	27
2. Proposta d'intervenció realista.....	33
6. CONCLUSIONS	43
7. REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES	44
8. ANNEXOS	46

1. INTRODUCCIÓ

Durant anys, l'ensenyament de les matemàtiques s'ha centrat exclusivament en l'exposició dels continguts als infants, sense cap mena de contextualització ni lligadura amb el món real, el món que envolta els infants.

Això no obstant, avui dia l'ensenyament de les matemàtiques està canviant considerablement. En molts casos, observem mestres més disposats a treballar les matemàtiques emprant metodologies més tradicionals, i a l'inrevés, trobem mestres que aposten cap als mètodes d'ensenyament més innovadors. Tot i això, no vol dir que l'ensenyament tradicional sigui obsolet, ni que les noves tecnologies hagin de ser les definitives. Encara que durant molts anys les passes per arribar al coneixement han estat les adequades, s'estan donant molts casos en els quals s'observen noves maneres per desenvolupar l'aprenentatge dels infants.

En aquest treball es pretén analitzar les diferents metodologies per a l'aprenentatge de les matemàtiques fins a l'actualitat des d'un punt de vista crític, analitzant les bases de cada metodologia i la influència dels coneixements en els infants.

He triat aquest tema perquè trobo molt interessant la comparació entre metodologies, no només a matemàtiques, sinó globalment. Hi ha moltes maneres d'arribar a una fita (en aquest cas l'assoliment de continguts) a partir de diferents maneres de realitzar o fer veure els continguts als infants. Així doncs, aquest treball pot servir com a orientació per triar, segons les característiques de l'aula, els mètodes més adients per desenvolupar un bon estil d'ensenyament-aprenentatge.

2. OBJECTIUS

OBJECTIUS GENERALS

1. Comparar les diferents metodologies emprades per a l'ensenyament de les matemàtiques a l'Educació Primària.
2. Adquirir la capacitat d'escollir, en un futur, la metodologia adient per a l'ensenyament de les matemàtiques.
3. Prendre consciència de l'evolució històrica de les diferents metodologies per a l'ensenyament de les matemàtiques.
4. Comparar com s'ha ensenyat un contingut d'acord a l'aplicació de diferents metodologies.

OBJECTIUS ESPECÍFICS

1. Comparar les diferents metodologies emprades per a l'ensenyament de les matemàtiques a l'Educació Primària.
 1. Comprendre els avantatges i desavantatges de les diferents metodologies emprades per a l'ensenyament de les matemàtiques.
 2. Analitzar cada metodologia i els seus errors comuns.
2. Adquirir la capacitat d'escollir, en un futur, la metodologia adient per a l'ensenyament de les matemàtiques.
 1. Conèixer noves tècniques metodològiques de treball.
3. Prendre consciència de l'evolució històrica de les diferents metodologies per a l'ensenyament de les matemàtiques.
 1. Enfocar la feina a partir dels principals autors de didàctica de les matemàtiques.
4. Comparar com s'ha ensenyat un contingut d'acord a l'aplicació de diferents metodologies.
 1. Ser capaç de treballar continguts a partir de cada metodologia.

2. Observar quina metodologia és la més adient segons les circumstàncies del grup.
3. Analitzar les avantatges i desavantatges de cada metodologia.

3. METODOLOGIA EMPRADA PER DESENVOLUPAR EL TREBALL

Per assolir els diferents objectius d'aquest treball, es durà a terme una tasca predominant d'investigació. En un primer moment es durà a terme la investigació de les principals metodologies d'ensenyament: quines metodologies existeixen? Quines són les principals característiques?

Un cop resoltes les preguntes anteriors, la investigació que es durà a terme serà específica a l'àrea de matemàtiques. D'aquesta manera, la investigació es centrarà en les metodologies per a l'ensenyament de les matemàtiques existents, la seva evolució i què aporta cada metodologia a l'aprenentatge. Es pretén abordar metodologies per a l'ensenyament de les matemàtiques com són l'estructuralisme, l'empirisme, el mecanicisme i el realisme. Aquesta investigació es durà a terme tractant els autors principals de la didàctica de les matemàtiques.

4. ESTRUCTURA I DESENVOLUPAMENT DELS CONTINGUTS

D'acord amb els objectius exposats anteriorment, es durà a terme una recerca d'informació per tal de fer una anàlisi metodològica, començant per aspectes més generals i acabant amb aspectes més específics. D'aquesta manera, es durà a terme la recerca d'informació relacionada amb la didàctica general: definicions per part de diferents autors, tipus de metodologies o corrents generals d'ensenyament. Tot seguit es durà a terme la recerca d'informació més específica, relacionada amb la didàctica de les matemàtiques com seran el terme de didàctica aplicat a matemàtiques vist des de diferents punts de vista i l'anàlisi de les principals metodologies d'ensenyament de matemàtiques.

1. Metodologies de l'ensenyament

La metodologia didàctica és definida com a la manera d'ensenyar. D'aquesta manera, dona resposta a com s'ensinya. Així doncs, la metodologia correspon a les tècniques del docent i e l'estudiant durant el procés d'ensenyament-aprenentatge. Aquestes estratègies d'ensenyament, però, corresponen a una base científica que el docent exposa als alumnes perquè aquests adquireixin determinats aprenentatges (Forteza, 2009).

Per altra banda, s'ha de tenir clar el concepte de didàctica per seguir amb la investigació. Segons Freudenthal (citada a García, 2001), la didàctica consisteix a organitzar. Aquesta organització és referida als processos d'ensenyament i aprenentatge de qualsevol matèria.

Tornant al terme de metodologia didàctica, Zabalza (2011) afirma que els mètodes contenen quatre dimensions bàsiques:

1. L'organització dels espais i els temps.

L'organització de l'espai afecta les dimensions que tenen a veure amb característiques objectives i funcionals. Les característiques objectives tenen relació amb les infraestructures, el mobiliari o els utensilis que s'empraran. Per altra banda, les característiques funcionals corresponen a les possibilitats que s'ofereixen per dur a terme certes activitats. L'organització de l'espai pot ser pensada com un ítem secundari en l'aprenentatge, però realment aquest espai és

on es durà a terme el desenvolupament de l'aprenentatge, que acaba condicionat per l'espai on es produeix.

Referent a l'organització del temps, és un dels aspectes més importants per a configurar les sessions per als docents. D'altra manera però, moltes deficiències que se solien detectar a l'aprenentatge dels estudiants anava relacionat amb el temps: falta d'organització personal per dur a terme les tasques o simplement, per estudiar.

2. La manera de subministrar la informació.

Pel que fa a la informació i els mètodes d'ensenyament, cal incidir en què el que fa variar d'un mètode a un altre no és la informació a donar, sinó que canvia la manera de donar aquesta informació. Aquests canvis es relacionen amb el canal i la forma en què es dona la informació, que vénen condicionats per l'estil d'acompliment que el mestre adopti en la mediació del rol entre estudiants i el coneixement: es pot donar la informació perquè els alumnes la memoritzin, donar-los pistes perquè elaborin ells la informació, o podem situar-los davant casos o problemes perquè descobreixin quina és la informació necessària per a resoldre'ls. Segons l'estil de mediació que s'empri, s'emprarà un estil o un altre d'aprenentatge.

3. L'orientació i la gestió de les activitats per a l'aprenentatge.

L'ensenyament es pot donar en gran grup, ja que del que es tracta és de fer arribar la informació de forma clara i de manera que s'entengui. L'aprenentatge, per altra banda, és una activitat individual en la qual cada estudiant la desenvolupa amb el seu propi estil i al seu ritme.

La gestió de les activitats per a l'aprenentatge correspon, segons l'autor, a les "coreografies docents". Això vol dir el disseny de situacions riques en activitats destinades a propiciar que els estudiants aconseguixin nivells profunds d'aprenentatge.

4. Les relacions interpersonals.

Les relacions interpersonals van lligades amb les relacions amigables entre docent i estudiant amb un equilibri en la gestió del poder, de la cordialitat i l'afecte sense

perdre l'autoritat necessària. D'aquesta manera, el clima de l'aula es veu totalment afavorit.

De Miguel et al. (2006) afirma que el mètode és la manera que tenen els mestres per desenvolupar la seva activitat docent. Cada mestre desenvolupa la seva activitat didàctica basant-se en les seves idees personals sobre ensenyament o costums del gremi al qual pertany. D'aquesta manera, es presenta un recull dels mètodes que es poden emprar a l'aula en funció de les competències que es pretenen assolir i les característiques de l'entorn.

1. Classe magistral

Centrada en l'exposició verbal per part del mestre, es coneix com un mètode expositiu d'un tema lògicament estructurat per facilitar informació organitzada seguint uns criteris adequats a la finalitat que es pretén.

El principal argument que sustenta la classe magistral és la capacitat i el domini de la matèria per part del docent.

L'exposició ha de ser organitzada seguint el següent ordre lògic. Una primera part introductòria que sigui capaç de captar l'atenció de l'alumnat i d'activar els coneixements previs d'aquest. La segona part va adreçada al desenvolupament, que ha de permetre l'observació de la coherència interna entre la informació aportada, per tant, ha de contenir un mapa conceptual dels continguts adquirits. Finalment, la fase final de tancament de l'exposició ha de possibilitar l'elaboració d'un resum i facilitar la integració dels nous coneixements amb els quals han estat adquirits anteriorment.

Amb aquesta metodologia es produeix un gran estalvi de temps i mitjans, com també és molt favorable per atendre grups nombrosos. Per altra banda, la participació de l'alumne és molt pobre i no incideix al ritme individual dels alumnes, no controla el progrés de l'alumnat ni aporta retroalimentació.

2. Estudi de casos

L'estudi de casos consisteix a analitzar completament un fet, problema o succés real per tal d'interpretar-lo, resoldre'l, generar hipòtesis i reflexionar. El cas a estudiar ha de respondre als nuclis temàtics del que es pretén estudiar, doncs, ha de ser atractiu.

El mestre presenta un cas concret, d'extensió variable. El primer pas a seguir és el de presentació i familiarització amb el tema, és a dir, la contextualització i

l'anàlisi inicial en petits grups per tal de clarificar els diferents punts de vista. Tot seguit, es du a terme l'anàlisi específica del cas: identificació del problema i la detecció dels punts forts i dèbils, donant respostes parcials o totals als elements que el componen, en petit grup. Finalment, la preparació de conclusions i recomanacions. De forma cooperativa per tal d'avaluar les diferents alternatives de la solució i encaminant així cap a la reflexió individual.

