



**Universitat de les  
Illes Balears**

Facultat de nom

**Memòria del Treball de Fi de Grau**

# Mecanismes de dissipació d'ones magnetohidrodinàmiques a plasmes astrofísics

Andrés Albillos Mayol

**Grau de Física**

Any acadèmic 2014-2015

DNI de l'alumne: 43215640C

Treball tutelat per Jose Luis Ballester Mortes  
Departament de Física

S'autoritza la Universitat a incloure el meu treball en el Repositori Institucional per a la seva consulta en accés obert i difusió en línia, amb finalitats exclusivament acadèmiques i d'investigació

Paraules clau del treball:  
Magnetohidrodinàmica, dissipació, ones, ...



# Índex

<b>1</b>	<b>Introducció</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Objectiu del treball</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Metodologia</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Equacions de la Magnetohidrodinàmica (MHD)</b>	<b>5</b>
4.1	Configuració d'equilibri . . . . .	6
4.2	Equacions linealitzades . . . . .	8
4.3	Anàlisi de Fourier . . . . .	9
4.4	Relació de dispersió general . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Cas ideal</b>	<b>13</b>
<b>6</b>	<b>Cas resistiu</b>	<b>15</b>
6.1	Propagació paral·lela . . . . .	15
6.2	Propagació perpendicular . . . . .	16
6.3	Propagació obliqua . . . . .	16
<b>7</b>	<b>Efecte de la difusivitat de Hall</b>	<b>16</b>
7.1	Propagació paral·lela . . . . .	17
7.2	Propagació perpendicular . . . . .	18
7.3	Propagació obliqua . . . . .	18
<b>8</b>	<b>Efectes produïts per la consideració conjunta del efecte Hall i la difusivitat magnètica</b>	<b>19</b>
8.1	Propagació paral·lela . . . . .	19
8.2	Propagació perpendicular . . . . .	20
8.3	Propagació obliqua . . . . .	20
<b>9</b>	<b>Cas viscós</b>	<b>20</b>
9.1	Efecte de $\eta_0$ . . . . .	21
9.1.1	Propagació paral·lela . . . . .	21
9.1.2	Propagació perpendicular . . . . .	21
9.1.3	Propagació obliqua . . . . .	22
9.2	Efecte de $\eta_1$ . . . . .	23
9.2.1	Propagació paral·lela . . . . .	23
9.2.2	Propagació perpendicular . . . . .	23
9.2.3	Propagació obliqua . . . . .	23
9.3	Efecte de $\eta_2$ . . . . .	24
9.3.1	Propagació paral·lela . . . . .	24
9.3.2	Propagació perpendicular . . . . .	25
9.3.3	Propagació obliqua . . . . .	25
9.4	Efecte de $\eta_3$ . . . . .	25

9.4.1	Propagació perpendicular . . . . .	25
9.4.2	Propagació obliqua . . . . .	26
9.5	Efecte de $\eta_4$ . . . . .	27
9.5.1	Propagació paral·lela i obliqua . . . . .	27
<b>10</b>	<b>Efecte conjunt del terme de Hall i del coeficient de viscositat <math>\eta_0</math></b>	<b>27</b>
<b>11</b>	<b>Aplicació al cas de ones lentes a llaços coronals de alta temperatura</b>	<b>27</b>
<b>12</b>	<b>Sumari i conclusions del treball</b>	<b>28</b>
<b>13</b>	<b>Referències</b>	<b>29</b>

## 1 Introducció

La major part de l'univers es troba en estat de plasma (estrelles, núvols moleculars, nebuloses planetàries, etc), i, generalment, aquests plasmes es troben magnetitzats. Un exemple típic de plasma magnetitzat és la atmòsfera del Sol i, en particular, la seva capa més externa coneguda com la Corona solar. Una de les eines utilitzades per l'estudi del comportament macroscòpic dels plasmes magnetitzats és la Magnetohidrodinàmica (MHD) que es pot veure com una síntesi entre l'electromagnetisme i la dinàmica de fluids (Goossens, 2003; Goedbloed and Poedts, 2004; Priest, 2014). La MHD tracta el plasma totalment ionitzat com un fluid en equilibri termodinàmic i els efectes relativistes són menyspreats, i una de les típiques aplicacions de la MHD és l'estudi de la propagació d'ones en el si de plasmes magnetitzats.

## 2 Objectiu del treball

L'objectiu d'aquest treball és l'estudi de la propagació de ones magnetohidrodinàmiques (MHD), en el si de un plasma magnetitzat amb condicions físiques típiques de la Corona solar, i del seu esmorteïment temporal mitjançant mecanismes dissipatius tals com la difusivitat magnètica i la viscositat. Com a una petita aplicació, els resultats obtinguts en el cas viscos (viscositat compressiva,  $\eta_0$ ) s'han aplicat a les observacions d'esmorteïment temporal de les ones lentes a llaços coronals de alta temperatura.

## 3 Metodologia

La metodologia emprada ha estat la següent:

1. En primer lloc hem definit una configuració d'equilibri per el plasma coronal magnetitzat
2. Considerant pertorbacions de petita amplitud, s'han linealitzat les equacions de la MHD
3. A les equacions linealitzades s'ha fet un anàlisi de Fourier en ones planes
4. A partir de les equacions resultants, i eliminant les pertorbacions de les velocitats, hem obtingut les relacions de dispersió per cada cas considerat
5. Com que volem estudiar l'esmorteïment temporal de les ones MHD, considerarem la freqüència  $\omega$  complexa ( $\omega = \omega_r + i\omega_i$ ) i el nombre d'ona,  $k$ , real.

## 4 Equacions de la Magnetohidrodinàmica (MHD)

Les equacions MHD que hem considerat són les següents:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B} - \eta_H \nabla \times [(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}] \quad (1)$$

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \frac{(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}}{\mu} - \nabla \cdot \Pi \quad (2)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{Dp}{Dt} - \frac{\gamma p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (4)$$

$$p = \frac{\rho R T}{\tilde{\mu}} \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (6)$$

corresponents a l'equació d'inducció, equació de moment, equació de continuïtat, equació d'energia (cas adiabàtic), equació d'estat i condició solenoidal del camp magnètic, respectivament, i on  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$ . A les equacions de d'alt,  $\eta$  és la difusivitat magnètica d'Ohm,  $\eta_H$  és la difusivitat magnètica de Hall,  $\Pi$  és el tensor viscositat (Braginskii, 1965; Vranjes, 2014), i  $p$ ,  $\rho$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{B}$  i  $\gamma$  representen la pressió, densitat, velocitat, camp magnètic i coeficient adiabàtic del plasma. A la equació d'inducció (1), s'han considerat els termes d'advecció, de difusivitat magnètica d'Ohm i de difusivitat de Hall.

Les forces considerades a l'equació de moment (2) són: El gradient de pressió del plasma, la força de Lorentz, que es pot interpretar com la suma d'una tensió magnètica ( $B_0^2/\mu$ ) i una pressió magnètica ( $B_0^2/2\mu$ ), i la força de viscositat, mentres que la força gravitatòria no s'ha tengut en compte. L'expressió general de la força de viscositat,  $\vec{F}_v$ , vé donada per la divergència del tensor viscositat,  $\Pi$ :

$$\vec{F}_v = -\nabla \cdot \Pi = -\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} \hat{e}_i \quad (7)$$

i les components  $\Pi_{ij}$  s'expressen en funció de les components del tensor de tensions,  $W_{\alpha\beta}$ , definit com:

$$W_{\alpha\beta} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \nabla \cdot \vec{v} \quad (8)$$

## 4.1 Configuració d'equilibri

Consideram geometria cartesiana i un plasma de hidrogen completament ionitzat e infinit, amb densitat, pressió i temperatura constants, permeat per un camp magnètic horitzontal i uniform (Figura 1). Les condicions físiques d'aquest plasma són característiques de la Corona solar:

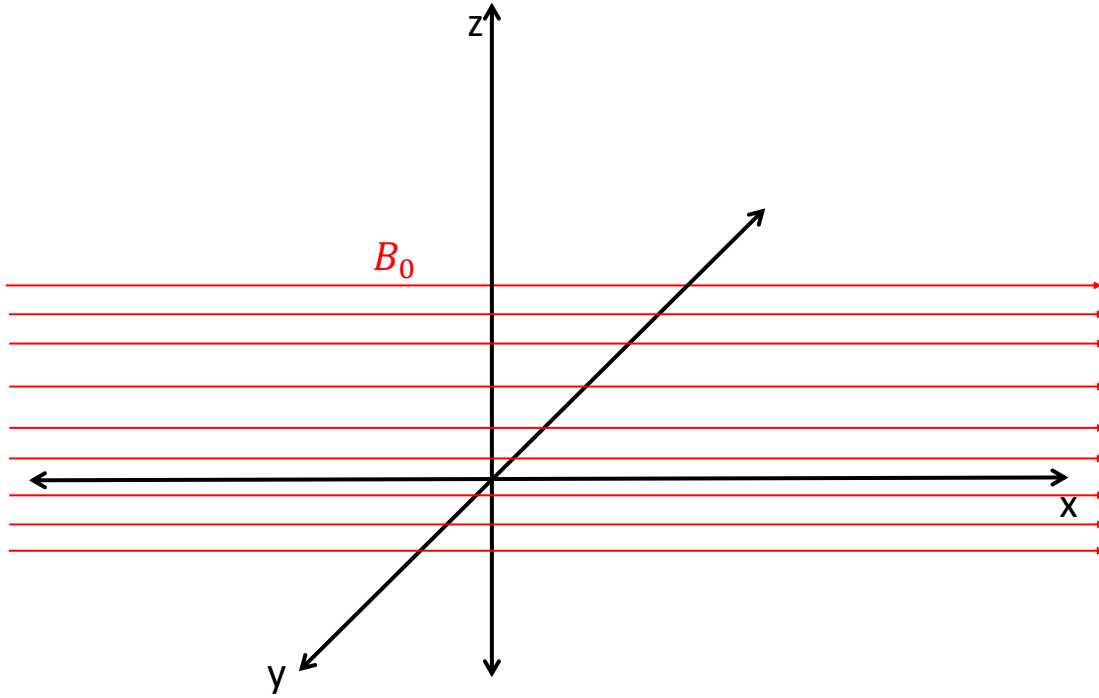


Figura 1: Plasma infinit amb un camp magnètic uniform orientat segons l'eix X.

$$\vec{B}_0 = 10^{-3} \hat{i} \text{ T} \quad (9)$$

$$T_0 = 10^6 \text{ K} \quad (10)$$

$$\mu = 0.5 \quad (11)$$

$$\rho_0 = 1.66 \times 10^{-13} \text{ kg m}^{-3} \quad (12)$$

$$\vec{v}_0 = 0 \quad (13)$$

En un camp magnètic intens, el producte de la freqüència ciclotrònica iònica ( $\omega_{ci}$ ) i el temps de col·lisió dels ions ( $\tau_i$ ) és  $\omega_{ci}\tau_i \gg 1$ . En el nostre estudi, la freqüència ciclotrònica iònica és  $\omega_{ci} \sim 10^5$  rad/s ( $T \sim 6.5 \times 10^{-5}$  s), i  $\omega_{ci}\tau_i \sim 9000$ , es a dir tenim un camp magnètic intens i, en aquest cas, les components del tensor viscositat en un sistema de coordenades amb l'eix  $X$  paral·lel al camp

magnètic tenen la forma següent (Vranjes, 2014):

$$\Pi_{xy} = \Pi_{yx} = -\eta_2 W_{xy} - \eta_4 W_{xz} \quad (14)$$

$$\Pi_{yz} = \Pi_{zy} = -\eta_1 W_{yz} + \frac{\eta_3}{2}(W_{yy} - W_{zz}) \quad (15)$$

$$\Pi_{xz} = \Pi_{zx} = -\eta_2 W_{xz} + \eta_4 W_{xy} \quad (16)$$

$$\Pi_{xx} = -\eta_0 W_{xx} \quad (17)$$

$$\Pi_{yy} = -\frac{\eta_0}{2}(W_{yy} + W_{zz}) - \frac{\eta_1}{2}(W_{yy} - W_{zz}) - \eta_3 W_{yz} \quad (18)$$

$$\Pi_{zz} = -\frac{\eta_0}{2}(W_{yy} + W_{zz}) - \frac{\eta_1}{2}(W_{zz} - W_{yy}) + \eta_3 W_{yz} \quad (19)$$

$$(20)$$

on les  $\eta_0$ ,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ,  $\eta_3$  i  $\eta_4$  són els coeficients de viscositat iònica donats per (Huba, 2004):

$$\eta_0 = 0.96nkT_i\tau_i \quad (21)$$

$$\eta_1 = \frac{3nkT_i}{10\omega_{ci}^2\tau_i} \quad (22)$$

$$\eta_2 = \frac{6nkT_i}{5\omega_{ci}^2\tau_i} \quad (23)$$

$$\eta_3 = \frac{nkT_i}{2\omega_{ci}} \quad (24)$$

$$\eta_4 = \frac{nkT_i}{\omega_{ci}} \quad (25)$$

on  $n$  és la densitat de partícules,  $k$  la constant de Boltzmann,  $T_i$ , la temperatura dels ions (asumida igual a la temperatura del plasma). Una vegada tenim els elements del tensor  $\Pi$ , feim les derivades adients i obtenim les components cartesianes de la força de viscositat.

