



**Universitat de les
Illes Balears**

Facultat d'Educació

Memòria del Treball de Fi de Grau

El pas del collaret de boles a la recta numèrica

Marina Pascual Lorca

Grau d'Educació Primària

Any acadèmic 2019-20

DNI de l'alumne: 43476801Q

Treball tutelat per Ana Belén Petro
Departament de Matemàtiques

S'autoritza la Universitat a incloure aquest treball en el Repositori Institucional per a la seva consulta en accés obert i difusió en línia, amb finalitats exclusivament acadèmiques i d'investigació	Autor		Tutor	
	Sí	No	Sí	No
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Paraules clau del treball:

Aprenentatge significatiu, collaret de boles, comptatge, línia numèrica, material manipulatiu.

Resum

Aquest treball va sobre l'evolució del collaret de boles fins a la línia numèrica. Des d'un inici amb el collaret de 10 boles fins arribar a la idea abstracta de la línia numèrica. Aquest pas es du a terme mitjançant metodologia realista amb un caràcter lúdic. Es tracta de veure que comptar amb els dits, cosa que s'ha fet fins dia d'avui, no és una estratègia d'utilitat, ja que requereix més temps per realitzar el comptatge mentre que allò que es persegueix és aconseguir que totes les persones siguin competents i eficaces en matemàtiques. El collaret de boles és un material prou ample i flexible per a combinar-se amb altres estratègies deixant així lloc a un aprenentatge dialògic, és a dir, que s'aprèn mitjançant el conflicte que sorgeix a partir del diàleg. Allò que es pretén amb el collaret de boles és facilitar una eina a l'alumnat de manera que amb l'objectiu de realitzar un comptatge ells siguin capaços d'elegir i posar en pràctica aquella estratègia que millor s'adapti a les seves capacitats i estil d'aprenentatge.

Summary

This work goes on the evolution of the ball necklace to the number line. From a start with the 10-ball necklace to the abstract idea of the number line. This step is carried out using a realistic methodology with a playful character. It is a matter of seeing that counting on the fingers, which has been done to this day, is not a useful strategy, as it requires more time to perform the counting while what is pursued is to get all the people are competent and effective in math. The ball necklace is a material wide and flexible enough to be combined with other strategies thus leaving room for a dialogical learning, that is, that is learned through the conflict that arises from the dialogue. What is intended with the ball necklace is to provide a tool to students so that in order to perform a count they will be able to choose and implement that strategy that best suits their abilities and learning style.

Índex

1. Tema i justificació.....	6
2. Objectius.....	7
3. Marc teòric.....	7
3.1. Didàctica matemàtica.....	7
3.2. Ensenyament matemàtica realista.....	8
3.3. Material manipulatiu.....	9
3.4. Sistemes de representació.....	11
3.5. Línia numèrica.....	15
3.6. Collaret de boles.....	16
3.7. Rekmerek.....	17
3.8. Altres articles i TFGs	18
4. Contingut.....	19
4.1. El pas del collaret a la línia numèrica.....	19
4.1.1. Collaret de 10 boles.....	19
4.1.2. Collaret de 20 boles.....	20
4.1.3. Collaret fins a 100 boles.....	21
4.1.4. Línia numèrica	21
5. Proposta didàctica	22
5.1. Activitat 1: Recta	22
5.2. Activitat 2: Introduïm el collaret de boles.....	23
5.3. Activitat 3: “jumping on the lily pads”.....	24
5.4. Activitat 4: El pont.....	25
5.5. Activitat 5: Quants som?.....	25
5.6. Activitat 6: On és?.....	26
5.7. Activitat 7: Telèfon romput matemàtic.....	27
5.8. Activitat 8: plena el buit.....	28
5.9. Activitat 9: Resolem problemes junts.....	29
5.10. Activitat 10: Ens ubiquem.....	30
5.11. Activitat 11: A prop de, lluny de... ..	31
5.12. Activitat 12: Com d'enfora?.....	32
5.13. Activitat 13: App Robo Math Number Line Galaxy lite.....	32

5.14. Activitat 14: Fem bots espacials.....	33
5.15. Activitat 15: El tauler.....	34
6. Conclusió.....	36
7. Bibliografia i altres documents consultats.....	36
8. Annexos.....	38
8.1. Annex 1.....	38
8.2. Annex 2	39
8.3. Annex 3	39

1. Tema i justificació

El tema triat pel desenvolupament del Treball de Final de Grau d'Educació Primària (TFG) està situat dins l'àrea de Matemàtiques, concretament consisteix a realitzar un TFG sobre el pas del collaret de bolles fins a arribar a la recta, es tracta de veure l'aplicació d'aquest material i l'evolució del seu impacte en l'aprenentatge. Finalment, també trobarem una proposta didàctica per fer durant aquest procés d'aprenentatge.

Les matemàtiques formen part de la nostra vida quotidiana des de ben petits i ens envoltem de nombres per totes parts. El collaret es tracta d'un material que facilita el comptatge i redueix l'ús de comptar amb els dits i calcular d'una manera més ràpida i eficient.

Cal destacar que treballar amb material manipulatiu presenta una quantitat d'aspectes positius en el procés d'ensenyament-aprenentatge com pot ser: fomentar l'alumnat com a subjecte actiu en el procés d'aprenentatge i poder experimentar amb el material concret per després treballar-lo de manera abstracta. També cal destacar que treballar amb aquest tipus de material ajuda a comprendre millor els continguts treballats.

Pel que fa al càlcul mental i el seu ensenyament, actualment trobem diversos canvis a la metodologia, passem d'una metodologia tradicional a una més realista, on els algorismes no són el centre sinó que és més important utilitzar les estratègies que presenta l'alumnat per afrontar i resoldre els diferents problemes. És important també, centrar-nos amb la comunicació i la conversació per tal de resoldre les diverses situacions.

Aquest treball consta de quatre parts: primer tractaré els objectius que m'agradaria treballar, després un marc teòric on s'explica el collaret juntament amb el marc de la didàctica de les matemàtiques i finalment el pas del collaret a la línia numèrica i diferents activitats per treballar amb el collaret.

Amb la il·lusió d'acabar el grau i cursar un màster de matemàtiques o d'educació física vaig fer el Pràcticum II a Sa Pobla i la meva tutora havia cursat el màster de matemàtiques i em va transmetre tot el seu amor per les matemàtiques i no vaig tenir dubtes de què volia fer el meu treball de final de grau entorn les matemàtiques. Volia treballar un material que vaig veure a totes les aules de l'escola però no sabia per què s'utilitzava ni quin material era fins aquell moment. He triat aquest tema per fer aquest treball perquè considero que les matemàtiques

són essencials i sobretot, la forma amb la qual es dóna és decisiva perquè als nens i nenes els agradi i, per treballar la recta el collaret em pareix una forma decisiva.

Crec que aquest treball pot aportar molta informació sobre com emprar el collaret i amb la recta numèrica i també mostra una manera diferent d'impartir i treballar aquesta àrea de matemàtiques. Tot i que no hi ha gran quantitat d'informació d'aquest material, m'agradaria que aquest TFG ajudi a obtenir informació sobre el benefici d'aprendre amb l'ús del collaret de boles dins les matemàtiques.

2. Objectius

L'objectiu general d'aquest Treball de final de grau és:

- Analitzar la importància del material manipulatiu, concretament el collaret de boles.

Els objectius específics són els següents:

- Conèixer en profunditat el material del collaret i saber-li donar un bon ús.
- Veure diferents estratègies per treballar la recta numèrica.
- Evitar comptar amb els dits.
- Treballar el pas del collaret fins a la recta numèrica.
- Mostrar diferents activitats per fer amb el collaret i amb la recta numèrica.

3. Marc teòric

3.1. La didàctica de les matemàtiques

Per Brousseau (Kieran, 1998, p.596), la didàctica és la ciència que s'interessa per la producció i comunicació del coneixement. Saber que és el que s'està produint en una situació d'ensenyament és l'objectiu de la didàctica.

El pensament didàctic sorgeix de forma espontània, de manera que s'elegeixen uns problemes o situacions que puguin ser útils per un alumnat en concret en un moment, context i etapa madurativa determinada, de tal manera de què siguin capaços d'assimilar i retenir el concepte escollit.

"Encara que les matemàtiques són considerades com un instrument bàsic del coneixement científic, donat el seu caràcter abstracte i formal, el seu aprenentatge resulta difícil per part dels escolars, sent una de les assignatures que més influeix en el fracàs escolar. Això ens fa

cercar alternatives en el seu ensenyament, per a què pareixen amenes, apropant-les a la realitat dels alumnes i despertant el seu interès cap a elles." (Casas, L.M. i Sánchez, C., 1998).

