



Universitat
de les Illes Balears

TREBALL DE FI DE MÀSTER

HISTÒRIA DE LA MATEMÀTICA: UNA EINA PER A MOTIVAR, UN ESTIL D'APRENTATGE

Aina Sureda Barceló

Màster Universitari

(Especialitat de Matemàtiques)

Centre d'Estudis de Postgrau

Any acadèmic 2019-20

HISTÒRIA DE LA MATEMÀTICA: UNA EINA PER A MOTIVAR, UN ESTIL D'APRENTATGE

Aina Sureda Barceló

Treball de Fi de Màster

Centre d'Estudis de Postgrau

Universitat de les Illes Balears

Any Acadèmic 2019-20

Paraules clau del treball:

històries, anècdotes, matemàtiques, contextos i motivació.

Tutor: Ernest Llohis Canals

Resum

Les matemàtiques són com són a causa de la història que hi ha al darrere. Les matemàtiques no es poden desvincular de la història ni del seu origen. D'aquesta manera ensenyar història de les matemàtiques pot ajudar a comprendre-les.

Conèixer els motius pels quals va sorgir un coneixement i recrear els passos que varen fer els nostres avantpassats matemàtics fins a obtenir la solució, permet a l'alumnat assolir un coneixement profund de la matèria. Així podem parlar d'un redescobriment del contingut i d'una nova manera d'ensenyar a l'alumnat, relacionant-lo amb els principis de les matemàtiques realistes.

A més a més la història ens ofereix una gran varietat d'anècdotes que, més enllà de la seva veracitat, ens permeten motivar i entretenir l'alumnat. Les anècdotes són a més una bona manera d'introduir i contextualitzar el tema que es vol tractar.

Així doncs, s'ha recollit en aquest treball diferents històries i anècdotes que es poden utilitzar per ensenyar contingut matemàtic. Elaborant també alguns exemples de propostes per a la utilització d'aquesta metodologia al llarg del darrer trimestre de matemàtiques dins el curs de 2n d'ESO. Així, introduïrem el tema de les coordenades a l'alumnat utilitzant l'anècdota de Descartes i la mosca. Els alumnes aprendran a calcular la semblança de triangles a través de la història de Tales, recreant el que aquest va realitzar. I per últim, hauran de trobar una solució als problemes plantejats a través de la història de Dido.

Índex

1	Justificació del tema	1
2	Objectius del treball	2
3	Estat de la qüestió	3
4	Introducció	5
4.1	La importància de la història dins l'educació	6
4.2	La història com a element d'aprenentatge realista	7
4.2.1	El mètode genètic	10
4.2.2	Gauss i la suma de la progressió aritmètica	10
4.3	La importància de la motivació de l'alumnat	11
4.3.1	La història com a recurs motivador	14
4.3.2	Arquimedes i la corona: el crit de l'eureka	16
4.4	La importància del treball interdisciplinari	17
5	Propostes educatives	18
5.1	Contextualització de la proposta educativa	19
5.2	Avaluació	20
5.2.1	Quadern d'aprenentatge	21
5.2.2	Examen	21
5.3	Temporització	22
6	Activitats d'història	22
6.1	Funcions. Anècdota de Descartes i la mosca	23
6.2	Proporcionalitat geomètrica. La història de Tales i la piràmide	28
6.3	Geometria. La història de Dido	34

7 Treball final: canvi de rol	38
7.1 Per què realitzar presentacions?	38
7.2 Proposta	39
8 Conclusions	41
9 Referències bibliogràfiques	44
10 Annexos	49
10.1 Avaluació	49
10.1.1 Funcions. Anècdota de Descartes i la mosca	49
10.1.2 Proporcionalitat geomètrica. La història de Tales i la piràmide	50
10.1.3 Geometria. La història de Dido	51
10.2 Fitxa Tales	54
10.3 Fitxes Dido	56
10.3.1 Estructura 1, 2, 4	56
10.3.2 La història de Dido	57
10.4 Rúbrica d'avaluació del treball final	58

1 Justificació del tema

Per què ensenyar història matemàtica a les aules?

Trobam un gran nombre de motius els quals ratifiquen que aprendre història és beneficiós en el procés d'aprenentatge. Nombrosos autors com ara John Fauvel (Fauvel, 1991), David Eugene Smith (Smith, 1958) i Morris Kline (Kline, 1978) han parlat sobre aquests avantatges al llarg de la història. L'any 1991, Fauvel afirmava que no era difícil trobar raons per ensenyar història de les matemàtiques a l'aula i explicava els corresponents beneficis que aporta a l'alumne (Fauvel, 1991). Conèixer la història ens permet descobrir d'on venim i el recorregut que s'ha seguit per arribar fins on avui estem. Paradoxalment, l'estudi de la història, també, ens pot proporcionar informació i eines pel futur. Estant al corrent de quines són les passes que s'han realitzat per arribar aquí a on som, ens podem imaginar els milers de camins a recórrer que queden per arribar al futur. D'aquesta manera estam d'acord amb Miguel de Guzmán que afirma que el coneixement de les dificultats del passat possibilita la seva extrapolació cap al dia de demà (Guzmán, 1992).

La història, a més, és fonamental per entendre la nostra societat, com s'ha construït i l'origen de les normes socials i cíviques que la constitueixen, entre moltes altres coses. Sovint oblidam que la societat i les seves normes establertes no han estat sempre així sinó que al llarg de la història s'ha hagut de lluitar molt per aconseguir certs drets i llibertats. I és en aquest punt on hem de donar el protagonisme que es mereix la història de les matemàtiques.

La història de la societat com ja assegurava Maribel Anaconda, no està desvinculada de la història de les matemàtiques i ambdós fets han anat de la mà durant tota la història (Anaconda, 2003). Els alumnes tendeixen a oblidar que

les matemàtiques no han estat sempre tal com les coneixem actualment i que cada avanç en les matemàtiques té un sentit i una raó de ser.

El món de les tecnologies no hauria estat possible sense el progrés de les matemàtiques i, de la mateixa manera, el futur de la humanitat anirà lligat amb l'estudi i l'avanç d'aquesta valuosa matèria. Yamila Camero Reinante et al. ja explicaven en un article la relació que existeix entre matemàtiques i tecnologia (Camero Reinante, Martínez Casanova i Pérez Payrol, 2016). Un exemple recent d'aquest lligam, explicat per Mark Anders, és el que exposen a la revista Information Technology on mostra com l'elaboració de l'algoritme de la transformada ràpida de Fourier va fer millorar la rapidesa del procés de dades (Anders, 2012).

2 Objectius del treball

El present treball té per objectiu que l'alumnat es familiaritzi amb els avantpassats de les matemàtiques i vegin dins ells una eina de gran utilitat i una motivació més per seguir aprenent. Per tal de dur la proposta endavant s'ha escollit el curs de 2n d'ESO. Tot i això, el tema tractat es pot estendre a la resta de cursos de secundària i batxillerat, realitzant els canvis que es considerin oportuns i adaptant la dificultat.

Volem centrar el treball presentat en els següents objectius:

- Aprendre i comprendre d'on i en quines circumstàncies varen sorgir alguns dels diferents instruments matemàtics que avui dia usam.

- Es pretén que seguint els passos i les idees dels grans matemàtics aprenguin a raonar i a resoldre problemes, arribant així a un nivell profund de comprensió dels resultats i coneixements matemàtics.
- Descobrir i gaudir dels beneficis que aporten les històries. A través d'aquestes volem que siguin ells qui es posin en la seva pell i se sentin com a matemàtics. Fent això, es vol aconseguir que es quedin amb el perquè i amb el com es va arribar a aquell resultat. Otto Toeplitz designà aquest procés amb el nom de mètode genètic (Toeplitz, 1927).
- Motivar a l'alumnat per tal que s'interessin encara més per la matèria. A algunes revistes podem trobar publicacions, com la de Margarita Marín Rodríguez, que afirmen que ajuda a entendre millor els conceptes abstractes de les matemàtiques (Marín Rodríguez, 1999).

3 Estat de la qüestió

Diversos autors han investigat sobre l'ús de la història com a recurs didàctic dins l'aula de matemàtiques. Uns exemples d'aquests fets són els diferents articles elaborats per José Luis Lupiáñez Gómez, Pedro Miguel González Urbaneja i Modesto Sierra Vázquez (Lupiáñez Gómez, 2002; González Urbaneja, 2004; Sierra Vázquez, 2000). En aquests treballs s'analitza els diversos usos de la història de les matemàtiques dins l'aula, així com els seus beneficis, basant-se en els estudis i les opinions de grans autors com Kline i Fauvel. Aquest darrer autor comentat trobava que aquest tema tenia una part que el feia incomplet, ja que hi ha moltes maneres de visualitzar la història (Fauvel, 1991).

Malgrat que en aquests treballs comentats no es presenten situacions en què es poden utilitzar a l'aula, es poden trobar altres obres on també tracten la història i mostren les seves aplicacions pràctiques dins l'aula. Articles com el creat per Sevda Göktepe i Ahmet Şükrü Özdemir o llibres per cursos més complexos com el de *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective* editat per Victor J. Katz, ens mostren exemples de com utilitzar la història de les matemàtiques dins l'aula (Göktepe i Şükrü Özdemir, 2013; Katz, 2000).

Dins Espanya, aquest tema ha passat per diferents fases tal com explica Francisco Martín Casalderrey. El primer coneixement que tenim va ser als anys cinquanta quan Pere Puig Adam començà a incloure breus notes històriques en uns quants llibres de text. Durant l'època de la denominada Matemàtica Moderna aquesta idea va quedar estancada. Per sort, a principis dels anys 1980 va ressorgir la idea amb més força que mai (Martín Casalderrey, 2010).

En conseqüència, durant aquestes darreres dècades el nombre de publicacions relacionades amb aquest tema han anat augmentant cada cop més. Cada vegada són més les revistes que trobam a escala mundial que publiquen articles en aquest àmbit com ara *Suma, Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas* i *For the learning of mathematics*.

També trobam més llibres com el de *Historical Topics for the Mathematics Classroom* editat per John K. Baumgart que ens conten la història de les matemàtiques posant suggeriments i consells del seu possible ús en l'aula (Baumgart, 1969). En canvi, alguns llibres com els de Josep Pla i Carrera van més enllà. En ells s'estudia i s'explica de manera detallada la història de les matemàtiques de diferents èpoques, els contextos on es varen elaborar els descobriments i la seva importància que han tingut (Pla i Carrera, 2016).

4 Introducció

En aquest treball no es proposa que els alumnes hagin d'estudiar la història de les matemàtiques a través d'un llibre de text ni molt manco que hagin de memoritzar les biografies dels grans matemàtics. El que suggerim és utilitzar la història de les matemàtiques per acompanyar-los durant el seu procés d'aprenentatge. Aprofitar-ho com a recurs didàctic, motivador i contextualitzador per tal que assimilin els continguts de manera més còmode i eficient.

D'aquesta manera, l'ús que volem donar-li a la història de les matemàtiques dins l'àmbit escolar el centrarem en diversos aspectes que veurem en detall a continuació. Tal com explicava Fauvel, la història matemàtica dins l'aula pot ser utilitzada de moltes maneres. Algunes d'aquestes aplicacions les trobam en els propers punts, els quals anirem aprofundint en la mesura que avanci el present treball (Fauvel, 1991):

- Aprofitarem la història per tal que l'alumnat conegui els problemes històrics a partir dels quals varen sorgir les matemàtiques del present.
- Utilitzar la història per contextualitzar i per introduir un tema que es vulgui tractar a classe.
- Ús de la història per contar anècdotes divertides del passat. Entretenint i motivant així l'alumnat.
- Mostrar elements de la història alhora que ensenyam matemàtiques.