## 4.2 Equacions linealitzades

La configuració d'equilibri d'alt descrita és perturbada mitjançant perturbacions de petita amplitud tal com:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1 \quad (26)$$

$$T = T_0 + T_1 \quad (27)$$

$$p = p_0 + p_1 \quad (28)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 = \vec{v}_1 \quad (29)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad (30)$$



Aquestes expressions es substitueixen dins les equacions MHD i es retenen ùnicament els termes d'ordre zero i els termes lineals en les perturbacions. Les equacions linealitzades obtingudes són:

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0) + \eta \nabla^2 \vec{B}_1 - \eta_H \nabla \times [(\nabla \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_0] \quad (31)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \frac{(\nabla \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_0}{\mu} - \nabla \cdot \Pi_1 \quad (32)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 = 0. \quad (33)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \gamma p_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 = 0. \quad (34)$$

$$p_1 = p_0 \left( \frac{T_1}{T_0} + \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) \quad (35)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_1 = 0. \quad (36)$$

### 4.3 Anàlisi de Fourier

Donat que el medi que consideram té dimensions infinites, sense cap frontera, podem fer un anàlisi de Fourier en ones planes. Llavors, asumim que totes les perturbacions es comporten tal com:

$$\delta(\vec{r}, t) = \delta_0 \cdot \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})) \quad (37)$$

on  $\delta$  correspon a les perturbacions  $\vec{B}_1$ ,  $\vec{v}_1$ ,  $p_1$ ,  $\rho_1$ ,  $T_1$ ;  $\delta_0$  és una amplitud constant, i  $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ . Aplicant aquest anàlisi de Fourier a les equacions linealitzades, i llevant el subíndex 1 de les perturbacions vectorials per comoditat, obtenim:

$$-i\omega B_x = \eta k^2 B_x - i(k_y B_0 v_y + k_z B_0 v_z) - \eta_H (k_y k_x B_z - k_z k_x B_y) B_0. \quad (38)$$

$$-i\omega B_y = \eta k^2 B_y - i k_x B_0 v_y - \eta_H (k_z k_x B_x - k_x^2 B_z) B_0. \quad (39)$$

$$-i\omega B_z = \eta k^2 B_z - i k_x B_0 v_z - \eta_H (k_x^2 B_y - k_x k_y B_x) B_0. \quad (40)$$

$$\begin{aligned} i\rho\omega v_x - i\rho_0 v^2 k_x &= +i k_x c_s^2 \rho \frac{k_x v_x + k_y v_y + k_z v_z}{\omega} - \eta_0 \left( \frac{4}{3} k_x^2 v_x - \frac{2}{3} (k_x k_y v_y + k_x k_z v_z) \right) - \\ &- \eta_2 \left( \frac{4}{3} k_x^2 v_x + k_x k_y v_x + k_x^2 v_y - \frac{2}{3} (k_x k_y v_y + k_x k_z v_z) \right) - \eta_4 (k_x^2 v_z - k_x^2 v_y). \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} i\rho\omega v_y - i\rho_0 v^2 k_y &= +i k_y c_s^2 \rho \frac{k_x v_x + k_y v_y + k_z v_z}{\omega} - \frac{i}{\mu} (k_x B_0 B_y - k_y B_0 B_x) - \\ &- \frac{\eta_0}{2} \left( \frac{4}{3} k_y^2 v_y - \frac{2}{3} (k_x k_y v_x + k_y^2 v_y) + \frac{4}{3} k_y k_z v_z - \frac{2}{3} (k_x k_y v_x + k_y k_z v_z) \right) + \\ -\eta_1 (k_z^2 v_y + k_y k_z v_z) &+ \frac{1}{2} \left( \frac{4}{3} k_y^2 v_y + \frac{2}{3} (k_x k_y v_x + k_y^2 v_y) + \frac{4}{3} k_y k_z v_z - \frac{2}{3} (k_x k_y v_x + k_y k_z v_z) \right) - \eta_2 (k_x k_y v_x + k_x^2 v_y) - \\ -\frac{\eta_3}{2} (k_y k_z v_x + k_y^2 v_y) &+ \frac{1}{2} \left( -\frac{4}{3} k_y k_z v_y - \frac{2}{3} (k_x k_z v_x + k_y k_z v_y) + \frac{4}{3} k_z^2 v_z + \frac{2}{3} (k_x k_z v_x + k_z^2 v_z) \right) - \eta_4 (k_x^2 v_x + k_x k_z v_x) \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned}
i\rho\omega v_z - i\rho_0 v^2 k_z = & + i k_z c_s^2 \rho \frac{k_x v_x + k_y v_y + k_z v_z}{\omega} - \frac{i}{\mu} (k_x B_0 B_z - k_z B_0 B_x) - \\
& - \frac{\eta_0}{2} \left( \frac{4}{3} k_y k_z v_y - \frac{2}{3} (k_x k_z v_x + k_z^2 v_y) + \frac{4}{3} k_z^2 v_z - \frac{2}{3} (k_x k_z v_x + k_z^2 v_z) \right) - \\
& - \eta_1 (k_y k_z v_y + k_y^2 v_z + \frac{1}{2} (-\frac{4}{3} k_y k_z v_y - \frac{2}{3} (k_x k_y v_y + k_y k_z v_y) + \frac{4}{3} k_z^2 v_z + \frac{2}{3} (k_x k_z v_x + k_z^2 v_z))) - \\
& - \eta_2 \left( \frac{4}{3} k_x^2 v_x - \frac{2}{3} (k_x k_y v_y + k_x k_z v_z) \right) - \eta_3 (k_z^2 v_y + k_y k_z v_z + \frac{1}{2} (-\frac{4}{3} k_y^2 v_y + \frac{4}{3} (k_x k_y v_x + k_y^2 v_y) + \frac{4}{3} k_y k_z v_z)) - \\
& - \eta_4 (k_x k_y v_x + k_x^2 v_y) \quad (43)
\end{aligned}$$

$$\omega \rho_1 = \rho_0 (k_x v_x + k_y v_y + k_z v_z) \quad (44)$$

$$p_1 = c_s^2 \rho_1 \quad (45)$$

$$p_1 = p_0 \left( \frac{T_1}{T_0} + \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) \quad (46)$$

$$k_x B_x + k_y B_y + k_z B_z = 0 \quad (47)$$

A partir de aquestes equacions, eliminant les perturbacions de les velocitats  $(v_x, v_y, v_z)$  es pot obtenir una relació de dispersió que descriuria el comportament de les diferents ones MHD presents al medi, així com el seu esmorteïment temporal.

En els casos en que un mecanisme dissipatiu és present, la resolució de la relació de dispersió, asumint un nombre d'ona real, ens proporcionarà freqüències complexes, i la part imaginària de la freqüència és la responsable del esmorteïment de la pertorbació. Aquest efecte es pot veure fàcilment a partir de l'equació (37) si substituïm  $\omega$  per  $\omega(k) = \omega_r(k) + i\omega_i(k)$ , obtenint  $\delta = \delta_0 \cdot \exp(i(\omega_r(k)t - \vec{k} \cdot \vec{r})) \cdot \exp(-\omega_i(k)t)$ . Es veu que la part real,  $\omega_r$ , de la freqüència és la responsable de la propagació de la pertorbació, i la imaginària,  $\omega_i$ , ho es del seu esmorteïment temporal. Les representacions gràfiques dels resultats es presenten en termes del període d'oscil·lació  $T = \frac{2\pi}{\omega_r}$ , i el temps d'esmorteïment,  $\tau = \frac{2\pi}{\omega_i}$ .

En el nostre estudi, considerarem únicament propagació en el pla XZ, es a dir, el vector d'ona és  $\vec{k}(k_x, 0, k_z)$  amb  $k_x = k \sin \theta$ ,  $k_z = k \cos \theta$ , i on  $\theta$  és l'angle que forma el vector d'ona  $\vec{k}$  amb l'eix Z.

#### 4.4 Relació de dispersió general

Seguint el procediment anteriorment explicat podem obtenir la següent relació de dispersió:

