



**Universitat de les
Illes Balears**

Facultat de Ciències

Memòria del Treball de Fi de Grau

Estudi dels estels de neutrons com a fonts d'ones gravitacionals

Pep Blai Covas Vidal

Grau de Física

Any acadèmic 2014-15

DNI de l'alumne: 43190362L

Treball tutelat per Alicia Sintès Olives
Departament de Física

S'autoritza la Universitat a incloure el meu treball en el Repositori Institucional per a la seva consulta en accés obert i difusió en línia, amb finalitats exclusivament acadèmiques i d'investigació

Paraules clau del treball:
ona gravitacional, estel de neutrons

Índex

1	Introducció	2
1.1	Les ones gravitacionals	2
1.2	Teoria linearitzada de la relativitat general: la radiació gravitacional	3
1.3	Detecció de radiació gravitacional	4
1.3.1	Detectors	4
1.3.2	Bandes de freqüència i fonts d'ones gravitacionals	7
2	Ones gravitacionals dels estels de neutrons	9
2.1	Estels de neutrons	9
2.1.1	Propietats dels estels de neutrons	10
2.1.2	Púlsars	11
2.1.3	Població d'estels de neutrons	12
2.2	Senyal gravitacional dels estels de neutrons	12
2.3	Mecanismes d'emissió d'ones gravitacionals dels estels de neutrons	13
2.4	Catàleg de púlsars	14
2.5	Spindown-limit	16
2.5.1	El·lipticitat dels púlsars	17
3	Mètodes d'anàlisi de dades	19
3.1	Cerques per púlsars coneguts	21
3.2	Cerques a cegues	24
4	Conclusions	28
5	Bibliografia	29

1 Introducció

1.1 Les ones gravitacionals

L'any 1915 Einstein va publicar la teoria de la relativitat general, que explica l'interacció entre distribucions d'energia, definides pel tensor d'energia-moment; i la geometria de l'espai-temps, definida mitjançant el tensor mètric.

A la teoria, la gravetat es representada per la corbatura d'aquest espai-temps [1]. Les ones gravitacionals són una conseqüència de la teoria: quan aquestes distribucions d'energia són accelerades, deformen l'estructura de l'espai-temps. Aquest canvi es transmet mitjançant l'ona gravitacional, que viatja a la velocitat de la llum. És una ona transversal, amb dos modes de pol·larització, anomenats x i $+$, que difereixen en una rotació de 45 graus al voltant de l'eix de propagació. Per allà on passa l'ona, es produeixen els efectes de la variació de l'espai-temps: les distàncies entre cossos varien els seus valors en funció del temps (encara que els volums es conserven).

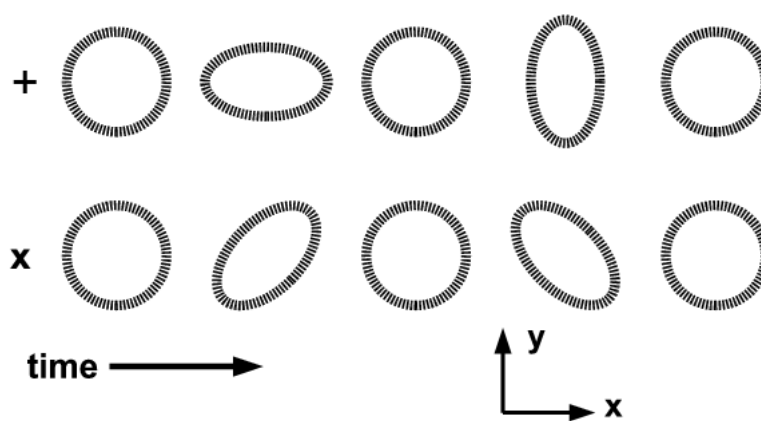


Fig. 1: Visualització de l'efecte d'una ona gravitacional que viatja en la direcció z sobre un anell de partícules. Les dues pol·laritzacions causen moviments diferents. Figura extreta de: <http://inspirehep.net/record/818927/plots>

Per entendre millor les ones gravitacionals, es pot fer una comparació amb les ones electromagnètiques:

Ones gravitacionals	Ones electromagnètiques
Oscil·lacions del teixit espai-temps 1 signe de massa	Oscil·lacions que es propaguen a través de l'espai temps 2 signes de càrrega (+ i -)
Usualment emeses per cossos grans	Usualment emeses per partícules individuals
2 estats de pol·larització separats per 45°	2 estats de pol·larització separats per 90°
Freqüències detectables: $\sim 10^{-9}$ a 10^{11} Hz	Freqüències: $\sim 10^4$ a 10^{20} Hz
Quasi no interaccionen amb la matèria	Interaccionen fortament amb la matèria
Es propaguen a la velocitat de la llum	Es propaguen a la velocitat de la llum
L'amplitud decau amb la distància ($\propto 1/d$)	L'amplitud decau amb la distància ($\propto 1/d$)

Taula 1: Comparació entre les ones gravitacionals i les ones electromagnètiques.

Un dels paràmetres més importants d'aquesta ona és la seva amplitud, que ve donada per la relació entre la variació de longitud que provoca dividida per la longitud original: $h = \frac{\Delta L}{L}$. Aquesta amplitud és extremadament petita, fet que dificulta la detecció directa d'ones gravitacionals. Per exemple, la variació de longitud causada per una ona gravitacional sobre la distància entre el Sol i Saturn seria aproximadament del diàmetre d'un àtom d'hidrogen. L'amplitud d'ona gravitacional màxima produïda per un estel de neutrons és de l'ordre de 10^{-24} . Totes les distribucions d'energia poden generar ones gravitacionals, però degut a l'amplitud de l'ona, només es poden detectar les degudes als fenòmens més energètics i violents de l'univers, com supernovas, estels de neutrons, forats negres, etc.

Encara no hi ha hagut detecció directa d'aquestes ones. L'evidència indirecta més important es deu al púlsar PSR 1913+16 [2]. Al 1974 es va descobrir que forma part d'un sistema binari, i que el període de

l'òrbita decau, en concordança amb les prediccions de la relativitat general de pèrdua d'energia degut a l'emissió d'ones gravitacionals.

Per què és important la detecció d'ones gravitacionals?

- La detecció d'una OG seria una altra prova molt important per la relativitat general d'Einstein. La teoria ha passat tots els tests que se li ha fet durant aquests 100 anys, però la detecció d'una OG és una assignatura pendent.
- La detecció d'una OG marcaria l'inici d'una nova astronomia, complementària a l'electromagnètica. Quan es va descobrir l'espectre electromagnètic, es van descobrir una gran quantitat de nous objectes astronòmics que abans no es coneixen. S'espera que passi el mateix amb les ones gravitacionals, que també ens permetran estudiar i aprendre més sobre objectes que ja coneixem, com les estrelles de neutrons i els forats negres, i descobrir-ne de nous. També podria ajudar amb la cosmologia: la cerca d'energia fosca, una millor comprensió de la física als moments del Big Bang, etc. Les ones gravitacionals transporten informació d'objectes que no tenen signatura electromagnètica, o d'objectes que si en tenen però dels quals es perd per la interacció amb la pols interestel·lar o que directament és massa feble.

1.2 Teoria linearitzada de la relativitat general: la radiació gravitacional

L'equació de camp de la relativitat general és [3]:

$$G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \quad (1)$$

on $G_{\alpha\beta}$ és el tensor d'Einstein, $T_{\alpha\beta}$ el tensor d'energia-moment, G la constant de gravitació universal i c la velocitat de la llum al buit.

Es pot usar la versió linearitzada de la relativitat general, ja que una OG es pot aproximar per la situació de camp dèbil:

$$g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta} \quad (2)$$

on $g_{\alpha\beta}$ és el tensor mètric, $\eta_{\alpha\beta}$ la mètrica de Minkowski i $h_{\alpha\beta}$ una pertorbació petita. Les equacions de camp d'Einstein al buit amb aquesta mètrica es redueixen a:

$$\eta^{\sigma\rho} \partial_\sigma \partial_\rho h_{\mu\nu}^{TT} = 0 \quad (3)$$

on $h_{\mu\nu}^{TT}$ és el tensor de pertorbació expressat en un gauge sense traça i transversal (transverse-traceless gauge), que indica que la traça de la matriu és 0 (la pertorbació no comprimeix ni allarga l'espai, sinó que l'hi fa una deformació, preservant el volum) i que és transversal a la direcció de propagació. La solució queda:

$$h_{\mu\nu}^{TT}(t, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

per una ona propagant-se en la direcció z .