- Usar la història per plantejar problemes i exercicis i per tant, que l'alumnat elabori treballs entorn a això.

4.1 La importància de la història dins l'educació

Contar històries pot ser útil per tal d'explicar conceptes o aplicar allò vist en situacions més reals. Tal com va dir Eric Temple Bell "Ningún tema pierde tanto cuando se le divorcia de su historia como las Matemáticas (Bell, 1985)". Autors com el pedagog i matemàtic, Pere Puig Adam, li dedica tot un precepte a la importància de tenir al cap tant els orígens com l'evolució dels processos històrics de les matemàtiques (Puig Adam, 1951). Per tant, això no són més que justificacions que ens deixen entreveure que l'aprenentatge matemàtic dins l'educació no pot anar deslligada de la seva història.

No es tracta de contar una història i canviar tot seguit de tema. Cal treballar-la durant cert temps i usar diferents metodologies. La història es pot treballar en molts aspectes a través d'activitats i materials manipulables. A partir de la història o anècdota podem introduir preguntes i és molt probable que gràcies a ella els alumnes estiguin molt més motivats per tal de contestar-les.

A més, ens serveix com a eina de contextualització. La història matemàtica serveix per relatar una mica el context històric en els quals es va desenvolupar: com vivia la gent, quines eines disposaven o per exemple, a quines dificultats s'enfrontaven. Així els estudiants podran entendre millor el seu origen i la seva utilitat. Com defensen Sierra (2000) i Fauvel (1991), les matemàtiques s'han desenvolupat a través de l'esforç humà i estan lligades en el seu context social i cultural. Per exemple, el desenvolupament de les matemàtiques a Grècia està condicionat pel sorgiment de la filosofia i per la situació cultural i política que vivien. Altrament, trobam èpoques com l'Edat Medieval, en les quals les

situacions socioeconòmiques no eren propícies al desenvolupament de les matemàtiques.

4.2 La història com a element d'aprenentatge realista

Per entendre el paper que juga la història dins les matemàtiques realistes, primer hem d'entendre en què es basa aquest corrent filosòfic i quins són els punts importants que la constitueixen.

El Dr. Hans Freudenthal (1905 - 1990), matemàtic i pedagog, és considerat el fundador d'aquest corrent filosòfic, el qual sorgí com a resposta a les Matemàtiques Modernes dels anys setanta i en oposició al corrent mecanicista que s'estava instaurant.

D'acord amb Àngel Alsina, algunes de les característiques que demanen les matemàtiques realistes són (Alsina, 2009):

- Tant les matemàtiques com la resta de matèries han d'estar contextualitzades. Com a punt de partida, Marja Van den Heuvel-Panhuizen comenta que les matemàtiques s'han de donar en situacions de la vida quotidiana i amb un context que permeti desenvolupar-les i establir models que puguin matematitzar les situacions plantejades (Van den Heuvel-Panhuizen, 1998).

Habitualment quan parlem d'història automàticament pensam amb un passat molt llunyà. Ara bé, no necessàriament quan ensenyam història hem d'anar tan lluny. Podem posar exemples més recents i propers als alumnes i relacionar-los amb les històries ja contades.

- És important que hi hagi una bona interacció entre el professorat i l'alumnat. Com bé expliquen Ahmad Fauzan i els seus companys Tjeerd Plomp i Dick Slettenhaar: les matemàtiques realistes no es basen en el fet que el professor realitzi una pregunta i els alumnes treballin a soles sense el seu suport. Per contra, el professorat ha d'acompanyar els estudiants durant tot el procés d'aprenentatge (Fauzan, Plomp i Slettenhaar, 2002).
- Un dels punts claus i més importants de les matemàtiques realistes, com diuen Erik De Corte, Brian Greer i Lieven Verschaffel, és el fet que els estudiants han de tenir l'ocasió de recrear les matemàtiques i no se'ls hi ha d'imposar l'ús de fórmules que no són capaços de comprendre (De Corte, Greer i Verschaffel, 1996).

Donades aquestes idees essencials, la història de les matemàtiques és un recurs didàctic que ens obre les portes a treballar seguint aquest corrent filosòfic.

Temps enrere Kline ja defensava l'ús de la història de les matemàtiques dins l'aula, citant les següents paraules de Henri Poincaré:

“¿Es posible entender una teoría si desde el primer momento se le da la forma definitiva que impone una lógica rigurosa, sin mencionar para nada el camino por el que ha llegado a adoptar esta forma?. La contestación es categórica: No, realmente no es posible entenderla; incluso resulta imposible retenerla si no es de memoria (Poincaré, 1963).”

Aquesta frase en defensa de l'ús de la història de les matemàtiques està totalment en consonància amb els principis de les matemàtiques realistes, que

rebutgen la mecanització i la memorització com a mitjans per aprendre matemàtiques.

La història ens permet contextualitzar la situació i el problema al qual s'enfronta l'estudiant. De fet, com hem mencionat anteriorment, una de les funcions de la història dins l'aula és precisament donar les contextualitzacions en els problemes i en la introducció de les matemàtiques. Aquesta contextualització històrica ens permet donar sentit a l'ús de les matemàtiques dins l'aula i establir els models matemàtics dels quals parlava Van den Heuvel-Panhuizen.

A través dels problemes històrics, els alumnes poden reinventar l'ús de les matemàtiques. La reconstrucció de la història permet a l'alumnat formular-se preguntes per tal de descobrir els coneixements i aconseguir una comprensió única i personal de les matemàtiques. Com afirma Neus Sanmartí cada alumne ha de trobar la seva manera de planificar i afrontar un problema, és a dir, ha de crear les anomenades bases d'orientació. I és en aquest punt, on els professors han de ser-hi presents per donar una mà (Sanmartí, 2019).

Relacionat amb el que deien Fauzan et al. hem d'assenyalar que no es pretén que els alumnes redescobreixin exactament la història i s'enfrontin als grans problemes i dilemes de les matemàtiques i de la societat tots sols, com ho varen fer els grans matemàtics. Es tracta que el professor els recolzi i, en cas que ho necessitin, els hi vagi donant pistes i idees per tal que els alumnes arribin a esbrinar el mètode o la solució.

Un exemple de com es pot utilitzar la història per millorar la comprensió dels estudiants es troba en l'estudi realitzat per Abadi Abadi i Shofan Fiangga. En el seu estudi empraven els problemes històrics que van conduir al naixement del càlcul integral, usant així les matemàtiques realistes. Les conclusions que

varen arribar foren que l'ús d'aquesta metodologia va permetre els estudiants assolir una millor comprensió del concepte d'integral (Abadi i Fiangga, 2018).

4.2.1 El mètode genètic

El mètode genètic és un sistema molt utilitzat a l'hora d'usar la història de les matemàtiques dins l'aula. Aquest està molt relacionat amb l'ús de la història matemàtica com a element d'aprenentatge realista. Otto Toeplitz, l'any 1927, fou el primer en utilitzar el terme "mètode genètic" en un dels seus llibres (Toeplitz, 1927).

D'acord amb Uffe Thomas Jankvist, podem definir el mètode genètic com la presentació de problemes que simulen el desenvolupament dels avenços històrics de les matemàtiques. Aquests avenços són reconstruïts a través del llenguatge matemàtic actual, permetent que els estudiants siguin capaços de comprendre el procés de resolució dels problemes (Jankvist, 2009). O com diu González Urbaneja, consisteix en el fet que els alumnes assoleixin una completa comprensió d'algun concepte a través de la recreació dels esdeveniments que varen portar a la consolidació del concepte com es coneix avui en dia.

Segons Kline (1978): "Cada persona debe pasar aproximadamente por las mismas experiencias por las que pasaron sus antepasados si quiere alcanzar el nivel de pensamiento que muchas generaciones han alcanzado. [...]. No se puede dudar de que las dificultades que los grandes matemáticos encontraron son también los obstáculos en los que tropiezan los estudiantes y no puede tener éxito ningún intento de acabar con estas dificultades a base de palabrería lógica."

4.2.2 Gauss i la suma de la progressió aritmètica

A un nivell més elemental, podem proposar com a exemple d'ús d'història

matemàtica l'anècdota coneguda de Gauss. Aquella que diu que el professor J. B. Büttner de Gauss, va castigar a l'alumnat a sumar tots els nombres naturals de l'1 al 100. Al cap de poc temps, Gauss va contestar correctament deixant a tots sorpresos.

Davant aquesta anècdota els hi podem plantejar la pregunta de com ho calcularien ells. No es pot esperar que arribin a la resposta correcta en dos minuts. Com a professors els hem de proporcionar certes pistes per tal de guiar-los i esperar que l'alumnat pugui arribar a la solució per si sols. No es tracta ni de donar-los les pistes ni la solució de manera immediata sinó que se'ls ha de deixar temps per pensar, ja que probablement alguns estudiants poden arribar a la mateixa meta sense o amb poques ajudes.

A l'hora d'introduir les pistes, es pot fer de manera progressiva. Per exemple, en aquest cas, una primera pista podria ser aconsellar-los que no facin la suma terme a terme, ja que hi ha maneres més òptimes. Com a segona pista, és interessant comentar-los que es fixin amb els primers i darrers nombres de la sèrie. Una mica més tard, si s'observa que segueixen estancats, és interessant demanar-los que creuen que sembla què passa si sumen el darrer nombre amb el primer i el penúltim amb el segon. Seguidament, els hi fem raonar quants de cops es repeteix aquesta suma amb el mateix resultat i per ventura si ho necessiten els hi podem fer un dibuix, per tal que arribin a la solució correcta.

Una vegada resolt la suma de 100 nombres, els hi podem demanar que ho realitzin de forma genèrica. D'aquesta manera haurà quedat explicat el concepte i el raonament d'on apareix la fórmula, sabent així en tot moment el que fan.

4.3 La importància de la motivació de l'alumnat

Al llarg del temps molts d'autors han donat la seva definició d'allò que entenen

per motivació. D'entre les existents, destacam la definició donada per Don Hellriegel i John W. Slocum: "conjunto de fuerzas que actúan sobre una persona o en su interior y provocan que se comporte de una forma específica, encaminada hacia una meta (Hellriegel i Slocum, 2004)".

De la mateixa manera, també trobam que al llarg de la història diversos autors han anat classificant i definint diferents tipus de motivació. Una de les distincions és la realitzada per part de Johnmarshall Reeve, Ana María Lastra Raven i Manuel Villegas i Besora. Divideixen la motivació en dos tipus: motivació intrínseca o extrínseca, en funció del seu origen (Reeve, Raven i Besora, 1994).

- La motivació intrínseca és aquella que sorgeix a l'estudiant per l'interès que té en les activitats que realitza. Aquesta pot néixer de les ganes que té l'individu de superar un repte o de descobrir i entendre un coneixement nou. Com bé diu Blanca Cristofol Garcia en el seu treball: "En la motivación intrínseca, el estudiante no está motivado por un factor externo, sino por su interés personal (Cristofol Garcia, 2015)".
- La motivació extrínseca es dona quan la motivació de l'estudiant neix de l'existència d'un sistema de recompenses i premis. L'individu no realitza l'activitat per propi interès personal a diferència de l'anterior, sinó per tal d'obtenir una recompensa o inclús evitar així un càstig. Alguns autors com David Greene i Mark. R Lepper defensen que aquest tipus de motivació és contraproduent i que provoca que els estudiants realitzin les activitats amb desgana (Greene i Lepper, 1978).