$$\begin{aligned}
& - (\eta k^2 + i \omega) \omega^2 \left( \frac{1}{2} B_0^2 \eta H^2 \mu^2 \cos[\theta]^6 \right. \\
& \quad (-3 i \rho \left( (9 \eta_1^2 + 27 \eta_0 \eta_1 + 18 \eta_2 \eta_1 - 12 \eta_3^2 + 4 \eta_0 \eta_3 - 3 \eta_0 \eta_4 + 9 \eta_3 \eta_4) k^2 + 18 i \eta_1 \rho \omega \right) cs^2 + \\
& \quad 2 \omega \left( (\eta_0 + \eta_2) (18 \eta_1^2 + (\eta_0 - 3 \eta_3) (5 \eta_3 + 3 \eta_4)) k^2 + 9 i (\eta_1 + \eta_3) (\eta_0 + 3 \eta_1 - 3 \eta_3) \rho \omega \right) + \\
& \quad k^2 \left( 3 i cs^2 (9 \eta_1^2 + 27 \eta_0 \eta_1 + 18 \eta_2 \eta_1 - 12 \eta_3^2 + 4 \eta_0 \eta_3 - 3 \eta_0 \eta_4 + 9 \eta_3 \eta_4) \rho - \right. \\
& \quad \quad 2 (\eta_0 + \eta_2) (18 \eta_1^2 + (\eta_0 - 3 \eta_3) (5 \eta_3 + 3 \eta_4)) \omega \left. \right) \cos[2\theta] \sin[\theta]^2 k^8 + \\
& \quad 3 B_0^2 \eta H^2 \mu^2 \cos[\theta]^5 \sin[\theta]^3 \left( k^2 \left( 3 i (3 \eta_1 (2 \eta_2 + \eta_4) + \eta_4 (\eta_0 + 3 \eta_2 + \eta_3 - 3 \eta_4)) \rho cs^2 + \right. \right. \\
& \quad \quad (2 \eta_4 \eta_0^2 + (6 \eta_1 \eta_4 - \eta_2 (5 \eta_3 + \eta_4)) \eta_0 + 3 \eta_1 (\eta_2 - \eta_4) (\eta_3 - 3 \eta_4) - \\
& \quad \quad \quad 3 \eta_3 \eta_4 (2 \eta_2 + \eta_3 - 3 \eta_4)) \omega \left. \right) \sin[\theta]^2 - 6 i \eta_1 \eta_2 \rho \omega^2 \left. \right) k^8 + \\
& \quad \mu \cos[\theta]^4 \left( B_0^2 k^6 \eta H^2 \mu \left( (2 (5 \eta_3 + 3 \eta_4) \eta_0^2 + (36 \eta_1^2 + 36 \eta_2 \eta_1 + \eta_2 (10 \eta_3 - 3 \eta_4) - \right. \right. \\
& \quad \quad 6 (5 \eta_3^2 + 8 \eta_4 \eta_3 + 3 \eta_4^2)) \eta_0 + 3 (12 \eta_2 \eta_1^2 + 3 (4 \eta_2^2 - 7 \eta_4 \eta_2 + 3 \eta_4^2)) \eta_1 + \\
& \quad \quad \quad 9 \eta_3 \eta_4^2 + 2 \eta_2^2 (5 \eta_3 + 3 \eta_4) - 2 \eta_2 (5 \eta_3^2 + 13 \eta_4 \eta_3 + 6 \eta_4^2)) \omega - \\
& \quad \quad \quad 3 i cs^2 (\eta_0 (27 \eta_1 + 27 \eta_2 + 4 \eta_3 - 3 \eta_4) + 3 (3 \eta_1^2 + 9 \eta_2 \eta_1 + 6 \eta_2^2 - \\
& \quad \quad \quad 4 \eta_3^2 + 6 \eta_4^2 - 3 \eta_2 \eta_4 - \eta_3 \eta_4)) \rho \right) \sin[\theta]^6 + \\
& \quad 3 B_0^2 i k^4 \eta H (B_0 (3 cs^2 (\eta_0 + \eta_3 - 3 \eta_4) \rho - 2 i (\eta_0 + \eta_2) \eta_3 \omega) + 3 \eta H \mu \rho \omega \\
& \quad \quad \left( (3 \eta_1^2 + 11 \eta_2 \eta_1 + \eta_0 (9 \eta_1 + \eta_2 + \eta_3) - 3 \eta_3 (\eta_3 + \eta_4)) \omega - 9 i cs^2 (\eta_0 + \eta_1 + \eta_2) \rho \right) \\
& \quad \quad \sin[\theta]^4 + k^2 (-9 i \eta_0 \eta H \rho \omega^2 B_0^3 + 9 (3 \rho (\omega (i \eta H^2 \mu \omega \rho^2 + \eta_1) - i k^2 \eta \eta_1) cs^2 + \\
& \quad \quad \quad \omega (4 \eta \eta_1 (\eta_0 + \eta_2) k^2 + \omega (-\eta_0 \eta H^2 \mu \omega \rho^2 - 6 \eta_1 \eta H^2 \mu \omega \rho^2 + 4 i \eta_0 \eta_1 + 4 i \eta_1 \eta_2))) \\
& \quad \quad \quad B_0^2 + \mu (\eta k^2 + i \omega)^2 (2 (\eta_0 + \eta_2) (18 \eta_1^2 + (\eta_0 - 3 \eta_3) (5 \eta_3 + 3 \eta_4)) \omega - \\
& \quad \quad \quad 3 i cs^2 (9 \eta_1^2 + 27 \eta_0 \eta_1 + 18 \eta_2 \eta_1 - 12 \eta_3^2 + 4 \eta_0 \eta_3 - 3 \eta_0 \eta_4 + 9 \eta_3 \eta_4) \rho) \\
& \quad \quad \quad \sin[\theta]^2 + 9 i \rho \omega (\eta k^2 + i \omega) (3 \eta_1 \mu \rho (\omega - i k^2 \eta) cs^2 + \\
& \quad \quad \quad \omega (3 \eta_1 B_0^2 + (\eta_1 + \eta_3) (\eta_0 + 3 \eta_1 - 3 \eta_3) \mu (\eta k^2 + i \omega))) \left. \right) k^4 + 3 \mu \cos[\theta]^3 \sin[\theta] \\
& \quad (B_0^2 k^6 \eta H^2 \mu (3 i (6 \eta_2^2 + (6 \eta_4 - 4 \eta_3) \eta_2 + 3 \eta_1 (2 \eta_2 + \eta_4) + \eta_4 (\eta_0 + \eta_3 - 6 \eta_4)) \rho cs^2 + \\
& \quad \quad (2 \eta_4 \eta_0^2 + (6 (\eta_1 - \eta_4) \eta_4 - 5 \eta_2 (\eta_3 - \eta_4)) \eta_0 + \\
& \quad \quad \quad 3 (\eta_1 (\eta_2 - \eta_4) (\eta_3 - 3 \eta_4) + \eta_4 (2 \eta_2^2 - 2 (\eta_3 + 2 \eta_4) \eta_2 - \eta_3^2 + 3 \eta_4^2 + 2 \eta_3 \eta_4)) \omega) \\
& \quad \quad \quad \sin[\theta]^6 + 3 B_0^2 i k^4 \eta H (\eta H \mu \rho \omega (3 i (2 \eta_2 + \eta_4) \rho cs^2 + \\
& \quad \quad \quad (-2 \eta_2^2 - 2 \eta_1 \eta_2 + (\eta_3 - 3 \eta_4) \eta_2 + \eta_4 (2 \eta_0 - \eta_3 + 3 \eta_4)) \omega) + \\
& \quad \quad \quad B_0 (3 cs^2 (\eta_2 - 2 \eta_4) \rho - i (2 \eta_0 (\eta_2 - 2 \eta_4) + \eta_4 (-2 \eta_2 - \eta_3 + 3 \eta_4)) \omega) \left. \right) \sin[\theta]^4 + \\
& \quad k^2 (3 i \mu \rho (\eta^2 (3 \eta_1 (2 \eta_2 + \eta_4) + \eta_4 (\eta_0 + 3 \eta_2 + \eta_3 - 3 \eta_4)) k^4 + \\
& \quad \quad 6 i \eta (\eta_1 + \eta_2 - \eta_4) \eta_4 \omega k^2 - (3 \eta_1 (2 \eta_2 + \eta_4) + \eta_4 (\eta_0 + 3 \eta_2 + \eta_3 - 3 \eta_4)) \omega^2) \\
& \quad \quad cs^2 + \omega (3 (\eta_2 - \eta_4) (\eta_3 - 3 \eta_4) (\eta k^2 + i \omega) B_0^2 + \\
& \quad \quad \quad \mu (\eta^2 (2 \eta_4 \eta_0^2 - \eta_2 (5 \eta_3 + \eta_4) \eta_0 - 3 (\eta_3 - 3 \eta_4) (\eta_3 \eta_4 + \eta_1 (\eta_4 - \eta_2))) k^4 - \\
& \quad \quad \quad 2 i \eta (\eta_0 \eta_2 (5 \eta_3 + \eta_4) - 9 \eta_4 (\eta_3 \eta_4 + \eta_1 (\eta_4 - \eta_2))) \omega k^2 + \\
& \quad \quad \quad (-2 \eta_4 \eta_0^2 + \eta_2 (5 \eta_3 + \eta_4) \eta_0 + 3 (\eta_3 - 3 \eta_4) (\eta_3 \eta_4 + \eta_1 (\eta_4 - \eta_2))) \omega^2) \left. \right) \\
& \quad \sin[\theta]^2 - 6 i \eta_1 \eta_2 \mu \rho \omega^2 (\eta k^2 + i \omega)^2) k^4 + 9 \mu \cos[\theta] \sin[\theta] (B_0^2 k^6 \eta H^2 \mu \\
& \quad (3 i (2 \eta_2^2 + \eta_4 \eta_2 - \eta_4^2) \rho cs^2 + \eta_4 (2 \eta_2^2 - 4 \eta_4 \eta_2 + 3 \eta_4^2 + 2 \eta_0 (\eta_2 - \eta_4) - \eta_3 \eta_4) \omega) \\
& \quad \sin[\theta]^8 + B_0^2 i k^4 \eta H \\
& \quad (\eta H \mu \rho \omega (3 i (2 \eta_2 + \eta_4) \rho cs^2 + (-2 \eta_2^2 + (\eta_3 - 3 \eta_4) \eta_2 + \eta_4 (2 \eta_0 - \eta_3 + 3 \eta_4)) \omega) + \\
& \quad \quad B_0 (3 cs^2 (\eta_2 - 2 \eta_4) \rho - i (2 \eta_0 (\eta_2 - 2 \eta_4) + \eta_4 (-2 \eta_2 - \eta_3 + 3 \eta_4)) \omega) \left. \right) \sin[\theta]^6 + \\
& \quad k^2 \left( (3 i (2 \eta_2 + \eta_4) \rho (\eta k^2 + i \omega) cs^2 + \omega (\eta (\eta_2 (\eta_3 - 3 \eta_4) + \eta_4 (2 \eta_0 - \eta_3 + 3 \eta_4)) k^2 + \right. \\
& \quad \quad \quad i \omega (\eta_4 (2 \eta_0 - \eta_3 + 3 \eta_4) + \eta_2 (-2 i \eta H^2 \mu \omega \rho^2 + \eta_3 - 3 \eta_4))) B_0^2 + \mu (\eta k^2 + i \omega)^2 \\
& \quad \quad \quad (3 i (2 \eta_2^2 + \eta_4 \eta_2 - \eta_4^2) \rho cs^2 + \eta_4 (2 \eta_2^2 - 4 \eta_4 \eta_2 + 3 \eta_4^2 + 2 \eta_0 (\eta_2 - \eta_4) - \eta_3 \eta_4) \omega) \left. \right) \\
& \quad \sin[\theta]^4 - \rho \omega (\eta k^2 + i \omega) (3 (2 \eta_2 + \eta_4) \mu \rho (\eta k^2 + i \omega) cs^2 + \\
& \quad \quad i \omega (2 \eta_2 B_0^2 + (2 \eta_2^2 - (\eta_3 - 3 \eta_4) \eta_2 + \eta_4 (-2 \eta_0 + \eta_3 - 3 \eta_4)) \mu (\eta k^2 + i \omega)) \left. \right) \\
& \quad \sin[\theta]^2 + 4 i \eta \eta_2 \mu \rho^2 \omega^4) k^4 + 3 \cos[\theta]^2 \\
& (B_0^2 k^8 \eta H^2 \mu^2 \left( (9 \eta_4^3 - 12 \eta_2 \eta_4^2 + 9 \eta_3 \eta_4^2 - 6 \eta_2^2 \eta_4 - 20 \eta_2 \eta_3 \eta_4 + 10 \eta_2^2 \eta_3 + \right. \\
& \quad \quad 3 \eta_1 (4 \eta_2^2 - 7 \eta_4 \eta_2 + 3 \eta_4^2) + \eta_0 (12 \eta_1 \eta_2 - \eta_4 (3 \eta_2 + 10 \eta_3 + 6 \eta_4)) \left. \right) \omega - \\
& \quad \quad 3 i cs^2 (6 \eta_2^2 + 9 \eta_0 \eta_2 + 3 \eta_1 \eta_2 - 3 \eta_4 \eta_2 + 6 \eta_4^2 - 4 \eta_3 \eta_4) \rho) \sin[\theta]^8 + \\
& \quad B_0^2 k^6 \eta H \mu (3 \eta H \mu \rho \omega (3 (3 \eta_0 + 2 \eta_1 + 4 \eta_2) \rho cs^2 + i (4 \eta_2^2 + 5 \eta_0 \eta_2 + 11 \eta_1 \eta_2 - \\
& \quad \quad 7 \eta_4 \eta_2 + 3 \eta_4^2 + 8 \eta_0 \eta_1 - 3 \eta_3 \eta_4) \omega) + B_0 (3 i (\eta_0 + \eta_3 - 6 \eta_4) \rho cs^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-4 \eta_0^2 + (-4 \eta_2 + 2 \eta_3 + 6 \eta_4) \eta_0 - 12 \eta_2^2 + 9 \eta_4^2 + 2 \eta_2 (\eta_3 + 9 \eta_4)) \omega) \sin[\theta]^6 + \\
& k^4 (3 (4 (\eta_0 + \eta_2) \omega - 3 i \text{cs}^2 \rho) B_0^4 - 3 i (\eta_0 - 3 \eta_4) \eta_H \mu \rho \omega^2 B_0^3 + \\
& 3 \mu (3 \rho (\omega (2 i \eta_H^2 \mu \omega \rho^2 + 3 \eta_0 + 2 \eta_1 + 3 \eta_2) - i k^2 \eta (3 \eta_0 + 2 \eta_1 + 3 \eta_2)) \text{cs}^2 + \\
& \omega (\eta (4 \eta_2^2 + 4 \eta_0 \eta_2 + 8 \eta_1 \eta_2 - 3 \eta_4 \eta_2 + 3 \eta_4^2 + 8 \eta_0 \eta_1) k^2 + \\
& i \omega (4 \eta_2^2 + 4 \eta_0 \eta_2 + 8 \eta_1 \eta_2 - 3 \eta_4 \eta_2 + 7 i \eta_H^2 \mu \rho^2 \omega \eta_2 + \\
& 3 \eta_4^2 + 8 \eta_0 \eta_1 + 5 i \eta_0 \eta_H^2 \mu \rho^2 \omega + 6 i \eta_1 \eta_H^2 \mu \rho^2 \omega))) B_0^2 + \\
& \mu^2 (\eta k^2 + i \omega)^2 ((10 \eta_3 \eta_2^2 + 6 \eta_4 \eta_2^2 - 12 \eta_4^2 \eta_2 - 20 \eta_3 \eta_4 \eta_2 + 9 \eta_3 \eta_4^2 + \\
& 3 \eta_1 (4 \eta_2^2 - 7 \eta_4 \eta_2 + 3 \eta_4^2) + \eta_0 (12 \eta_1 \eta_2 - \eta_4 (3 \eta_2 + 10 \eta_3 + 6 \eta_4))) \omega - \\
& 3 i \text{cs}^2 (6 \eta_2^2 + 9 \eta_0 \eta_2 + 3 \eta_1 \eta_2 - 3 \eta_4 \eta_2 + 6 \eta_4^2 - 4 \eta_3 \eta_4) \rho) \sin[\theta]^4 + \\
& 3 k^2 \rho \omega (3 i \omega B_0^4 + \mu (6 \rho (\eta k^2 + i \omega) \text{cs}^2 + i \omega (\eta (5 \eta_0 + 6 \eta_1 + 7 \eta_2) k^2 + \\
& i \omega (3 i \eta_H^2 \mu \omega \rho^2 + 5 \eta_0 + 6 \eta_1 + 7 \eta_2)))) B_0^2 + \\
& \mu^2 (3 (3 \eta_0 + 2 \eta_1 + 3 \eta_2) \rho (k^4 \eta^2 - \omega^2) \text{cs}^2 + i \omega (\eta^2 (\eta_0 \eta_2 + 11 \eta_1 \eta_2 - 3 \eta_3 \eta_4) k^4 - \\
& 6 i \eta \eta_3 \eta_4 \omega k^2 - (\eta_0 \eta_2 + 11 \eta_1 \eta_2 - 3 \eta_3 \eta_4) \omega^2)) \sin[\theta]^2 - \\
& 3 \mu \rho^2 \omega^2 (\eta k^2 + i \omega) (3 \mu \rho (\omega - i k^2 \eta) \text{cs}^2 + \omega (3 B_0^2 + (\eta_0 + 6 \eta_1) \mu (\eta k^2 + i \omega)))) k^2 - \\
& \frac{3}{8} i (24 B_0^2 i k^{10} \eta_4 (3 \eta_4^2 - 4 \eta_2^2) \eta_H^2 \mu^2 \omega \sin[\theta]^{10} + \\
& 24 B_0^2 k^8 \eta_H \mu (\eta_H \mu \rho \omega (3 i \text{cs}^2 \eta_2 \rho - (4 \eta_2^2 + 4 \eta_0 \eta_2 - 7 \eta_4 \eta_2 + 3 \eta_4^2) \omega) + \\
& B_0 (3 \eta_4 \rho \text{cs}^2 + i (-4 \eta_2^2 + 8 \eta_4 \eta_2 + 3 \eta_4^2 + 4 \eta_0 \eta_4) \omega)) \sin[\theta]^8 + \\
& 24 k^6 ((3 \rho \text{cs}^2 + 4 i (\eta_0 + \eta_2) \omega) B_0^4 - 3 \eta_4 \eta_H \mu \rho \omega^2 B_0^3 + \\
& \mu (3 \rho (\eta \eta_2 k^2 + \omega (i \eta_2 - \eta_H^2 \mu \rho^2 \omega)) \text{cs}^2 + i \omega (\eta (4 \eta_2^2 + 4 \eta_0 \eta_2 - 7 \eta_4 \eta_2 + 3 \eta_4^2) k^2 + \\
& i \omega (4 \eta_2^2 + 4 \eta_0 \eta_2 - 7 \eta_4 \eta_2 + 7 i \eta_H^2 \mu \rho^2 \omega \eta_2 + 3 \eta_4^2 + 4 i \eta_0 \eta_H^2 \mu \rho^2 \omega))) B_0^2 + \\
& i \eta_4 (3 \eta_4^2 - 4 \eta_2^2) \mu^2 \omega (\eta k^2 + i \omega)^2) \sin[\theta]^6 - 24 k^4 \rho \omega (3 \omega B_0^4 + \\
& \mu (6 \rho (\omega - i k^2 \eta) \text{cs}^2 + \omega (\eta (8 \eta_0 + 11 \eta_2) k^2 + \omega (-3 \eta_H^2 \mu \omega \rho^2 + 8 i \eta_0 + 11 i \eta_2))) B_0^2 + \\
& \mu^2 (\eta k^2 + i \omega)^2 ((4 \eta_2^2 + 4 \eta_0 \eta_2 - 7 \eta_4 \eta_2 + 3 \eta_4^2) \omega - 3 i \text{cs}^2 \eta_2 \rho) \sin[\theta]^4 - \\
& 24 k^2 \mu \rho^2 \omega^2 (\eta k^2 + i \omega) (3 \mu \rho (\eta k^2 + i \omega) \text{cs}^2 + i \omega (6 B_0^2 + (4 \eta_0 + 7 \eta_2) \mu (\eta k^2 + i \omega))) \\
& \sin[\theta]^2 + \\
& \mu (3 B_0^2 \text{cs}^2 \eta_2 \eta_3 \eta_H^2 \mu \rho \sin[2 \theta]^5 k^{10} - B_0^3 i (\eta_0 + \eta_2) (2 \eta_0 + 3 \eta_4) \eta_H \omega \sin[2 \theta]^4 k^8 + \\
& 2 \mu (3 \rho (2 \eta^2 \eta_2 \eta_3 k^4 - i \eta (6 \eta_1 \eta_2 - 4 \eta_3 \eta_2 + (\eta_0 + \eta_3) \eta_4) \omega k^2 - 2 \eta_2 \eta_3 \omega^2) \text{cs}^2 + \\
& \omega (3 i \eta^2 (\eta_0 \eta_1 - \eta_2 \eta_3) \eta_4 k^4 + \eta ((3 \eta_3 (2 \eta_2 + \eta_3) - 2 \eta_0^2) \eta_4 - 3 \eta_1 \\
& (\eta_2 \eta_3 - \eta_4 \eta_3 + 2 \eta_0 \eta_4)) \omega k^2 + 3 i (B_0^2 \eta_2 \eta_H^2 \rho^2 - \eta_0 \eta_1 \eta_4 + \eta_2 \eta_3 \eta_4) \omega^2)) \\
& \sin[2 \theta]^3 k^6 - 12 \mu \rho \omega^2 (4 \eta^2 \eta_0 \eta_1 k^4 + \eta (3 (3 \eta_0 + 2 \eta_1 + 3 \eta_2) \rho \text{cs}^2 + \\
& i (8 \eta_0 \eta_1 + 11 \eta_2 \eta_1 + \eta_0 \eta_2) \omega) k^2 - 4 \eta_0 \eta_1 \omega^2) \sin[2 \theta]^2 k^4 + \\
& 24 i \eta_2 \mu \rho^2 \omega^3 (k^4 \eta^2 - \omega^2) \sin[2 \theta] k^2 + 72 \mu \rho^3 \omega^4 (\eta k^2 + i \omega)^2)) = 0
\end{aligned}$$