L'emissió d'ones gravitacionals es pot descriure per la fórmula quadrupolar:

$$h_{jk}^{TT}(t) = \frac{2G}{c^4} \frac{1}{d} [\ddot{\Gamma}_{jk}(t - \frac{d}{c})]^{TT} \quad (5)$$

on d és la distància a la font i $[\ddot{\Gamma}_{jk}(t - \frac{d}{c})]^{TT}$ és el tensor quadrupolar de massa i moment de la font, vàlida si el tamany de la font és petit comparat amb la longitud d'ona $\frac{\lambda}{2\pi}$ de l'ona emesa.

L'amplitud escalar mesurada $h(t)$ degut a l'efecte d'una OG $h_{\mu\nu}^{TT}$ ens ve donada per:

$$h(t) = \frac{1}{2} (e_1^i e_1^j - e_2^i e_2^j) h_{ij}^{TT} = F_+(t) h_+(t) + F_\times(t) h_\times(t) \quad (6)$$

on e_1^i i e_2^i són vectors unitaris en la direcció dels braços del detector i $h_{+,\times}$ són els dos estats de polarització indicats a l'equació (4). $F_{+,\times}(t, \psi, \mathbf{n})$ són les funcions "antenna-pattern", que prenen valors

de -1 a 1. Descriuen la sensibilitat del detector a les polaritzacions $+$ i \times , que depenen de l'orientació del detector i de la font i de l'angle de polarització de l'ona ψ .

Al marc de referència de la font l'OG es pot escriure com:

$$h_+(t, \tau) = A_+(\tau)\cos\Phi(\tau), h_\times(t, \tau) = A_\times(\tau)\sin\Phi(\tau) \quad (7)$$

on Φ és la fase de la senyal, diferent per cada emisor.

1.3 Detecció de radiació gravitacional

1.3.1 Detectors

A principi dels anys 60, es van crear els primers detectors d'ones gravitacionals. Eren unes barres ressonants de metal a les quals s'intentava detectar alguna excitació dels modes d'oscil·lació, provocada per les ones gravitacionals. Actualment encara funcionen alguna d'aquestes barres, però els detectors principals que s'empren ara són els que funcionen per interferometria làser, que van sorgir als anys 90 [4].