Altres autors com Elaine S. Elliott i Carol S. Dweck en el 1983 van definir altres tipus de motivacions. Aquests autors varen proposar per primer cop el terme "motivació competencial". Segons ells la motivació competencial és aquella en

què els alumnes tenen l'entusiasme per realitzar un treball, estudiant i treballant per augmentar els seus coneixements malgrat que no rebin res a canvi, reproduint així les pautes que varen realitzar per arribar a l'èxit (Dweck i Elliot, 1983).

No podem negar que la motivació depèn de molts factors com bé afirma Jesús Alonso Tapia i això es veu reflectit en el treball escolar (Tapia, 2003). Amb una bona motivació de l'alumnat podem aconseguir que aquests participin i prestin atenció a les activitats realitzades. Estudis com els realitzats en conjunt per Kusum Singh, Monique Granville i Sandra Dika mostren que hi ha una correlació entre els resultats que els alumnes obtenen i l'interès que mostren a classe de matemàtiques (Singh, Granville i Dika, 2002). És quasi impossible que els alumnes aprenguin i assimilïn els conceptes que desitgem si no tenen una motivació per fer-lo. Com diu en Tapia “querer aprender y saber son las condiciones personales básicas que permiten la adquisición de nuevos conocimientos y la aplicación de lo aprendido de forma efectiva cuando se necesita”.

No es pot esperar que els alumnes estiguin tota l'estona suficientment inspirats i motivats per realitzar la tasca. Com defensa Inmaculada Junco Herrera, si els alumnes no estan motivats per si mateixos, és el professor qui ha de mirar de motivar-los. Per això, hem de cercar activitats que els inspirin, que no siguin monòtones i que els doni un motiu per tal de treballar el contingut (Junco Herrera, 2010). Per fer-ho, existeixen distintes maneres per intentar motivar els alumnes: utilitzar reforços positius; el plantejament d'activitats lúdiques, visualitzant així l'aprenentatge com una manera de descobrir el món; utilitzar la tecnologia o cercar els temes que els hi agraden i apassionen. En aquest treball, treballarem la utilització d'històries interessants com a eina per tal de motivar-los i atreure el seu interès cap a les matemàtiques.

A més, està comprovat que les emocions tenen un gran impacte dins la motivació, l'aprenentatge i el rendiment dels estudiants. Nombrosos estudis, com per exemple els realitzats per Margaret M. Bradley, Mark Greenwald, Margaret C. Petry i Peter J. Lang, han demostrat que hi ha una relació entre les emocions i la memòria. En aquests estudis s'ha comprovat com es recorden millor les imatges i situacions que tenen un contingut emocional, sigui positiu o negatiu, que no pas aquelles situacions neutres (Bradley, Greenwald, Petry i Lang, 1992). Si aconseguim que algun dels continguts donats provoqui una emoció a l'alumne, guanyarem l'assimilació d'aquest. Sovint és difícil aconseguir que un contingut per si sol pugui arribar a emocionar a l'alumnat. Per això, a l'hora de tractar amb les matemàtiques podem contextualitzar-les i aspirar que aquesta contextualització desperti el seu interès. Si contem una història que faci riure els alumnes, aquests recordaran la història i és possible que d'aquesta manera recordin més els continguts matemàtics relacionats amb aquesta.

4.3.1 La història com a recurs motivador

En aquest punt es vol introduir la història com un element motivador per l'alumnat. Comparant en dos col·legis diferents les classes d'àlgebra, Cecil C. McBride i James H. Rollins, estudiaren l'efecte que tenia incloure la història matemàtica dins l'aula. En els seus estudis conclouen que introduir elements d'història millora l'actitud de l'alumnat cap a la matèria (McBride i Rollins, 1977).

Quan es parla de motivació podem distingir dues grans facetes que la història pot aportar dins aquest aspecte. Per una banda, ens serveix per introduir anècdotes divertides pels estudiants i per altra banda, per inspirar i contextualitzar els temes parlats. De tota manera, es pretén buscar una motivació intrínseca en la qual cercarem despertar l'interès de l'estudiant cap a la matèria i el descobriment de nous coneixements, ja sigui a través d'una bona contextualització del tema o per mitjà d'anècdotes divertides.

Contextualització del tema

Es pot contar les històries dels nostres avantpassats per tal d'introduir d'una manera motivadora les unitats didàctiques que volem tractar. Així, l'alumnat coneixerà els motius que varen portar el descobriment de les matemàtiques, les necessitats i les dificultats que s'enfrontaven en aquella època i com ho acabaren solucionant. I per contrari, com afirmava Fauvel, allò que no varen saber resoldre els grans matemàtics és probable que els motivi encara més.

Anècdotes

La utilització d'històries reals o fictícies poden portar la motivació que necessiten els estudiants. Dins els diferents usos que Fauvel proposava, l'art de contar anècdotes era un d'ells. Tal com va dir Howard W. Eves: "These anecdotes have proved very useful in the classroom-as little interest-rousing atoms, to add spice and a touch of entertainment, to introduce a human element, to inspire the student, to instill respect and admiration for the great creators, to yank back flagging interest, to forge some links of cultural history, or to underline some concept or idea (Eves, 2004)."

I és que com bé diu Katz a l'hora de contar anècdotes no ens hem de preocupar de la veracitat dels successos. L'objectiu de l'anècdota no és ensenyar història, és contar un relat que entretengui, cridi l'atenció i introdueixi el tema que volem contar. La majoria d'anècdotes dels grans científics per molt que tinguin una part real, han estat tergiversades al llarg dels anys però així i tot poden tenir un missatge per transmetre a l'alumnat. Citant les paraules de Katz: "However, if we realize that these are to be regarded as anecdotes rather than as history, and if we pay more attention to their value as a catalyst, then it presents no more problem than when we make use of a heuristic argument to explain a theorem (Katz, 2000)".

4.3.2 Arquimedes i la corona: el crit de l'*eureka*

Un exemple d'aplicació de la història com a recurs motivador és la següent anècdota que es pot usar per tal d'introduir la teoria de mesura i conceptes relacionats amb el volum en el curs de 2n d'educació secundària. Per introduir aquest tema, es pot començar contant la història de l'*eureka* d'Arquimedes.

Conten les antigues llegendes que el rei Hieró II de Siracusa va fer construir una corona d'or pur a un orfebre. Davant les sospites d'estafa que tenia el rei, va plantejar a Arquimedes el difícil problema, ja que no podia fondre la corona per tal de calcular la quantitat d'or que tenia. Es conta que Arquimedes mentre es banyava va notar com l'aigua de la banyera pujava al mateix moment que ell es ficava. Es va posar tan content que sortí nu pel carrer cridant: Eureka! Eureka! ("ho he aconseguit", en grec). I així fou. D'aquí li sorgí la brillant idea de ficar la corona dins l'aigua i per tant esbrinar el seu volum i en conseqüència, la densitat buscada. Descobrint d'aquesta manera la veritat. L'orfebre efectivament havia enganyat el rei i aquest va acabar confessant que s'havia quedat part de l'or i canviat per plata.

Contant aquesta anècdota situam als alumnes dins el context d'una manera més entretinguda. En aquesta història es treballen conceptes com ara la definició de volum. A més de tractar un tema molt important com el de prendre mesures. Observant com a través d'una anècdota històrica i divertida es poden treballar àmpliament continguts de matemàtiques. A més a més, és molt més probable que estiguin atents si els conta'm una història que no pas si introduïm el tema de forma directa i sense motivació ni contextualització. De fet, és quasi segur que si els desperta la curiositat, contin la història als amics i/o familiars. Fent que així es recordin del que s'ha realitzat a classe i dels conceptes relacionats que s'han treballat. També, es pot donar el cas que vulguin cercar més informació i, en conseqüència, ampliar així els conceptes vists.

4.4 La importància del treball interdisciplinari

És important treballar a les aules continguts de forma interdisciplinària. Sovint els alumnes veuen les matèries com a mons completament separats. Pensen que a les classes de llengües no es poden fer ni aprendre matemàtiques i que a les classes de matemàtiques no hem de treballar elements de llengües.

És imprescindible rompre aquesta barrera entre assignatures. A la vida real tots els coneixements estan entrelaçats i no es poden veure de forma separada. Maria Arcà, Pablo Guidoni i Paolo Mazzoli afirmen que és important desenvolupar un mètode de conèixer que no sigui fragmentat malgrat la necessitat de separar les assignatures, fet que va servir en un moment determinat per organitzar els coneixements (Arcà, Guidoni i Mazzoli, 1990). Permetent així el sorgiment d'especialistes amb uns coneixements i una visió específica de la realitat. A l'hora de treballar altres disciplines juntament amb les matemàtiques no només surten reforçades aquestes, sinó que també permet una millor comprensió de les matemàtiques en si.

Molts autors com David Mora, entenen la didàctica de les matemàtiques com un cos interdisciplinari que demana un treball conjunt amb la resta de disciplines (Mora, 2001). Altres, com Joan Gómez, opinen que: "La educación matemática tendría que ser una auténtica educación en humanidades, en la que los estudiantes conocieran el papel que representan las Matemáticas en nuestra cultura y en la sociedad (Gómez, 2002)". Per tant, podem concloure que no és possible una comprensió profunda de les matemàtiques sense conèixer el context i els seus orígens.

De manera que en aquest treball no estam només aprofundint en continguts matemàtics sinó que, en contar la història dels matemàtics i filòsofs, podem tractar temes com ara la situació de la societat en aquella època i en quin

context va sorgir el coneixement. Interrelacionant així els elements de diverses assignatures com molt bé afirma González Urbaneja (2004): “la Historia de las Matemáticas como lugar de encuentro entre las ciencias y las humanidades, es un instrumento magistral para enriquecer culturalmente la Enseñanza de la Matemática e integrarla de forma armónica e interdisciplinar en el currículum académico”.

5 Propostes educatives

Es vol mostrar diverses propostes educatives en diferents unitats didàctiques. Com hem comentat abans, ens centrarem únicament amb un curs: segon d'educació secundària obligatòria. Per tal de no allargar innecessàriament el treball, s'ha fixat prèviament tres unitats didàctiques que es troben dins el currículum vigent. Aquestes són: funcions, proporcionalitat geomètrica i geometria. Un cop seleccionat el curs i les unitats didàctiques ens podem enfocar en realitzar diferents activitats per a cada tema.

No volem que l'alumnat es limiti a memoritzar una simple història pel fet que és una activitat més a dins l'aula. Per aquest motiu, en la mesura possible, intentarem que la història explicada vagi lligada d'una activitat a través de la qual els alumnes aprendran els continguts i les competències adients.

En total es plantejaran quatre activitats, tres de les quals estaran relacionades amb el mètode genètic i la quarta consistirà en exposar el treball que hauran de preparar. Per cada una de les propostes plantejades tendrem uns objectius diferents. De la mateixa manera que farem ús d'una metodologia, d'uns continguts i d'uns recursos adients en cada situació sense oblidar-nos de la diversitat present a l'aula.

5.1 Contextualització de la proposta educativa

La proposta educativa està dirigida a un curs de 2n d'ESO. S'ha elegit aquest curs perquè desconeixen o han vist en el curs anterior per primera vegada el contingut que es vol mostrar. Això ens dona més joc a l'hora d'ensenyar nous continguts per ells.