Donat que aquesta relació de dispersió és molt complexa i resulta difícil esbrinar el comportament de les ones, considerarem diferents casos que, al mateix temps, ens permetran introduir els diferents tipus d'ones MHD. Els casos considerats seràn:

1. Ideal
2. Resistiu
3. Ideal amb efecte Hall
4. Resistiu amb efecte Hall
5. Viscós

En general, dins cada cas considerat distingirem entre propagació paral·lela al camp magnètic ( $\theta = \pi/2$ ), propagació perpendicular ( $\theta = 0$ ) i propagació obliqua ( $\theta = \pi/4$ )

## 5 Cas ideal

En aquest cas no es considera cap mecanisme dissipatiu, ni l'efecte Hall, i la relació de dispersió vé donada per:

$$(\omega^2 - k^2 c_a^2 \sin^2 \theta)(\omega^4 - k^2(c_a^2 + c_s^2) - c_a^2 c_s^2 k^4 \sin^2 \theta) = 0 \quad (48)$$

on  $c_a$  és la velocitat de Alfvén:

$$c_a = \frac{B_0}{\sqrt{\rho \mu}} \quad (49)$$

i  $c_s$ , la velocitat del só ( $c_s = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$ ). Tenint en compte les condicions físiques del medi considerat, els valors d'aquestes velocitats són:  $c_a = 2190 \text{ km/s}$  i  $c_s = 166 \text{ km/s}$ , es a dir,  $c_a \gg c_s$ .

La relació de dispersió (48) es pot separar en dos. El primer parèntesi correspon a la relació de dispersió de les ones d'Alfvén:

$$\omega = c_a k \sin \theta \quad (50)$$

mentres que el segon correspon a la relació de dispersió de les ones magnetoacústiques:

$$\omega^2 = \frac{k^2}{2}(c_a^2 + c_s^2) \pm \frac{k^2}{2} \sqrt{(c_s^2 + c_a^2)^2 - 4c_s^2 c_a^2 k^2 \sin^2(\theta)} \quad (51)$$

A partir de la relació de dispersió de les ones magnetoacústiques podem obtenir dues ones: la ona ràpida, que correspon al signe positiu, i la ona lenta, que correspon al signe negatiu. Per propagació paral·lela al camp magnètic, la relació de dispersió és:

1. Ona ràpida:  $\omega = c_a k$
2. Ona lenta:  $\omega = c_s k$

mentres que per propagació perpendicular al camp magnètic només compareix la ona ràpida, i la relació de dispersió és:

$$\omega = \sqrt{c_s^2 + c_a^2}k \quad (52)$$

A la relació de dispersió per el cas ideal també hi compareix un factor  $\omega^3$  que representa ones d'entropia. Aquestes ones, en absència de mecanismes dissipatius, tenen freqüència real nul·la ( $\omega_r = 0$ ) però són solucions de la relació de dispersió i representen únicament una perturbació de la densitat (o entropia) que no propaga (Priest, 2014; Goedbloed & Poedts, 2004). A la Figura 2 es poden veure les tres ones, en el cas de propagació obliqua, i la seva ordenació: L'ona de freqüència més elevada correspon a la ràpida, donat que la seva velocitat de fase és una combinació de la d'Alfvén i la del só, la segona correspon a l'ona d'Alfvén, i la tercera a la lenta. Algunes

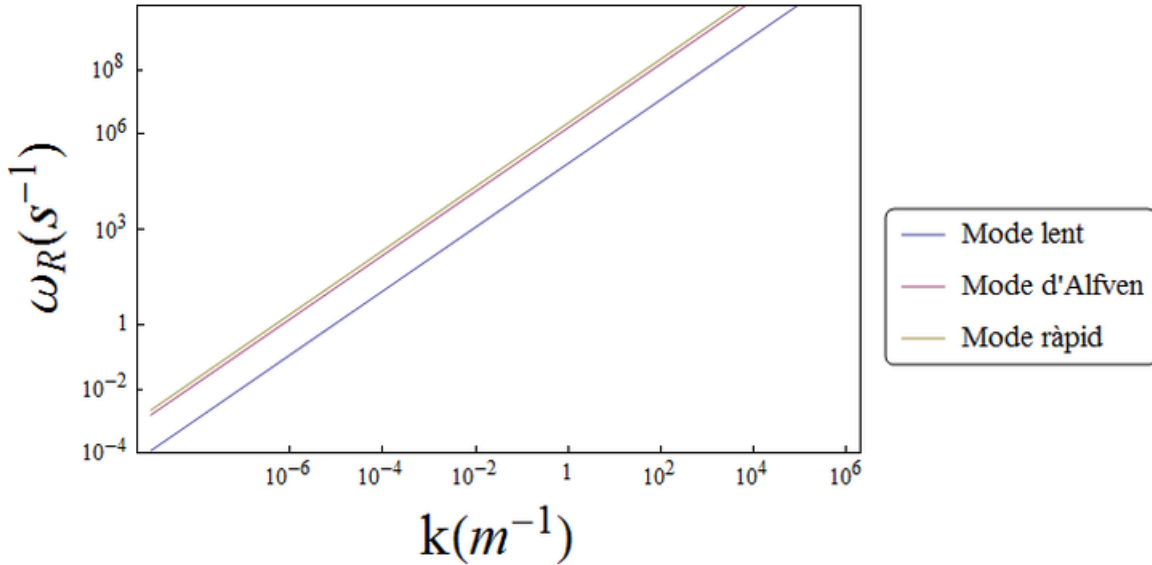


Figura 2: Cas ideal: Ones ràpida, Alfvén i lenta (Propagació obliqua)

característiques de les diferents ones MHD es descriuen a continuació.

**Ones d'Alfvén:** a) produïdes per la tensió magnètica; b) sense perturbacions de presió i densitat, c) són anisotròpiques i no propaguen en direcció perpendicular al camp magnètic; d) L'energia flueix al llarg de les línees del camp magnètic a la velocitat d'Alfvén.

**Ones magnetoacústiques ràpides:** a) Produïdes per forces de presió i tensió; b) tenen perturbacions de presió i densitat; c) el fluxe d'energia és isotròpic; d) la seva propagació és isotròpica amb una certa preferència per la direcció perpendicular al camp magnètic.

**Ones magnetoacústiques lentes:** a) Produïdes per forces de presió i tensió; b) tenen perturbacions de presió i densitat; c) fluxe d'energia força anisotròpic i confinat al voltant de les línees de força; d) Propagació anisotròpica i no propaguen en direcció perpendicular al camp magnètic.

## 6 Cas resistiu

La difusivitat magnètica és el primer mecanisme dissipatiu que introduïrem. Està causada per les col·lisions entre protons i electrons que donen lloc a la dissipació òhmica. Concretament, l'expressió de la difusivitat magnètica és  $\eta = \frac{1}{\mu\sigma}$ , essent  $\sigma$  la conductivitat. La relació de dispersió per aquest cas és:

$$(k^2\eta + i\omega)(c_a^2 k^2 \sin^2\theta - \omega(-ik^2\eta + \omega))((c_s k - \omega)\omega(c_s k + \omega)(-ik^2\eta + \omega) - c_a^2 c_s^2 k^4 \sin^2\theta + c_a^2 k^2 \omega^2) = 0 \quad (53)$$

La presència de un mecanisme dissipatiu fa que les ones d'entropia tinguin una freqüència imaginària. El primer parèntesi de la relació de dispersió correspon a una ona d'entropia, que també compareix factoritzat dins el tercer parèntesi:

$$\omega_i = -ik^2\eta \quad (54)$$

El segon parèntesi correspon a una ona d'Alfvén resistiva, i la relació de dispersió és:

$$\omega = \frac{+ik^2\eta \pm \sqrt{-k^4\eta^2 + 4c_a^2 k^2 \sin^2\theta}}{2} \quad (55)$$

Una particularitat d'aquesta relació de dispersió és l'aparició d'un nombre d'ona de tall. Per valors majors que aquest nombre d'ona, la ona no propaga i tenim una oscil·lació esmorteïda. Aquest nombre d'ona de tall vé donat per:

$$k_{tall} = \frac{2c_a \sin\theta}{\eta} \quad (56)$$

que fa nul·la la part real de la freqüència (55). Per un altra banda, a partir del nombre d'ona de tall, la part imaginària de la freqüència tindrà dues branques corresponents als dos signes  $\pm$ .

Respecte al tercer terme, correspon a ones magnetoacústiques resistives, amb la següent relació de dispersió:

$$+c_a^2 c_s^2 k^4 \sin^2\theta + ic_s^2 k^4 \eta \omega - (c_s^2 + c_a^2) k^2 \omega^2 - ik^2 \eta \omega^3 + \omega^4 = 0 \quad (57)$$

### 6.1 Propagació paral·lela

Aquest cas ens dona la següent relació de dispersió:

$$(c_s k - \omega)(c_s k + \omega)(c_a^2 k^2 + ik^2 \eta \omega - \omega^2) = 0 \quad (58)$$

A partir de la relació de dispersió veim que tenim una ona d'Alfvén resistiva i una ona lenta, que no es veu afectada per la resistivitat del plasma. El comportament del període i el temps d'esmoreïment front al nombre d'ona es pot veure a la Figura 3. Aquesta Figura mostra el nombre d'ona de tall per l'ona de Alfvén, tal com prediu l'equació (56), i una ona lenta ideal. La Figura 3 mostra també el comportament del temps d'esmoreïment per l'ona d'Alfvén el qual a partir del nombre d'ona de tall es bifurca en dues branques. També es pot observar el temps d'esmoreïment de l'ona d'entropia que és una ona que no propaga.