L'estudi de casos afavoreix el desenvolupament d'habilitats de comunicació i la possibilitat d'experimentar un aprenentatge autèntic, lligat a fets reals. A més, és una via d'entrenament encaminada cap a la resolució de problemes reals. Per altra banda, necessita una gran habilitat per part del docent per generar empatia i ser respectat pel seu paper com a persona, no pel rol de docent imposat.

3. Resolució d'exercicis i problemes

Utilitzada com a complement de la classe magistral, aquesta metodologia consisteix a posar en pràctica i assajar els coneixements previs en diferents situacions, permetent d'aquesta manera un aprenentatge significatiu.

Els exercicis o problemes poden tenir una solució o més d'una, però sempre conegudes pel mestre. Les etapes de la resolució d'un exercici o problema poden resumir-se en: 1) Reconeixement del problema i comprensió, 2) Anàlisi, recerca i selecció del procediment a emprar o pla de resolució, 3) Aplicació del procediment o pla seleccionat i, finalment, 4) Comprovació i interpretació del resultat.

Aquest mètode produeix també un augment de l'interès de l'estudiant, ja que els permet veure que els coneixements assolits són útils. A més, si el problema és plantejat correctament, pot afavorir tant el treball autònom com el grupal.

No obstant això, no totes les situacions exposades són reals. Aquests casos s'haurien d'evitar, ja que d'aquesta manera no es produiria l'atracament a la realitat necessari.

4. Aprenentatge basat en problemes (Problem Based Learning)

El punt de partida d'aquesta metodologia és un problema dissenyat pel docent. Aquestes situacions problemàtiques es basen en situacions complexes del món real. L'estudiant ha de resoldre aquest problema per desenvolupar les competències prèviament escollides.

El mètode avança amb quatre etapes: la presentació del problema, les condicions de feina i la formació de grups i identificació de rols; identificació, per part de l'alumnat, les necessitats d'aprenentatge; recollida d'informació i elaboració d'idees i finalment la resolució del problema amb una solució aportada al docent i a la resta de companys en gran grup.

Aquest mètode atraca els estudiants als tipus de problemes que hauran d'enfrontar en un futur i, a part, fomenta el treball en grup i interprofessional. A més, permet a l'estudiant la capacitat d'innovar, d'integrar i aplicar coneixements i habilitats associats amb el coneixement. Per altra banda, però, l'estudiant que no està familiaritzat amb aquest mètode pot tenir problemes per comprendre la seva estructura.

5. Aprenentatge orientat als Projectes (Project-Based Learning)

Amb aquest mètode els alumnes duen a terme un projecte amb un límit de temps per tal de resoldre un problema o desenvolupar un contingut a través de la planificació, el disseny i la realització d'una sèrie d'activitats, emprant els recursos adients.

Els projectes se centren, normalment, en més d'una matèria. Desenvolupen problemes o temes reals, generant un nou coneixement als infants. Pel que fa a la temporització dels projectes, solen dur-se a terme durant un trimestre o un curs complet.

L'estructura d'aquest mètode d'ensenyament-aprenentatge consta de quatre fases: 1) La recopilació d'informació a través de fonts diverses. 2) L'elaboració del pla de feina i especificació de la metodologia que s'emprarà. 3) Realització de la tasca experimental i investigadora, exercitant la creativitat, l'autonomia i la responsabilitat. 4) Avaluació basada en l'intercanvi d'opinions.

Amb aquesta metodologia els infants aprenen a prendre les seves pròpies decisions i a fer feina de manera independent. A més, es produeix un gran augment de motivació cap a la feina, com també es produeix un augment de la confiança dels estudiants. No obstant això, és molt difícil actuar amb els infants que no se senten motivats cap a la feina, com és difícil també fer la feina sense tenir uns coneixements previs sobre la temàtica a desenvolupar.

6. Aprenentatge Cooperatiu (Cooperative Learning)

L'aprenentatge cooperatiu és una metodologia que, centrada en el treball en grup, aporta als alumnes la responsabilitat del seu propi aprenentatge i els dels seus companys a través de la corresponsabilitat per arribar a un objectiu comú.

La metodologia fomenta la cooperació i la col·laboració per tal d'acabar amb la competició. Segons afirmen Johnson i Holubec (citats a de Miguel et. Al, 2006), existeixen cinc components essencials que fonamenten un aprenentatge cooperatiu efectiu:

- Interdependència positiva: cada membre del grup és responsable de l'èxit d'aquest, i ha de ser conscient que el seu èxit individual depèn també dels altres.
- Interacció cara a cara: la metodologia implica interaccions constants i directes entre els membres del grup.
- Responsabilitat individual: cada alumne ha d'assumir la seva responsabilitat per arribar a l'èxit.
- Avaluació dels resultats i del procés: el grup ha de desenvolupar activitats de reflexió i d'avaluació del treball grupal.

Cada membre de cada grup (de quatre persones a ser possible) té un càrrec dins aquest. Els grups es formen cercant la diversitat i el contrast entre els membres del grup, és a dir, la creació dels grups es basa en l'heterogeneïtat.

L'aprenentatge cooperatiu afavoreix aspectes com la motivació cap a la feina, les actituds d'implicació i la iniciativa cap a la feina i cap a l'ajuda als companys, el desenvolupament de l'esperit crític, i afavoreix també el grau de comprensió de la feina que es fa, i més important, per què es fa.

Per altra banda, requereix una participació activa de tots els membres del grup, com també molta constància i paciència per part del docent, sobretot a les fases inicials.

Els mètodes d'ensenyament vistos anteriorment es podrien definir com la base de les metodologies de l'ensenyament de les matemàtiques. Com es veurà a continuació, molts mètodes d'ensenyament matemàtic es basen en aspectes relacionats amb les metodologies generals vistes en aquest punt del treball.

2. La didàctica a les matemàtiques

Amb aquest punt es pretén fer un recull de les diferents metodologies que s'han aplicat a les matemàtiques. Abans, però, és necessari aclarir el concepte de didàctica enfocat a matemàtiques.

Com s'ha mencionat anteriorment, el concepte de didàctica va lligat a l'organització. El pedagog Hanz Griesel (citat a Vidal, 2012) defineix la didàctica de les matemàtiques com la ciència del desenvolupament de les planificacions que es poden realitzar en l'ensenyament de les matemàtiques. Aquesta interpretació té present els programes, les seqüències d'ensenyament i l'elaboració de manuals.

Brousseau (citat a Vidal, 2012) va distingir tres etapes de didàctica basant-se en l'estudi dels fenòmens relacionats amb l'ensenyament de les matemàtiques. Aquests fenòmens estan relacionats amb l'alumnat, els continguts i els agents educatius.

1. Etapa Antiga: el docent havia de dominar la matèria. El terme didàctica consistia en les seves qualitats de bon transmissor de coneixements.
2. Etapa Clàssica: els processos d'ensenyament comencen a formar part de la investigació, com també l'aprenentatge de les matemàtiques. La investigació, realitzada per Piaget, Vigotsky i Ausubel, entre d'altres, va dur a la publicació de llibres amb el nom de Didàctica de les Matemàtiques.
3. Etapa Actual: la Didàctica de les Matemàtiques és una ciència que, a més de considerar els ítems de l'etapa clàssica, abraça fonamentalment i com a punt d'inici les matemàtiques. D'aquesta manera, és necessari comptar amb un equip multidisciplinari amb sòlida formació matemàtica per tal de connectar els experts en matemàtiques i els educadors matemàtics.

L'ensenyament de les matemàtiques és avui dia centrat principalment en els processos matemàtics. Aquest fet ve donat per la importància dels processos davant els continguts matemàtics. Pel que fa als processos matemàtics, és de gran importància centrar-se en dos mega processos: la resolució de problemes i la matematització o modelització (Font, 2008).

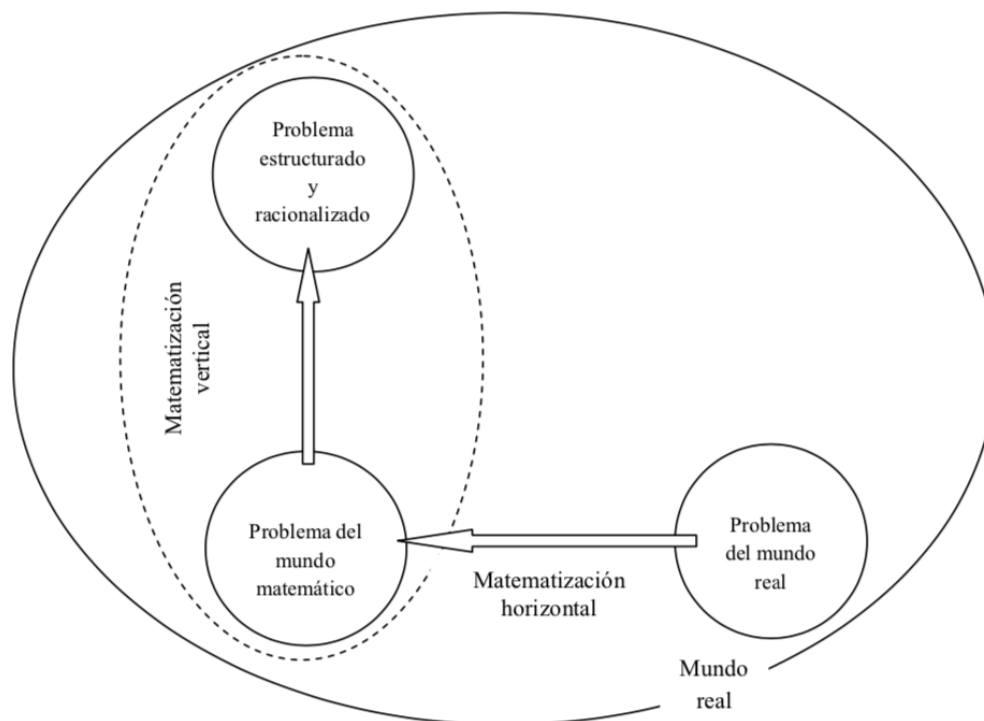
Pel que fa al procés de modelització, Godino, Batanero i Font (2008) afirmen: “El procés de modelització segueix, normalment, cinc fases: 1) L’observació de la realitat. 2) La descripció simplificada de la realitat. 3) La construcció d’un model. 4) Feina matemàtica amb el model. 5) Interpretació de resultats amb la realitat” (p.136). A més a més, Treffer (citada a García, 2002) distingeix dues formes de modelització o matematització: la matematització vertical i la matematització horitzontal. La *matematització vertical* consisteix en el tractament específicament matemàtic de les situacions. Aquest tractament du implícit diferents processos com són representar una relació utilitzant fórmules, utilitzar diferents models, refinar i ajustar models, combinar i integrar models, provar regularitats, formular nous conceptes matemàtics i generalitzar. La *matematització horitzontal* va del món real al món dels símbols, fet que permet tractar matemàticament un conjunt de problemes. La matematització horitzontal combina processos com són: identificar matemàtiques en diferents situacions, esquematitzar, formular i visualitzar un problema de diferents maneres, descobrir relacions i regularitats, reconèixer aspectes isomorfs en diferents problemes i transferir un problema real a un model matemàtic conegut.