En el curs seleccionat realitzen les unitats de funcions, proporcionalitat geomètrica i geometria en el mateix trimestre, concretament en el tercer. L'ús de les unitats seleccionades són ideals per treballar la història matemàtica. Especialment les dues relacionades amb geometria, ja que són aspectes treballats des de l'antiga Grècia i tenen molta història al darrere.

D'aquesta manera durant aquest darrer trimestre es realitzaran les activitats proposades. Els alumnes seran conscients que durant aquell trimestre es treballarà a través de la història de les matemàtiques. S'ha decidit treballar durant només un trimestre perquè si es realitza durant tot el curs, l'ús de la història de les matemàtiques pot arribar a tornar-se un tema monòton i cansar l'alumnat. El fet de fer-lo durant un sol trimestre fa que les activitats realitzades siguin més innovadores. En general és convenient anar canviant de metodologies de treball per anar atraient l'atenció de l'alumnat. D'altra banda, l'ús de la història durant un període determinat de temps fa que l'alumnat entengui les activitats proposades com un fet temporal i no pas com un element repetitiu.

Es proposaran quatre activitats. En les tres primeres s'utilitzarà la història com a mètode a través del qual els alumnes podran aprendre i reinventar nous coneixements de les matemàtiques. De manera que aquestes activitats estan dissenyades per treballar un contingut concret. La darrera activitat a realitzar pels estudiants serà diferent. En aquesta seran els alumnes qui mitjançant la

realització d'un treball hauran d'aprendre i ensenyar a la resta de la classe un contingut històric.

5.2 Avaluació

Cada una de les tres unitats didàctiques realitzades en el tercer trimestre tindrà una nota que vendrà definida pels següents percentatges:

- Un 10 % d'actitud, on es tindrà en compte la participació i el comportament de l'alumnat a classe.
- Un 20 % serà el treball realitzat a l'aula que també inclou la realització de la tasca i les possibles entregues d'activitats.
- Un 30 % de l'elaboració del quadern d'aprenentatge.
- Un 40 % provindrà de la nota de la prova final.

La nota final del trimestre estarà constituïda per la nota de cada unitat i la nota del treball final. Cada una de les tres unitats contarà un 25 % de la nota final i el pes del treball final també serà d'un 25%.

El treball final que constarà d'una exposició, elaborat de manera individual o en grups fins a un màxim de tres integrants, estarà valorat d'acord amb la rúbrica creada amb la col·laboració de la classe. Aquesta rúbrica serà la mateixa per l'alumnat, tant en la coavaluació com en l'autoavaluació, i pel professor. A més, la rúbrica estarà dividida en dues parts. Una part serà la nota grupal que inclourà els continguts exposats per part del grup i la seva presentació. La nota individual anirà enfocada a alguns aspectes de l'exposició com per exemple si s'expressa en claredat. El percentatge estarà dividit en:

- Un 40 % d'autoavaluació i coavaluació. L'alumnat emplenarà un qüestionari d'autoavaluació i valorarà de manera individual les exposicions de la resta de companys amb la rúbrica creada a dins la classe.
- Un 60 % del contingut de la presentació. Aquesta nota serà posada per part del professor.

El treball final no serà recuperable.

Si la nota és superior o igual a 5, l'alumne estarà aprovat. En cas contrari, podrà recuperar el trimestre fent un examen de recuperació de les tres unitats juntes que tindrà un pes del 75%. A aquesta nota se li sumarà la nota del treball final.

5.2.1 Quadern d'aprenentatge

Tendrem en consideració que en el curs de 2n d'ESO de matemàtiques es treballa a través del quadern d'aprenentatge. Els alumnes han d'apuntar les seves reflexions, el que han après i les dificultats que s'han trobat després de realitzar una activitat. Això també els serveix per autoavaluar-se, per tenir una memòria de classe i com a quadern d'ajuda de cara a la prova final de cada unitat. Aquest quadern com ja s'ha comentat contarà un 30 % de la nota de cada unitat.

5.2.2 Examen

En els exàmens que es faran a finals d'unitat s'avaluaran les capacitats competencials dels alumnes. L'avaluació ha d'estar relacionada amb la forma d'ensenyar. De poc ens serveix treballar les competències si després feim exàmens on sols s'avaluen continguts, ja que això faria que l'alumnat tengués la sensació que els continguts són l'única part important i només se centrarien

en ells. Tampoc es pot avaluar les competències en els exàmens si sols hem treballat continguts a classe.

En cada examen realitzarem preguntes contextualitzades a través de la història de les matemàtiques on els alumnes hauran d'aplicar el que han après per tal de resoldre-les correctament.

5.3 Temporització

Les activitats d'història que formen part de la unitat didàctica tenen una durada prevista d'una sessió. En cas que l'activitat no es pugui acabar en el temps previst, aquesta s'acabarà realitzant a l'inici de la propera sessió.

Pel que fa al treball final, es crearan les rúbriques que serviran per avaluar les presentacions un mes abans de la data d'inici de les presentacions. També es durà a terme una sessió de dues setmanes abans de la seva presentació per tal d'aclarir els dubtes que els hi hagin pogut sorgir i ajudar-los, si cal, en el procés. Les exposicions tendran una durada d'entre 10 i 15 minuts. D'aquesta manera, es reservaran dues o tres sessions en funció del nombre d'alumnes i grups formats a l'aula. Dins aquestes sessions estarà inclosa l'avaluació a partir de les rúbriques explicades.

6 Activitats d'història

Tot seguit es proposen algunes activitats per dur a terme dins les unitats didàctiques seleccionades.

6.1 Funcions. Anècdota de Descartes i la mosca

El nom de coordenades cartesianes fou donat per René Descartes, un filòsof francès (1596 - 1654). Molts coneixem Descartes pel seu famós aforisme: "pens, per tant existeix".

De Descartes es coneix la següent anècdota:

Descartes es passava moltes hores dins el llit a causa de la dèbil salut que tenia. A conseqüència d'això, disposava de molt de temps per reflexionar i donar voltes a les coses. De fet, tant de temps, que un dia quan una mosca entrà dins l'habitació, es va quedar observant el recorregut que aquesta feia. Després de pensar una bona estona es demanà si hi havia qualche manera de saber quina era en cada moment la posició exacta de la mosca. Va pensar encara més i va arribar a la conclusió que si tenia les distàncies de dues superfícies perpendiculars, ho podria saber. En aquest cas, com es trobava dins l'habitació per ell aquestes superfícies a les quals es referia eren la paret i el sostre. Va córrer a cercar un full i començà per dibuixar les dues rectes perpendiculars. S'adonà que tot punt quedava determinat per la seva distància als eixos. A aquestes distàncies els anomenà "coordenades en un punt" i d'aquesta manera va néixer la idea de "coordenades cartesianes".

Objectius

L'objectiu d'aquesta anècdota és motivar l'alumnat. Es tracta d'un succés curt i no es pretén que l'alumnat realitzi els mateixos descobriments que Descartes. Sinó que més bé ens serveix per tal d'introduir una nova unitat didàctica d'una manera motivadora i divertida que permet entretenir-los tal com s'ha explicat abans. A més a més, ens permet donar a conèixer una pinzellada de la vida del filòsof i introduir tot seguit les coordenades cartesianes.

Continguts

Els continguts que ha d'aconseguir un alumne a l'àrea de Matemàtiques són definits pel Decret 34/2015, de 15 de maig, pel qual s'estableix el currículum de l'educació secundària obligatòria a les Illes Balears (BOIB núm.73, 16 de maig de 2015).

Dins aquesta activitat es tractaran els següents continguts:

- **Bloc 1.** Processos, mètodes i actituds en matemàtiques
 - Ús del llenguatge apropiat.
 - Pràctica dels processos de matematització i modelització en contextos de la realitat i en contextos matemàtics.

- **Bloc 4.** Funcions
 - Coordenades cartesianes: representació i identificació de punts en un sistema d'eixos de coordenades.

Paral·lelament també es treballen continguts d'història i filosofia, com ara qui era Descartes.

Recursos materials

Es faran ús dels següents materials:

- Cinta mètrica
- Pissarra digital
- Pissarra i guix
- Pupitres
- Altres materials escolars

Activitat

Començarem l'activitat contant la història de Descartes i la mosca que s'ha

comentat anteriorment. A continuació, es mostrarà a la pissarra digital una simulació d'un punt, que serà la mosca per nosaltres, que es mou aleatòriament.

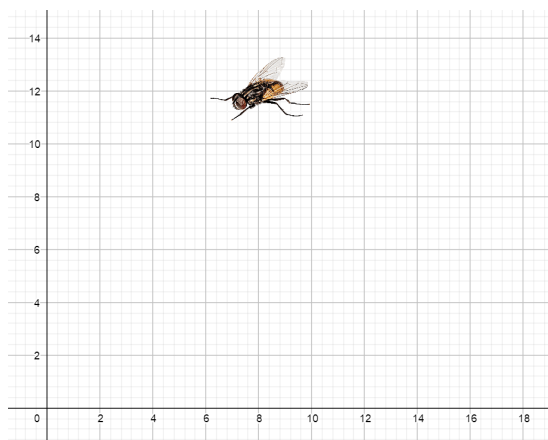


Figura 1. Simulació de la mosca.

Així tenim tota l'estona controlada la posició de la mosca i quan vulguem podem parar-la i indicar en quina posició està situada. Podem aprofitar això per explicar també el tema de les dimensions. La mosca a la vida real es mouria en tres dimensions (3D) però a la simulació només ho fa en dues (2D) (vegeu Figura 1). Així que, més aviat podríem dir que és un cuc que es mou en un pla de dues dimensions. A més a més, podem aprofitar per explicar que l'eix d'abscisses i el d'ordenades tenen unitats. En el cas presentat els eixos tendrien unitats de longitud. Per exemple, podríem parlar de metres i centímetres. Això últim es pot veure més fàcilment fent un dibuix a la pissarra amb l'ajuda d'una cinta mètrica.

Per acabar aquesta sessió relacionada amb el tema de coordenades, els mostrarem com matemàticament poden també expressar la posició dels companys de classe. L'activitat consisteix en el fet que les taules de l'alumnat formen un sistema de coordenades (files i columnes) com es veu en la Figura 2. Un cop establerts els eixos, assignam a l'eix d'abscisses uns nombres i el

d'ordenades unes lletres. Posteriorment, s'escull uns quants alumnes i es demana quina és la seva coordenada i quina és la del seu company. Per tal de poder seguir jugant poden intercanviar-se de lloc o fins i tot canviar els eixos. D'aquesta manera s'aconsegueix que entenguin el concepte de coordenades cartesianes de manera més intuïtiva.

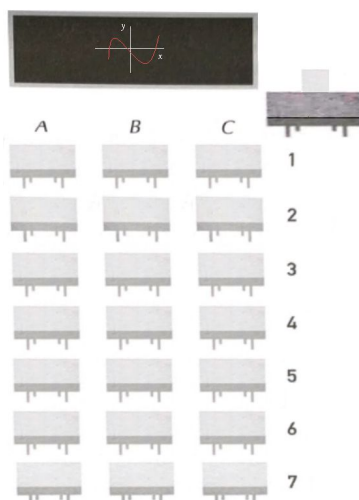


Figura 2. Sistema de coordenades mitjançant pupitres.