## 6.2 Propagació perpendicular

En aquest cas tenim una ùnica ona que és la ràpida (Veure Figura 4) i mostra també un nombre d'ona de tall que vé donat per:

$$k_{tall} = \frac{2c_a}{\eta} \quad (59)$$

Una de les condicions per la validesa de l'aproximació MHD és que la freqüència, en aquest cas de l'ona, sigui molt més petita que la freqüència ciclotrònica dels ions. Tant en aquest cas com a l'anterior, la freqüència real corresponent al nombre d'ona de tall és molt més gran que la freqüència ciclotrònica dels ions, i per tant ens trobam fora del domini d'aplicació de la MHD.

## 6.3 Propagació obliqua

Ara suposam que el vector nombre d'ona es troba al pla  $XZ$  i per tant l'ona es propaga en direcció obliqua al camp magnètic. Aquest cas no ens redueix la relació de dispersió significativament, pero sí mostra la coexistència de les tres ones (Alfvén, lenta i ràpida) com al cas ideal (Figura 5), i mostra també l'aparició de nombres d'ona de tall per les ones ràpides i d'Alfvén.

## 7 Efecte de la difusivitat de Hall

Quan el període de l'ona és major que el període de gir al voltant de les línees de camp, les partícules es desplaçen en direcció perpendicular al camp elèctric i magnètic amb una velocitat  $u = \vec{E} \times \vec{B} / B^2$ . Els electrons i els ions es mouen en sentits diferents quan la freqüència de l'ona és comparable a la freqüència ciclotrònica. Aquest moviment diferencial és el corrent de Hall i la llei de Ohm és:

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} + \frac{1}{en_e} \vec{j} \times \vec{B} + \eta \vec{j} \quad (60)$$

quan també consideram la resistivitat (Cramer, 2001). En aquesta secció no tendrem en compte la difusivitat magnètica ( $\eta$ ) a l'equació de inducció (1) i, en canvi, inclourem el terme de Hall. En

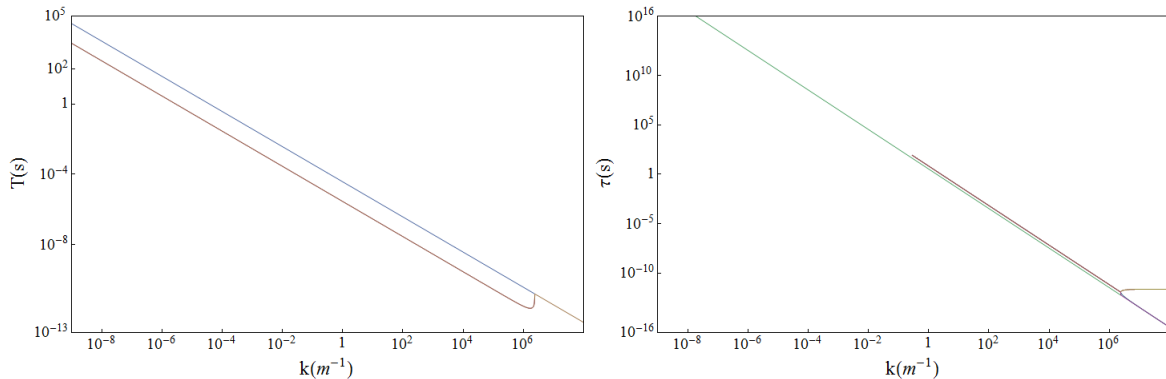


Figura 3: Cas resistiu: Període i temps d'esmoreïment vs nombre d'ona (Propagació paral·lela)



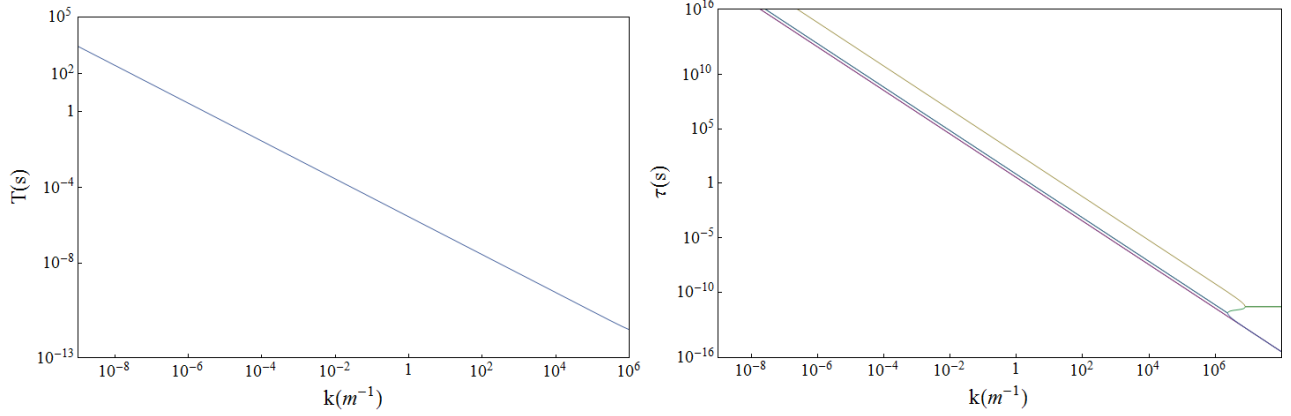


Figura 4: Cas resistiu: Periode i temps d'escorçament vs nombre d'ona (Propagació perpendicular)

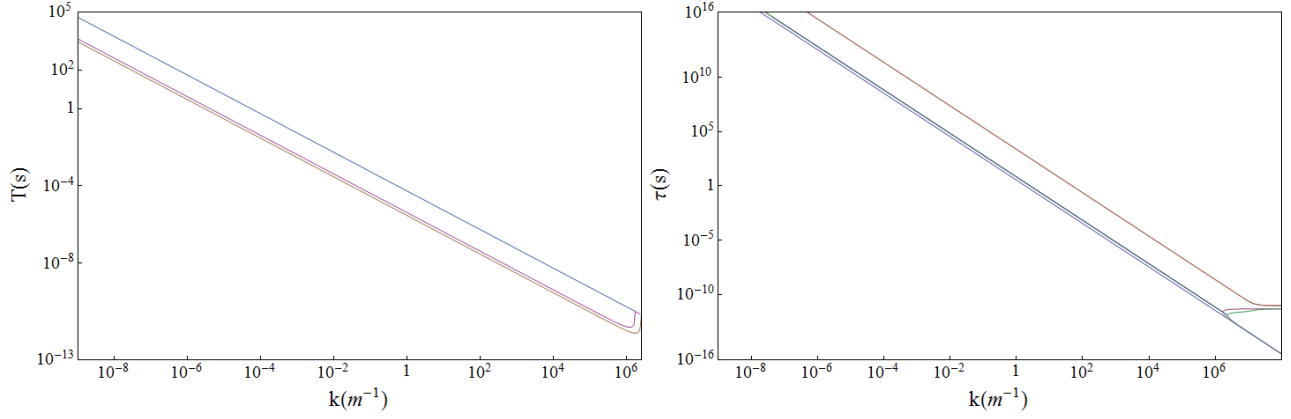


Figura 5: Cas resistiu: Periode i temps d'escorçament vs nombre d'ona (Propagació obliqua)

aquest cas, la relació de dispersió és la següent:

$$\begin{aligned}
 & -3B_0^4 c_s^4 k^6 + 4B_0^2 k^4 (B_0^2 + c_s^2 \mu \rho (2 + k^2 \eta_H^2 \mu \rho)) \omega^2 - 4k^2 \mu \rho (2c_s^2 \mu \rho + B_0^2 (3 + k^2 \eta_H^2 \mu \rho)) \omega^4 + 8\mu^2 \rho^2 \omega^6 + \\
 & + 4B_0^2 k^2 (B_0^2 c_s^2 k^4 - k^2 (B_0^2 + c_s^2 \mu \rho (2 + k^2 \eta_H^2 \mu \rho)) \omega^2 + \mu \rho (1 + k^2 \eta_H^2 \mu \rho) \omega^4) \cos 2\theta - B_0^4 c_s^2 k^6 \cos 4\theta = 0
 \end{aligned} \tag{61}$$

## 7.1 Propagació paral·lela

La relació de dispersió és:

$$(c_s^2 k^2 - \omega^2)(\omega^4 - \omega^2 (2c_a^2 k^2 + B_0^4 k^4 \eta_H^2) + c_a^4 k^4) = 0 \tag{62}$$

produint una ona lenta i una d'Alfvén modificada per la difusivitat de Hall (Veure Figura 6). El comportament de l'ona d'Alfvén presenta la particularitat de un desdoblament a partir de un cert valor del nombre d'ona  $i$ , per analitzar amb més detall aquest comportament imposam que la

velocitat del só sigui zero, i obtenim la següent relació de dispersió:

$$\omega^4 - \omega^2(2c_a^2k^2 + B_0^4k^4\eta_H^2) + c_a^4k^4 = 0 \quad (63)$$

i les solucions d'aquesta equació són:

$$\omega_1 = \left( \frac{(2c_a^2k^2 + B_0^2\eta_H^2k^4) + \eta_H B_0^2k^3 \sqrt{4c_a^2 + B_0^4k^{10}\eta_H^2}}{2} \right)^{0.5} \quad (64)$$

$$\omega_2 = - \left( \frac{(2c_a^2k^2 + B_0^2\eta_H^2k^4) + \eta_H B_0^2k^3 \sqrt{4c_a^2 + B_0^4k^{10}\eta_H^2}}{2} \right)^{0.5} \quad (65)$$

$$\omega_3 = \left( \frac{(2c_a^2k^2 + B_0^2\eta_H^2k^4) - \eta_H B_0^2k^3 \sqrt{4c_a^2 + B_0^4k^{10}\eta_H^2}}{2} \right)^{0.5} \quad (66)$$

$$\omega_4 = - \left( \frac{(2c_a^2k^2 + B_0^2\eta_H^2k^4) - \eta_H B_0^2k^3 \sqrt{4c_a^2 + B_0^4k^{10}\eta_H^2}}{2} \right)^{0.5} \quad (67)$$

essent  $\omega_1$  i  $\omega_3$  les solucions que expliquen el comportament de l'ona d'Alfvén. Quan  $k$  és petit, les solucions són:  $\omega \sim c_a k$ , però quan  $k$  augmenta, les solucions per  $\omega$  són les equacions (65) i (67). **Una ona d'Alfvén polaritzada linealment es pot veure com el resultat de la composició de una ona polaritzada circularment cap a l'esquerra i un altre polaritzada circularment cap a la dreta, amb la suposició de que ambdues tenen la mateixa freqüència. Quan les dues ones tenen freqüències diferents no es pot formar la ona d'Alfvén linealment polaritzada, i dues ones amb polaritzacions circulars oposades compareixen (Cramer, 2002). Aquest efecte es pot veure a la Figura 6 on veim el desdoblament de la ona d'Alfvén que compareix al voltant del període corresponent a la freqüència ciclotrònica. Per un altre banda, com que el efecte Hall no és un efecte dissipatiu, no tenim temps d'esmoreïment, i les ones d'entropia nomès tenen freqüència real nul·la.**

## 7.2 Propagació perpendicular

En aquest cas, la relació de dispersió vé donada per:

$$\omega^2 = k^2(c_a^2 + c_s^2) \quad (68)$$

corresponent a una ona ràpida ideal. La difusivitat de Hall no compareix a les equacions linealitzades i, per tant, tampoc a la relació de dispersió.

## 7.3 Propagació obliqua

En el cas de propagació obliqua no compareixen efectes addicionals destacables.