Segons Flores i Rico (2015); "l'ensenyança de les matemàtiques en el medi escolar, acostuma a estar plantejada d'una manera molt tradicional, i aborda els continguts matemàtics des d'un punt de vista disciplinar i sistematitzat per matèries, com, entre altres: Geometria, Estadística, Magnituds, Aritmètica, sense relacionar els continguts entre les matèries."

3.2. Ensenyança matemàtica realista

Una de les principals maneres d'explicar que és l'ensenyament de les matemàtiques és a partir de la matemàtica realista, ja que es tracta d'un ensenyament que està basat en contextos reals i per tant, es pot utilitzar material manipulatiu com per exemple el collaret que ajuda a l'infant a arribar a un coneixement significatiu i apropiat al seu nivell ja que va descobrint a poc a poc a mesura que juga i coneix el material. Per tant, amb el collaret ens situem en la matemàtica realista (EMR) on la idea central és que l'ensenyança de les matemàtiques ha d'estar connectada al món real, ha de ser propera als alumnes i ha de ser rellevant per la societat.

L'ensenyament de la matemàtica realista es tracta d'un corrent de la didàctica de les matemàtiques que va ser fundada per Hans Freudenthal (1905-1990). Hans Freudenthal, fou un matemàtic i educador d'origen alemany, doctorat en la universitat de Berlín. Fou un propulsor de canvi en la manera d'ensenyança tradicional.

Aquesta metodologia neix als anys seixanta com reacció a l'enfoc mecanicista de l'ensenyament de l'aritmètica i consisteix en la recerca de fenòmens o manifestacions de la vida real que tenen diferents situacions i contextos en què el tema o l'objecte matemàtic apareix. La idea principal és que el tema ha d'estar connectat amb la realitat i aquesta ha de permanèixer propera a l'alumnat i a les seves vivències i experiències. Hi ha sis principis de la matemàtica realista:

1. El principi de realitat. Destaca que s'ha de partir de contextos i situacions realistes.

Per Freudenthal, "un context és el domini de la realitat real el qual, en algun procés d'aprenentatge particular, és revelat a l'alumne en ordre per ser matematitzat" (1991, p.73)

2. El principi de reinversió guiada. Es tracta de l'equilibri entre la llibertat de l'alumnat d'inventar i la força de guiar, és a dir, els alumnes no creen nous models sinó que els descobreixen. Els docents han de tenir la capacitat d'anticipar i preveure allò que volen els seus alumnes per produir una sèrie de situacions. Els docents han d'iniciar una situació problemàtica i a través d'aquesta l'alumne/a construeix el seu propi aprenentatge. S'ha de reconèixer que el docent té un paper clau i essencial com a guia i organitzador i creador de la interacció en l'aula.
3. El principi de nivells. Es basa en la idea que l'alumne passa per diferents nivells, és a dir, la matemàtica és un aprenentatge progressiu.
4. El principi d'interacció. Cal destacar que l'aprenentatge de les matemàtiques és una activitat social, ja que es discuteix sobre les interpretacions, els procediments i l'eficàcia. A l'aula trobem una reflexió col·lectiva i una interacció entre l'alumnat.

"La didàctica realista convida a reemplaçar la visió de l'alumnat com receptor passiu d'una matemàtica prefabricada, per la d'un subjecte que participa, juntament amb altres, en l'organització matemàtica dels fenòmens imaginables" (Bressan, Zolkower & Gallego, 2004, p.10)

5. El principi d'activitat. Fer matemàtiques no es basa a aprendre com un producte sinó que és aprendre el procés.
6. Principi d'interconnexió. Aquest principi es basa en la idea que un context o un problema pot ser abordat per una gran quantitat d'eines de diferents eixos curriculars.

Per tant, ens situem en la matemàtica realista perquè el collaret té integrats els sis principis d'aquesta: el collaret es basa en contextos realistes, ja que es pot partir d'un problema de la vida quotidiana, per tant, es pot emprar el principi de realitat; també apareix el principi de reinversió guiada, ja que l'alumne descobreix constantment noves estratègies i el docent cerca o crea altres qüestions a partir de l'evolució del coneixement de l'alumnat. Es troba el principi de nivells, ja que aquest material segueix un aprenentatge progressiu. És essencial una activitat social fomentant la comunicació (principi d'interacció). Es pot abordar de diferents

maneres (principi d'interconnexió) i finalment, no es tracta d'aprendre un producte, sinó un procés, unes estratègies.

Més enllà de què el collaret completi els sis principis de la matemàtica realista, allò que cal destacar és que la finalitat de qualsevol ensenyament no és ensenyar per ensenyar un concepte artificial i abstracte, sinó allò que sigui funcional per a la vida. La manera més fàcil de dur això a terme és crear situacions realistes del dia a dia, cosa senzilla amb el collaret, i no una problemàtica abstracta i llunyana.

3.3. Material manipulatiu

Área i altres (2010) es refereixen a material manipulatiu didàctic en alguns casos als materials que utilitzen representacions simbòliques i en altres casos als referents directes que serien els objectes. Una classificació realitzada d'acord amb el suport és:

- Material en suport de paper.
- Material en suport tecnològic.
- Material en altres suports.

Cascallana (1988) classifica els materials en estructurats i no estructurats. Els materials estructurats són aquells dissenyats especialment per l'ensenyament de les matemàtiques. No són figuratius i suposen una major capacitat d'abstracció però són previs a l'ús exclusiu dels signes numèrics. Els materials no estructurats són tots el que el nin pot manipular, sense ser especialment creat amb fins matemàtics.

Per tant, es defineix material manipulatiu com tot aquell objecte físic, tangible, dissenyat amb un fi didàctic amb el qual l'alumne pot tocar directament amb les seves mans. A més, té la possibilitat d'intervenir amb ells fent modificacions, facilitant d'aquesta manera el procés d'ensenyament aprenentatge dels alumnes.

"El coneixement matemàtic no s'adquireix exclusivament per transmissió verbal dels adults, com succeeix amb el coneixement social. L'aprenentatge de les matemàtiques suposa una activitat mental, que en aquestes edats ha de tenir una base manipulativa" (Cascallana, 1998).

El material manipulatiu facilita els processos d'ensenyament i aprenentatge dels alumnes, ja que els alumnes experimenten situacions d'aprenentatge de forma manipulativa, que els

permet conèixer, comprendre i interioritzar les nocions estudiades, per mitjà de sensacions (Área, 2010).

Utilitzant material didàctic manipulatiu afavoreix el procés d'ensenyament aprenentatge de les matemàtiques tot i que depenent del context s'ha de triar un material adequat i s'ha de tenir en compte el moment de la seva utilització i el seu procediment.

La funció del docent és ajudar a l'alumnat en aquest procés d'aprenentatge, acompanyant-lo per a que prengui les decisions necessàries i posant tots els recursos possibles. Així com, per exemple, els materials didàctics. (Área, 2010, 16)

"Quan l'alumne s'enfronta a un problema i treballa, manipula, conjuntura, s'equivoca, encerta, retrocedeix i avança, investiga en suma, no està limitant-se a adquirir uns coneixements que podran ser-li més o menys útils en el futur, sinó que està adquirint uns hàbits mentals que li seran d'utilitat sense cap gènere de dubte." (Casas, L.M. i Sánchez, C., 1998)

Segon Jiménez i Roncal (2015), és important que l'ús de material dins una seqüència de situacions didàctiques per part dels professors sigui basat en la reflexió i la resposta a les següents qüestions: que aprenen els alumnes rere un procés d'estudi basat en l'ús d'un material determinat? De quins factors depèn l'estudi? Podem aspirar al fet que els alumnes adquireixin determinades destreses en el maneig de sistemes de signes textuais? Quan i de quin mode devem deixar d'utilitzar material tangible i passar al textual?

Per tant, es pot definir el material manipulatiu com "tot objecte, joc, mitja tecnològic, etc. capaç d'ajudar a l'alumne a suscitar qüestions, suggerir conceptes o materialitzar idees abstractes". (Álvarez, A., 1996).