Anton Aubanell en un article de la revista *Noubiax* va proposar una sèrie d'activitats addicionals amb les quals podem aprofundir el tema de coordenades. En aquestes activitats, Anton proposa posar algunes condicions sobre els sistemes de coordenades com les següents (Aubanell, 2017):

- “Els alumnes els quals les seves coordenades sumen 4 posau-vos drets” i al fer això surt la recta $x + y = 4$. O també es pot dir que es posin drets els alumnes que tenen les coordenades iguals, sorgint així una altra recta $x = y$.
- Es poden formular també dues condicions, de manera que només s'aixecarà l'alumne que compleixi les dues. “Que s'aixequin els alumnes els quals compleixen que $x + y = 4$ i $x = y$ ”. És interessant assenyalar

que així estam relacionant la unitat de funcions amb la de sistemes d'equacions. També és fonamental remarcar que l'alumne que quedarà dret serà aquell que estigui tant dret en la primera condició com en la segona.

- Per acabar, podem tractar el tema de les inequacions. Per exemple, els podem dir que s'aixequin aquells que la seva primera coordenada sigui més gran que tres ($x > 3$) o que compleixin que la suma de les seves coordenades sigui menor que quatre ($x + y < 4$). Aquí és important comentar que la recta $x + y = 4$ separa aquells que estan asseguts dels que estan drets. De manera similar al punt anterior, podem fer combinacions de diferents inequacions.

Avaluació

Per tal d'avaluar l'activitat tendrem en compte per una part l'apartat d'actitud de l'alumnat dins l'aula. Es valorarà tant la seva participació com el seu interès en l'activitat. Les seves respostes davant les preguntes seran avaluades dins l'apartat de treball de classe. D'aquesta activitat en quedarà constància dins el quadern d'aprenentatge que serà revisat a finals de la unitat. En aquest darrer punt també es demanarà una reflexió sobre el contingut treballat així com possibles aplicacions de les coordenades en la vida real.

Globalment s'avaluaran els criteris d'avaluació i estàndards d'aprenentatge que apareixen en l'annex 10.1.1.

Atenció a la diversitat

Pel que fa a l'atenció de la diversitat es tracta d'una activitat especialment aconsellable, ja que s'atén a la diversitat al ser una activitat assequible per tots.

Hem de tenir una mica de cura en què en aquesta i en la resta d'activitats no participin sempre els mateixos. Això ho podem aconseguir, per exemple, a

l'hora de preguntar-los en quina posició estan o bé quan es preguntí a quina posició està el seu company, podent dirigir així la posterior pregunta a aquells que volem que participin. D'aquesta manera podrem controlar la participació, incentivant a participar aquells que no ho solen fer i donant una oportunitat a aquells estudiants que els costa més. Davant els alumnes amb altes capacitats també se'ls hi pot proposar activitats que requereixen un major nivell com ara certs exercicis d'inequacions. Així adaptam l'activitat davant la diversitat de capacitats que es troben a l'aula.

6.2 Proporcionalitat geomètrica. La història de Tales i la piràmide

Tales va viure a la ciutat de Milet, una polis grega de la costa jònica (Turquia actual) a l'antiga Grècia durant els anys 500 aC. És considerat com uns dels primers matemàtics, científics i investigadors de la cultura occidental. Una de les anècdotes més conegudes de Tales és el fet que va predir un eclipsi l'any 585 aC. I així va ser, durant una batalla va ocórrer. Fet que va aturar els rivals i per por de què fos un avís de Déu, varen arribar a un acord de pau (Carvajal, 2017).

La història completa de Tales i l'altura de la piràmide és la següent:

Tales passejava pel Caire quan un sacerdot que adorava a les deïtats d'Egipte li digué: "Foraster, diuen que ets molt viu però jo t'apost el que vulguis a què no saps calcular l'altura de la piràmide de Kheops". En aquells temps les grans piràmides d'Egipte ja tenien els seus anys, uns dos mil anys aproximadament, i Tales molt decidit acceptà. A més, afirmà: "No sols trobaré la resposta sinó que calcularé la seva altura sense utilitzar cap instrument." Tales es va jeure a terra i pintà unes marques, mesurant així la seva pròpia altura. Es va aturar sobre una marca i pacientment va esperar que la seva ombra fes la mateixa longitud que ell. Un cop l'ombra va fer la mateixa longitud que la seva altura comentà:

“Ara sé que l’ombra de la piràmide ha de fer el mateix que la seva altura”. A continuació va mesurar l’ombra de la piràmide i li digué el resultat al sacerdot i aquest no s’ho podia creure. A més, Tales va afegir: “No sols som capaç de fer això, si em deixes un bastó seré capaç de calcular l’altura de la piràmide a qualsevol hora del dia”.

Objectius

A diferència de la proposta educativa anterior, aquestes activitats van més encaminades a pensar. L’objectiu principal és donar a conèixer les situacions en les quals es poden aplicar les matemàtiques, concretament ens centrarem amb el Teorema de Tales. A més, ens interessa que percebin les circumstàncies d’aquell moment i la falta d’instruments com els que tenim avui dia. Per aquest motiu, és curiós estudiar primerament com va sorgir el problema de Tales.

Continguts

Seguint el Decret 34/2015, dins aquesta proposta es treballa:

- **Bloc 1.** Processos, mètodes i actituds en matemàtiques
 - Planificació del procés de resolució de problemes.
 - Reflexió sobre els resultats: revisió de les operacions utilitzades, assignació d’unitats als resultats, comprovació i interpretació de les solucions en el context de la situació, recerca d’altres formes de resolució, etc.
 - Plantejament d’investigacions matemàtiques escolars en contextos geomètrics.
 - Confiança en les pròpies capacitats per desenvolupar actituds adequades i afrontar les dificultats pròpies del treball científic.

- **Bloc 3.** Geometria

- Semblança: figures semblants. Criteris de semblança. Raó de semblança i escala.

A part d'aquests continguts, s'està treballant continguts d'història i geografia.

Recursos materials

Es farà ús dels següents materials:

- Pissarra digital
- Calculadora
- Full d'activitat
- Altres materials escolars

Metodologia

Descriurem el problema en tres actes, seguint la proposta de Dan Meyer però una mica canviada.

Tal com explica Dan Meyer en un dels vídeos de TED, *Math class needs a makeover*, cal separar l'educació dins l'àrea de matemàtiques en dues categories: per una banda, l'aprenentatge d'algoritmes, procediments, continguts per la resolució d'exercicis i d'altra banda la utilització de les matemàtiques en el món que ens envolta. Aquest darrer punt és el que més ens interessa que els alumnes aprenguin. S'ha d'enfocar les matemàtiques com a una eina útil per a la vida quotidiana i per tant, a fora de les aules.

Dan Mayer planteja els seus *three acts math* com una manera d'apropar els problemes que es realitzen dins l'aula cap als problemes que es poden trobar al dia a dia. Problemes on no ens donen tota la informació ni les dades que es necessiten en el primer instant.

Les matemàtiques en tres actes es presenten com una manera alternativa de formular activitats. Neixen de la necessitat de rompre les metodologies estàndards on el professor explica un contingut, presenta un problema i tot seguit el resol. Aquesta mena de problemes intenten centrar el protagonisme en l'alumnat, els quals són ells qui han de realitzar les preguntes i participar activament en la resolució del problema. De manera detallada, podem distingir tres actes diferents:

- Primer acte. Primerament se'ls hi ofereix un estímul, sigui a través d'un vídeo o d'una història. Un cop vist l'estímul, els estudiants han de formular una sèrie de preguntes. A més, se'ls hi pot demanar que facin suposicions sobre la resposta de les seves preguntes.
- Segon acte. Una vegada tenen la pregunta han de demanar-se quines dades necessiten per resoldre el problema. És important que siguin ells qui esbrinin quines dades els hi fan falta.
- Tercer acte. Es procedeix a resoldre'l i a mostrar la solució real del problema. Es dona importància en discutir on hi pot haver errors i quines dificultats s'han trobat. Per últim, si es vol, també es poden reformular les preguntes.

Aquest tipus de problemes és útil, ja que a la primera part es genera una pregunta que no és una mera excusa per fer servir les matemàtiques, sinó que té un pes i una importància, donant-li sentit a l'ús de les matemàtiques per resoldre-la.

Activitat

En el primer acte plantejarem la situació en la qual es va trobar Tales, narrant part de la història contada inicialment i sense revelar el mètode que se seguirà.

Després de fer-ho, se'ls hi presentarà la següent pregunta: quina creieu que és l'altura de la piràmide de Kheops? Inicialment esperem que l'alumnat faci una suposició i intenti sense fer cap càlcul predir l'altura que farà. La intriga de saber qui s'ha aproximat més al valor real atraurà l'atenció i l'interès de l'alumnat. A la vegada que també adquiriran nous coneixements.

En el següent acte es demanarà quines dades o quins instruments necessiten per trobar l'altura. La idea és que l'alumnat demani les dades que considerin necessàries i nosaltres, com a professors, podem donar joc a la pregunta responent: vosaltres com aconseguiríeu aquesta data si us trobau sols en el desert i només disposeu d'instruments de mesura senzills? Els estudiants aniran reflexionant sobre aquest problema amb l'ajuda del professorat, el qual donarà les indicacions i ajudes que consideri necessàries perquè per si mateixos puguin arribar a la solució desitjada.

Algunes de les ajudes que proposam, seguint la idea de Tales, són les següents:

- Va utilitzar l'ombra i els rajos de sol.
- Dibuixau els rajos del sol.
- Va usar un pal com a ajuda.
- En cas de no aconseguir-ho, dibuixar l'esquema final.

Finalment, quan hagin realitzat l'esquema amb totes les dades que calen, se'ls hi proporcionarà les dades reals que tenim sobre l'altura de la piràmide.

Comino i Glezortiz crearen una aplicació gràcies al Geogebra que permet moure el Sol i el punt P de lloc i en conseqüència, variar les dades (Comino i Glezortiz, 2016). La Figura 3 ens mostra l'aplicació.

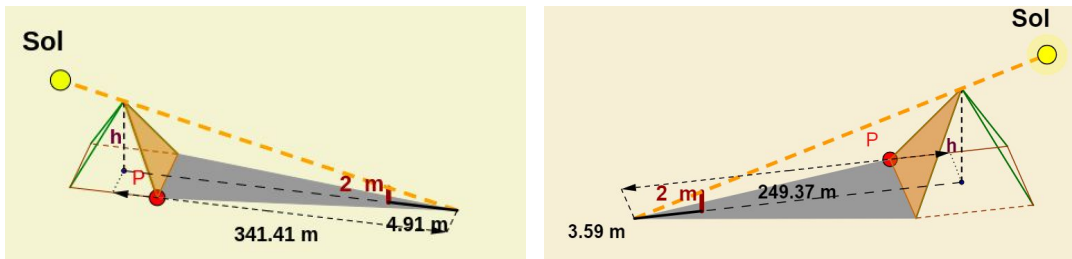


Figura 3. Càlcul de l'altura de la piràmide de Keops (Comino i Glezortiz, 2016).

Aquesta aplicació no sols ens dona les dades de l'altura de la piràmide a una posició concreta del Sol sinó que a més disposem de la informació sobre les dades en qualsevol hora independent de la seva posició.

Com a darrer acte es resol el problema. També es dona la solució real de l'altura de la piràmide i es demanarà quin és l'error i com pot haver sorgit. Es parla sobre l'error que normalment es comet en realitzar les mesures, així com la impossibilitat de mesurar perfectament la distància fins al centre de la piràmide si aquesta no és completament simètrica. També es pot discutir quins mètodes s'utilitzen per mesurar l'altura de la piràmide.