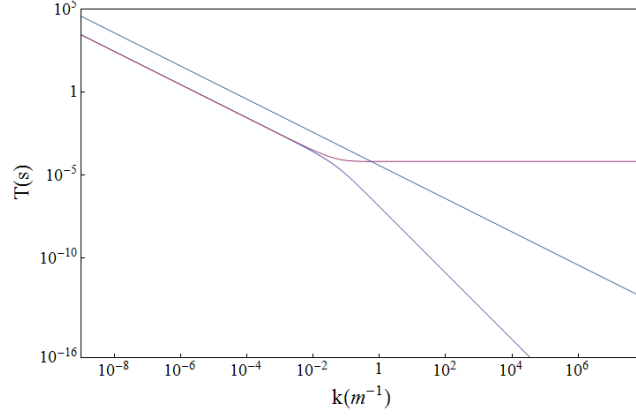


Figura 6: Efecte Hall: Període i temps d'esmoreïment vs nombre d'ona (Propagació paral·lela)

## 8 Efectes produïts per la consideració conjunta del efecte Hall i la difusivitat magnètica

Ara consideram simultaneament la difusivitat magnètica i el terme de Hall. La relació de dispersió general és:

$$\begin{aligned}
& (-ik^2\eta + \omega)(8\mu^2\rho^2(c_s k - \omega)(k^2 + i\omega)^2\omega^2(c_s k + \omega) + B_0^4(-3c_s^2 k^6 + 4k^4\omega^2) + \\
& + 4B_0^2 k^2 \mu\rho\omega(c_s^2(2k^2\omega + k^4(-2i\eta + \eta_H^2\mu\rho\omega)) - \omega^2(3\omega + k^2(-3i\eta + \eta_H\mu\rho\omega)))) + \\
& + 4B_0^2 k^2 (B_0^2 k^2 (c_s k - \omega)(c_s k + \omega) + \mu\rho\omega(c_s^2(2ik^4\eta - k^2(2 + k^2\eta_H^2\mu\rho)\omega) + \\
& + \omega^2(\omega + k^2(-i\eta + \eta_H^2\mu\rho\omega))))\cos 2\theta - B_0^4 c_s^2 k^6 \cos 4\theta = 0
\end{aligned} \tag{69}$$

### 8.1 Propagació paral·lela

La relació de dispersió vé donada per:

$$(c_s^2 k^2 - \omega^2)(-ik^2\eta + \omega^2)(-B_0^4 k^4 + \mu^2\rho^2(k^2\eta + i\omega^2)^2\omega^2 + B_0^2 k^2 \mu\rho\omega(2\omega + k^2(-2i\eta + \eta_H^2\mu\rho\omega))) = 0 \tag{70}$$

En aquest cas, tornam a veure el desdoblament de l'ona d'Alfvén produït per l'efecte Hall i veim també l'ona lenta (Veure Figura 7). Una diferència important respecte al cas purament resistiu és que quan tenim en compte el terme de Hall no hi ha nombre d'ona de tall de l'ona d'Alfvén (Zaqarashvili et al. 2012). Per un altre banda, ara sí tenim temps d'esmoreïment per les d'Alfvén i no hi ha per l'ona lenta. També compareix una ona d'entropia amb freqüència purament imaginària.

Per entendre, mitjançant una aproximació, la desaparició del nombre d'ona de tall podem agafar la relació de dispersió i conservar la part corresponent a l'ona d'Alfvén:

$$(-B_0^4 k^4 + \mu^2\rho^2(k^2\eta + i\omega^2)^2\omega^2 + B_0^2 k^2 \mu\rho\omega(2\omega + k^2(-2i\eta + \eta_H^2\mu\rho\omega))) = 0 \tag{71}$$

ara eliminam el parèntesi corresponent a l'ona d'entropia resistiva i obtenim:

$$(-B_0^4 k^4 + B_0^2 k^2 \mu\rho\omega(2\omega + k^2(-2i\eta + \eta_H^2\mu\rho\omega))) = 0 \tag{72}$$

equació quadràtica en  $\omega$  que té com a solucions:

$$\omega = \frac{\frac{i2c_a^2k^4\eta}{2c_a^2k^2+B_0^2k^4\eta_H^2} \pm \sqrt{\frac{4c_a^4k^8\eta^2i^2}{(2c_a^2k^2+B_0^2k^4\eta_H^2)^2} + \frac{4c_a^4k^4}{(2c_a^2k^2+B_0^2k^4\eta_H^2)^2}}}{2} \quad (73)$$

Si  $\eta_H = 0$ , obtenim el nombre d'ona de tall del cas resistiu, però si imposam que l'expressió a dins l'arrel sigui igual a zero i despejam el nombre d'ona, obtenim:

$$k_{tall} = \frac{\sqrt{2}c_a}{\sqrt{(\eta^2 - B_0^2\eta_H^2)}} \quad (74)$$

**Quan tenim en compte  $\eta_H$ , l'arrel del denominador és imaginària, es a dir, el nombre de tall és imaginari. Aixímateix, aquest resultat va en contra de la suposició de freqüències complexes i nombres d'ona reals feta per aquest estudi.**

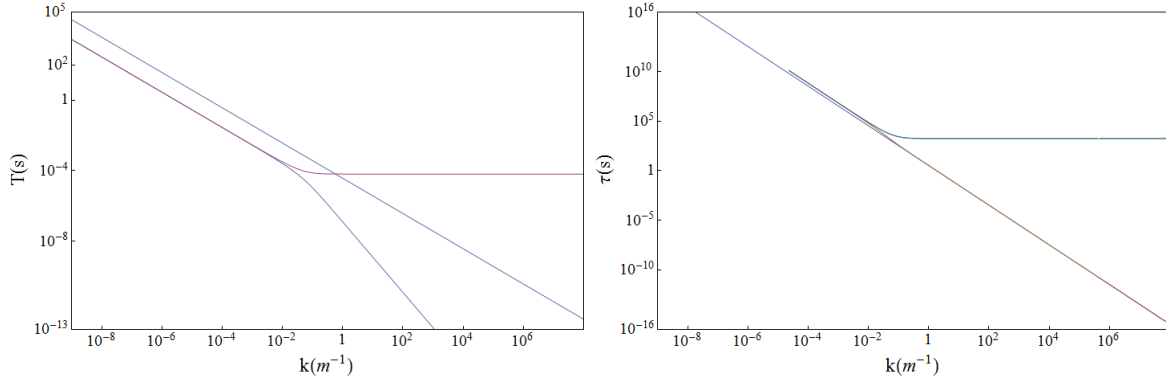


Figura 7: Efecte Hall resistiu: Període i temps d'esmoreïment vs nombre d'ona (Propagació paral·lela)

## 8.2 Propagació perpendicular

En aquest cas, la difusivitat de Hall no compareix a la relació de dispersió, i únicament tenim una ona ràpida amb un nombre d'ona de tall tal com en el cas purament resistiu.

## 8.3 Propagació obliqua

Per aquest cas no tenim nombre d'ona de tall com als casos anteriors.

## 9 Cas viscosos

Inicialment, considerarem, únicament, els efectes de la viscositat del plasma sobre les ones MHD. L'efecte de la viscositat ve caracteritzat per cinc coeficients ( $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ ) que apareixen a les diferents components del tensor de viscositat. El valor numèric de  $\eta_0$  és major que el dels altres coeficients i, en primera aproximació, ens dona l'efecte global de la viscositat. A continuació, tractarem d'estudiar els efectes de cada un dels coeficients per separat.

## 9.1 Efecte de $\eta_0$

La relació de dispersió per aquest cas és:

$$(-c_a^2 k^2 \sin^2 \theta + \omega^2)(4c_a^2(3c_s^2 k^4 \rho + 4ik^4 \eta_0 \omega - 6k^2 \rho \omega^2) + \omega(4\omega^2(-5ik^2 \eta_0 + 6\rho\omega) + c_s^2(9ik^4 \eta_0 - 24k^2 \rho\omega))) - 4k^2(-3i\eta_0 \omega^3 + c_a^2 k^2(3c_s^2 \rho + 4i\eta_0 \omega)) \cos 2\theta - 9ic_s^2 k^4 \eta_0 \omega \cos 4\theta = 0 \quad (75)$$

A partir de la relació de dispersió podem veure que l'ona d'Alfvén no es veu influenciat per  $\eta_0$  essent el seu comportament igual al cas ideal, mentre que les ones ràpides i lentes si es veuen influenciats per  $\eta_0$ .

### 9.1.1 Propagació paral·lela

La relació de dispersió vé donada per:

$$(B_0^2 k^2 - \mu \rho \omega^2)^2 (-3c_s^2 k^2 \rho + \omega(-4ik^2 \eta_0 + 3\rho\omega)) = 0 \quad (76)$$

Aquesta relació de dispersió suggereix que tenim una ona d'Alfvén ideal i una ona lenta modificada per la viscositat. La relació de dispersió corresponent a l'ona lenta mostra l'aparició de un nombre d'ona de tall que vé donat per:

$$k_{tall} = \frac{3\rho c_s}{2\eta_0} \quad (77)$$

A diferència del cas resistiu, el nombre d'ona de tall compareix a una freqüència real inferior a la freqüència ciclotrònica i per tant dins el domini de validesa de la MHD (Veure Figura 9).

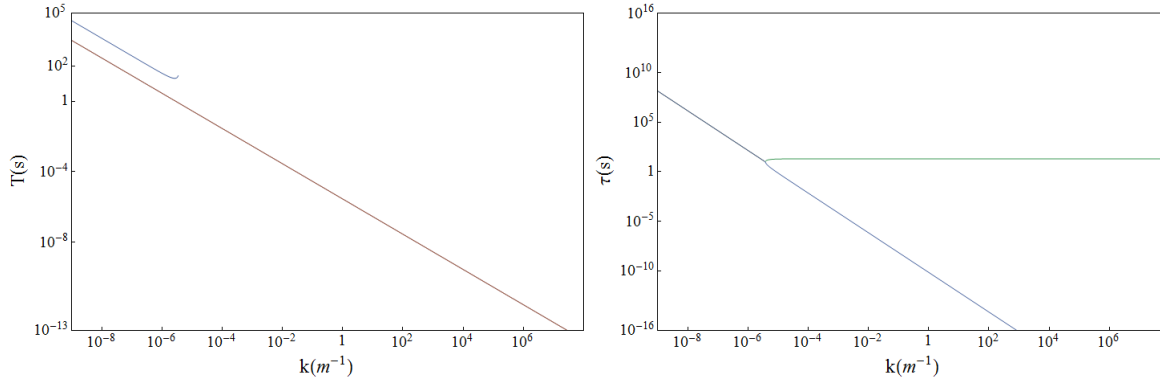


Figura 8: Efecte de  $\eta_0$ : Període i temps d'esmortiment vs nombre d'ona (propagació paral·lela)

### 9.1.2 Propagació perpendicular

La relació de dispersió vé donada per:

$$3k^2(B_0^2 + c_s^2 \mu \rho) + ik^2 \eta_0 \mu \omega - 3\mu \rho \omega^2 = 0 \quad (78)$$

Apareix l'ona ràpida, tal com cal, que presenta també un nombre d'ona de tall donat per:

$$k_{tall} = \frac{6\rho\sqrt{(c_a^2 + c_s^2)}}{\eta_0} \quad (79)$$

Un altre vegada, la freqüència corresponent al nombre d'ona de tall és més petita que la freqüència ciclotrònica (Veure Figura 10). També compareix una ona d'entropia amb freqüència purament imaginària.

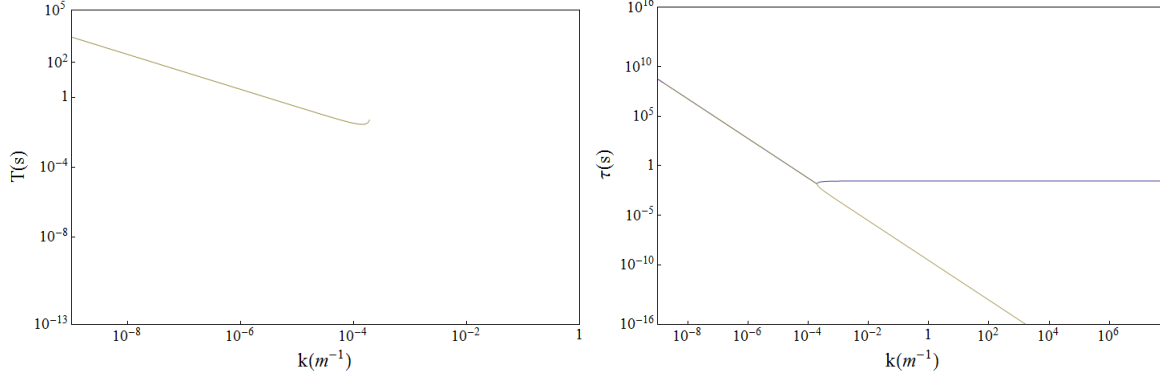


Figura 9: Efecte de  $\eta_0$ : Període i temps d'esmortiment vs nombre d'ona (propagació perpendicular)

### 9.1.3 Propagació obliqua

En aquest cas hem agafat  $\theta = \frac{\pi}{16}$  per poder veure els efectes amb més claredat. L'ona d'Alfvén no presenta nombre d'ona de tall la qual cosa es pot veure a partir de les equacions linealitzades que per aquesta ona són independents de  $\eta_0$ , mentre que el lent i el ràpid si el presenten (Veure Figura 11).