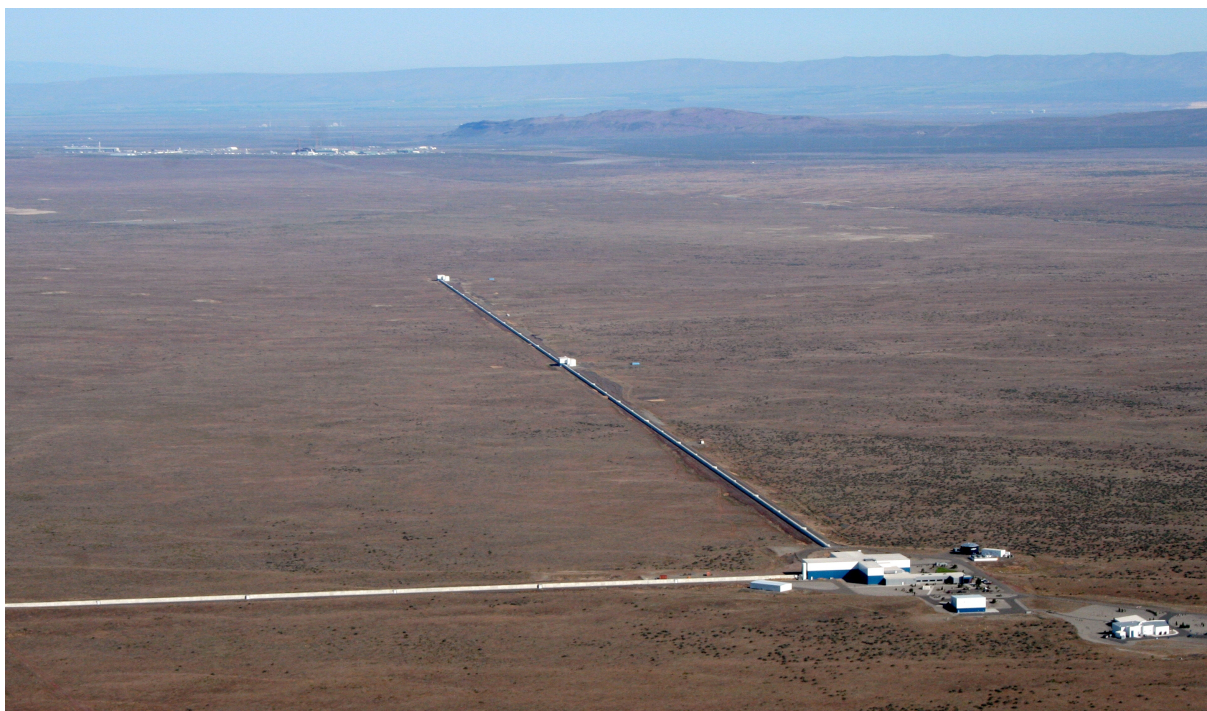


Fig. 2: Detector terrestre per interferometria làser a Hanford (EEUU), de 4 km, part de la col·laboració LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory). Imatge extreta de: <http://www.ligo.org/multimedia/gallery/lho.php>

Els detectors per interferometria làser són uns dels instruments més complexos que s'han creat mai. La varietat de camps de la física que hi tenen presència és molt gran: làser i sistemes òptics, poliment de miralls, física de materials, aïllament de sistemes, física quàntica, etc.

Els detectors terrestres per interferometria làser es basen en l'interferòmetre de Michelson, ideat per detectar el famós èter l'any 1887. Consisteixen en dos braços perpendiculars en forma de L, pels quals viatja un feix de llum que ha emés un làser. Als cantons dels braços hi ha masses en suspensió, i mitjançant uns miralls per fer rebotar la llum, es mesura la variació de distància entre les masses usant interferometria, amb un fotodetector col·locat al final del recorregut. Els separadors de feixos ("beamsplitters") divideixen la senyal del làser i la fan viatjar per camins diferents. Si ha passat una ona gravitacional que ha fet canviar la longitud dels braços, això farà que la fase de la senyal dels dos camins sigui diferent. Si la distància entre les masses en suspensió no canvia, el fotodetector no detecta senyal (degut al fenomen d'interferència destructiva), però si la distància entre les masses canvia, arriba senyal al detector. Recordant l'equació (6), es té la següent expressió:

$$h(t) = \frac{\Delta L}{L} \quad (8)$$

Per tant, si es vol detectar una ona gravitacional que té una amplitud de l'ordre de 10^{-24} , i els braços de l'interferòmetre són de l'ordre de 1 km, la ΔL (variació de longitud) que haurà de detectar l'interferòmetre serà de l'ordre de 10^{-24} km.