Si queda temps al final de la sessió, es pot explicar el mètode de Liu Hui per trobar l'altura de la piràmide. En cas contrari, es pot deixar com a tasca voluntària. Aquesta consistirà en la recerca i l'explicació d'aquest mètode.

Avaluació

Seguint el currículum vigent, els criteris i estàndards d'avaluació que se seguiran són els trobats en l'annex 10.1.2.

Per tal d'avaluar l'activitat s'entregarà la fitxa que hauran realitzat durant l'activitat (vegeu annex 10.2). La nota que obtinguin de l'activitat estarà inclosa dins l'apartat de treball a classe. Per últim, es donarà com a opcional la tasca del mètode de Liu Hui. Aquesta última pot contar com a màxim un punt extra de la nota final de l'examen si s'entrega.

A més, també se'ls recordarà que han d'anotar al quadern d'aprenentatge les corresponents reflexions. També es pot impulsar a motivar-los a seguir cercant casos quotidians en què es pot usar aquest mètode vist.

Atenció a la diversitat

Tot l'alumnat de la classe pot realitzar aquesta activitat. L'activitat s'adaptarà a les necessitats especials de l'alumnat. Aquells alumnes que tinguin majors dificultats per fer la tasca, el professorat els hi prestarà més ajuda, intentant que cada un dels alumnes donin el seu màxim esforç en la comprensió i la resolució del problema plantejat.

A l'hora de realitzar la tasca voluntària hi haurà una variació. Els alumnes que necessitin reforç podran elaborar una tasca similar a la vista dins classe i que se'ls hi proporcionarà en cas que la sol·licitin en paper.

6.3 Geometria. La història de Dido

Conten que Elisa de Tiro, també coneguda com a Dido, fou la fundadora i primera reina de Cartago en el segle IX aC. Quan el seu pare va morir, un dels seus germans l'obligà a casar-se amb un sacerdot ric, Siqueo, per tal d'així poder-li robar d'amagat tota la seva fortuna. Anys després Dido es negà rotundament a confessar-li al seu germà on guardava la riquesa el seu marit. El seu germà s'enfadà molt i com a càstig matà a Siqueo. Dido decideix anar-se'n lluny de la família i emportar-se fins a Àfrica els diners del seu marit i la seva germana petita. En arribar demanà un tros de terra al rei Jarbas per tal de fundar una nova ciutat. Aquest amb la intenció de donar-li poca o, millor dit, gens de terra li concedí "tanta terra com pugui abastar una pell de bou". Es conta que Dido, que era molt intel·ligent, va tallar la pell de bou en tires molt

fines i formà una circumferència d'entre 1 i 2 quilòmetres de perímetre. Gràcies al seu enginy va aconseguir envoltar entre 10 i 25 hectàrees.

Objectius

Estam davant d'una història que combina les dues anteriors, ja que es tracta d'una anècdota molt divertida i interessant, la qual entreté l'alumnat. A més, juntament amb una metodologia i unes preguntes adients es pot desenvolupar una gran activitat per treballar el tema d'àrees i perímetres.

L'activitat que s'explica posteriorment està pensada per motivar i posar els estudiants en la pell de Dido. Ells mateixos, experimentant, hauran d'arribar a la figura que va donar com a resultat la reina de Cartago.

Continguts

D'acord amb el vigent Decret 34/2015, es treballaran els següents continguts:

- **Bloc 1.** Processos, mètodes i actituds en matemàtiques
 - Estratègies i procediments posats en pràctica: ús del llenguatge apropiat i reformulació del problema.
 - Plantejament d'investigacions matemàtiques escolars en contextos numèrics, geomètrics, funcionals, estadístics i probabilístics.

- **Bloc 3.** Geometria
 - Elements bàsics de la geometria del pla. Relacions i propietats de figures en el pla.
 - Figures planes elementals: triangle, quadrat, figures poligonals.
 - Càlcul d'àrees i perímetres de figures planes.
 - Circumferència, cercle, arcs i sectors circulars.
 - Raó entre longituds i àrees de figures planes.

A més de treballar continguts d'història.

Recursos materials

Es farà ús dels següents materials dins l'aula:

- Papers
- Tisores
- Regla graduada
- Calculadora
- Fulls d'activitats
- Altres materials escolars

Metodologia

En aquest escenari utilitzarem una metodologia de treball cooperatiu anomenada estructura 1-2-4. Inicialment el professor dona les indicacions, planteja la qüestió i algunes vegades entrega una fitxa on apuntar la resposta. A continuació s'explica en què consisteix aquesta metodologia la qual està dividida en tres parts.

Primerament cada estudiant ha de contestar individualment la qüestió plantejada pel professor. D'aquesta manera hi ha un treball de reflexió personal, assegurant-nos que cada alumne ha dedicat una estona a pensar i a resoldre el problema.

En segon lloc, cada alumne s'uneix amb un company i discuteixen en parella la solució a la qual han arribat. A més, s'hauran de posar d'acord a l'hora de donar una resposta.

Per acabar els alumnes formen grups de quatre, unint-se dues parelles, entre els quals es posen d'acord sobre quina és la resposta definitiva. Tots els

membres del grup han d'anotar la mateixa resposta a la fitxa, o quadern, de manera que un consens entre tots els membres del grup és necessari.

Activitat

Com a material portarem a l'aula un tros de paper per cada alumne de la mateixa mida. Per tal de motivar-los, els hi proposarem: "Us donarem tanta terra com pugui abastar aquest tros de paper".

Després de deixar-los reflexionar una estona, els hi explicarem la història de Dido. A continuació, es faran una sèrie de preguntes enfocades en el perquè d'un cercle i no un quadrat. Aquí és quan després s'introdueix l'estructura cooperativa 1, 2, 4 (vegeu annex 10.3.1).

Un cop hagin reflexionat de manera individual, posteriorment en parelles i per últim en grups de quatre, hauran d'explicar en veu alta davant la classe a quin acord hauran arribat davant la pregunta formulada.

En cas de no esbrinar el motiu, se'ls proposarà una fitxa que contengui les següents preguntes (vegeu annex 10.3.2):

- Quina és l'equació del perímetre d'un quadrat? I la d'un cercle?
- Quines són les seves àrees?
- Quina relació hi ha entre les equacions del perímetre i de la superfície?

A través de les preguntes s'espera que tots els alumnes s'adonin que amb el mateix perímetre el cercle abraça una àrea més gran i aquest és el motiu del perquè va fer un cercle i no un quadrat.

Avaluació

En acabar la classe s'entregaran les fitxes proporcionades que tendran un pes

dins l'avaluació final de la unitat didàctica. Es valoraran els criteris i els estàndards definits prèviament (vegeu annex 10.1.3). A més es tindrà en compte l'actitud i el quadern d'aprenentatge.

Atenció a la diversitat

La diversitat de l'alumnat és atesa respectant totes les opinions donades pels alumnes. D'aquesta manera les aportacions de cada alumne són valorades positivament. No es contempla que es faci cap reforç addicional, ja que es fa una dinàmica 1, 2, 4 i els grups estan distribuïts de manera heterogènia. Permeten així que cada participant exposi la seva pròpia visió.

7 Treball final: canvi de rol

7.1 Per què realitzar presentacions?

Fer presentacions a l'assignatura de matemàtiques pot aportar molts beneficis per l'alumnat. Per una banda, l'alumnat ha de preparar el propi contingut, aprenent així durant el procés. Com afirmen Tulay Girard, Musa Pinar i Paul Trapp, en efectuar les presentacions els estudiants no només aprenen dels continguts que han cercat sinó també dels treballs i errors de la resta de companys. Per altra banda, en fer les presentacions els alumnes poden millorar les seves habilitats orals i superar l'ansietat i la por que els provoca parlar en públic. Segons els seus estudis, els estudiants creuen que gràcies a les presentacions obtenen un benefici molt important: millorar les seves habilitats per parlar en públic (Girard, Pinar i Trapp, 2011).

7.2 Proposta

A continuació s'explica la proposta per la darrera setmana de curs. Es demanarà que duguin a terme una presentació individual o en petits grups sobre alguna història matemàtica.

Objectius

L'objectiu principal d'aquesta activitat és que l'alumnat cerqui les històries prenent un rol actiu en el procés d'aprenentatge. Pretenem que els nostres estudiants aprenguin a cercar per Internet i a informar-se alhora que cerquen continguts de matemàtiques. A més, es treballaran algunes competències claus com ara la capacitat d'expressar-se i de comunicar-se.

Activitat

A principi del trimestre se'ls indicarà que han de fer aquest treball, donant-los unes pautes necessàries que hauran de seguir. D'aquesta manera, l'alumnat disposarà de tot el trimestre per tal d'organitzar-se i decidir quan començar a fer el treball. A part d'això, se'ls hi anirà fent recordatoris i demanant si ja tenen el tema pensat amb la intenció que no oblidin o deixin el treball pel darrer moment.

Els alumnes de forma individual o en grups de màxim tres persones realitzaran una activitat de recerca sobre un tema de la història de les matemàtiques. Serà un tema obert de manera que no quedarà restringit a cap època històrica concreta ni a certs continguts matemàtics. Això sí, se'ls demanarà que allò que vulguin explicar tenguin una relació amb les unitats didàctiques vistes a classe i un nivell de dificultat que pugui comprendre la classe en general.

A final de curs els alumnes hauran de realitzar una presentació davant la resta de companys. Dues setmanes abans de les presentacions es farà una sessió

de supervisió de la feina. Se'ls demanarà quin tema han triat, si ja ho tenen estructurats i si necessiten ajuda amb els continguts de les històries o si tenen altres preguntes. En cas que no disposin de tema, és recomanable donar-los algunes idees o suggeriments per tal d'encaminar-los. Es deixarà tota aquesta sessió per tal que tinguin temps d'organitzar-se amb els companys del grup i puguin treballar a classe.

Avaluació

Un mes abans de començar les exposicions es farà una sessió dedicada exclusivament a l'elaboració de la rúbrica que servirà tant pels alumnes com pel professor per avaluar el treball. Així l'alumne prèviament disposarà d'una rúbrica amb els aspectes que es puntuaran més alt i se'ls hi donarà més pes en el treball. Seran els alumnes qui elaboraran la rúbrica i aquesta es consensuarà davant la classe.

Com afirmen Neus Sanmartí i Mercè Mas, és important que els alumnes col·laborin activament en la realització de la rúbrica. Així els mateixos alumnes han de reflexionar sobre allò que és important de la matèria, estableixen quins són els mínims de coneixements i saben que valorem. L'objectiu d'això és que en crear la rúbrica prenguin consciència dels coneixements que tenen i que sàpiguen els objectius a assolir per tal de millorar la seva qualificació (Sanmartí i Mas, 2016). De manera que a través de la rúbrica tendran unes pautes a seguir. Valorarem que sigui una història relacionada amb les matemàtiques i puntuarà positivament si es pot relacionar amb alguns dels continguts de matemàtiques que han vist al llarg del curs.

Vegeu annex 10.4 per veure un exemple de rúbrica.

Atenció a la diversitat

A través de l'activitat es pot gestionar de manera eficaç l'atenció a la diversitat.