3.4. Sistemes de representació

Els collars de bolles amb diferents quantitats, disposició i color de bolles és un context ric, significatiu i matematitzable que sol ser utilitzat per l'EMR per treballar l'aritmètica. Per parlar del pas del collaret de bolles a la recta numèrica primer hem de saber que és un sistema de representació. No podem parlar de la didàctica de les matemàtiques sense parlar dels sistemes de representació. Segons la Reial Acadèmia Espanyola (RAE), representar és: "fer

present qualche cosa amb paraules o figures que la imaginació reté" i, defineix representació com: 1."f. acció i efecte de representar" o 2. "f. Imatge o idea que substitueix a la realitat".

La didàctica de les matemàtiques sustenta part de la seva labor en la utilització d'imatges, dibuixos o símbols que tenen com a missió facilitar la comprensió dels conceptes. Evidentment, cal destacar que, la connexió entre les representacions no sempre es produeix de manera òbvia sinó que, moltes vegades requereix un procés anterior d'interpretació, és a dir:

"Cada vegada que els estudiants són introduïts a una nova representació, han d'aprendre com s'utilitza i s'interpreta en la comunitat matemàtica i en la seva aula de matemàtiques. Per altra banda, no és suficient per considerar aquesta representació de forma aïllada per no confondre amb l'objecte matemàtic corresponent, però les connexions amb altres representacions d'aquest objecte deuen estar presents amb el fi d'anar més enllà de la representació específica i per ser capaç de canviar entre diferents representacions" (Dreher i Kuntze, 2015, p. 91).

Aquesta idea, és a dir, la idea dels sistemes de representació, és objecte d'atenció dins l'Educació Matemàtica, ja que constitueix una eina de gran utilitat per estudiar la comprensió de les matemàtiques per part de les persones i els processos d'aprenentatge matemàtics.

Rico (1997) inclou les representacions com un dels organitzadors del currículum de matemàtiques, és a dir, com un dels modes d'aportar significació a les matemàtiques escolars. La noció de visualització o pensament visual està lligat a la capacitat de formació d'imatges mentals. Es parla de visualització quan en una representació predominen les imatges i components gràfics (Castro i Castro, 1997, p.95).

A matemàtiques podem distingir dos sistemes de representació: per una banda, els sistemes de representació simbòlica i els sistemes de representació gràfica. Pel que fa al cas del nombre real, els sistemes de representació, tant els sistemes de representació simbòlica com els sistemes de representació gràfica, juguen un paper essencial, ja que permeten expressar les idees i les relacions constitutives del concepte. Tant en l'àmbit de les representacions simbòliques com en les representacions gràfiques es posseeix un element integrador fonamental pel nombre real, és a dir, el sistema de notació decimal i el model de recta. El sistema de notació decimal és un sistema integrador en el domini de les representacions

simbòliques, ja que tota notació decimal representa un nombre real i cada nombre real es pot representar amb una notació decimal.

Per altra banda, el model de la recta és un sistema integrador en el domini dels sistemes de representació gràfica, això és a causa de la correspondència entre els punts de la recta i els nombres reals, realitzat a través de la mesura de longituds. És a dir, les representacions simbòliques destaquen aspectes operacionals i discretes dels reals i les representacions gràfiques ajuden a intuir propietats de continuïtat i mesura.

És a dir, s'entén per representació gràfica com la representació de dades a través de línies, superfícies o símbols per evidenciar la relació que tenen entre si. Trobem diferents tipus de representacions gràfiques com poden ser:

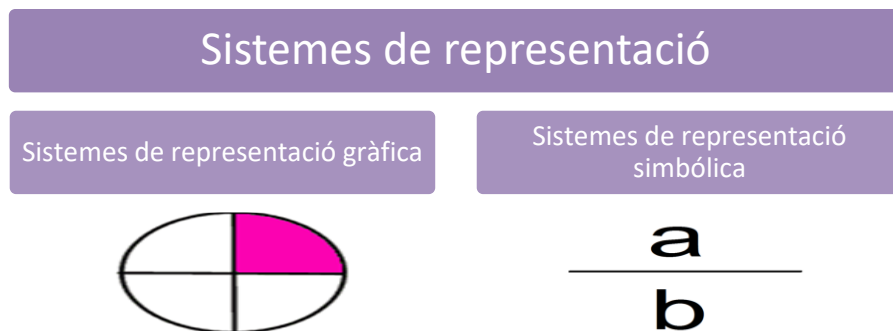
- Gràfiques circulars: divideixen un cercle en porcions proporcionals segons el valor de les freqüències relatives.
- Diagrama de barres: mostren els valors de les freqüències absolutes sobre un sistema d'eixos quan la variable és discreta o qualitativa.
- Histogrames: formes especials dels diagrames de barres per distribucions quantitatives contínues.
- Polígons de freqüència: Format per línies poligonals obertes sobre un sistema d'eixos cartesianes.
- Pictogrames: representacions visuals figuratives.
- Piràmides de població: per classificacions de grups de població per sexe i edat.
- Gràfic de dispersió: mitjançant els eixos cartesianes se representa en forma de punts totes les dades obtingudes mitjançant l'observació.
- Cartograma: indica les zones en les que apareix amb major freqüència un determinat valor de una variable.

També trobem altres representacions gràfiques com poden ser: les gràfiques de representació de funcions lineals, polinòmials, racionals, exponencials, logarítmiques, entre altres.

I, per altra banda, s'entén per representació simbòlica pel símbol que representa una representació algorítmica amb unes característiques específiques que realitza una funció determinada. Trobem diferents tipus de representacions simbòliques com poden ser:

- Una fracció
- El nombre pi
- Mayor que ($>$) o menor que ($<$)
- Infinit
- Suma
- Resta
- Multiplicació
- Divisió

Un exemple d'un sistema de representació gràfica i simbòlica és el següent:



Respecte als sistemes de representació gràfica destaca el model de recta real. Entenem per recta real un sistema d'imatges, signes, regles i convenis mitjançant els quals se realitza una representació gràfica dels nombres real i s'interpreten les operacions sobre la línia recta. Per tant, quan parlem a matemàtiques de la recta numèrica parlem d'una representació gràfica.

Per tant, els sistemes de representació, tant gràfics com simbòlics, presenten una similitud ja que, són visuals i pretenen treballar l'aspecte visual i no es tracta d'un algoritme, és a dir, són una representació, però aquests es diferencien, ja que, en la representació gràfica el nin o la nina pot fer-se una representació mental més tangible i s'ho pot imaginar. I la representació simbòlica és tracta d'un contingut més abstracte, a mode d'algoritme. Els sistemes de representació són útils perquè, com s'ha esmentat anteriorment, és tracta d'una representació més visual d'un conjunt de dades donades.

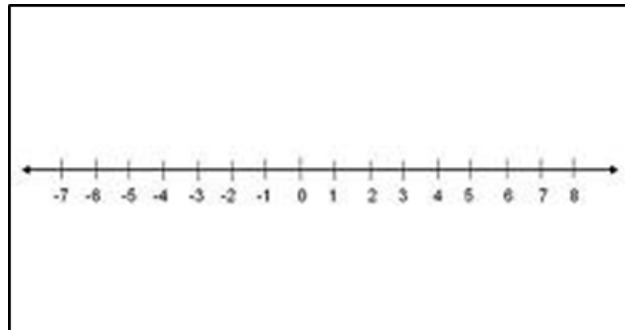
3.5. Línia numèrica

Cal destacar que la recta numèrica és una representació fonamental en l'ensenyament dels nombres. Ernest (1985) senyala que la recta en l'ensenyament primària pot utilitzar-se en tres casos:

1. Com un model d'ensenyament per ordenar nombres.
2. Com un model per les operacions de suma, resta, multiplicacions i divisions.
3. Com contingut mateix del currículum de matemàtiques.

Mentre que els dos primers, la recta com a model per ordenar i per a les operacions, formen part de les decisions metodològiques que els professors podem utilitzar, el darrer aspecte, com a contingut mateix del currículum de matemàtiques, es refereix al fet que la recta deu formar part del coneixement matemàtic que adquireixen els alumnes.

La línia numèrica és coneguda com a representació dels nombres naturals (il·lustració 1) però també la podem trobar en una versió “muda” o “buida” (il·lustració 2). En aquest cas, parlarem de la línia numèrica “buida”.



Il·lustració 1 Línia numèrica



Il·lustració 2 Línia numèrica buida

La recta numèrica buida es tracta d'un model que utilitza la recta per representar càlculs aritmètics prescindint d'aquesta manera de la proporcionalitat entre les quantitats representades. Cal destacar que la línia numèrica buida és un model abstracte per treballar amb ell.