Freudenthal (1991) defineix la matematització horitzontal com “la matematització que es dirigeix del món de la *vida* al món dels *símbols*. En el món de la vida es viu, es sofreix i s’actua” (p.41). Per altra banda, afirma que “a la matematització vertical els símbols tenen forma, estan remodelats i manipulats mecànicament i manera comprensiva i reflexiva” (p.42). Per a Freudenthal, el món de la vida és aquell relacionat amb la realitat; i el món dels símbols està purament relacionat amb l’abstracció. Cal remarcar que la distinció entre la matematització horitzontal i la matematització vertical depèn de la situació, les persones involucrades i el seu entorn (Freudenthal, 1991).

Un exemple sobre els tipus de matematització, exposat per Freudenthal (1991), consistiria a l’anàlisi de la multiplicació. Freudenthal afirma que cinc vegades vuit pot ser modelitzat horitzontalment per l’esquema rectangular de cinc files de vuit (multiplicació amb rajoles). En matematització vertical, la multiplicació seria llegida com una seqüència: 8, 16, 24, 32, 40.

La imatge 1 correspon al procés de matematització. En aquesta, podem observar com la matematització horitzontal parteix d’un problema real i l’enfoca a un problema del món

matemàtic, mentre que la matematització vertical parteix directament del problema del món matemàtic.



1

2.1 Metodologies i estils d'ensenyament

Els coneixements que cada docent té sobre matemàtiques condiciona l'aula en la qual es dona el procés d'ensenyament-aprenentatge. Un/a docent pot creure que les matemàtiques tenen existència pròpia, encara que aquesta existència no sigui material. En aquest cas, l'ensenyament d'objectes com un triangle, la suma, les fraccions o la probabilitat es duria a terme a partir de la presentació d'aquests objectes a l'alumne. Dit d'una altra manera, consistiria a ensenyar als infants (o estudiants) les definicions i les propietats dels objectes a estudiar. Per a aquest/a docent, les aplicacions dels conceptes o la resolució de problemes serien aspectes secundaris a treballar. Per altra banda, altres docents poden tenir la concepció de les matemàtiques com un resultat de l'enginy i l'activitat humana.

¹ Procés de Matematització. Font, V. (2008). Enseñanza de la Matemática. Tendencias y perspectivas. *Actas III Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas*, 31.

Aquests/es docents incideixen sobretot en la resolució de problemes, ja que veuen les matemàtiques com una conseqüència a la curiositat de l'ésser humà (Godino, Batanero i Font, 2008). L'objectiu d'aquesta distinció és fer veure com una classe de matemàtiques pot ser molt diferent depenent de la perspectiva que tingui el/la docent.

Referent als principis i estàndards per a l'educació matemàtica del National Council of Teachers of Mathematics (2000) , és necessari incidir-hi abans de fer un recull de les principals metodologies emprades a l'aula de matemàtiques. El NCTM (2000) afirma que els principis descriuen les característiques principals d'un ensenyament de matemàtiques d'alta qualitat. Els estàndards, en canvi, descriuen els continguts i els processos matemàtics que els estudiants haurien d'assolir. Conjuntament, els principis i estàndards formen una visió que permet guiar als educadors cap a la millora de l'educació matemàtica a les aules, a les escoles i als sistemes educatius.

El NCTM (2000) defineix sis principis per a l'educació matemàtica:

1. Equitat: tots els estudiants han de tenir l'oportunitat d'estudiar i formar part de l'aprenentatge de les matemàtiques. Equitat no vol dir que tots els estudiants hagin de rebre les mateixes directrius, sinó que es realitzin les adaptacions raonables i apropiades segons sigui necessari, per aconseguir promoure l'accés i l'èxit de tots els estudiants.
2. Currículum: el currículum no és només una seqüència de continguts. Un currículum efectiu ha d'enfocar-se en les matemàtiques importants, que prepararan als infants a resoldre problemes en una gran varietat d'ambients escolars, de casa i de feina.
3. Ensenyament: per dur a terme un ensenyament eficaç de matemàtiques, els docents han de conèixer i comprendre les matemàtiques, com també saber ser flexibles depenent de les característiques de l'ensenyament. Això implica comprometre's a veure les matemàtiques com a éssers humans, és a dir, contextualitzar-les i aportar diferents estratègies d'avaluació. Així doncs, la millora de l'educació matemàtica requereix un ensenyament eficaç de les matemàtiques a totes les aules.
4. Aprenentatge: l'aprenentatge de les matemàtiques ha de basar-se en la comprensió. L'aprenentatge a través de la comprensió és essencial per a que els estudiants puguin resoldre els problemes que es podran trobar en un futur. Les

experiències que aporten els docents són un paper clau en aquest aspecte, ja que la comprensió pot ser donada a partir de les interaccions a l'aula, de manera que els estudiants aprenguin a avaluar la seva opinió, la dels altres i desenvolupar les habilitats necessàries del raonament matemàtic.

5. **Avaluació:** és necessari que l'avaluació vagi més enllà d'un simple examen final. Ha de ser una part de la instrucció, que informi i guiï als docents. L'avaluació no ha de ser només realitzada pels mestres, sinó que els infants han de realitzar la seva pròpia avaluació. D'aquesta manera, els servirà per guiar-los i millorar el seu aprenentatge.
6. **Tecnologia:** Les calculadores i els ordinadors proporcionen als infants imatges visuals de les idees matemàtiques, faciliten la organització i l'anàlisi de dades i, a més, calculen de manera precisa. Encara que la tecnologia no ha de ser un substitut de les comprensions, pot utilitzar-se per fomentar les comprensions dels infants, de manera que s'empri per enriquir l'aprenentatge de les matemàtiques.

Referent als estàndards per a l'educació matemàtica, com s'ha mencionat anteriorment, descriuen la comprensió, el coneixement i les habilitats matemàtiques que els estudiants han d'adquirir des de l'etapa infantil. D'aquesta manera, el NCTM (2000) organitza cinc estàndards de continguts, on cadascun d'ells abraça expectatives diferents organitzades segons el grau. El cinc gran blocs són: nombres i operacions, àlgebra, geometria, mesura i estadística i probabilitat. Dins cada bloc es troben les diferents fases d'aprenentatge segons el període d'aprenentatge dels infants, abraçant continguts des de l'etapa infantil fins al final de l'etapa de primària.

Un cop establerts els principis i estàndards per a l'educació matemàtica, és necessari realitzar una anàlisi de les diferents metodologies per a l'ensenyament de les matemàtiques.

2.1.1. Estructuralisme

Des del punt de vista estructuralista, les matemàtiques són concebudes com la ciència que estudia les estructures abstractes. En aquestes estructures, els objectes són purament definits entre ells. Aquests objectes matemàtics, però, no posseeixen propietats

intrínseques, sinó que són definides per les seves relacions externes amb el sistema (Nefdt, 2018).

“L’estructuralisme al·lega que les estructures són principis explicatius, invisibles i inconscients per a les persones i, per tant, no poden inferir-se des de la realitat sensible. És per això que les explicacions estructurals són dominades per models teòrics postulats” Broekman (citat a Ferro, 2012, p.4).

Ferro (2012) afirma que el mètode estructuralista es basa en quatre operacions bàsiques a seguir. Aquestes són:

- Captació i delimitació d’un sistema a observar.
- Concepció d’estructures que expliquen el fet observat en el sistema.
- Elecció de l’estructura que millor expliqui el sistema.
- Comparació de l’estructura amb altres estructures, intentant integrar-les dins una mateixa estructura.

En el seu article, Armendáriz, Azcárate i Deulofeu (1993) distingeixen dos recursos metodològics que permeten a l’alumne treballar mitjançant les estructures. Aquests dos recursos són la combinació d’activitat i descobriment i el desenvolupament del currículum en espiral, amb el qual els continguts es treballen gradualment any rere any i es van aprofundint.

Cal incidir també en el caràcter intern de la matemàtica estructuralista. García (2001) defineix la matemàtica estructuralista com una ciència lògica-deductiva, és a dir, incorpora elements del raonament lògic (mitjançant el mètode científic) i el raonament deductiu (arribar a una conclusió a partir d’unes premisses). A més a més, l’autor afirma que l’ensenyament estructuralista manca de components de matematització horitzontal, però treballa de manera efusiva el component vertical.

2.1.2. Mecanicisme

El mecanicisme és una metodologia que té com a objectiu proporcionar les tècniques bàsiques de l’educació matemàtica als alumnes. És un model d’ensenyament molt

autoritari, que es centra en la disciplina i en la inqüestionabilitat dels continguts que s'empren (Pochulu i Font, 2011).

Per a García (2001), l'estil mecanicista tracta les matemàtiques com un conjunt de regles, que són instruïdes als alumnes i aplicades posteriorment a problemes similars als exemples treballats. Els problemes que es treballen rarament són reals o propers als infants. En molt poques ocasions es tracten els conceptes i els procediments a partir d'aplicacions, si no que es dóna molta importància a la memorització i l'automatització d'algoritmes d'ús restringit. Referent als tipus de modelització vists anteriorment, aquest estil d'ensenyament és caracteritzat per la manca dels dos tipus de modelització o matematització.