Els alumnes cercaran les històries per si mateixos i treballaran en el seu ritme. D'aquesta manera els alumnes d'altres capacitats poden cercar i aprofundir les històries amb uns continguts més complexos. De fet, el professor els pot animar a fer que cerquin aquest tipus d'històries. Per altra banda, l'alumnat amb més dificultat per les matemàtiques pot enfocar el treball amb els continguts que més els interessen. Cercant així històries anecdòtiques interessants amb un menor contingut en matemàtiques. Si és necessari, el professor estarà més a sobre d'aquells alumnes que els hi costa molt trobar històries. No obstant això, s'espera que els grups siguin heterogenis i que s'ajudin mútuament davant les dificultats que puguin sorgir.

Igualment en realitzar la presentació cada alumne pot aprofundir amb l'aspecte que més li agradi. Per exemple, l'alumnat que tingui més interès en les arts visuals pot encarregar-se de fer una presentació creativa. En canvi, si els hi agraden molt les matemàtiques, poden aprofundir més en el contingut que hagin d'explicar. Altres alumnes tal vegada tenen més interès en la història i la cultura dels països i d'aquesta manera també podran centrar-se en l'activitat i gaudir.

8 Conclusions

En aquest treball s'han tractat dos temes de gran interès com són les matemàtiques i la història.

D'una banda s'ha pogut relacionar aquests dos temes per tal de poder oferir una millor experiència dins l'assignatura de matemàtiques. Com s'ha esmentat al llarg del treball, l'ús de la història ens permet introduir a l'alumnat en el tema

que es vol tractar d'una manera amena. Com hem vist amb la història de la mosca, s'aconsegueix introduir el tema de les coordenades de manera més entretinguda i aconseguim també així captar l'atenció de l'alumnat. A més, la història permet redescobrir i reinventar les matemàtiques, aconseguint que els alumnes tinguin un coneixement profund del contingut que es vol ensenyar. Així doncs, amb la història de Tales els alumnes redescobreixen el mètode que aquest va utilitzar per trobar l'altura de la piràmide, fent-los reflexionar i assegurant-nos que entenen el vertader significat que es troba al darrere.

D'altra banda, relacionant les dues matèries s'aconsegueix que l'alumnat aprengui història en l'assignatura de matemàtiques, coneixent els contextos històrics en els quals es varen fer els grans avenços matemàtics. A l'hora de treballar de forma interdisciplinària ajudam els alumnes tant a comprendre millor les matemàtiques com a entendre la importància de la història.

S'ha realitzat una proposta molt completa que respon als diferents objectius que ens hem marcat en aquest present treball. S'ha proposat usar el tema de la història de les matemàtiques durant un trimestre, temps necessari perquè els alumnes s'adaptin a la metodologia i no es cansin de forma excessiva d'ella. Durant el treball s'han creat una sèrie d'activitats en les quals podem utilitzar el tema de la història, oferint una explicació detallada d'aquestes i especificant tots els beneficis d'aquestes activitats. I s'ha conclòs amb un treball que realitzaran els alumnes on es podrà comprovar les competències i continguts adquirits de forma original.

Tot i que des d'un primer moment tenia pensat posar-lo en pràctica en el centre que estava, a causa de la situació excepcional viscuda no he tengut la possibilitat de portar a terme les activitats proposades dins l'aula. De manera que no he pogut analitzar tots els beneficis que la proposta pot atorgar ni els punts dèbils i aspectes a millorar d'aquesta. Així i tot consider que la proposta

realitzada està ben fonamentada de manera que portar-la a l'aula és factible i podria donar bons resultats.

9 Referències bibliogràfiques

- Abadi, A. i Fiangga, S. (2018). Using historical perspective in designing discovery learning on Integral for undergraduate students. Dins *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 296(1), p. 012042 IOP Publishing.
- Alsina, À. (2009). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado.
- Anaconda, M. (2003). La historia de las matemáticas en la educación matemática. *EMA*, 8(1), 30-46.
- Anders, M. (2012). Cómo la matemática influye en los avances tecnológicos. *Information Technology*.
- Arca, M., Guidoni, P. i Mazzoli, P. (1990). *Enseñar ciencia: cómo empezar: reflexiones para una educación científica de base*. Barcelona: Paidós.
- Aubanell, A. (2017). Construint matemàtiques: Nosaltres com a recurs: role-plays a classe de matemàtiques (i 2). *Noubiaix: revista de la FEEMCAT i la SCM*, 73-80.
- Baumgart, J. K. (Ed.). (1969). *Historical topics for the mathematics classroom*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Bell, E. T. (1985). *Historia de las Matemáticas*. Mèxic: Fondo de Cultura Económica.
- Bradley, M. M., Greenwald, M. K., Petry, M. C. i Lang, P. J. (1992). Remembering pictures: pleasure and arousal in memory. *Journal of experimental psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 18(2), 379.
- Camero Reinante, Y., Martínez Casanova, L. i Pérez Payrol, V. B. (2016). El desarrollo de la Matemática y su relación con la tecnología y la sociedad. Caso típico. *Revista Universidad y Sociedad*, 8(1), 97-105.
- Carvajal, G. (2017). El eclipse que puso fin a la guerra entre lidios y medos en

- 585 a.C. pudo ser predicho por Tales de Mileto.
- Comino, A. i Glezortiz, F. J. (2016). Calculando la altura de la pirámide de Keops. Recuperat de <https://www.geogebra.org/m/ZqngBVbD>
- Cristòfol Garcia, B. (2015). Estudio de la motivació, actitud, estrategias y personalidad de los estudiantes de español como lengua extranjera.
- De Corte, E., Greer, B. i Verschaffel, L. (1996). Learning and teaching mathematics. *Handbook of educational psychology*, 491-549.
- Decret 34/2015, de 15 de maig, pel qual s'estableix el currículum de l'educació secundària obligatòria a les Illes Balears, Butlletí Oficial de les Illes Balears, 73, de 16 de maig de 2015, 25016 a 25302. Recuperat 9 de desembre de 2019, a partir de http://weib.caib.es/Normativa/Curriculum_IB/versio_consolidada/Versio_consolidada_Decret_342015_ESO.pdf
- Dweck, C. S. i Elliott, E. S. (1983). Achievement motivation. *Handbook of child psychology*, 4, 643-691.
- Eves, H. W. (2004). In mathematical circles: a selection of mathematical stories and anecdotes. Dins *Pi: A Source Book* (pp. 402-411). New York: Springer.
- Fauvel, J. (1991). Using History in Mathematics Education. *For The Learning of Mathematics*, 2(11), 3-6.
- Fauzan, A., Slettenhaar, D. i Plomp, T. (2002). Traditional mathematics education vs. realistic mathematics education: Hoping for changes. Dins *Proceedings of the 3rd International Mathematics Education and Society Conference* (pp. 1-4). Centre for Research in Learning Mathematics Copenhagen, Denmark.
- Girard, T., Pinar, M. i Trapp, P. (2011). An exploratory study of class presentations and peer evaluations: Do students perceive the benefits. *Academy of Educational Leadership Journal*, 15(1), 77-93.
- Gómez, J. (2002). *De la enseñanza al aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: Paidós.

- González Urbaneja, P. M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma*, 45, 17-28.
- Göktepe, S. i Ozdemir, A. S. (2013). An Example of Using History of Mathematics in Classes. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 1(3), 125-136.
- Greene, D. i Lepper, M. R. (1978). *The hidden costs of reward: New perspectives of the psychology of human motivation*. Hillsdale, NJ: L. Erlbaum Associates; New York.
- Guzmán, M. D. (1992). Tendències innovadores en educació matemàtica. *Bulletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 7, 7-34.
- Hellriegel, D. i Slocum, J.(2004). *Comportamiento organizacional*. México: Thomson Learning Editores.
- Herrera, I. J. (2010). La motivación en el proceso enseñanza-aprendizaje. *Temas para la educación*, 9, 1-14.
- Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational studies in Mathematics*, 71(3), 235-261.
- Katz, V. J (Ed.). (2000). *Using history to teach mathematics: An international perspective*. Washington: The Mathematical Association of America.
- Kline, M. (1978). *El fracaso de la Matemática moderna*. Madrid: Siglo XXI.
- Lupiáñez Gómez, J. L. (2002). Reflexiones didácticas sobre la Historia de la Matemática. *Suma*, 40, 59-63.
- Marín Rodríguez, M. (1999). El valor del cuento en la construcción de conceptos matemáticos. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 39, 27-38.
- Martín Casalderrey, F. (Coordinador). (2010). *Escuela de educación matemática" Miguel de Guzmán": enseñar divulgando*. Madrid: Ministerio de Educación.

- McBride, C. C. i Rollins, J. H. (1977). The effects of history of mathematics on attitudes toward mathematics of college algebra students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 57-61.
- Meyer, D. 3acts. Disponible a <https://blog.mrmeyer.com/category/3acts/>
- Mora, D. (2001). *Didáctica de las Matemáticas*. Caracas: Universidad Central de Venezuela, Ediciones de la Biblioteca Central.
- Pla i Carrera, J. (2016). *Història de la matemàtica. Egipte i Mesopotàmia: resultats, textos i contextos*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.
- Poincaré, H. (1963). *Ciencia y Método*. Madrid: Espasa - Calpe.
- Puig Adam, P. (1951). *Decálogo de la Didáctica Matemática Media*. Madrid: Nuevas Gráficas S.A.
- Reeve, J., Raven, A. M. L. i Besora, M. V. (1994). *Motivación y emoción*. Madrid: McGraw-Hill.
- Sanmartí, N. (2019). Avaluar la competència, avaluar per ser més competent. *Anuari de l'Educació de les Illes Balears*, (2019), 16-27.
- Sanmartí, N. i Mas, M. (2016). Les rúbriques per a una avaluació plantejada com a aprenentatge. *Perspectiva escolar*, (390), 37-41.
- Sierra Vázquez, M. (2000). El papel de la historia de la matemática en la enseñanza. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (43-44), 93-96.
- Singh, K., Granville, M. i Dika, S. (2002). Mathematics and science achievement: Effects of motivation, interest, and academic engagement. *The journal of educational research*, 95(6), 323-332.
- Smith, D. E. (1958). *History of mathematics Vol. I*. New York: Dover Publications.
- Tapia, J. A. (2003). *Motivar para Aprender. Herramientas para la Reflexión Pedagógica*. Bogotá: Santillana.
- TED. (març, 2010). *Math class needs a makeover* [Arxiu de vídeo]. Recuperat

de https://www.ted.com/talks/dan_meyer_math_class_needs_a_makeover#t-88976

Toeplitz, O. (1927). Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 36, 88-99.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1998). Realistic Mathematics Education as work in progress. *Theory into practice in mathematics education*. Kristiansand, Norway: Faculty of Mathematics and Sciences.

10 Annexos

10.1 Avaluació

Els criteris i els estàndards d'avaluació que seguirem es troben dins el mateix Decret que estableix el currículum. Dividits en els seus respectius blocs, tendrem en compte en cada activitat els següents:

10.1.1 Funcions. Anècdota de Descartes i la mosca

- **Bloc 1.** Processos, mètodes i actituds en matemàtiques
 - 1. Expressar verbalment, de forma raonada, el procés seguit en la resolució d'un problema.
 - 1.1. Expressa verbalment, de forma raonada, el procés seguit en la resolució d'un problema, amb el rigor i la precisió adequats.
 - 6. Desenvolupar processos de matematització en contextos de la realitat quotidiana (numèrics, geomètrics, funcionals, estadístics o probabilístics) a partir de la identificació de problemes en situacions problemàtiques de la realitat.
 - 6.1. Identifica situacions problemàtiques de la realitat, susceptibles de contenir problemes d'interès.
 - 6.2. Estableix connexions entre un problema del món real i el món matemàtic identificant els problemes matemàtics subjacents i els coneixements matemàtics necessaris.