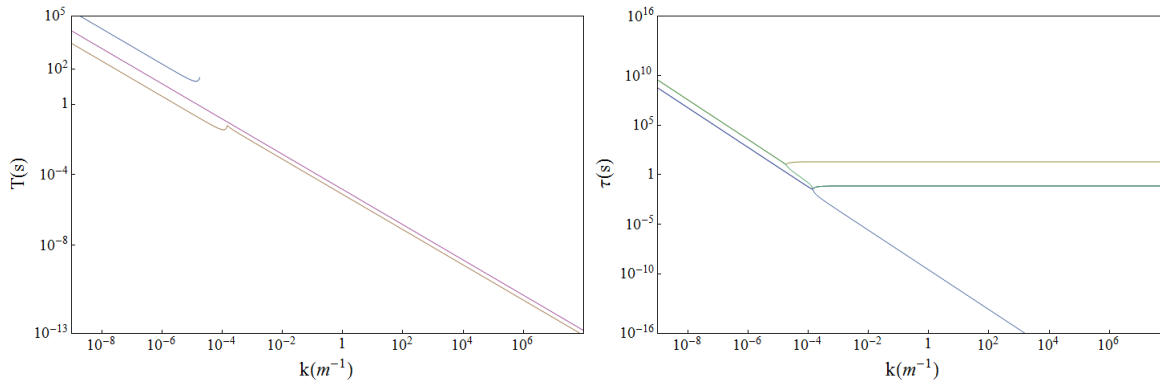


Figura 10: Efecte de  $\eta_0$ : Període i temps d'esmortiment vs nombre d'ona (propagació obliqua)

## 9.2 Efecte de $\eta_1$

Ara, consideram ùnicament el coeficient  $\eta_1$ . La relació de dispersió és:

$$(\omega^2 - c_a^2 k^2 \sin^2 \theta)(c_a^2 c_s^2 k^4 \sin^2 \theta - k^2(c_a^2 + c_s^2)\omega^2 + \omega^4 + ik^2 \frac{\eta_1}{\rho} \cos^2 \theta \omega^3 - ic_s^2 k^4 \frac{\eta_1}{\rho} \sin^2 2\theta) = 0 \quad (80)$$

### 9.2.1 Propagació paral·lela

En aquest cas  $\eta_1$  no produeix cap efecte adicional ja que no compareix a la relació de dispersió, per tant, tenim una ona lenta i una ona d'Alfvén ideals.

### 9.2.2 Propagació perpendicular

Només propaga l'ona ràpida, com cal esperar, que presenta un nombre d'ona de tall, que calculat de la mateixa manera que en casos anteriors, vé donat per:

$$k_{tall} = \frac{2\sqrt{c_a^2 + c_s^2}\rho}{\eta_1} \quad (81)$$

La freqüència corresponent al nombre d'ona de tall es troba per damunt de la ciclotrònica i, per tant, fora del domini de validesa de la MHD (Veure Figura 12). Al mateix temps, compareix també una ona d'entropia amb freqüència  $ik^2\eta_1/\rho$ .

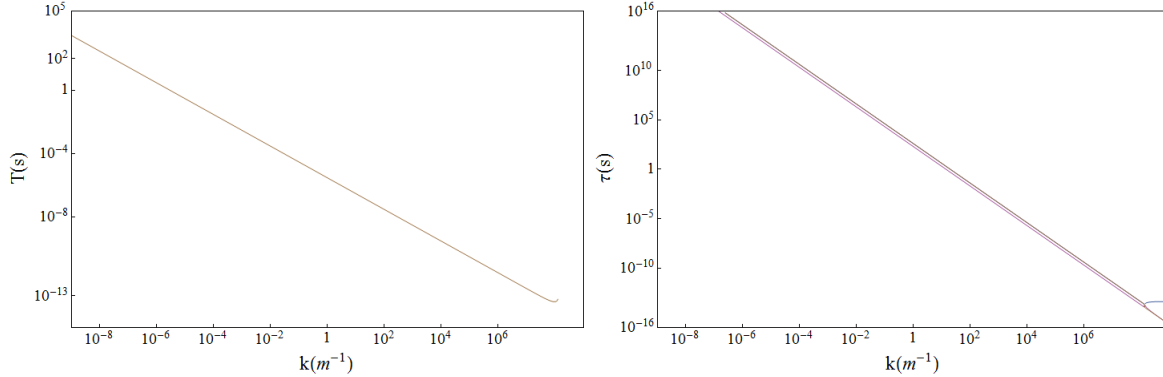


Figura 11: Efecte de  $\eta_1$ : Període i temps d'esmortiment vs nombre d'ona (propagació perpendicular)

### 9.2.3 Propagació obliqua

En aquest cas, compareixen les tres ones. La ràpida i d'Alfvén mostren un nombre d'ona de tall. Per l'ona d'Alfvén, el nombre d'ona de tall vé donat per:

$$k_{tall} = \frac{2\sqrt{2}c_a\rho}{\eta_1} \quad (82)$$

molt semblant al del ràpid (Veure Figura 13). La freqüència corresponent és major que la ciclotrònica.

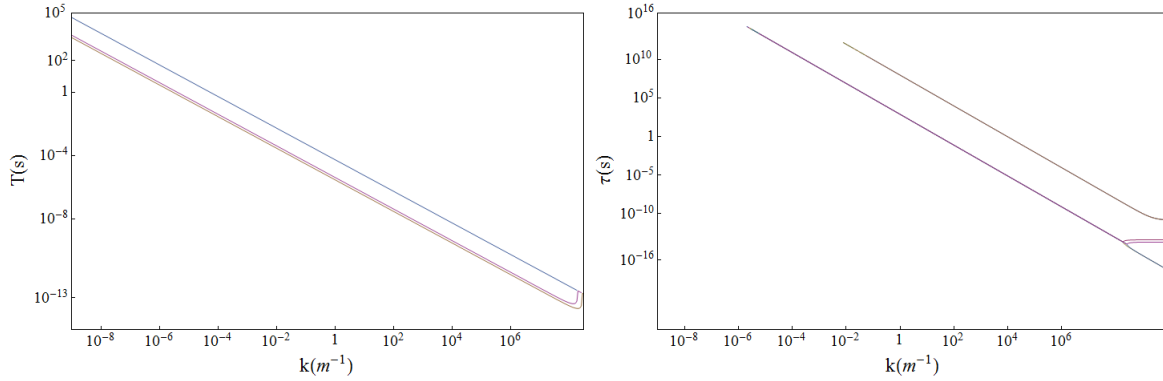


Figura 12: Efecte de  $\eta_1$ : Període i temps d'esmortiment vs nombre d'ona (propagació obliqua)

### 9.3 Efecte de $\eta_2$

Consideram ara únicament  $\eta_2$ . La relació de dispersió és:

$$\begin{aligned} &(-c_a^2 k^2 \sin^2 \theta - ik^2 \frac{\eta_2}{\rho} \sin^2 \theta + \omega^2)(12c_a^2 c_s^2 k^2 \sin^2 \theta + 4ik^2 \frac{\eta_2}{\rho} \sin^2 \theta (4c_a^2 + 3c_s^2 (1 + \cos 2\theta - \sin 2\theta))\omega + \\ &\quad - 12(c_a^2 + c_s^2)k^2 \omega^2 - 4ik^2 \frac{\eta_2}{\rho} (2 - 2\cos 2\theta + \sin 2\theta)\omega^3 + \omega^4) = 0 \end{aligned} \quad (83)$$

#### 9.3.1 Propagació paral·lela

La relació de dispersió vé donada per:

$$(B_0^2 k^2 - \mu \rho \omega^2)(3c_s^2 k^2 + \omega(4ik^2 \eta_2 - 3\rho \omega))(B_0^2 k^2 + \mu \omega(ik^2 \eta_2 - \rho \omega)) = 0 \quad (84)$$

A partir d'aquesta relació de dispersió observam la presència de una ona d'Alfvén ideal (primer parèntesi), una ona d'Alfvén modificada per la viscositat (tercer parèntesi) i una ona lenta (segon parèntesi) també modificada per la viscositat (Figura 14). Per aquest cas compareixen dos nombres d'ona de tall, un per l'ona lenta ( $k_{tall} = 3c_s \sqrt{\rho}/2\eta_2$ ) i un altre per l'ona d'Alfvén ( $k_{tall} = 2B_0 \sqrt{\rho}/\eta_2 \sqrt{\mu}$ ). Les freqüències corresponents al nombres de tall es troben per damunt de la ciclotrònica.

#### 9.3.2 Propagació perpendicular

En aquest cas  $\eta_2$  no té cap influència ja que no compareix a les equacions linealitzades per aquest cas, i només tenim una ona ràpida ideal.

#### 9.3.3 Propagació obliqua

Com anteriorment, aquest cas ens permet veure la coexistència de les tres ones. El comportament és igual que el del cas de propagació paral·lela, amb nombres d'ona de tall per les ones lenta i d'Alfvén, i la presència de una ona ràpida ideal. Així mateix, ones d'entropia són també presents.



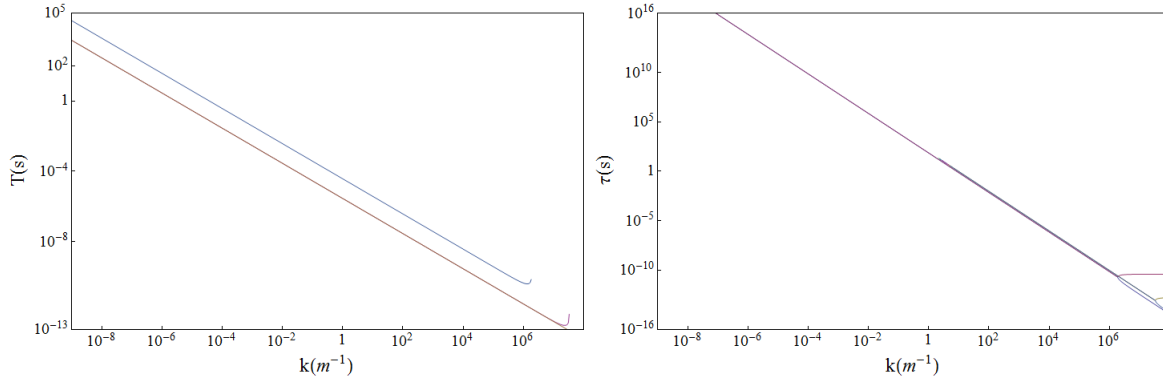


Figura 13: Efecte de  $\eta_2$ : Període i temps d'esmoreïment vs nombre d'ona (Propagació paral·lela)

#### 9.4 Efecte de $\eta_3$

La relació de dispersió de aquest cas és la següent:

$$\begin{aligned}
 & -3k^2 \cos^2 \theta (-c_a^2 k^2 \sin^2 \theta + \omega^2) (-c_a^2 c_s^2 k^2 \sin^2 \theta + (c_a^2 + c_s^2) \omega^2) + 3(\omega^2 - c_s^2 k^2 \sin^2 \theta) \\
 & (\omega^2 - c_a^2 k^2 \sin^2 \theta)^2 + k^4 \frac{\eta_3^2}{\rho^2} \omega^2 \cos^2 \theta (3\omega^2 - 4c_s^2 k^2 \sin^2 \theta) = 0
 \end{aligned} \tag{85}$$

i per propagació paral·lela  $\eta_3$  no introdueix cap efecte, tenim una ona lenta i un altre d'Alfvén ideals.

##### 9.4.1 Propagació perpendicular

La relació de dispersió en aquest cas és:

$$k^4 \eta_3^2 \mu - k^2 \rho (B_0^2 + c_s^2 \mu \rho) + \mu^2 \rho^2 \omega^2 = 0 \tag{86}$$

amb solucions:

$$\omega = \pm \frac{ik \sqrt{k^2 \eta_3^2 \mu - B_0^2 \rho - c_s^2 \mu \rho^2}}{\sqrt{\mu \rho}} \tag{87}$$

En aquest cas només compareix l'ona ràpida (Veure Figura 15) amb freqüència real per nombres d'ona petits, mentres que a partir de un determinat valor ( $k \sim 10^2 \text{ m}^{-1}$ ) la freqüència passa a ser purament imaginària, l'ona no propaga i l'oscil·lació esmorteix.

##### 9.4.2 Propagació obliqua

Veïm la coexistència de les tres ones. L'ona lenta es comporta idealment mentres que l'ona ràpida i d'Alfvén es comporten com en el cas de propagació perpendicular (Veure Figura 16).