Hans Freudenthal (1991) va criticar aquest estil d'ensenyament. En aquesta crítica va afirmar que la filosofia mecanicista convertia l'home en un ordinador que pot ser programat per poder dur a terme, en els nivells més baixos, aritmètica, àlgebra, operacions geomètriques i resolució de problemes a través de patrons coneguts i repetits. D'aquesta manera, les paraules de l'autor foren dures per a criticar l'estil mecanicista: "Hi ha moltes raons per demanar als defensors d'aquest estil d'ensenyament per què la gent ha de ser educada per resoldre tasques d'un cert nivell, si els ordinadors són més ràpids, més barats i més fiables que els éssers humans" (p.134).

2.1.3. Empirisme

Si ens centrem en l'origen dels conceptes matemàtics, Campos (2008) argumenta que "els empiristes sostenen que els conceptes matemàtics tenen origen empíric i que les veritats matemàtiques es deriven d'observacions del món físic" (p.24).

Referent a l'empirisme clàssic o lògic, Silva (citada a Bicudo, 2005) afirma que la matemàtica empirista concep la matemàtica com analítica, és a dir, les seves afirmacions corresponien a conseqüències lògiques de definicions, que constituïen estipulacions de significats per a termes matemàtics (p.6).

Una altra modalitat de la visió empirista és el quasi-empirisme. Ernest (citada a Bicudo, 2005) declara:

El quasi-empirisme és el que els matemàtics fan i han fet, amb totes les imperfeccions inevitables a qualsevol activitat o creació humana [...]. Es poden identificar cinc teories del quasi-empirisme: el coneixement matemàtic és fiable; la matemàtica és una ciència hipotètica-deductiva; la història és central al coneixement; primacia de les matemàtiques informals; creació. (p.7)

D'altra banda, cal remarcar que l'empirisme matemàtic pren com a punt de partida la realitat de l'alumne. Tot i això, l'ensenyament és utilitari, l'alumnat assoleix experiències i continguts útils, però aquest mètode manca d'aprofundiment i regularització de l'aprenentatge (García, 2002).

2.1.4. Realisme

Fundat per Hans Freudenthal, la matemàtica realista no pretén ser vista com una teoria general d'aprenentatge, sinó que és una teoria global basada en idees centrals com són la visió de la matemàtica com una activitat humana (matematització), l'acceptació del desenvolupament de la comprensió matemàtica a partir de diferents nivells o la necessitat de la fenomenologia didàctica com a metodologia d'investigació (Bressan, Zolkower i Gallego, 2004).

Abans de seguir amb el realisme matemàtic, és necessari aclarir el concepte de fenomenologia didàctica, ja que és un factor de gran importància en aquest mètode d'ensenyament. Puig (1997) defineix la fenomenologia d'un concepte com la descripció d'un concepte en relació als fenòmens amb els quals està organitzat.

Els principis de l'Educació Matemàtica Realista serien, segons Alsina (2009):

Principi d'activitat

Considerades com una activitat humana, les matemàtiques tenen la finalitat d'organitzar (matematitzar) el món que ens envolta, incloent-hi la matemàtica.

Amb altres paraules, es tracta de possibilitar l'accés a coneixements, destreses i disposicions a través de problemes matemàtics que provoquin als alumnes la necessitat d'emprar eines matemàtiques per organitzar tals problemes i resoldre'ls (Bressan, Zolkower i Gallego, 2004).

Principi de realitat

Els contextos reals són un aspecte fonamental a l'hora d'aprendre matemàtiques. Aquests contextos es refereixen a situacions problemàtiques de la vida quotidiana i situacions problemàtiques que són reals a la ment dels infants.

Els problemes s'han de presentar en contextos quotidians de la vida real dels alumnes, per així poder imaginar-los i utilitzar el sentit comú i emprar els procediments de càlcul, les estratègies de resolució i els models matemàtics per poder resoldre tals problemes. Cal remarcar que un context és realista o no depenent de l'experiència prèvia de l'alumnat i la seva capacitat per imaginar-lo o visualitzar-lo (Bressan, Zolkower i Gallego, 2004).

Principi de nivells

Els alumnes, segons l'Educació Matemàtica Realista (citada a Bressan, Zolkower i Gallego, 2004), passen per diferents nivells de comprensió:

- Situacional: el coneixement de la situació i les estratègies és emprat en el context de la situació atenent els coneixements informals, el sentit comú i l'experiència.
- Referencial: referint-se a la situació en particular, els models gràfics, els materials i les descripcions, els conceptes i els procediments, esquematitzen el problema.
- General: és desenvolupat a partir de l'exploració, la reflexió i la generalització de tot el que apareix en el nivell referencial, però posant èmfasi en les estratègies.
- Formal: el nivell formal consisteix a treballar amb els procediments estàndards i notacions convencionals.

Cal destacar que els nivells exposats són dinàmics, cada alumne pot treballar a diferents nivells de comprensió amb diferents continguts o parts d'un mateix contingut.

Principi de reinvençió guiada

Es tracta d'un procés d'aprenentatge que permet a l'alumnat reconstruir el coneixement matemàtic formal. Bressan, Zolkower i Gallego (2004) afirmen que "l'educació matemàtica ha de donar l'oportunitat guiada pel mestre de reinventar la matemàtica: no creen ni descobreixen models, sinó que es reinventen models, conceptes, operacions i estratègies matemàtiques amb un procés similar que empraven els matemàtics a l'hora d'inventar-los" (p. 80-81).

Principi d'interacció

L'ensenyament de les matemàtiques és considerat una activitat social. La interacció entre estudiants i estudiants-mestres pot provocar reflexions a partir de les aportacions dels altres i pot permetre arribar a nivells més alts de comprensió.

No s'ha de pensar en una classe homogènia, sinó en individus que segueixen camins propis, és a dir, mantenir la classe en grups cooperatius (Bressan, Zolkower i Gallego 2004).

Principi d'interconnexió

Els blocs de continguts matemàtics no han de ser treballats de manera individual, sinó que han d'anar interrelacionats. A més a més, el principi d'interconnexió es basa en la connexió de les matemàtiques amb altres àrees curriculars. D'aquesta manera, l'apropament de les matemàtiques als infants es produeix d'una manera més significativa.

3. A mode de conclusió

Per a concloure, cal remarcar que cap d'aquests models d'aprenentatge és universal ni aplicable a totes les situacions. A més a més, no sempre es reuneixen totes les condicions que optimitzen el procés d'ensenyament-aprenentatge. S'ha d'emprar el model d'aprenentatge més adequat segons l'experimentació i, en cada moment s'ha de fer servir aquell que es trobi més adequat. Cal remarcar, però, que sempre s'ha de fer servir analitzant la validesa de l'avaluació aplicada al model.

Tot i això, és necessari dur a terme una anàlisi comparativa entre les metodologies generals d'ensenyament i les metodologies anteriorment exposades. Referent a l'estructuralisme, el mètode general d'ensenyament amb el qual és relacionat és la classe magistral. La causa d'aquesta relació es basa en l'exposició de continguts per part del mestre. Com s'ha mencionat anteriorment, en la metodologia estructuralista es realitza una exposició de continguts molt tancada, planificada i guiada on el mestre és el protagonista, no dona peu a què els alumnes aportin les seves idees o, simplement, a què els mateixos alumnes facin aportacions. Encara que l'estil mecanicista es lligui també amb la classe magistral, la metodologia no és la mateixa. Mitjançant el mecanicisme, contràriament de l'estructuralisme, l'assoliment de continguts es duu a terme a través de la memorització i l'aplicació de regles sense posar èmfasi en l'estructura interna de les

matemàtiques.

Referent a l'empirisme i el realisme, ambdues metodologies es podrien lligar amb la metodologia per projectes (Project-Based Learning) i l'aprenentatge cooperatiu, ja que són metodologies que permeten que els alumnes interactuïn a l'aula. Pel que fa a les distincions entre els dos estils d'ensenyament, dir que el realisme es basa en la reinvençió de les matemàtiques i l'aprofundiment de continguts, ítems mancats en la metodologia empirista. Tot i que a l'empirisme s'usen exemples reals per introduir els conceptes, els alumnes no profunditzen en el coneixement, els continguts que aprenen són útils, però no es du a terme una significació d'allò que s'ha après. La metodologia realista, de manera contraposada a l'empirista, profunditza els continguts treballats, de manera que els alumnes creen el seu propi coneixement i aprenen a sistematitzar allò que s'ha après.

5. PROPOSTA D'INTERVENCIÓ

D'acord amb els annexes del Decret 32/2014, de 18 de juliol, pel qual s'estableix el currículum de l'educació primària a les Illes Balears, es durà a terme una proposta d'intervenció.

Per poder fer una comparativa entre la metodologia que vaig viure durant els meus estudis i, per tant, ser més acurat en les explicacions, la intervenció serà realitzada amb dues metodologies principals: el mecanicisme i el realisme. D'acord amb aquestes dues metodologies, el que es farà serà dur a terme una aplicació didàctica d'un mateix contingut amb cada metodologia, per així veure les diferències des d'un punt de vista pràctic. El contingut, perímetre i àrea, ha estat extret del bloc 4 (geometria) del currículum d'educació primària de matemàtiques de les Illes Balears. Tot i que aquesta proposta no s'ha pogut dur a terme, es presenten les directrius per poder realitzar-la a una aula de quart (segon cicle d'educació primària).

Abans de començar amb les diferents propostes d'intervenció, s'ha de tenir clar el contingut que es treballarà. Cal remarcar que els alumnes ja tenen assolits els continguts relacionats amb les figures planes i la seva tipologia, com també els continguts relacionats amb longituds. D'aquesta manera, es podria definir el perímetre d'una figura com la suma de les longituds dels seus costats, és a dir, el contorn d'una figura. Pel que fa a l'àrea d'una figura, correspon a la superfície que ocupa. En altres paraules, l'àrea d'una figura es podria definir com la regió del pla que queda delimitada per una corba tancada.

1. Proposta d'intervenció mecanicista.

Com s'ha mencionat anteriorment, l'enfocament mecanicista no duu a terme una contextualització de les activitats ni dels conceptes que s'introduiran, sinó que mitjançant aquest enfocament, se segueixen les fórmules i exemples pertinents per assolir els continguts. Les propostes d'intervenció mecanicista, doncs, seran dividides en dos blocs: l'exposició de continguts per part del mestre i la pràctica del contingut per part de l'alumnat.