Bloc 4. Funcions

- 1. Conèixer, tractar i interpretar el sistema de coordenades cartesianes.

- 1.1. Localitza punts en el pla a partir de les coordenades i anomena punts del pla escrivint-ne les coordenades.

10.1.2 Proporcionalitat geomètrica. La història de Tales i la piràmide

- **Bloc 1.** Processos, mètodes i actituds en matemàtiques
 - 1. Expressar verbalment, de forma raonada, el procés seguit en la resolució d'un problema.
 - 1.1. Expressa verbalment, de forma raonada, el procés seguit en la resolució d'un problema, amb el rigor i la precisió adequats.
 - 2. Utilitzar processos de raonament i estratègies de resolució de problemes, fent els càlculs necessaris i comprovant les solucions obtingudes.
 - 2.1. Analitza i comprèn l'enunciat dels problemes (dades, relacions entre les dades, context del problema).
 - 2.2. Valora la informació d'un enunciat i la relaciona amb el nombre de solucions del problema.
 - 2.3. Fa estimacions i elabora conjeitures sobre els resultats dels problemes que s'han de resoldre, i en valora la utilitat i l'eficàcia.
 - 2.4. Fa servir estratègies heurístiques i processos de raonament en la resolució de problemes, i reflexiona sobre el procés de resolució de problemes.
 - 4. Aprofundir en problemes resolts plantejant petites variacions en les dades, altres preguntes i altres contextos.
 - 4.1. Aprofundeix en els problemes una vegada resolts: revisant el procés de resolució i les passes i les idees importants, analitzant la coherència de la solució o cercant altres formes de resolució.

- 4.2. Es planteja nous problemes, a partir d'un de resolt: variant les dades, proposant noves preguntes, resolent altres problemes semblants, plantejant casos particulars o més generals d'interès, establint connexions entre el problema i la realitat.
 - 6. Desenvolupar processos de matematització en contextos de la realitat quotidiana (numèrics, geomètrics, funcionals, estadístics o probabilístics) a partir de la identificació de problemes en situacions problemàtiques de la realitat.
 - 6.2. Estableix connexions entre un problema del món real i el món matemàtic identificant els problemes matemàtics subjacents i els coneixements matemàtics necessaris.
 - 6.4. Interpreta la solució matemàtica del problema en el context de la realitat.
- **Bloc 3. Geometria**
 - 4. Analitzar i identificar figures semblants, calculant l'escala o la raó de semblança i la raó entre longituds, àrees i volums de cossos semblants.
 - 4.1. Reconeix figures semblants i calcula la raó de semblança i la raó de superfícies de figures semblants.
 - 4.2. Empra l'escala per resoldre problemes de la vida quotidiana sobre contextos de semblança.

10.1.3 Geometria. La història de Dido

- **Bloc 1. Processos, mètodes i actituds en matemàtiques**
 - 1. Expressar verbalment, de forma raonada, el procés seguit en la resolució d'un problema.

- 1.1. Expressa verbalment, de forma raonada, el procés seguit en la resolució d'un problema, amb el rigor i la precisió adequats.
- 2. Utilitzar processos de raonament i estratègies de resolució de problemes, fent els càlculs necessaris i comprovant les solucions obtingudes.
 - 2.1. Analitza i comprèn l'enunciat dels problemes (dades, relacions entre les dades, context del problema).
 - 2.2. Valora la informació d'un enunciat i la relaciona amb el nombre de solucions del problema.
 - 2.3. Fa estimacions i elabora conjectures sobre els resultats dels problemes que s'han de resoldre, i en valora la utilitat i l'eficàcia.
 - 2.4. Fa servir estratègies heurístiques i processos de raonament en la resolució de problemes, i reflexiona sobre el procés de resolució de problemes
- 4. Aprofundir en problemes resolts plantejant petites variacions en les dades, altres preguntes i altres contextos.
 - 4.1. Aprofundeix en els problemes una vegada resolts: revisant el procés de resolució i les passes i les idees importants, analitzant la coherència de la solució o cercant altres formes de resolució.
 - 4.2. Es planteja nous problemes, a partir d'un de resolt: variant les dades, proposant noves preguntes, resolent altres problemes semblants, plantejant casos particulars o més generals d'interès, establint connexions entre el problema i la realitat.
- 8. Desenvolupar i conrear les actituds personals inherents a la tasca matemàtica.
 - 8.1. Desenvolupa actituds adequades per al treball en

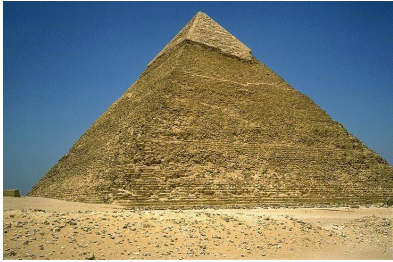
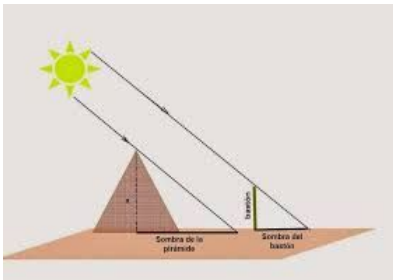
matemàtiques: esforç, perseverança, flexibilitat i acceptació de la crítica raonada.

- 8.2. Es planteja la resolució de reptes i problemes amb la precisió, la cura i l'interès adequats al nivell educatiu i a la dificultat de la situació.
- 8.4. Desenvolupa actituds de curiositat i indagació, i hàbits de plantejar preguntes i cercar respostes adequades, tant en l'estudi dels conceptes com en la resolució de problemes.
- 10. Reflexionar sobre les decisions preses i aprendre'n per a situacions futures similars. 10.1. Reflexiona sobre els problemes resolts i els processos desenvolupats, valora la potència i la senzillesa de les idees clau i n'aprèn per a situacions futures similars.

- **Bloc 3. Geometria**

- 2. Utilitzar estratègies, eines tecnològiques i tècniques simples de la geometria analítica plana per resoldre problemes de perímetres, àrees i angles de figures planes, emprar el llenguatge matemàtic adequat i expressar el procediment seguit en la resolució.
 - 2.1. Resol problemes relacionats amb distàncies, perímetres, superfícies i angles de figures planes en contextos de la vida real, fent servir les eines tecnològiques i les tècniques geomètriques més apropiades.
 - 2.2. Calcula la longitud de la circumferència, l'àrea del cercle, la longitud d'un arc i l'àrea d'un sector circular, i les aplica per resoldre problemes geomètrics.

10.2 Fitxa Tales

Nom:	
Càlcul de l'altura de la piràmide de Kheops	
Sense fer cap càlcul, quina creieu que és l'altura de la piràmide de Kheops?	Resposta:
Quines dades i instruments necessitau per calcular l'altura de la piràmide? 	Resposta:
Expliqueu quin mètode utilitzaries per trobar l'altura de la piràmide.	
Resposta:	
Explica quin és el mètode utilitzat per Tales.	
Resposta:	

Amb les dades donades pel professor, calcula l'altura de la piràmide.

Resposta:

Altura que t'ha sortit:	
Altura real de la piràmide:	

Quin és l'error? D'on creus que surt l'error?

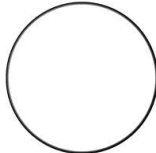

Resposta:

10.3 Fitxes Dido

10.3.1 Estructura 1, 2, 4

Nom:
Fitxa 1. Estructura 1, 2, 4: la història de Dido
<p style="text-align: center;">Per què Dido va fer un cercle i no un quadrat?</p>
Resposta individual:
Resposta en parella:
Resposta grupal:

10.3.2 La història de Dido

Nom:		
Fitxa 2. Història de Dido		
		
Àrea		
Perímetre		
Quina relació hi ha entre el perímetre i la superfície?		
Pista: àrea/perímetre Resposta:		
Si les dues figures tenen el mateix perímetre, quina d'elles té una major superfície?		
Resposta:		
Per quin motiu creus ara que Dido va usar un cercle i no un quadrat?		
Resposta:		

10.4 Rúbrica d'avaluació del treball final

Nom:				
<h1>RÚBRICA SOBRE EL TREBALL D'HISTÒRIA</h1>				
1. Contingut del treball				
	Excel·lent	Bé	Suficient	Deficient
Història matemàtica	La història té a veure amb les matemàtiques i es pot relacionar amb continguts de 2n d'ESO.	La història és de matemàtiques però no es pot relacionar amb cap tema vist.	La història està protagonitzada per un matemàtic però no tracta de matemàtiques.	La història no té cap relació amb l'assignatura.
Contingut matemàtic	La història ens ensenya un contingut matemàtic desenvolupat al llarg de la història.	La història té algun contingut matemàtic però n'hi podria haver més.	Podem extreure poca cosa de contingut matemàtic.	La història no ens ensenya un contingut matemàtic.
Context històric	La història s'emmarca dins un context històric explicat que li dona sentit al sorgiment del coneixement matemàtic que es vol transmetre.	L'època històrica està explicada però no s'acaba d'explicar la seva influència amb el contingut matemàtic.	L'època històrica hi és present però no està ben desenvolupada.	No queda determinada l'època històrica.
Història	La història és molt divertida i interessant.	Es presenta una història interessant, però podria estar millor.	La història escollida deixa molt a desitjar.	La història no és divertida ni interessant.

2. Presentació				
	Excel·lent	Bé	Suficient	Deficient
Material usat en la presentació	La presentació elaborada ajuda els alumnes a seguir l'explicació sense perdre's ni cansar-se.	La presentació és adequada però podria ser més dinàmica per tal d'ajudar al seguiment de l'explicació.	Els recursos visuals que utilitzen són insuficients o pobres.	La presentació està poc treballada, no es veuen bé els escrits o no s'avenen amb el que diuen.
Creativitat	Han realitzat una presentació amb elements innovadors i molt creatius.	Han introduït elements creatius però aquests poden millorar.	La presentació ha estat poc creativa.	La presentació feta no era innovadora ni creativa.
Respostes a les preguntes realitzades	Responen a totes les preguntes realitzades donant bons arguments.	Responen a la majoria però no a totes les preguntes realitzades	Responen sols algunes preguntes o les seves respostes no són del tot adequades amb la pregunta.	No tenen resposta a les preguntes realitzades o contesten coses que no són.
Durada de l'exposició	Controlen el temps de l'exposició i de cada apartat correctament.	L'exposició ha tingut una durada correcta però hi havia molta diferència en la durada entre els alumnes.	L'exposició no ha tingut la durada correcta o la durada dels aparats no era proporcionalment correcte.	L'exposició estava molt desorganitzada. Durada de l'exposició desmesurada o massa curta.
3. Individual				
Nom:				
	Excel·lent	Bé	Suficient	Deficient
Expressió oral i llenguatge	S'expressa amb claredat i amb precisió i rigor matemàtic.	S'expressa amb claredat però falta rigor matemàtic.	Es podria expressar millor.	No s'expressa ni utilitza un llenguatge adequat.
Gesticulació	Acompanya la presentació amb un correcte ús.	Gesticula sovint.	Gesticula poc o un poc exagerat.	No gesticula o ho fa en excés.
Vista	Mira els companys mentre explica.	Algunes vegades ens mira durant l'explicació.	Quasi mai mira els companys mentre explica.	Mira a un altre lloc però no als companys.