3.6. Collaret de boles

Per tant, com expliquen David Barba i Cecilia Calvo (2012), el collaret de boles es tracta d'un material manipulatiu estructurat basat en una corda o fil i diferents boles ja que ajuda a l'alumne a resoldre qüestions, suggerir conceptes o materialitzar idees abstractes, en aquest cas, la idea de la línia numèrica. Primer s'utilitzen collarets de 10 o 20 bolles (il·lustració 3), cinc boles d'un color i cinc d'un altre, per tenir una clara distinció visual, això ajuda a l'alumne a comptar. D'aquesta manera els ajuda a veure on està el nombre 5 en el collaret i a la ubicació de nombres. Després es passa al collaret de 50 o 100 boles, que està dividit en boles de diferents colors de 10 en 10 (il·lustració 4). S'utilitzen diferents colors en les seves agrupacions perquè així el nin té una major diferenciació a l'ora d'organitzar les bolles i això presenta una aproximació al nostre sistema de numeració decimal (agrupat de 10 en 10), és a dir, el que és important en aquest collaret són les desenes.



Il·lustració 3 Collar de boles de 5 en 5



Il·lustració 4 Collar de boles de 10 en 10

3.7. Rekenrek

El rekenrek es tracta d'un material manipulatiu desenvolupat per Adrian Treffers. Aquest material pareix un àbac però aquest es basa en un sistema de cinc estructures i no de deu. Es compon de dues files de 10 boles, cada una dividida en dos conjunts de 5 boles de cada color, és a dir, cinc boles vermelles i cinc blanques. Adrian Treffers va dissenyar aquest material per fomentar el desenvolupament matemàtic dels nins i ajudar-los a generar una varietat d'estratègies de sumes i restes.

Les cinc boles vermelles d'una filera, correspondrien amb els dits de la mà esquerra, i les 5 boles blanques, amb els cinc dits de la mà dreta. (Tournaki, Bae i Kerekes, 2008). Tal i com senyala De Castro (2015), citat per Santos (2018), els nins des dels seus primers anys de vida utilitzen els dits de les seves mans com primer tipus de configuració numèrica i l'associació d'aquest material amb les mans persegueix dos objectius: que els nins realitzin un aprenentatge significatiu, basat en el coneixement que tenen les mans per representar quantitats i anar cada cop prescindint de l'ús dels dits per utilitzar el rekenrek en el seu lloc.

Els estudiants poden usar aquest material per desenvolupar habilitats de càlcul o resoldre problemes contextuals. L'estructura d'aquest material permet als alumnes veure fàcilment la quantitat en el seu conjunt sense haver d'anar comptant.

Per altre banda, el collaret de boles es tracta de la primera aproximació a la línia numèrica. Tenint en compte els apartats anteriors, la similitud del rekenrek amb el collaret de boles recau en que ambdós materials consisteixen amb una eina manipulativa pròxima al comptatge que realitzen els nens i nenes amb les mans per a arribar a un aprenentatge significatiu de la recta numèrica, amb la finalitat de poder emprar aquest aprenentatge en el seu dia a dia. Ambdós materials es tracten de bones eines per ajudar als nins i nines a desenvolupar i comprendre les estructures matemàtiques i dels nombres, i visualitzar conceptes, com és el sentit numèric i la recta numèrica.

3.8. Altres articles i TFGs

Hi ha un estudi realitzat per Tournaki, Bae i Kerekes (2008) que va examinar els efectes en el rendiment matemàtic de l'ús del Rekenrek. L'estudi es va realitzar entre nins amb problemes d'aprenentatge, i es va descobrir que aquest material era eficaç per millorar l'aprenentatge dels alumnes, tant en la suma com en la resta. A més a més, va fomentar als alumnes a realitzar explicacions del procés mentre ho anaven fent.

David Barba i Cecilia Castro (2012) a l'article "Calcular saltando sobre la línea numérica vacía" parlen de la importància de treballar amb el collaret de boles a partir de la conversa i la comunicació. Aquests aspectes tenen una funció fonamental al llarg de les activitats. És a dir, entre totes les estratègies que pot utilitzar el nin o la nina pel seu aprenentatge, la seva discussió és la millor manera de registrar els procediments i presentar els resultats. En aquest article es parla de les diferents estratègies per dur a terme salts a la recta numèrica.

Carlos de Castro Hernández (2015) duu a terme una proposta d'activitats per treballar les TIC a través de les matemàtiques amb el Rekenrek. Es tracta d'una iniciació a l'aritmètica i a la resolució de problemes de forma verbal, és a dir, a partir de la conversa i la comunicació, que complementa el comptatge.

Barbara Blanke (2008) en l'article "Using the Rekenrek as a Visual Model for Strategic Reasoning in Mathematics" parla sobre la importància de l'estratègia del pas pel nombre cinc i de la gran quantitat d'estratègies que pot presentar el material, en aquest cas el Rekenrek, per arribar al resultat per tal que el nin o la nina posteriorment utilitzi aquella estratègia que més s'adequa per tal de fer un càlcul de manera eficient.

S. Kanageswari Suppiah Shanmugam i Leong Chee Kin (2014) parlen sobre el Rekenrek un material molt útil per ensenyar grans quantitats d'estratègies per sumar i restar que pot estendre's a la multiplicació i la divisió. Realitzaren un estudi per explorar la percepció dels mestres amb la utilització del Rekenrek com material manipulatiu durant les seves classes. Els resultats obtinguts van ser recol·lectats a partir d'un qüestionari i es van comprovar la quantitat d'efectes positius que presenta aquest material dins les aules com el foment de l'exploració, la substitució, la descomposició i sobretot, que és molt fàcil introduir aquest material a les aules.

4. Contingut

4.1. El pas del collaret a la recta numèrica

4.1.1. Collar de 10 boles

El collaret és un material que serveix per a reforçar el càlcul però com tot material ha de permetre un ensenyament progressiu. Primer, introduïrem el collaret amb 10 boles (canvia de color cada 5 boles). La utilització de colors en el collaret és per ajudar a l'alumnat a comptar i a diferenciar. Això suggereix una organització dels nombres relacionats amb el caràcter decimal del nostre sistema de numeració. També és fonamental destacar la importància que té el nombre 5 en els càlculs, ja que es tracta d'una estratègia essencial dins l'àmbit de les matemàtiques.

Les activitats centrals amb aquest collaret de 10 boles es basaran en la identificació i la localització de nombres en el collaret basant-se en estratègies utilitzant el nombre 5. L'alumne ha de veure que hi ha 10 boles i que afegint o llevant boles al 5 pot arribar al nombre d'una manera més eficaç que contant d'una en una o amb els dits.

Cal destacar que aquest material és per facilitar el comptatge i per això hem d'evitar el càlcul amb els dits que s'ha fet fins avui en dia, ja que si anem augmentant el nombre, la utilització dels dits no és un avantatge per fer el càlcul més eficient sinó que és un inconvenient, per tant el que es pretén amb aquest material és arribar a fer un càlcul de manera més eficient.

Una vegada s'ha treballat i après la identificació i la localització del nombre 5 és quan es pot passar a treballar la suma i la resta proposant així als alumnes que realitzin salts sobre el collaret i indiquin on es troben després del salt. És essencial treballar la comunicació i

sobretot, aprendre a comunicar i expressar de forma asertiva el nostre procediment amb qüestions com:

- On era?
- On sóc ara?
- Com hi he arribat?
- On he d'arribar?
- On he acabat?
- De quina manera ho he fet?
- Què podria millorar?

L'essencial de qualsevol material manipulatiu és expressar i debatre entre la classe les diferents estratègies que s'han utilitzat per resoldre les qüestions. Aquestes activitats es poden dur a terme tant de manera individual, amb un collaret per alumne o de manera grupal, tenint un collaret comú per a tota la classe.

4.1.2. Collaret de 20 boles

Un cop treballat i assolit l'aprenentatge amb el collaret de 10 boles, aprofitem el fet conegut per a passar a treballar amb el collaret de 20 boles. Aquest collaret, com s'ha dit abans tindrà la mateixa distribució que el collaret de 10 boles, és a dir, canvia el color cada 5 boles. Segueix aquests canvis de color, ja que el contingut a treballar important és la ubicació del 5, el 10, el 15 i el 20 i que utilitzin això per reforçar la numeració. En aquest punt es pretén treballar tant l'estratègia de la importància de passar pel nombre cinc, com al collaret de 10 boles, i sobretot localitzar-lo com l'estratègia del pas per la desena. Cal destacar que per utilitzar aquesta estratègia el nin ha de saber totes les descomposicions del 10. Aquesta es tracta també d'una estratègia essencial per facilitar el comptatge a matemàtiques. La idea és que el nin utilitzi els nombres com a suport dels càlculs i sobretot, la desena. Aquest es un fet de gran importància ja que es un fet que forma part del nostre dia a dia.