Referent al concepte d'àrea, cal remarcar que només es treballarà amb paral·lelograms i triangles, ja que les seves fórmules són les més aplicables al curs en el qual es desenvolupa la proposta d'intervenció.

1.1. Concepte de perímetre.

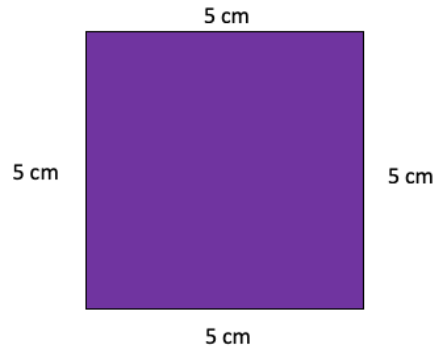
Primera part: Exposició del contingut per part del mestre.

El mestre, tenint la sessió ben estructurada, exposarà als infants la definició de què és el perímetre. Un cop explicat el concepte, els infants copiaran la definició de perímetre al seu quadern.

Perquè els infants vegin exemplificat el concepte de perímetre, el mestre dibuixarà un triangle, un quadrat i un rectangle (les dimensions són indiferents). Amb les figures planes dibuixades, el mestre explicarà com es realitza el perímetre:

- *Per fer el perímetre d'aquestes tres figures, el que hem de fer és sumar la mida de cada costat, per exemple, els costats del quadrat, que són tots iguals, amiden 8 centímetres. Amb aquesta informació, sumarem $8+8+8+8$. El resultat del perímetre és de 32 centímetres.*

El mestre, per seguir la seva explicació, tindrà reflectida una imatge amb el perímetre del quadrat i la seva fórmula d'extracció:



$$\text{Perímetre} = 5 + 5 + 5 + 5 = 20 \text{ cm}$$

Segona part: Pràctica del contingut per part dels alumnes

Un cop explicat el concepte de perímetre i exposats els exemples, els infants hauran de realitzar els següents exercicis. Aquests exercicis, com s'ha mencionat anteriorment (veure punt 4) són exercicis molt repetitius i rutinaris en els quals els infants no desenvolupen cap altre coneixement que el que es pretén estudiar, en aquest cas el perímetre. A més a més, els exercicis i activitats basats en la matemàtica mecanicista manquen de contextualització, fet pel qual no permeten lligar els coneixements amb altres àrees, com tampoc permeten exportar l'aprenentatge en la vida quotidiana.

1. Mesura i calcula el perímetre de les següents figures:

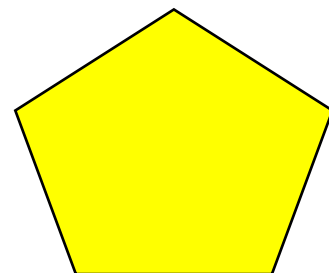
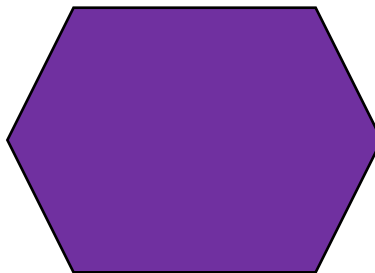
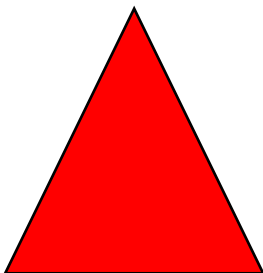
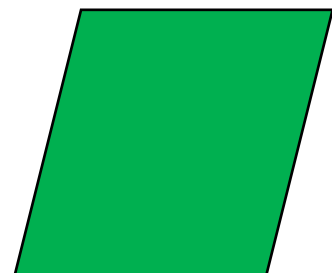
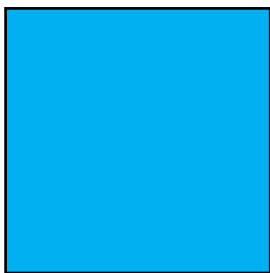


Figura	Perímetre (cm)
Blava	
Taronja	
Verda	
Vermella	
Lila	
Groga	

2. A casa tinc una taula quadrada. Si cada costat de la taula amida un metre i mig, quin és el perímetre total de la taula?
3. Dibuixa i digues quin és el perímetre d'un rectangle els seus costats, que amiden 4,5 cm i 7,5 cm respectivament.
4. Quant ens costaria si volguéssim posar reixeta a una piscina de 7 m de llargària i 5 m d'amplada, si un metre de reixeta costa 3,50€? Tingues en compte que la separació entre la reixeta i la piscina ha de ser d'un metre i mig a cada costat de la piscina.
5. En Miquel és vidrier. Ha tallat una peça de vidre de 16 centímetres de perímetre. Quina d'aquestes peces podria ser? Resol el problema amb ajuda del regle.

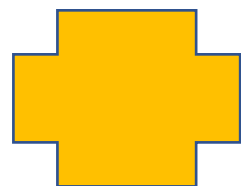
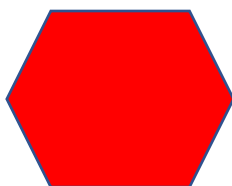
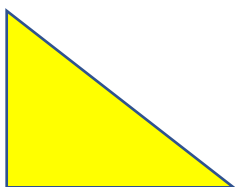
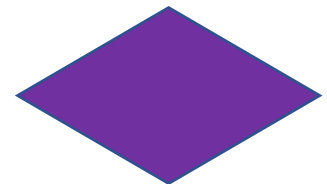


Figura	Perímetre (cm)
Blava	
Verda	
Lila	
Groga	
Vermella	
Taronja	

1.2. Concepte d'àrea.

Primera part: Exposició del contingut per part del mestre.

El mestre, tenint la sessió ben estructurada, exposarà als infants la definició de què és l'àrea d'una figura. Un cop explicat el concepte, els infants copiaran la definició de perímetre al seu quadern.

Perquè els infants vegin exemplificat el concepte d'àrea, el mestre dibuixarà un triangle equilàter, un quadrat i un rectangle (les dimensions són indiferents). Amb les figures planes dibuixades, el mestre explicarà com s'extreu l'àrea d'una figura:

- *L'àrea d'una figura és el que està dins la figura, és a dir, la part que podem pintar d'una figura. Per saber l'àrea d'aquestes dues figures hem de seguir un seguit de fórmules. El que haureu de fer ara és dibuixar les figures de la pissarra al vostre quadern i apuntar les fórmules que vos diré. És molt important que recordeu que la magnitud amb la qual mesurem una superfície és el quadrat d'una magnitud, com per exemple el centímetre quadrat.*

D'aquesta manera, doncs, el mestre apuntarà les fórmules per extreure l'àrea del quadrat i del rectangle. Els infants hauran d'anotar-les al seu quadern, ja que després les hauran d'emprar per fer les activitats encomanades. Anotades ja les fórmules, el mestre amidarà els constats de cada figura i, seguint les fórmules, extraurà l'àrea de la figura alhora que explica com ho fa. Pel que fa a l'àrea del triangle equilàter, el mestre explicarà també com extreure l'altura del triangle.

Segona part: Pràctica del contingut per part dels alumnes

Amb el contingut ja explicat i els exemples observats, l'alumnat haurà de resoldre els exercicis i problemes següents:

1. Mesura i calcula l'àrea de les següents figures, escriu els resultats a la graella.

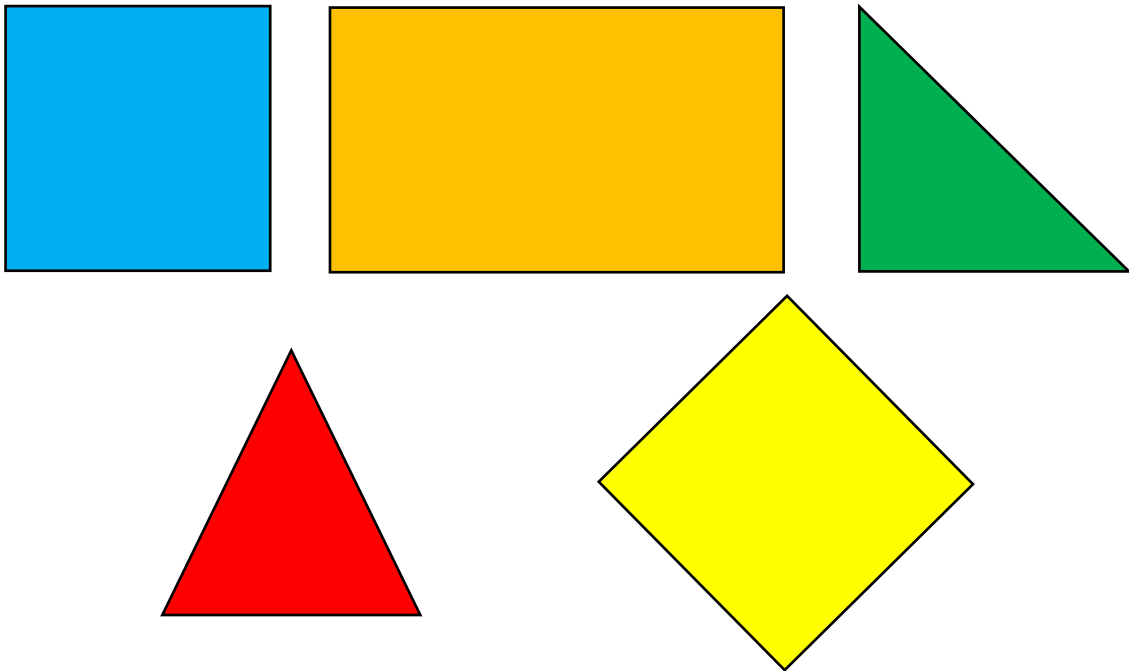


Figura	Àrea (cm ²)
Blava	
Taronja	
Verda	
Vermella	
Groga	

2. A casa tinc una taula quadrada. Quants metres quadrats de tela necessitaré per posar unes estovalles sense que sobri tela si un costat de la taula amida dos metres?
3. Dibuixa i extreu l'àrea d'un triangle isòsceles. Les seves mides són 3 i 3,5 centímetres. Tingues en compte les característiques del triangle isòsceles.