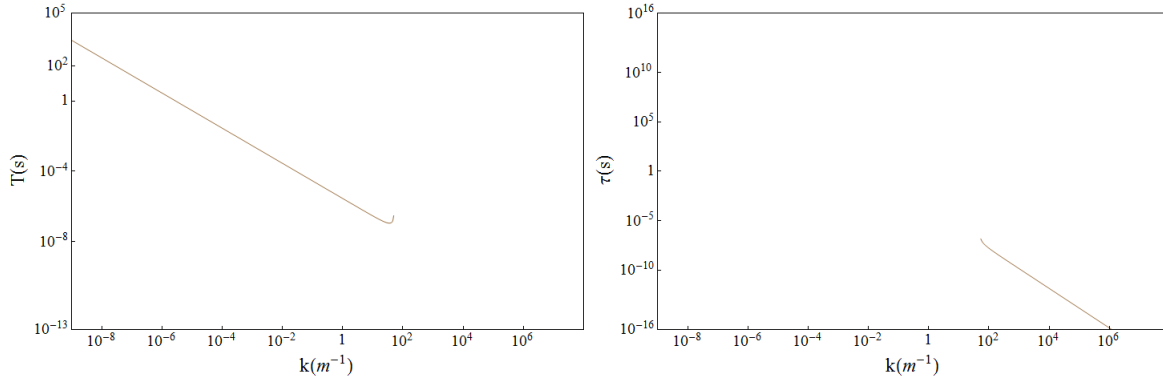


Figura 14: Efecte de  $\eta_3$ : Període i temps d'esmortiment vs nombre d'ona (propagació perpendicular)

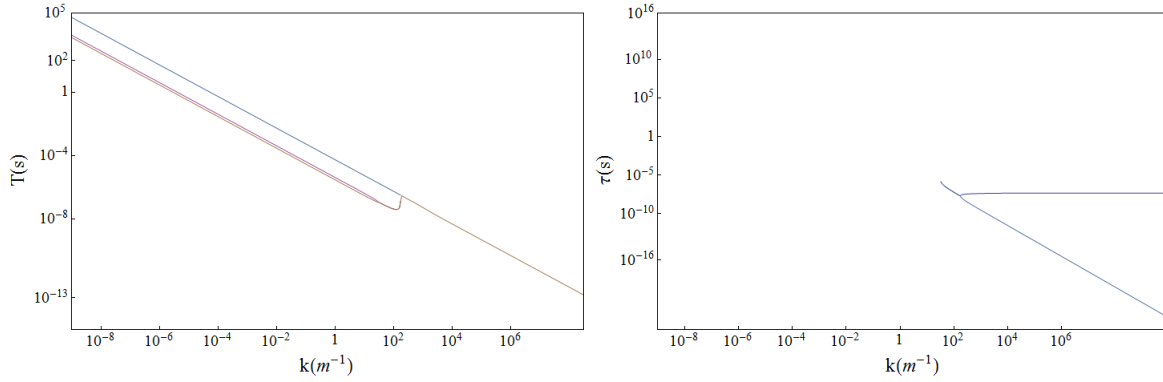


Figura 15: Efecte de  $\eta_3$ : Període i temps d'esmortiment vs nombre d'ona (propagació obliqua)

## 9.5 Efecte de $\eta_4$

Consideram, finalment, el darrer coeficient que apareix al tensor de viscositat,  $\eta_4$ . La relació de dispersió és:

$$\begin{aligned}
& -c_s^4 c_a^2 \sin^2 \theta + i c_a^2 c_s^2 k^6 \frac{\eta_4}{\rho} \cos \theta \sin^5 \theta \omega + \left( -\frac{3}{8} k^4 \frac{\eta_4^2}{\rho^2} - \frac{3}{2} c_a^2 k^2 - c_s^2 k^2 + \frac{1}{2} \cos 2\theta (k^4 \frac{\eta_4^2}{\rho^2} + k^2 c_a^2) \right) - \\
& - k^4 \frac{\eta_4^2}{\rho^2} \left( \frac{1}{8} \cos 4\theta - \cos \theta \sin^3 \theta \right) \omega^4 + \left( \frac{1}{2} c_a^2 k^6 \frac{\eta_4^2}{\rho^2} \sin^2 \theta + c_a^4 k^4 \sin^2 \theta + \frac{1}{4} c_s^2 k^6 \frac{\eta_4^2}{\rho^2} \sin^2 \theta + 2 c_a^2 c_s^2 k^4 \sin^2 \theta - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} c_a^2 k^6 \frac{\eta_4^2}{\rho^2} \cos 2\theta \sin^2 \theta - \frac{1}{4} c_s^2 k^4 \frac{\eta_4^2}{\rho^2} \cos 4\theta \sin^2 \theta - c_a^2 k^6 \frac{\eta_4^2}{\rho^2} \cos \theta \sin^3 \theta + c_s^2 k^4 \frac{\eta_4^2}{\rho^2} \cos \theta \sin^3 \theta \right) \omega^2 + \\
& + \left( -i c_s^2 k^4 \frac{\eta_4^2}{\rho^2} \cos \theta \sin^3 \theta + \frac{1}{2} i k^6 \frac{\eta_4^3}{\rho^3} \sin^4 \theta - \frac{1}{2} i k^6 \frac{\eta_4^3}{\rho^3} \cos 2\theta \sin^4 \theta + i k^6 \frac{\eta_4^3}{\rho^3} \cos 2\theta \sin^5 \theta \right) \omega^3 + \omega^6 = 0 \quad (88)
\end{aligned}$$

Per propagació perpendicular la  $\eta_4$  no introdueix cap efecte, i tenim una ona ràpida ideal.

### 9.5.1 Propagació paral·lela i obliqua

Per propagació paral·lela i obliqua els efectes són semblants al cas de  $\eta_2$ .

## 10 Efecte conjunt del terme de Hall i del coeficient de viscositat $\eta_0$

El coeficient  $\eta_0$  és el dominant en el tensor de viscositat ja que  $\eta_0 \gg \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ , i per un altre banda  $\eta_0$  produeix un nombre d'ona de tall per l'ona lenta que, per condicions coronals, es troba a freqüències dins el rang de validesa de la MHD. Així mateix, hem vist abans que l'inclusió de l'efecte Hall fa desaparèixer el nombre de tall de l'ona d'Alfvén produït per la resistivitat, per tant podríem investigar si l'efecte Hall afecta el nombre de tall viscos. Els resultats, en el cas de propagació paral·lela, mostren (Veure Figura 17) que el nombre de tall de la ona lenta no és afectat per l'efecte Hall mentre que l'ona d'Alfvén no mostra cap tipus de tall i sí el desdoblament produït per l'efecte Hall. Si es considera propagació obliqua, la ona lenta segueix sense mostrar cap canvi. L'explicació d'aquest resultat és que la relació de dispersió es pot factoritzar en dos parèntesis tal com:

$$(B_0^4 k^4 - B_0^2 k^2 \mu \rho (2 + k^2 \eta_H^2 \mu \rho) \omega^2 + \mu^2 \rho^2 \omega^4) (3c_s^2 k^2 \rho + \omega (4ik^2 \eta_0 - 3\rho\omega)) = 0 \quad (89)$$

el primer correspon a la ona d'Alfvén afectada per la difusivitat de Hall mentre que el segon correspon a la ona lenta modificada per el coeficient  $\eta_0$  i, per tant, no hi ha cap interacció entre difusivitat de Hall i el coeficient  $\eta_0$ .

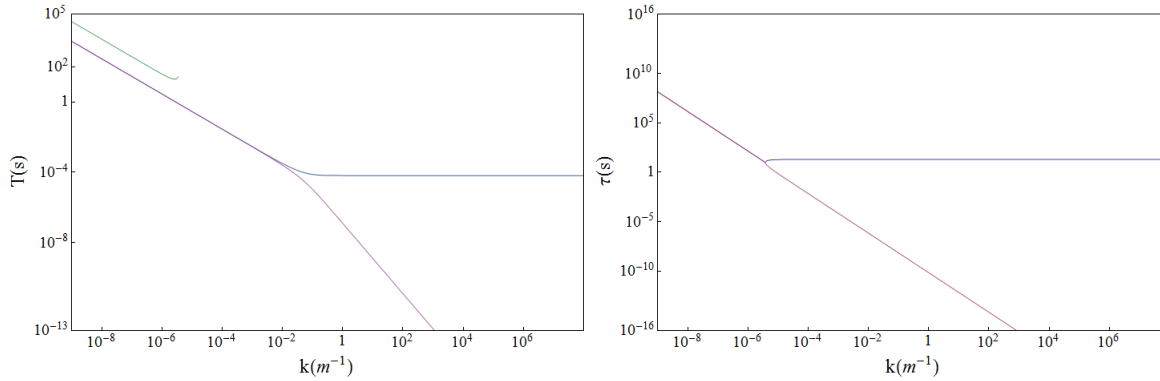


Figura 16: Efecte de  $\eta_0$  més difusivitat de Hall: Període i temps d'esmortiment vs nombre d'ona (propagació paral·lela)

## 11 Aplicació al cas de ones lentes allaços coronals de alta temperatura

Oscil·lacions observades a llaços coronals de alta temperatura ( $T \sim 5-8$  MK) han estat interpretades en termes de ones lentes MHD. Els períodes d'oscil·lació es troben al rang entre 8.6 – 32,3 minuts i els temps d'esmortiment entre 3.1 i 42.3 minuts (Wang et al. 2002; Ofman & Wang, 2002). Per el nostre càlcul hem assumit que  $T = 7$  MK i  $n_e = 5 \cdot 10^{14} \text{ m}^{-3}$  i hem considerat tan sols l'efecte del coeficient de viscositat  $\eta_0$  i propagació paral·lela. Els resultats (Veure Figura 18) indiquen que en aquest cas el tall compareix a un període al voltant de 100 s amb un temps d'esmortiment de 100 s i una longitud d'ona de 20000 km. Llavors, per longituds d'ona més grans és possible obtenir períodes més llargs i temps d'esmortiment majors compatibles amb les observacions, i entendre

aquestes observacions en termes d'ones lentes a llaços coronals d'alta temperatura esmorteïdes per viscositat.

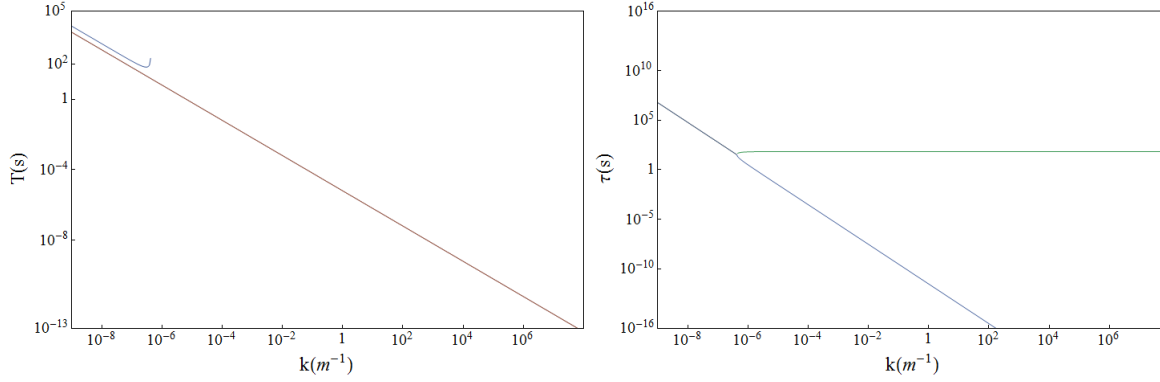


Figura 17: Efecte de  $\eta_0$ : Període i temps d'esmortiment vs nombre d'ona (propagació paral·lela) a un plasma de llaç coronal a  $T = 7 MK$

## 12 Sumari i conclusions del treball

Durant el treball s'han duit a terme les següents tasques: a) Càlcul de les components del tensor de viscositat; b) Perturbació i linealització de les equacions de la MHD incloent difusivitat magnètica, difusivitat de Hall i tensor de viscositat; c) anàlisi de Fourier en ones planes de les equacions linealitzades; d) obtenció de la relació de dispersió general; e) Resolució de la relació de dispersió per diferents casos: Ideal, resistiu, Hall, resistiu més Hall, viscós, Hall més viscositat, així com de les ones presents en cada cas per diferents direccions de propagació; f) Representació gràfica del període i temps d'esmortiment per cada cas considerat; g) Explicació i justificació de diferents particularitats (nombre d'ona de tall, efecte de la inclusió del terme de Hall, etc) aparegudes en alguns dels casos considerats; h) S'ha duit a terme una aplicació del cas viscós al cas de l'esmortiment de ones lentes a llaços coronals de alta temperatura.

Entre les conclusions obtingudes podem destacar: 1) Els nombres d'ona de tall que apareixen a molts dels casos tractats ho fan a freqüències per damunt de la ciclotrònica, es a dir, fora del domini de validesa de la MHD; 2) L'efecte Hall és capaç d'eliminar el nombre d'ona de tall del cas resistiu per tot tipus de propagació excepte per la perpendicular ja que no apareix a la relació de dispersió corresponent; 3) Un cas d'interés és el del coeficient viscós  $\eta_0$  que produeix un nombre de tall per l'ona lenta a freqüències baixes comparades amb la ciclotrònica i per tant, per el cas coronal, dins el domini de validesa de la MHD; 4) Quan es considera conjuntament el efecte Hall i el coeficient de viscositat  $\eta_0$ , el nombre d'ona de tall no desapareix degut a la no interacció entre difusivitat de Hall i el coeficient  $\eta_0$ ; 5) La consideració conjunta de tots els efectes produeix una relació de dispersió de gran complexitat, on és difícil esbrinar els efectes produïts pels diferents mecanismes considerats.

## 13 Referències

- Braginskii, S. I. *Reviews of Plasma Physics*, 1, 205, 1965
- Cramer, N. *The Physics of Alfvén Waves*. Wiley-VCH, 2001
- Goedbloed, H. & Poedts, S. *Principles of Magnetohydrodynamics*, Vol. I. Cambridge, 2004
- Goossens, M. *An Introduction to Plasma Astrophysics and Magnetohydrodynamics*. Kluwer, 2003
- Huba, J. D. *NRL Plasma Formulary*. Naval Research Office, 2004
- Ofman, L. & Wang, T. *ApJ*, 580, L85, 2002
- Priest E. R. *Magnetohydrodynamics of the Sun*. Cambridge, 2014
- Vranjes, J. *MNRAS*, 445, 1614, 2014
- Wang, T., Solanki, S. K, Curdt, W., Innes, D. E., Dammasch, I. E. *ApJ* 574, L101, 2002
- Zaqarashvili, T; Carbonell, M.; Ballester, J. L.; Khodachenko, M. *A&A*, 544, A143, 2012