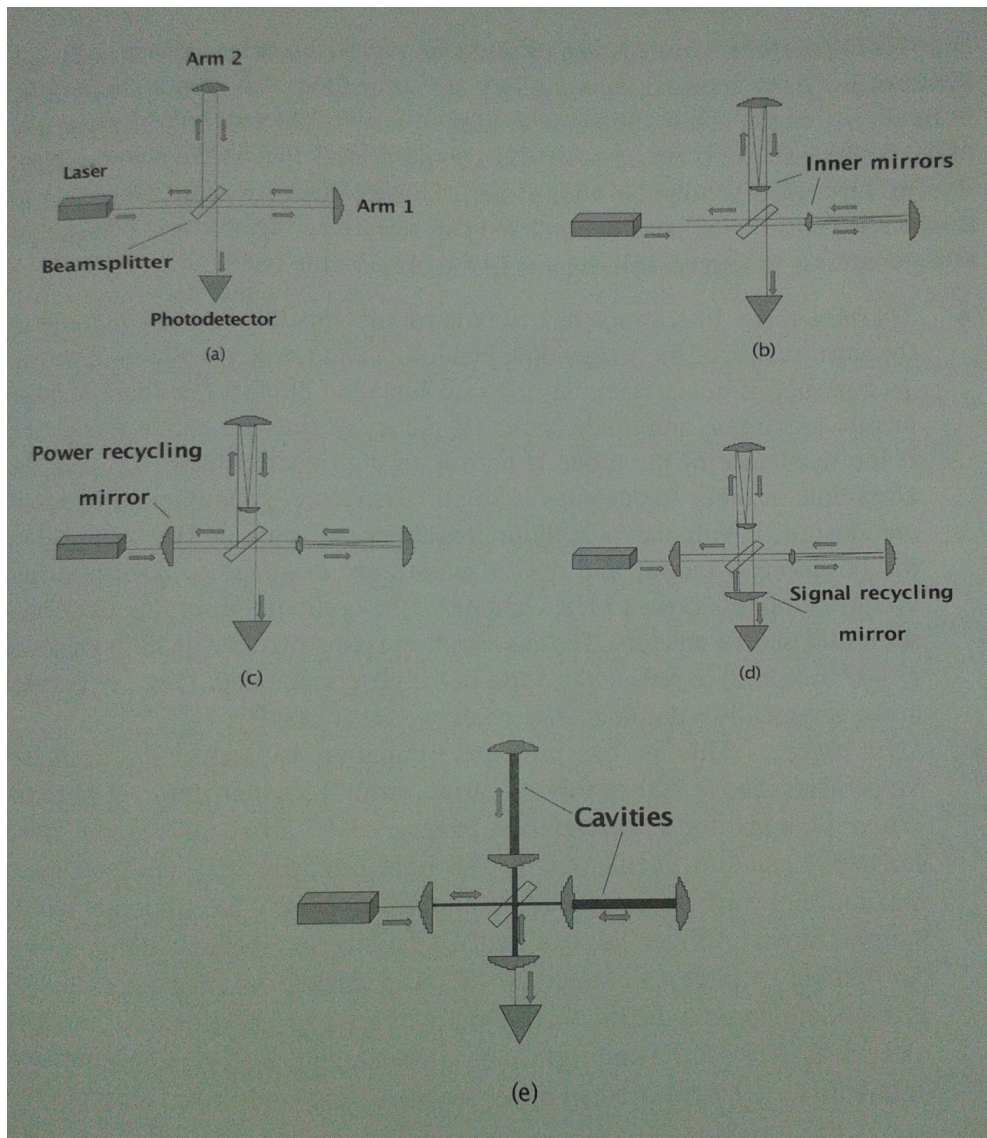


Fig. 3: Esquema del funcionament de l'interferòmetre en cinc passes: a) Interferòmetre simple de Michelson. b) S'afegeixen miralls interns per millorar la senyal (la fan rebotar 50 vegades). c) El mirall de reciclatge de potència recicla la senyal que torna cap al làser. d) Mirall per reciclar senyal sobrant. e) Interferòmetre Fabry-Pèrot (les línies de retard són transformades a cavitats, recobertes parcialment de miralls). Figura extreta de [4].

Els detectors per interferometria terrestres tenen una bona sensibilitat entre freqüències d'aproximadament 10 Hz fins a varis kHz.

Fins fa poc hi havia diversos projectes que intentaven detectar una OG mitjançant els interferòmetres terrestres, com per exemple LIGO, amb tres detectors a EEUU (dos de 4 km i un de 2 km) [5]. També hi havia dos detectors a Europa: GEO (de 600 m) a Alemanya i Virgo (de 3 km) a Itàlia [5]. A més, n'hi ha un a Japó (TAMA), i se'n vol construir un a l'Índia.

Quan els interferòmetres estan construïts i preparats per recollir dades, s'inicia un "Science Run": períodes en els que els detectors es troben recopilant dades. La duració és diferent en cada ocasió. A la figura 4 s'indica la duració, la millor sensibilitat del detector i els temps útils (percentatge del temps que ha estat realment funcionant el detector) dels distints "Science Run". Quan s'acaba el Science Run,

s'analitzen les dades dels detectors. Entre cada Science Run s'intenta millorar la sensibilitat dels detectors i el rang òptim de freqüències fent-hi ajustaments i millores.