1.2. Avaluació de la proposta.

Referent a l'avaluació dels continguts de la proposta d'intervenció mecanicista, aquesta es durà a terme conjuntament. L'alumnat serà avaluat a través d'un examen², el qual podran fer amb un temps màxim d'una hora. L'examen constarà de cinc preguntes, dues de perímetre, dues d'àrea i un problema on s'abraçaran els dos continguts. La puntuació de cada pregunta és de dos punts, amb nota màxima de deu.

² Anar als annexes per veure l'examen.

2. Proposta d'intervenció realista.

En aquest punt, seguint les bases exposades anteriorment (veure apartat 4), es durà a terme la proposta d'intervenció realista. Aquesta proposta serà dividida, els continguts es treballaran de manera independent. Això no obstant, es podran trobar diferents activitats de consolidació on els continguts seran treballats de manera conjunta.

2.1. Concepte de perímetre.

Activitat 1: Adquisició de la noció de perímetre.

Per introduir el concepte de perímetre els infants, el mestre dibuixarà una figura quadrangular a la pissarra. Un cop dibuixada la figura, els infants hauran d'identificar la figura que és, ja que d'aquesta manera es repassaran també les figures planes, treballades anteriorment.

Per introduir el concepte de perímetre, es donarà un tros de corda³ a cada infant. Amb aquest tros de corda, els infants hauran de representar una figura, la que ells vulguin. Un cop representades les figures, sortiran cinc voluntaris a la pissarra, on dibuixaran la seva figura. Amb tots els dibuixos ja plasmats a la pissarra, el mestre demanarà: *Quina és la figura amb un perímetre major?* D'aquesta manera, s'entrarà en un debat dins l'aula, ja que tot l'alumnat podrà participar quan vulgui. Aquest petit debat encaminarà la sessió a descobrir que tots els fils de corda són iguals i, per tant, totes les figures que ha fet l'alumnat tenen el mateix perímetre.

Amb el concepte de perímetre ja introduït, el mestre dibuixarà una figura, però sense tancar, per exemple, un quadrat al qual li falti un dels costats. El mestre, per tal de fer pensar als infants, escriurà les mesures de cada costat, i demanarà als infants quin seria el perímetre de la nova figura. Els infants, en equips cooperatius, hauran de consensuar una resposta. L'objectiu d'aquesta activitat és observar si els infants són capaços de veure que no es pot fer el perímetre de la figura, ja que no és tancada i, a part, si poden arribar a la

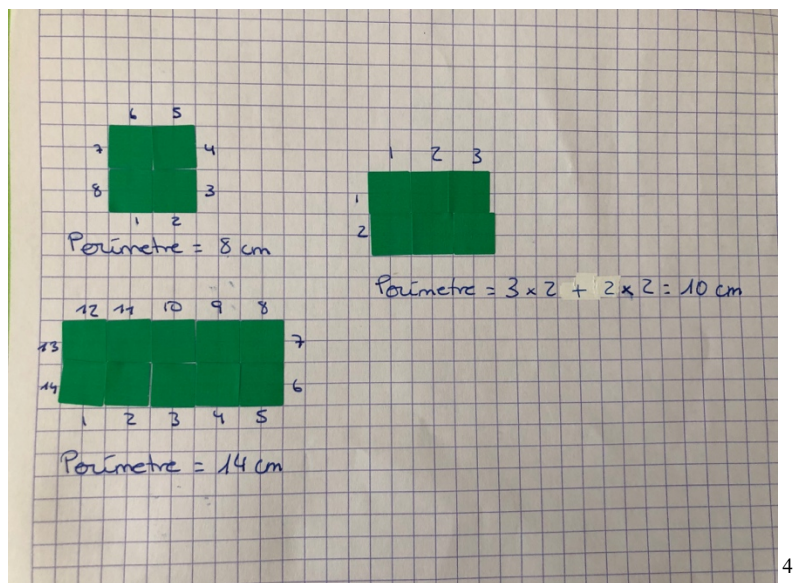
³ Cal remarcar que tots els trossos de corda tindran la mateixa longitud.

conclusió de què un quadrat té tots els costats iguals i, d'aquesta manera, extreure un suposat perímetre. Això no obstant, l'objectiu principal de l'activitat és arribar a la conclusió de què un perímetre només es pot extreure en una figura o un espai delimitat.

Activitat 2: Càlcul de perímetres en figures regulars.

Per observar si l'alumnat ha entès el concepte de perímetre, es treballarà el contingut amb figures regulars. D'aquesta manera, els infants hauran d'extreure el perímetre d'un seguit de figures amb costats iguals, o costats iguals dos a dos.

Per facilitar la tasca als infants, les figures estaran fetes a partir de gomets quadrats d'un centímetre quadrat. Així doncs, l'alumnat només haurà de comptar quants quadrats té el contorn de la figura.



Amb aquesta activitat es pretén també arribar a la conclusió de la formulació. Si les figures són regulars, els infants podran arribar a la conclusió que no fa falta comptar tots els gomets del voltant de la figura, sinó que podran extreure el perímetre de maneres diferents, com per exemple comptar un costat i multiplicar-lo pel nombre de costats total.

Activitat 3: Càlcul de perímetres en figures irregulars.

⁴ Possible exemple de figures amb possible resposta dels infants.

Amb l'objectiu de conscienciar als infants de què no totes les figures són regulars i, per tant, encara que emprin la mateixa manera que amb figures regulars, no sempre podran emprar les mateixes estratègies emprades a les figures regulars per extreure el perímetre d'una figura irregular.

Aquesta activitat es durà a terme amb el geoplà. Els infants, lliurement, crearan la figura que vulguin amb les gomes, ja que el que ens interessa és que sàpiguen extreure'n el perímetre. Un cop extret el perímetre, se'ls donarà la condició de crear una figura, però irregular.

Una vegada creades totes les figures, sortiran cinc voluntaris a dibuixar-la a la pissarra. Així doncs, la següent part de l'activitat consistirà a extreure el perímetre de cadascuna de les figures.

Amb tots els perímetres extrets, els infants compartiran les seves experiències, ja que no tots els infants ho poden haver fet de la mateixa manera. Aquesta és la riquesa de l'activitat, com més maneres d'extreure el perímetre sorgeixin, més enriquidor per als infants serà.

Aquesta activitat està pensada per ser realitzada individualment, ja que el que es pretén és desenvolupar les estratègies personals dels infants per calcular perímetres de formes irregulars.

Activitat 4: Càlcul del perímetre de la pista del pati.

Per aplicar el contingut a la vida real dels infants, es llegirà als infants la següent circular:

Estimats alumnes de cinquè de primària. Se'ns ha comunicat que sol haver-hi problemes relacionats amb les pilotes de futbol, molts companys vostres s'han queixat de què les pilotes rompen la dinàmica del pati. D'aquesta manera, volem proposar-vos un repte. Necessitem delimitar una zona de pistes al pati. En tenir-ho, podeu entregar la solució del repte a l'equip directiu. Recordeu tenir clares les dimensions per si hem de comprar material!

Atentament,

La direcció del centre.

A partir de la circular, es proposarà als infants, en grups de quatre, que dibuixin a un full un possible tancament per a les pistes de futbol. Es donarà total llibertat per a fer aquesta activitat, ja que molts alumnes poden tenir en compte molts factors per a fer el tancament (com pot ser deixar espai per a fer unes grades) que d'altres que potser duran a terme el tancament a la línia de les pistes. Durant aquesta activitat, s'ha d'insistir als infants que marquin les dimensions del seu tancament, ja que hauran de fer una estimació dels metres de reixeta que es necessitarien per fer el tancament.

Una vegada fet el seu esbós, els infants sortiran al pati, on mesuraran el perímetre de la pista de futbol, seguint el seu esbós. Un cop mesurat el perímetre, els infants compararan la seva estimació amb el perímetre real de la pista.

Després, a l'aula, cadascun dels grups exposarà el seu tancament, explicant les dificultats que han tingut, com també què és el que els hi ha estat més fàcil.

2.2. Concepte d'àrea.

Activitat 1: Adquisició de la noció d'àrea.

La primera activitat té l'objectiu principal d'adquirir la noció d'àrea. Per aquesta activitat l'alumnat estarà dividit en grups de quatre infants. Cada grup tindrà una pissarra petita, on haurà de dibuixar les figures que el mestre digui. La primera figura a dibuixar serà una figura quadrangular i, una vegada que els infants ja l'han dibuixada, cada grup haurà de dibuixar la seva figura a la pissarra de l'aula.

Amb totes les figures dibuixades a la pissarra de l'aula, el mestre dirà als infants que pintin l'àrea de la figura. Tot i que els infants no saben què és l'àrea d'una figura, tal vegada l'instint els porta a pintar la superfície de forma correcta. Amb aquesta part de l'activitat, els infants seran capaços de debatre què és l'àrea d'una figura, fet que els serà molt enriquidor, perquè els infants normalment no solen tenir discussions on hagin d'argumentar els seus punts de vista.

Una vegada tots els grups han pintat el seu concepte d'àrea a la figura, ho hauran de mostrar a la resta de companys. En aquesta part de l'activitat és totalment imprescindible que els infants hagin acabat la tasca abans de veure la dels companys, ja que si no pot haver-hi interferències en les respostes. El mestre, que haurà dibuixat prèviament la seva figura, pintarà l'àrea de la seva figura. Amb la superfície de la seva figura ja pintada, explicarà als infants el concepte d'àrea d'una manera clara i fàcil per a ells: és la part de dins d'una figura. Tot seguit, els infants tornaran a pintar l'àrea de la seva figura i, en cas de tenir-la ben pintada anteriorment, passaran a la següent activitat.

La següent activitat consistirà a pintar l'àrea d'una figura sense delimitar, per exemple, un quadrat al qual li falta un costat. Així doncs, els infants hauran de debatre quina és la superfície de la figura, provocant així debats en els petits grups. La intenció d'aquesta part de l'activitat és arribar a la conclusió que si una figura no està tancada, no pot tenir superfície.

Activitat 2: Comparació de figures.

Un cop assolida la noció d'àrea, la següent activitat estarà enfocada a conscienciar els infants que figures diferents poden tenir la mateixa àrea.