Per exemple, si demano al nin que situï el nombre 11, el nin ha de saber on és la desena i contar un endavant. O un altre cas, pot ser si demanem localitzar el nombre 16 pot fer dues estratègies, per una banda cercar el 15 i afegir 1 o situar les dues desenes i tornar enrere 4.

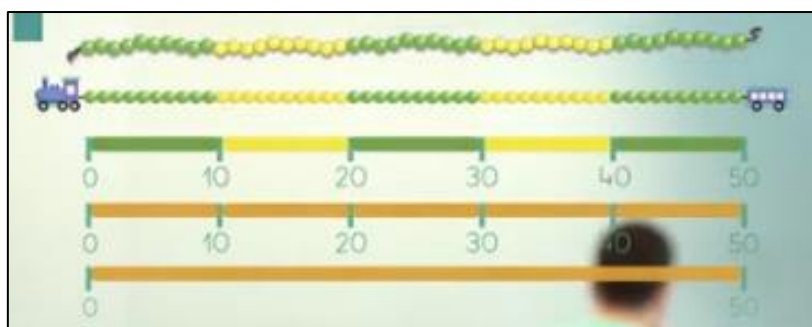
4.1.3. Collaret fins a 100 boles

En comparació amb els collarets de 10 i 20 boles, els collarets de 30 cap endavant canvien de color cada 10 boles. Ja que ara l'estratègia d'ubicació del nombre cinc ja està assolida i se cerca fomentar l'estratègia del pas per la desena amb nombres més elevats.

Cal remarcar que la comunicació del procediment i del resultat té un paper clau al llarg de l'aprenentatge. Ja que l'alumne explica les seves estratègies per fer el comptatge i d'aquesta manera es poden afavorir els uns amb els altres a través de l'ensenyament dialògic.

4.1.4. Línia numèrica

Arribat el punt on es deixa de banda el material manipulatiu és on es representa la línia numèrica. La idea és que el nin amb la seva idea del collaret de 10 boles, passant al collaret de 20 boles, després al de 50 i finalment al collaret de 100 pugui arribar a la idea abstracta de la línia numèrica on primer es deixen els colors amb les boles, després es deixen els colors però només es marquen les desenes, després es lleven els colors i finalment es lleven les desenes fins a arribar al punt de representar la línia numèrica amb una recta buida (Il·lustració 5). Per tant, el que es pretén és que l'alumne arribi a l'abstracció d'aquesta idea.



Il·lustració 5 Representació visual del pas del collaret a la línia numèrica

Es pretén arribar fins a la línia numèrica buida perquè la idea és ajudar a l'alumnat en tot el seu procés d'ensenyament-aprenentatge i si aquesta línia no té marques, és una manera més fàcil de què ells ho representin, ja que si ve marcada és més difícil que ells després ho representin a qualsevol paper. El que es vol fomentar és la utilització de la línia numèrica en nombroses situacions sense distàncies equidistants sinó fomentant l'ús del comptatge al gust de l'alumnat i utilitzant la línia numèrica com a referència i aquest pugui anar fent càlculs de manera més eficient.

Un cop arribada a la línia numèrica buida es poden plantejar també restes. Destaca la línia numèrica perquè no té cap procés especial i lleva la utilització de portar-ne a la resta. Per tant, el pas del collaret a la línia numèrica és una proposta didàctica on destaca el paper essencial que té l'alumne en fer servir les seves pròpies estratègies i donar un paper molt important a la comunicació i a les explicacions que donen del procés, ja que si el nin sap explicar bé el procés que ha seguit vol dir que el nin ha assolit el contingut treballat. És important donar diverses estratègies als nins i nines per a que segons el moment, el problema o la circumstància triï la que millor s'adapti millor tant al problema com a nin/a.

Tot i que hem treballat el collaret de boles del 0 al 100 a primària cal destacar que aquests nombres es poden ampliar fins centenes i milers amb les mateixes estratègies i amb l'ús de la línia numèrica.

5. Proposta didàctica

5.1. Activitat 1. Recta

Activitat: App Racionales, recta numèrica	
Objectius: <ul style="list-style-type: none"> • Introduir el collaret de boles • Treballar la ubicació dels nombres 	Instal·lació: Aula
	Nombre de participants: Tot el grup classe
	Material: Folis amb nombres
	Agrupació: Tot el grup classe
Descripció	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Farem diferents grups de set persones dins l'aula. 2. Cada grup tindrà col·locat a un lloc una recta numèrica, només amb el nombre 0, 5 i 10. 3. Repartirem un foli a cada membre del grup amb la resta de nombres de la recta numèrica. 4. S'hauran de col·locar segons el nombre que té cada un. 	




5.2. Activitat 2: Introduïm el collaret de boles


<u>Activitat: Introduïm el collaret de boles</u>	
Objectius: <ul style="list-style-type: none"> • Introduir el collaret de boles • Treballar l'estratègia del pas pel nombre 5 amb el collaret de 10 boles. • Treballar la col·locació del collaret 	Instal·lació: Aula
	Nombre de participants: Tot el grup classe
	Material: Collaret de boles i pinces
	Agrupació: Pot ser tant individual com grupal.
<u>Descripció</u>	<u>Representació gràfica</u>
<p>Una activitat per introduir amb el collar de 10 boles és situar els nombres i a partir d'aquí treballar les diferents estratègies.</p> <p>Per exemple: podem demanar que situen el nombre 7 i ells a partir de la localització del cinc només han de contar dues bolles (veure representació gràfica); o per exemple si han de situar el nombre 9, han de localitzar el nombre 10 i anar un salt enrere, depenent de l'estratègia que utilitza cada alumne. Cal destacar que a la matemàtica realista no hi ha una única manera d'arribar al resultat, sinó que es tracta d'acceptar els diferents processos mentals de cada alumne com a correctes sempre que arribin al resultat esperat, sense menysprear l'assaig error.</p> <p>Per tant, l'activitat consisteix en en el fet que cada grup cooperatiu o cada alumne individualment disposa d'un collaret de 10 boles. El docent anirà dient diferents nombres i l'alumnat haurà d'anar situant-los al collaret. Amb una pinça es marcarà on es troba aquest nombre.</p> <p>Un cop localitzat el nombre es corregirà en veu alta entre tots i explicaran com ho han elaborat i les diferents estratègies.</p>	

Treballarem els nombres de l'1 al 10 de forma aleatòria.	
--	--

5.3. Activitat 3: “Jumping on the lily pads”


<u>Activitat: “jumping on the lily pads”</u>	
Objectius: <ul style="list-style-type: none"> • Ubicar els nombres del collaret • Treballar l'estratègia del pas pel nombre 5 amb el collaret de 20 boles. 	Instal·lació: Aula
	Nombre de participants: Tot el grup classe
	Material: Daus, fitxes amb forma de granota, tauler i collaret de 20 boles El tauler representa un recorregut de fulles de lliris i sobre un collaret on a cada fulla hi troben una bola.
	Agrupació: Parelles cooperatives
<u>Descripció</u>	<u>Representació gràfica</u>
<p>Aquest joc consisteix a botar com granotes sobre fulles de lliris aquàtics dibuixades al tauler.. És a dir, els alumnes han d'anar botant de fulla en fulla fins a arribar a l'altre costat on hi ha l'estany. Per poder moure's els nins i nines tiren un dau i mouen les granotes al llarg del tauler segons el nombre del dau que surt. L'objectiu és arribar primer a l'estany.</p> <p>Aquest joc ajuda als nins i nines a desenvolupar una recta numèrica mental.</p> <p>El joc es basa en:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. El primer jugador tira el dau. Depenent del nombre que ha sortit mou la seva casella. 2. És el torn de l'altre jugador. 3. Acaba quan un dels jugadors arriba al final de la meta. 	