Al 2015 s'espera començar un nou Science Run. Es posaran en marxa els detectors de segona generació els quals es suposa que assoliran la sensibilitat de disseny l'any 2020. Aquests detectors són: Advanced LIGO (amb dos detectors a EEUU i un possible a l'Índia) [6], Advanced Virgo [7], i KAGRA al Japó (serà el primer observatori subterrani i criògenic) [8]. Es suposa que hi haurà tres blocs de recollida de dades, de tres, sis i nou mesos respectivament, amb pauses per fer millores.

Run	Començament - Final	Millor sensibil. $\sqrt{S_n}$ [Hz ^{-1/2}]	Temps útil [%]			
			H1	L1	H2	G1
S1	Aug 23 – Sept 9, 2002	2×10^{-21}	57.6	41.7	73.1	98.5
S2	Feb 14 – Apr 14, 2003	2×10^{-22}	73.5	36.9	57.8	–
S3	Oct 31, 2003 – Jan 9, 2004	5×10^{-23}	69.3	21.8	63.4	96.9
S4	Feb 22 - Mar 23, 2005	4×10^{-23}	80.5	74.5	81.4	96.6
S5	Nov 4, 2005 - Oct 1, 2007	2×10^{-23}	71.0	59.1	78.2	80.4
S6	Jul 8, 2009 - Oct 17, 2010	2×10^{-23}	53.0	51.0	–	–

Fig. 4: Dates de començament i final dels Science Run de LIGO, millor sensibilitat aconseguida i percentatge de “duty cycle” (temps d'observació aprofitat) per LIGO. Figura extreta de [3].

El major problema per a la detecció d'una ona gravitacional és el renou de la senyal, degut a diversos factors [4]:

- Renou degut a les propietats quàntiques dels fotons del làser (fluctuacions estadístiques): arriben alguns fotons al detector independentent de l'ona gravitacional. També hi ha problemes degut al principi d'indeterminació. És el principal renou a freqüències altes.
- Renou sísmic degut a la Terra.
- Renou tèrmic a les suspensions d'on pengen les masses, i als miralls. Aquest renou té el màxim a la freqüència del mode vibracional. Per això, les suspensions pendulars es dissenyen amb una freqüència de pèndol de 1 Hz, per devall de les bones freqüències dels interferòmetres terrestres. Aquest renou és important per devall de 100 Hz.
- Renou degut al gradient del camp gravitatori. Aquest és el renou que fa que a menys de ~ 1 Hz els interferòmetres terrestres tinguin resultats molt dolents.
- Renou degut al sistema elèctric (a 60 Hz a EEUU).

Els braços es troben en un estat d'alt buit, per evitar efectes de tintil·lació òptics. A l'interferòmetre, la llum es pot fer rebotar moltes vegades (per estalviar energia), però els rebots fan augmentar el renou causat pels miralls. Per tant, és millor que l'interferòmetre sigui el més llarg possible.

Tenint en compte aquestes fonts de renou, a la figura 5 es mostra la sensibilitat dels detectors.