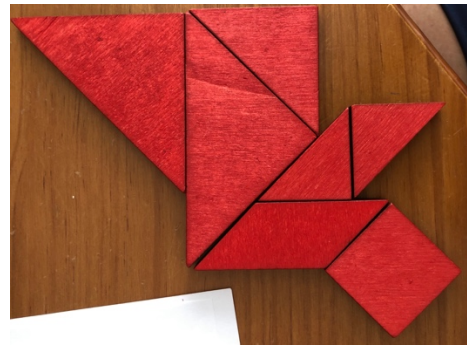
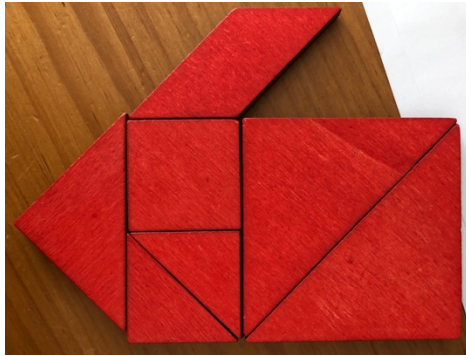
Per dur a terme la conscienciació, primer es treballaran un seguit de figures, fent comparacions directes a partir de l'observació de les seves superfícies. D'aquesta manera, el mestre presentarà als infants diferents figures, normalment quadrangulars, fetes amb cartolina. Les figures⁵ seran penjades a la pissarra una al costat de l'altra.

Un cop finalitzada l'activitat, el mestre exposarà als infants exemples més abstractes, com pot ser la comparació entre la pissarra i la taula: *Que és major, la superfície de la pissarra o la de la taula?*

⁵ Cal remarcar que la diferència entre les figures ha de ser evident a cop d'ull.

Una vegada finalitzada la comparació de figures, es passarà a l'activitat més específica: poden tenir la mateixa àrea figures distintes? Per treballar aquesta passa de l'aprenentatge se seguiran dues passes:

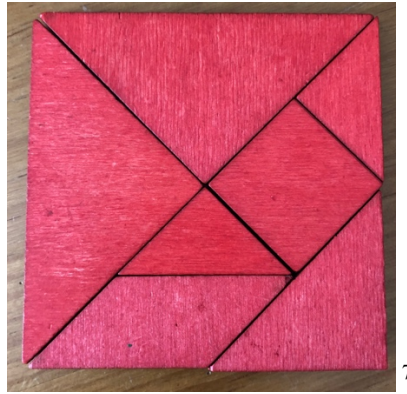
1. La primera passa consistirà a treballar amb el tangram, un joc xinès de set peces que forma un quadrat. El tangram conté cinc triangles isòscels (dos de mida mitjana, un de mida gran i dos de mida petita), un quadrat i un paral·lelogram. Així doncs, es donarà un tangram a cada grup, però desfet. Els infants només tindran les peces corresponents. Amb les peces, cada grup haurà de crear una figura totalment lliure, amb l'única condició que s'hauran d'emprar totes les peces. Un cop finalitzades les figures, els infants s'aixecaran, i hauran d'observar les figures dels altres companys, comparant-les.



6

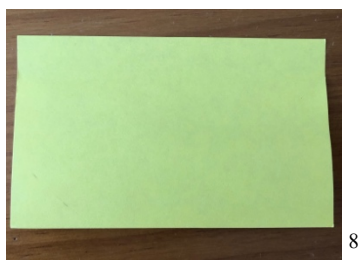
Una vegada comparades les figures, els infants hauran de deliberar quina és la figura amb més superfície. Donada la resposta, tots els grups hauran de crear un quadrat amb totes les peces del tangram. Un cop tots els grups tinguin el quadrat fet, es tornarà a repetir la ronda, de manera que els infants podran observar que tots els quadrats són iguals. Llavors, el mestre explicarà què és un tangram, i exposarà que totes les figures tenien la mateixa àrea, comparant l'activitat amb l'activitat prèvia, la dels folis de paper.

⁶ Possibles figures fetes pels infants.



2. La segona passa es realitzarà amb un foli. Els infants hauran de tallar, en grups de quatre, els folis emprant el regle. Un cop acabat de dividir el foli, es donarà a cada grup cinta adhesiva, perquè hauran de crear una figura lliure emprant tots els trossos de foli que tinguin. En haver acabat totes les figures, aquestes es penjaran a la pissarra, de manera que tot l'alumnat pugui observar-les. Tot seguit, el mestre demanarà als infants quina figura és la que té major superfície. L'alumnat haurà de respondre la pregunta emprant la tècnica cooperativa 1 – 2 – 4, primer ho resoldran ells tots sols, després amb la parella compararan el resultat i, en tenir-ho, compararan el resultat amb el grup.

Amb aquesta part de l'activitat es pretén arribar a la conclusió que totes les figures tenen la mateixa àrea, ja que prèviament tots els infants hauran tallat el foli en parts iguals.



⁷ Quadrat a realitzar amb les peces del tangram.

⁸ Full donat als infants.

⁹ Possible resposta dels infants.

Activitat 3: Fixació d'un patró de superfície.

Per poder mesurar les superfícies de les figures sense emprar cap tipus de fórmula, es presentarà als infants la necessitat de saber la superfície de dues figures. Per fer-ho, no es compararan les figures a cop d'ull, sinó que haurà de ser acurat.

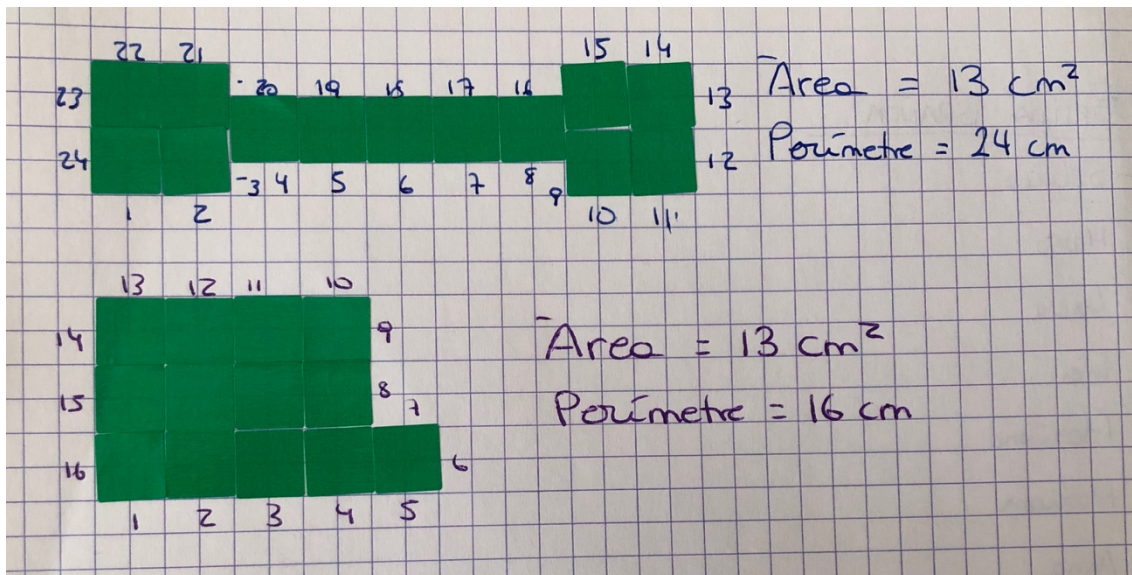
Per realitzar la comparació, es presentarà als infants la importància d'emprar patrons de mesura de superfícies, que en aquest cas seran gomets quadrats d'un centímetre quadrat. En grups, donades les figures a comparar, els infants hauran d'omplir les dues figures amb els gomets. Per començar, totes les figures seran regulars, ja que es pretén arribar a la conclusió que es pot fer d'una manera més ràpida: si els costats són iguals, es pot multiplicar el nombre de gomets d'un costat per el nombre de gomets d'un altre costat (en un paral·lelogram, equivalent a base per altura).

Una vegada els infants ja tenen les estratègies a mà, es passarà a realitzar la mateixa activitat, però amb figures irregulars. En grups de quatre, es donaran un seguit de figures als infants, els quals hauran d'arribar a la conclusió que és necessari tallar els gomets en parts iguals per poder obtenir la superfície completa de la figura.

Activitat 4: Mesura amb patrons de superfície.

En aquesta activitat, que es realitzarà de forma individual, els infants hauran de construir, amb els gomets quadrats, figures lliures. L'única condició a seguir és que l'àrea serà dictada pel mestre. Un cop feta la figura, cinc infants sortiran a la pissarra a dibuixar la figura, representant també el nombre de gomets emprats. Un cop feta la superfície, s'extraurà també el perímetre de cada figura, ja que d'aquesta manera es repassarà també el perímetre.

Exemple: Fes una figura amb els gomets. L'àrea ha de ser de 13 cm^2 . Després, extreu el perímetre de la figura.



10

Amb aquesta activitat, els infants podran tornar a observar que diferents figures poden tenir la mateixa superfície. L'organització de l'activitat és individual, perquè es pretén observar els problemes que puguin sorgir als infants a l'hora de realitzar les figures. Això no obstant, encara que l'activitat es realitzi individualment, els infants podran rebre ajuda dels seus companys.

2.3. Avaluació de la proposta.

Pel que fa a l'avaluació d'aquesta proposta, serà una avaluació emfatitzada en les reflexions i opinions dels alumnes. Es tindrà en compte tot el procés d'aprenentatge de l'alumnat, com també que l'alumne prengui consciència dels seus errors, afavorint l'aprenentatge significatiu.

A més a més, d'acord amb els estàndards d'aprenentatge avaluables extrets dels annexes del Decret 32/2014, de 18 de juliol, pel qual s'estableix el currículum de l'educació primària a les Illes Balears, es tindrà en compte si l'alumne:

- Calcula l'àrea i el perímetre d'un rectangle, quadrat, triangle.
- Aplica els conceptes de perímetre i superfície de figures per fer càlculs sobre plànols i espais reals i per interpretar situacions de la vida diària.

¹⁰ Possibles respostes dels infants.

Per poder abraçar tots els ítems a avaluar, l'alumne haurà de realitzar un diari de treball, en el qual s'exposarà la realització de totes les activitats realitzades, i també una autoavaluació personal i del treball grupal. Aquest diari de treball tindrà tres parts diferenciades: el resum d'activitats, l'autoavaluació pròpia i l'autoavaluació del treball realitzat en grups cooperatius. A més, el mestre seguirà una rúbrica¹¹ per avaluar el procés d'aprenentatge de l'alumnat.