5.4. Activitat 4: El pont

<u>Activitat: El pont</u>	
Objectius: <ul style="list-style-type: none"> • Donar suport al comptatge. • Treballar amb el collaret de 20 boles. • Identificar valors desconeguts en una recta numèrica amb ajuda d'estratègies intuïtives 	Instal·lació: Aula
	Nombre de participants: Tot el grup classe
	Material: Collaret de 20 boles i pont (fet amb cartolina)
	Agrupació: Parelles cooperatives
<u>Descripció</u>	<u>Representació gràfica</u>
<ol style="list-style-type: none"> 1. Donem un collaret de 20 a cada parella cooperativa i un pont. 2. L'activitat consisteix que amb el pont s'ha de tapar part de collaret (entre 3 i 5 boles) i l'alumnat veient els colors del collaret ha d'encertar quines boles falten. 3. Si es fa per parelles cooperatives, un pot tapar el collaret de boles i l'altre ha de saber quines boles falten. Un cop trobades es canviarien el rol. <p>Aquesta activitat treballa amb la ubicació dels nombres dependent del color. Es tracta d'una activitat per familiaritzar-se amb el collaret. Es treballaran els nombres de l'1 al 20 de manera aleatòria.</p>	

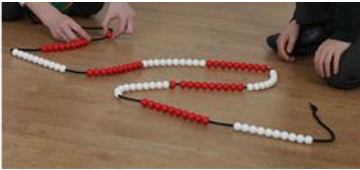
5.5. Activitat 5: Quants som?

<u>Activitat: Quants som?</u>	
Objectius: <ul style="list-style-type: none"> • Treballar amb el collaret de 50 boles • Fomentar la comunicació i la resolució dels problemes. • Introduir les sumes 	Instal·lació: Aula
	Nombre de participants: Tot el grup classe
	Material: 1 Collaret de boles

	Agrupació: Tot el grup classe
<u>Descripció</u>	<u>Representació gràfica</u>
<p>En aquesta activitat treballarem de manera grupal, és a dir, a partir de les respostes dels altres.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Ens situarem formant una rotllana enfront el collaret de boles gran de l'aula. 2. Començarem l'activitat amb la següent pregunta: ¿Quants germans tenim entre tota la classe? O ¿quants animals domèstics tenim? Utilitzarem preguntes properes a l'alumnat perquè d'aquesta manera cridem la seva atenció de l'alumnat i el motiu. 3. D'un en un, sortiran al collaret i col·locaran una pinça, és a dir, sortirà el primer i col·locarà la pinça segons quants de germans té. 4. Un cop ha col·locat la pinça el següent de la rotllana s'aixecarà i mourà la pinça segons els germans que tingui. 5. Per ordre fins a fer-ho tots, s'aniran aixecant i movent la pinça. 6. Un cop finalitzat mirarem quants de germans tenen entre tota la classe. <p>Es pot treballar tant amb germans, animals, entre altres.</p>	

5.6. Activitat 6: On és?

<u>Activitat: On és?</u>	
Objectius: <ul style="list-style-type: none"> • Treballar la línia numèrica a través del collaret de boles • Treballar la ubicació dels nombres amb l'estratègia del pas per la desena • Familiaritzar-se amb el collaret de 100 	Instal·lació: Aula
	Nombre de participants: Tot el grup classe
	Material: Collaret de boles, boles amb els nombres escrits i una bossa.
	Agrupació: Tot el grup classe

<u>Descripció</u>	<u>Representació gràfica</u>
<p>Es treballarà tota l'activitat amb el collaret conjunt. Aquesta activitat consta de dues parts/variants:</p> <p>La primera part:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Primer introduïrem diferents bolles numerades dins una bossa. 2. Es col·locaran els alumnes al voltant del collaret. (S'intentarà que el collaret sigui de gran mida i que ocupi tota l'aula). 3. Un per un aniran a la bossa, agafaran una bola numerada i l'haurà de situar al collaret. <p>La segona part:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Estaran situats al voltant del collaret. 2. Un per un s'aixecaran, aniran al costat de collaret i aniran caminant d'una banda a l'altre. 3. El docent en un moment dirà "STOP" i el nin o la nina s'haurà d'aturar, posar una pinça on s'ha aturat i dir el nombre que es tracta. 	

5.7. Activitat 7: Telèfon romput matemàtic

<u>Activitat: Telèfon romput matemàtic</u>	
<p>Objectius:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Treballar sumes i restes amb el collaret. • Solucionar problemes amb l'ús del collaret de 100 boles. • Familiaritzar-se amb el collaret de 100 	<p>Instal·lació: Espai, o a l'aula o fora de l'aula per formar una rotllana entre tots</p>
	<p>Nombre de participants: Tot el grup classe</p>
	<p>Material: Collaret de 100 boles</p>
	<p>Agrupació: Tot el grup classe</p>
<u>Descripció</u>	<u>Representació gràfica</u>
<ol style="list-style-type: none"> 1. Tot l'alumnat seu formant una rotllana. 2. El docent té el paper de moderador. 3. El docent començarà fent un problema a partir d'un element quotidià, potser siguin pomes, caramels, llapis, entre altres. 4. Un cop realitzi el primer problema li passarà 	

el collaret a l'alumne de l'esquerra i aquest col·locarà una pinça al resultat del problema.

5. L'alumne passarà el collaret tapant el resultat al seu company de l'esquerra. És a dir, en tot moment quan elabora l'operació només ho veu ell.
6. Quan passa el collaret al company de l'esquerra el docent formularà una altra qüestió i aquest company l'haurà de resoldre partint del que ja té. És a dir, si el docent ha fet una primera qüestió: "La classe té 5 caramels" i el primer alumne ha situat el nombre 5; ha passat el collaret al seu company i el docent a fet la següent qüestió: "Ara el director del centre ens ha portat 6 caramels". Per tant, l'alumne que té el collaret es basarà en el que marca el collaret i sumarà 6.
7. Aquest collaret anirà rotant d'alumne en alumne a mesura que es plantegen les diferents qüestions.
8. Un cop arriba el collaret al final del recorregut el destaparem i comprovarem el resultat.
9. En cas que el resultat sigui exitós es passa a un altre problema. En canvi si el resultat no és l'esperat, tornarem a realitzar el problema amb el collaret destapat per a poder detectar les dificultats que han anat succeint al llarg de l'activitat.



Variacions: Aquesta activitat es pot treballar tant en sumes, restes o combinacions d'aquestes.

5.8. Activitat 8: Plena el buit

<u>Activitat: Plena el buit</u>	
Objectius: <ul style="list-style-type: none"> • Utilitzar el collaret per visualitzar solucions tant de suma com de resta. 	Instal·lació: Aula
	Nombre de participants: Tot el grup classe
	Material: Fitxa
	Agrupació: Tasca individual

Descripció

1. Es duran a terme diferents problemes depenent del nivell dels alumnes.
 2. S'utilitzarà el collaret per a la resolució d'aquests.
- La fitxa es troba a annexos. (annex 1).

5.9. Activitat 9: Resolem problemes junts

Activitat: Resolem problemes junts

Objectius:

- Resoldre problemes de forma oral.
- Jugar aprenent.

Instal·lació:

Aula

Nombre de participants:

Tot el grup classe

Material:

Collaret de boles i cartes.

Agrupació:

Tot el grup classe

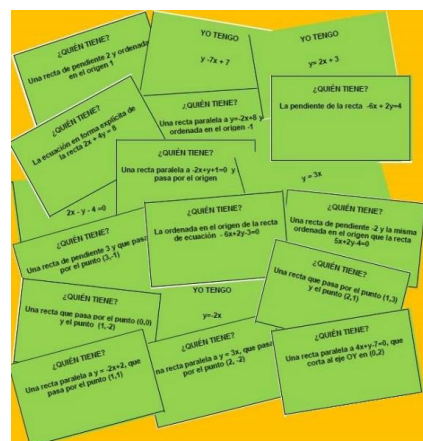
Descripció

Representació gràfica



Es durà a terme entre tots la resolució d'uns problemes. Per fer-ho més cridaner i motivador el docent disposarà de cartes on a cada carta hi ha un problema i aquest individualment ho han de resoldre. Es pot fer tant amb el collaret, amb la línia numèrica acolorida o amb la línia numèrica buida.

1. El docent anirà per les taules amb el grapat de cartes.
2. Anirà demanat a l'alumnat que tregui una carta i llegeixi el problema que hi ha escrit.
3. Un cop llegit cada un intentarà cercar la solució.
4. Quan tots hagin cercat la solució, sigui amb el collaret o la línia numèrica farem una posada en comú justificant el perquè del resultat.

Veure Annex 2 amb els problemes.