¹¹ Anar als annexes per veure la rúbrica d'avaluació.

6. CONCLUSIONS

La proposta d'intervenció ens permet veure clarament les principals diferències entre la metodologia mecanicista i la metodologia realista. Com s'ha mencionat anteriorment, la proposta d'intervenció s'ha dut a terme amb aquestes dues metodologies perquè són les dues que he viscut. La metodologia mecanicista la vaig viure quan vaig cursar l'educació primària, doncs, m'ha servit com a guia per a realitzar el treball. La metodologia realista s'ha pogut observar detalladament durant les pràctiques externes del grau, ja que en molts centres (com el CEIP Blanquerna), se segueix, sempre que els factors de l'aula ho permetien, els principis de l'Educació Matemàtica Realista.

Referent a les principals diferenciacions entre les dues propostes, es pot observar com la teoria i la pràctica s'han vist lligades en aquesta proposta. Durant el transcurs de la proposta s'ha pogut observar com la metodologia realista permet als infants dur el seu aprenentatge cap a fora de l'aula, exposant exemples quotidians per a l'alumnat. A més a més, si s'analitzen les competències bàsiques que podrien assolir els infants, es pot observar clarament com en la metodologia realista desenvolupen més competències que amb la metodologia mecanicista, com per exemple la competència d'aprendre a aprendre. Una sessió basada en la metodologia realista permet als infants desenvolupar aquesta competència, ja que a través de les activitats organitzades en grup o els debats, els infants poden enriquir-se els uns als altres i adquirir nous aprenentatges no només de matemàtiques, sinó per a la vida quotidiana.

D'aquesta manera, doncs, es podria arribar a la conclusió de què no hi ha una metodologia més vàlida que una altra, sinó que depèn molt del docent que guia l'aprenentatge. Segons l'experiència del docent i del que es vol treballar, es triarà una metodologia o una altra per a desenvolupar els continguts i afavorir el procés d'ensenyament-aprenentatge.

7. REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

- Alsina, À. (2009). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado.
- Armendáriz, M. V. G., Azcárate, C., & Deulofeu, J. (1993). Didáctica de las Matemáticas y Psicología. *Infancia y aprendizaje*, 16(62-63), 77-99.
- Bicudo, M. A. V. (2005). *Educação matemática*. Moraes.
- Bressan, A., Zolkower, B., & Gallego, M. F. (2004). Los principios de la educación matemática realista. *Reflexiones teóricas para la educación matemática*.
- Campos, E. D. F. (2008). Creencias y matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*.
- De Miguel Díaz, M. (Dir); Alfaro Rocher, I. J.; Apodaca Urquijo, P.; Arias Blanco, J.M.; García Jiménez, E.; Lobato Fraile, C. & Pérez Boullosa, A. (2006). *Modalidades de enseñanza centradas en el desarrollo de competencias: orientaciones para promover el cambio metodológico en el espacio europeo de educación superior*. Madrid: Universidad de Oviedo.
- Ferro, V. (2012). Los conceptos de "estructura" y "modelo" como ejemplo paradigmático transdisciplinar en las Ciencias Humanas y Sociales. Recuperat d'<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00760379>
- Forteza, M. A. (2009). Metodologías didácticas para la E/A de competencias. Recuperat d'<http://cefire.edu.gva.es/mod/folder/view.php?id=45706>.
- Font, V. (2008). Enseñanza de la Matemática. Tendencias y perspectivas. *Actas III Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas*, 21-64.

- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures* (Vol. 9). Springer Science & Business Media.
- García, J. A. (2001). La Didáctica de las Matemáticas: una visión general. *Gobierno de Canarias. España. Consulta*, 7.
- Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2004). Didáctica de las matemáticas para maestros. Granada: Gami. Recuperat d'https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf
- National Council of Teachers of Mathematics (Ed.). (2000). *Principles and standards for school mathematics* (Vol. 1). National Council of Teachers of.
- Nefdt, R. M. (2018). Inferentialism and Structuralism: A Tale of Two Theories.
- Pochulu, M., & Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 14(3), 361-394.
- Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, 61-94.
- Shapiro, S. (Ed.). (2005). *The Oxford handbook of philosophy of mathematics and logic*. Oxford University Press.
- Vidal, R. (2012). La didáctica de las matemáticas y la teoría de situaciones.
- Zabalza, M. Á. (2011). Metodología docente. Teaching Methodology. *Revista de Docencia universitaria*, 9(3), 75-98.

8. ANNEXOS

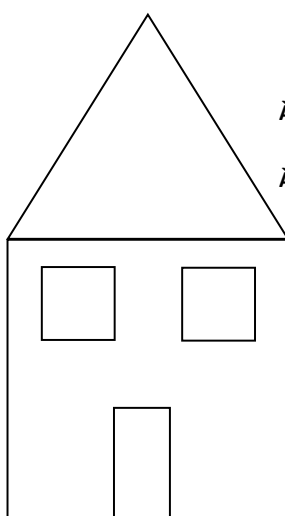
Proposta d'intervenció mecanicista: avaluació dels infants.

Assoliment de continguts: examen.

Nom i llinatges: _____ Data: _____

PROVA DE MATEMÀTIQUES: PERÍMETRE I ÀREA

1. Calcula l'àrea total d'aquesta casa. Calcula també la superfície de la porta i les finestres. Empra el regle per a mesurar cada costat.

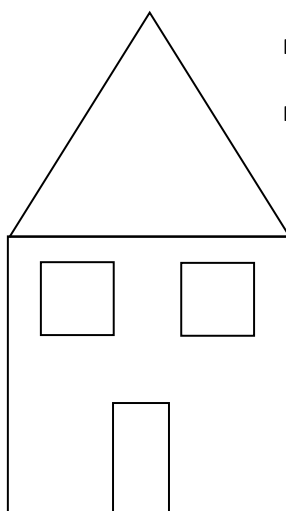


Àrea de la casa: _____

Àrea de les dues finestres i la porta : _____

- Pinta de color vermell la figura que tingui més superfície.
- Pinta de color verd la figura que tingui manco superfície.

2. Calcula el perímetre de la següent figura amb ajuda del regle. Calcula també el perímetre de les dues finestres i la porta.



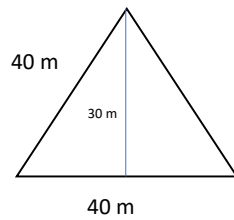
Perímetre de la casa: _____

Perímetre de les dues finestres i la porta : _____

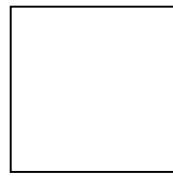
- Pinta de color vermell la figura que abrasi més perímetre.
- Pinta de color verd la figura que abrasi manco perímetre.

3. Dibuixa dues figures, una regular i una irregular. El perímetre d'ambdues figures ha de ser de 26 centímetres.

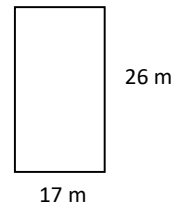
4. Extreu l'àrea de les figures següents:



Àrea = _____



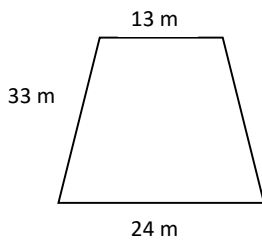
Àrea = _____



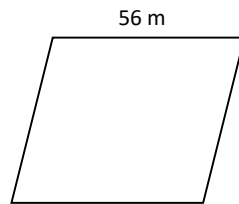
Àrea = _____

Espai per fer operacions:

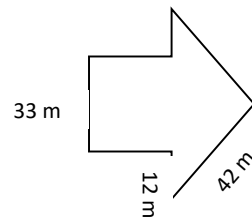
5. Extreu el perímetre de les figures següents:



Perímetre = _____



Perímetre = _____



Perímetre = _____

Proposta d'intervenció realista: rúbriques d'avaluació.

Rúbrica d'autoavaluació.

En aquesta rúbrica, els infants hauran d'escriure la nota que creuen que els hi correspon. A part, també hauran d'escriure una petita justificació de la seva nota.

RÚBRICA D'AUTOAVALUACIÓ		
Nom:		
Membres del teu grup de feina:		
ÍTEM	NOTA QUE MEREIXO	JUSTIFICACIÓ DE LA MEVA NOTA
Esforç cap a la tasca.		
Participació a l'aula.		
Implicació en la feina en grup.		

Rúbrica d'avaluació per al mestre.

Indicadors	0	1	2	3	Nota
Comprensió de les activitats	L'alumne no ha entès els problemes a resoldre ni han vist la relació entre matemàtiques i la vida quotidiana.	L'alumne ha entès els problemes exposats, però no ha vist cap relació entre les matemàtiques i la vida quotidiana.	L'alumne ha entès els problemes plantejats i la relació entre les matemàtiques i la vida quotidiana.	L'alumne ha entès el problema plantejat i ha sabut aportar solucions. Ha vist la relació entre les matemàtiques i la vida quotidiana.	
Estratègies emprades	L'alumne no ha emprat una estratègia efectiva per a resoldre el problema.	L'alumne ha emprat una estratègia efectiva, però no ha sabut justificar per què ha fet servir la estratègia.	L'alumne ha emprat una estratègia efectiva per a resoldre el problema, i ha sabut justificar per què l'ha emprada.	L'alumne ha emprat una estratègia efectiva i totalment innovadora per a realitzar el problema i ha justificat el per què.	
Diari de sessions	Manquen activitats i les autoavaluacions.	Tot i que les activitats estan introduïdes, les autoavaluacions no han estat exposades.	No manquen ni les activitats ni les autoavaluacions. La presentació es podria millorar.	El diari de sessions està complet. S'han seguit bones pautes de presentació.	
Participació de l'alumne	L'alumne no ha mostrat interès per la unitat. No s'ha esforçat en participar.	L'alumne ha mostrat molt interès però no s'ha esforçat en participar.	Tot i participar poc, ha mostrat molt d'interès i esforç per a la feina.	La participació de l'alumne ha estat un èxit. Se l'ha vist motivat i amb ganes d'aprendre. S'ha esforçat plenament per resoldre els problemes exposats.	