5.10. Activitat 10: Ens ubiquem

<u>Activitat: Ens ubiquem</u>	
Objectius: <ul style="list-style-type: none"> • Començar a introduir la recta numèrica • Ubicar els diferents nombres en ordre i amb els espais apropiats. 	Instal·lació: Aula
	Nombre de participants: Tot el grup classe
	Material: Cartró i pinces Elaborarem un tauler amb una recta numèrica buida, separada per colors cada desena.
	Agrupació: Grups cooperatius
<u>Descripció</u>	<u>Representació gràfica</u>
<ol style="list-style-type: none"> 1. Es tindrà a una bossa totes les pinces. Cada pinça tindrà un nombre, depenent del nombre fins on es vol treballar, en aquest cas utilitzarem d'exemple el 30. 2. Cada grup cooperatiu disposarà d'un tauler i una bossa amb les pinces. 3. Per ordre, cada alumne agafa una pinça i depenent del nombre que li surt ho col·loca a una banda o a una altra. S'intentarà en tot moment situar-lo al lloc que li correspon. 4. És el torn del següent jugador. Aquest fa el mateix que l'anterior: agafa una pinça i la situa a la recta. 5. D'aquesta manera entre tots anirem afegint pinces a la recta fins que quedi aquesta plena. 6. Com la recta només es divideix per desenes si qualche vegada no hi cap un nombre, podem modificar la pinça. Només es vol que l'alumne sàpiga situar els nombres a la línia numèrica dona igual les distàncies. 7. Un cop s'ha omplert la recta numèrica es comprovarà entre tots els membres del grup. 	 <p>(Com és el tauler sense pinces)</p>  <p>(Tauler amb les pinces) (Les pinces si són dels colors de la recta numèrica és més senzill i visual).</p>

5.11. Activitat 11: A prop de, lluny de...

Activitat: A prop de, lluny de...	
Objectius: <ul style="list-style-type: none"> • Utilitzar la recta numèrica per explorar relacions entre grups de tres nombres. • Treballar distàncies relatives entre nombres. 	Instal·lació: Lloc prou ampli
	Nombre de participants: Tot el grup classe
	Material: Una corda i cartells amb els diferents nombres
	Agrupació: Tot el grup classe
<u>Descripció</u>	
<p>Aquesta activitat ens permet explorar la posició relativa dels nombres. El que es pretén és motivar a l'alumnat a què pensin sobre les distàncies que separen els tres nombres i com la recta numèrica pot ajudar a determinar la diferència entre aquests nombres.</p> <p>Es pot fer la mateixa activitat individualment amb llapis i paper.</p> <p>L'activitat consisteix en:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Es col·loca la corda per tota una banda de l'aula. 2. S'ubica el nombre 0 per saber on és el començament. 3. Es tria uns valors apropiats depenent amb l'edat que es treballarà. 4. Es demana als alumnes que triïn tres targetes que es trobaran a una bossa. 5. Després, se'ls demana que ubiquin de la millor manera possible les seves targetes a la recta numèrica buida amb els nombres que tenen a cada targeta. 6. Escoltarem les justificacions i raonaments sobre la ubicació que han triat. 7. A continuació començarem amb una sèrie de qüestions per motivar a l'alumnat a pensar sobre la distància que separen aquests tres nombres, com per exemple: <ul style="list-style-type: none"> - Quins nombres estan més prop? I més enfora? - Quin està més a prop del 0? - Quin nombre es troba a la meitat entre 5 i 17? - Quin nombre dels tres és major que 11 i menor que 30? 8. Un cop acabades les qüestions s'agafaran tres nombres més de la bossa. D'aquesta manera l'alumne veurà que de diferents nombres hi ha diferents qüestions per formular. 	

5.12. Activitat 12: Com d'enfora?

<u>Activitat: Com d'enfora?</u>	
Objectius: <ul style="list-style-type: none"> • Desenvolupar confiança i fluïdesa amb l'addició i la sustracció. • Visualitzar l'addició i la sustracció utilitzant la recta numèrica • Aplicar estratègies de la recta numèrica en diferents problemes 	Instal·lació: Aula
	Nombre de participants: Tot el grup classe
	Material: Fitxa
	Agrupació: Individualment
<u>Descripció</u>	
<p>És important que el nin/a compregui la relació entre la suma i la resta. Utilitzarem la recta numèrica com eina que ajuda als estudiants a reconèixer la relació entre addició i sostracció.</p> <p>Aquesta activitat es tracta de fer una fitxa de diferents sumes i restes utilitzant la recta numèrica buida. Es tracta d'utilitzar estratègies de salts entre desenes i centenes per facilitar les operacions.</p> <p>Per exemple, si es pretén que l'alumne arribi al nombre 23 amb els menors salts possibles pot fer el següent:</p>	
<p>La fitxa es troba a annexos (annex 1).</p>	

5.13. Activitat 13: App Robo Math Number Line Galaxy lite

<u>Activitat: App Robo Math Number Line Galaxy lite</u>	
Objectius: <ul style="list-style-type: none"> • Treballar la línia numèrica buida a través de les TIC. • Aprendre jugant. 	Instal·lació: Aula d'informàtica o aula
	Nombre de participants: Tot el grup classe
	Material: Ordinadors o tabletas i aplicació Robo Math Number Line.
	Agrupació: Individual

Descripció

Robo Math Number Line és tracta d'una aplicació per treballar la línia numèrica. Presenta diferents nivells i segons el nivell cada cop es més complex.

Es tracta de treballar la línia numèrica a través de les TIC i si cal utilitzar el collaret com eina facilitadora dels càlculs.

Aquesta App presenta els següents nivells:

1. Suma fins al 5 amb la recta numèrica
2. Suma fins al 10 amb la recta numèrica
3. Suma fins al 20 amb la recta numèrica
4. Els amics del 10, és a dir, els nombres que sumats fan 10.
5. Resta fins al 5
6. Resta fins al 10
7. Resta fins al 20
8. Suma fins al 50
9. El darrer nivell es treballen tots els continguts anteriors.



5.14. Activitat 14: fem bots espacials

Activitat: Feim bots espacials

Objectius:

- Treballar la suma amb el collaret i la recta numèrica

Instal·lació:


Aula

Nombre de participants:

Tot el grup classe

Material:

Daus, fitxes amb forma de nau i tauler.

	El tauler representa un recorregut de planetes i naus.
	Agrupació: Parelles cooperatives
<u>Descripció</u>	<u>Representació gràfica</u>
<p>Aquest joc consisteix a anar botant sobre els diferents planetes i naus dibuixades al tauler. És a dir, els alumnes han d'anar botant fins arribar al final de recorregut.</p> <p>Per poder moure's els nins tiren dos daus, un que representa les unitats i l'altre que representa les desenes i mouen la fitxa segons el nombre que surt als daus.</p> <p>L'objectiu es arribar a l final del recorregut.</p> <p>Aquest joc ajuda als nins i nines a desenvolupar una recta numèrica mental i, en qualque cas necessiten tenen un paper en blanc on poden fer línies numèriques buides per calcular-ho.</p> <p>El joc es basa en:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. El primer jugador tira el dau. Depenent del nombre que ha sortit mou la seva casella. 2. És el torn de l'altre jugador. 3. Acaba quan un dels jugadors arriba al final de la meta. 	

5.15. Activitat 15: El tauler

<u>Activitat 15: El tauler</u>	
Objectius: <ul style="list-style-type: none"> • Treballar tant les sumes com les restes amb el collaret. • Assolir el contingut de la recta numèrica. • Aprendre de forma lúdica. 	Instal·lació: Aula
	Nombre de participants: Tot el grup classe
	Material: Tauler, daus, fitxes i collaret de boles.
	Agrupació: Grups cooperatius
<u>Descripció</u>	<u>Representació gràfica</u>

Una proposta didàctica per treballar tots els comptes fins als milers en la recta numèrica es basa en un tauler de joc amb dues estacions superposades. (Veure imatge del tauler)

A la part de sota es treballarà amb sumes i a la part de dalt es treballarà amb restes.

El tauler a les dues parts té forma d'espiral i hi ha diferents caselles per poder passar d'una banda a l'altra, és a dir, si estàs a la part de sota treballant les sumes i caus a la casella de l'escala puges al tauler de dalt i ara es treballen les restes.

A la resta de caselles, cada una d'aquestes presenta instruccions que indica que s'ha de fer, és a dir, quina operació has de realitzar i quins daus has d'emprar.

En quant als daus, trobem:

- El dau que t'indica quantes caselles avances, es tracta d'un dau de sis cares numerades de l'1 al 6.
- 4 daus de 9 cares:
 - 1 per tractar les unitats
 - 1 per tractar les desenes
 - 1 per tractar les centenes
 - 1 per tractar els milers

Per tant, aquest joc didàctic presenta la següent dinàmica:

1. Un equip (parelles cooperatives) parteix de la casella inicial de les restes i l'altre de la casella inicial de les sumes.
2. L'equip que comença tira el dau per veure fins a quina casella ha d'avançar.

Cal destacar que cada casella té un enunciat que et diu amb quin nombre operes i quins daus has de tirar de forma que l'alumnat a partir de les estratègies que ells elegeixen amb la recta numèrica han de fer les sumes o les restes elegides per l'atzar dels daus indicats i, d'aquesta manera arribar al resultat de l'operació.

Per exemple, si comencem a la banda de la suma, tirem el primer dau i surt 3 aleshores avancem fins a la tercera casella, allà hi ha escrit el nombre 36 i un enunciat on indica que fem nombres dels daus de desena i centena. Tirem els daus de desena i centena i surt 40 i 200 respectivament. Ara emprant la recta numèrica hem de sumar al nostre nombre 36 els resultats dels daus.



(Tauler)

3. Si el resultat és correcte, és el torn del següent equip. En cas que no sigui correcte retrocedim fins on érem i és el torn del següent equip.

4. Com és un joc en espiral es tracta d'un joc que no té final, aleshores no té guanyador ni perdedor evitat així emocions negatives i càlculs ràpids per arribar abans.

Es tracta d'un joc per treballar la línia numèrica però reforçat amb el collaret de boles. És a dir, en cada operació l'alumne tindrà a la seva disposició tant un collaret de boles com una recta numèrica buida. D'aquesta manera el nin o nina pot triar allò que li sigui més convenient.

6. Conclusió

En conclusió, cal destacar la importància del material manipulatiu a l'aprenentatge de les matemàtiques, fomentar el paper actiu que presenta l'alumnat i sobretot la conversa tant individual com de manera grupal. Es tracta de què cada persona treballi les matemàtiques amb les estratègies que millor li convengui, ja que cada persona és un món i cada individu raona de manera diferent. S'ha d'evitar comptar amb els dits, per això es comença a treballar amb el collaret des d'educació infantil.

També cal destacar que la línia numèrica no només és un contingut d'educació primària sinó que també es pot treballar en altres cicles com per exemple es pot treballar a l'ESO amb els decimals i amb els nombres negatius. Per tant, es tracta d'un material que pot ser molt profitós si s'utilitza de manera correcta.

Per això mateix considero que val la pena reforçar i fer aquest pas del collaret de boles a la línia numèrica, ja que és una eina que si li donem un bon ús en el procés d'ensenyament-aprenentatge pot afavorir molt la competència matemàtica al llarg dels cicles superiors.

7. Bibliografia i altres documents consultats

La biografia comentada a continuació és la que m'ha ajudat a conèixer millor el tema del treball tot i que és molt breu esper anant ampliant aquesta informació.

- Álvarez, A., (1996). Actividades de matemáticas con Materiales didácticos. Madrid: MEC-Narcea.

- Área, M., Parcerisa, A. y Rodríguez, J. (Coords) (2010). Materiales y recursos didácticos en contextos comunitarios. Ed: Grao
- Barba, D. and Calvo, C., (2012). Calcular saltando sobre la línea numérica vacía. revistasuma, [online] (70), pp.115-122. Recuperado el 14 de marzo de 2020, de revistasuma.es/IMG/pdf/70/115-122.pdf
- Blanke, B. (2008). Using the Rekenrek as a Visual Model for Strategic Reasoning in Mathematics. e United States of America.: Macintosh Desktop Publishing system.
- Bressan, Zolkower & Gallego. (2004). La educación matemática realista. Principios en que se sustenta, Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática. pg.10
- Casas, L.M i Sánchez, C., (1998) Juegos y materiales manipulativos como dinamizadores del aprendizaje en Matemáticas. (Bilbao: Centro de publicaciones. Secretaria General Técnica.
- Cascallana, M. T. (1988). Iniciación de la Matemática. Materiales y recursos didácticos. Madrid, Santillana.
- Castro, E., y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 95-124). Barcelona: ice - Horsori.
- Chee Kin, L., & Suppiah Shanmugam, S. (2014). TEACHING NUMERACY THROUGH REKENREK. SEAMEO RECSAM.
- De Castro, C. (2015). Aprendiendo a subitizar cantidades con el rekenrek en un sistema online para el aprendizaje de las matemáticas. Épsilon, Revista de Educación Matemática. 32(2), 49-58.
- Dreher, A. & Kuntze, S. (2015). Teachers' professional knowledge and noticing: The case of multiple representations in the mathematics classroom. Educational Studies in Mathematics, 88(1), 89–114.
- Ernest, P. (1985), "The number line as a teaching aid", Educational Studies in Mathematics, núm. 16, pp. 411-424
- Flores, P y Rico, L., (2015) Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educació Primaria. Madrid: Ediciones Pirámide.
- Freudenthal, H (1991). Revisiting Mathematics Education: China Lectures, Kluwer, Dordrecht, Reidel Publishing Co.
- Jiménez, C. Y Roncal, L., (2015). Recursos en la enseñanza de las matemáticas. Curso 2015/2016. Logroño: Universidad de la Rioja.
- Kieran, C. (1998). Complexity and Insight. Journal for Research in Mathematics Education, vol. 29, 5, pp 595-601.
- Santos, R. (2018). USO DEL ÁBACO REKENREK EN EDUCACIÓN INFANTIL. *Treball de fi de grau*. Recuperat de <https://riull.ull.es/xmlui/bitstream/handle/915/8994/Uso%20del%20abaco%20Rekenrek%20en%20Educacion%20Infantil.pdf?sequence=1>

- Tournaki, N., Bae, Y., & Kerekes, J. (2008). Rekenrek: A manipulative used to teach addition and subtraction to pupils with learning disabilities. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal*, 6(2), 41-59.

8. Annexos

8.1. Annex 1

Plena el requadre amb el nombre correcte. Utilitza l'ajuda del collaret:

$$13 - 8 = \square$$

$$3 + 4 = \square$$

$$14 + \square = 26$$

$$4 + 6 = \square$$

$$\square + 8 = 40$$

$$8 - 3 = \square$$

$$24 + 7 = \square$$

$$4 + \square = 6$$

$$24 + \square = 41$$

$$\square + 4 = 10$$

$$\square - 15 = 63$$

$$4 + 7 = \square$$

8.2. Annex 2

- Na Maria té 5 caramels. La seva amiga Marta té 4 caramels. Quants caramels tenen entre les dues?
- Na Maria té 5 caramels però li donà alguns al seu amic Josep. Ara té 3 caramels. Quants caramels li donà al seu amic Josep?
- En Miquel juga a futbol. Té 6 pilotes de futbol a casa. El seu amic Marc li va regalar més pilotes. Ara en Miquel té 11 pilotes. Quantes pilotes li va regalar?
- La meva cussa ha tingut 5 canets i la meva moixa ha tingut 11 moixets. Quants animals acaben de néixer?
- El pati dura 30 minuts i el professor li donà 10 minuts als alumnes per jugar més. Quant de temps han estat els alumnes al pati?
- Hi ha 23 llapis de colors dins la capsa. Però na Maria en té 5 a la taula. Quants de llapis hi ha ne total?
- Vaig anar a la platja i vaig veure 18 copinyes. La meva amiga Isabel va veure algunes també. En total vam veure 54. Quantes copinyes va veure na Isabel?
- En Joan llegeix un llibre de 342 pàgines. Ja ha llegit 123 pàgines. Quantes pàgines ha de llegir per acabar el llibre?
- En Pere vol completar el seu àlbum de crosms. En total pot tenir 125. En Pere ja té 45 i la seva mare li va regalar 60. Quants necessita per completar l'àlbum?

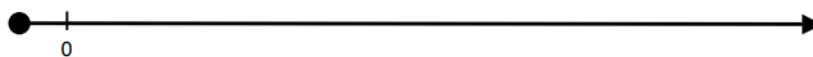
8.3. Annex 3

1. Ves d'un nombre a l'altre fent els menys salts possibles:

- Ves del nombre 0 al 23



- Ves del nombre 20 al 45



- Ves del 0 al 53



- Ves del 33 al 76



- Ves del 108 al 240



- Ves del 6 al 78



- Ves del 47 al 92