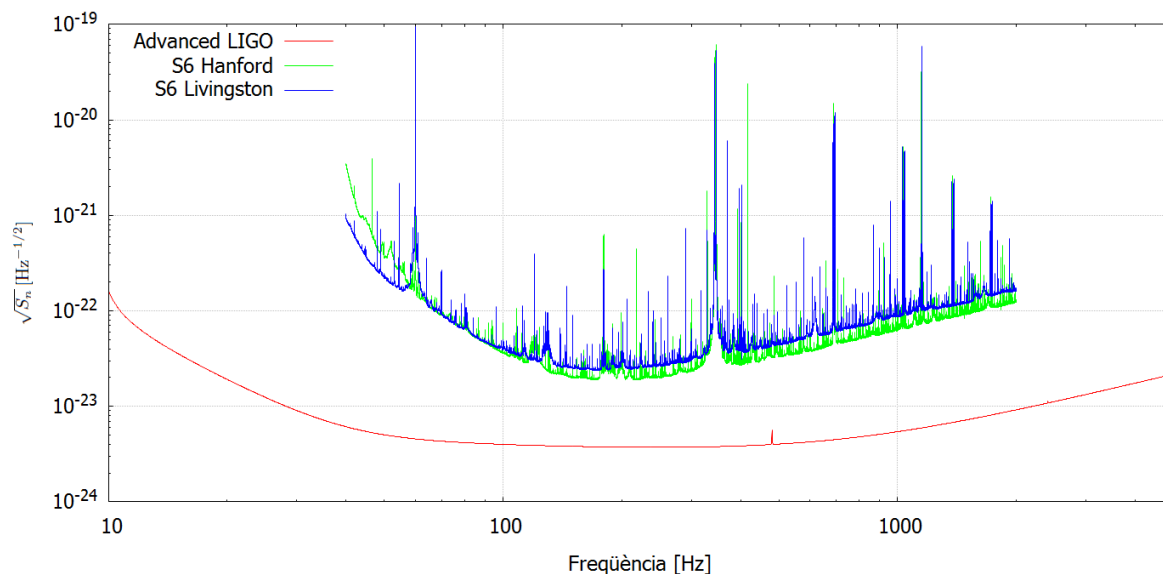


Fig. 5: Diverses corbes de sensibilitat: per al Science Run 6, detectors de Hanford i Livingston, i per Advanced LIGO (Zero Det, High Power). Les corbes del S6 són experimentals, la de Advanced LIGO és la que s'espera tenir al 2020. Dades de S6 extretes de [9] i dades de Advanced LIGO extretes de [10].

Hi ha una diferència entre la sensibilitat de disseny (la sensibilitat teòrica esperada) i la sensibilitat real que es té a l'experiment, degut a sorolls ambientals o instrumentals no fonamentals, a millores de l'equip no previstes, etc. Per tant, la corba de sensibilitat del detector canvia de la projecció teòrica a la que es té quan es fa l'experiment. Aquesta corba també pot sofrir petits canvis diaris, ja que el renou sísmic, les mareas de la mar, o alguns efectes puntuals com els induïts per l'activitat humana la poden fer variar. Per molt petits que puguin ser aquests efectes, la sensibilitat necessària per detectar una OG és tan alta que també s'han de tenir en compte.

1.3.2 Bandes de freqüència i fonts d'ones gravitacionals

La freqüència de les OG varia molt, degut a la varietat d'emissors. Des dels sistemes binaris supermassius de forats negres, fins a les supernoves, la freqüència pot oscil·lar entre 10^{-16} Hz i 10^{11} Hz [4]. En principi, les ones gravitacionals poden existir a qualsevol freqüència, però no s'espera que a partir de $\sim 10^{11}$ Hz hi hagi cap font astrofísica. La radiació dels primers instants de l'univers és el senyal de freqüència més baixa.

El rang de freqüències d'ona gravitacional es pot dividir en quatre bandes:

- Banda d'alta freqüència ($\sim 10^4$ a 1 Hz): formada per les ones provinents de supernoves, estels de neutrons en rotació, sistemes binaris d'estels de neutrons i forats negres estel·lars.
- Banda de baixa freqüència (~ 1 a 10^{-4} Hz): formada per les ones provinents de captures d'objectes de massa estel·lar per forats negres supermassius i sistemes d'estels binaris (nanes blanques, etc.).
- Banda de molt baixa freqüència ($\sim 10^{-7}$ a 10^{-9} Hz): formada per les ones provinents de cossos amb masses majors a $10^{11}M_{\odot}$ (masses solars). No es sap si fonts així existeixen, per tant l'única opció és el fons estocàstic produït a l'univers primitiu.
- Banda de freqüència extremadament baixa ($\sim 10^{-15}$ a 10^{-18} Hz).

Com s'ha dit abans, els interferòmetres terrestres tenen un rang limitat de freqüències on tenen una bona sensibilitat. És important disposar d'instruments diferents que permetin detectar ones gravitacionals de totes les bandes de freqüència, ja que les seves propietats són diferents i les possibilitats de detecció augmenten dràsticament.

Per evitar alguna de les fonts de renou dels interferòmetres terrestres, es disposa dels interferòmetres espacials. eLISA és un d'aquests detectors, que podrà mesurar en un rang de freqüències completament diferent al dels interferòmetres terrestres: entre 0.01 mHz i 0.1 Hz. Mesurarà la variació de distàncies entre tres masses situades a 1 milió de km, orbitant la Terra. Podrà mesurar paràmetres astrofísics com la massa, spin i lluminositat amb una gran precisió [4].

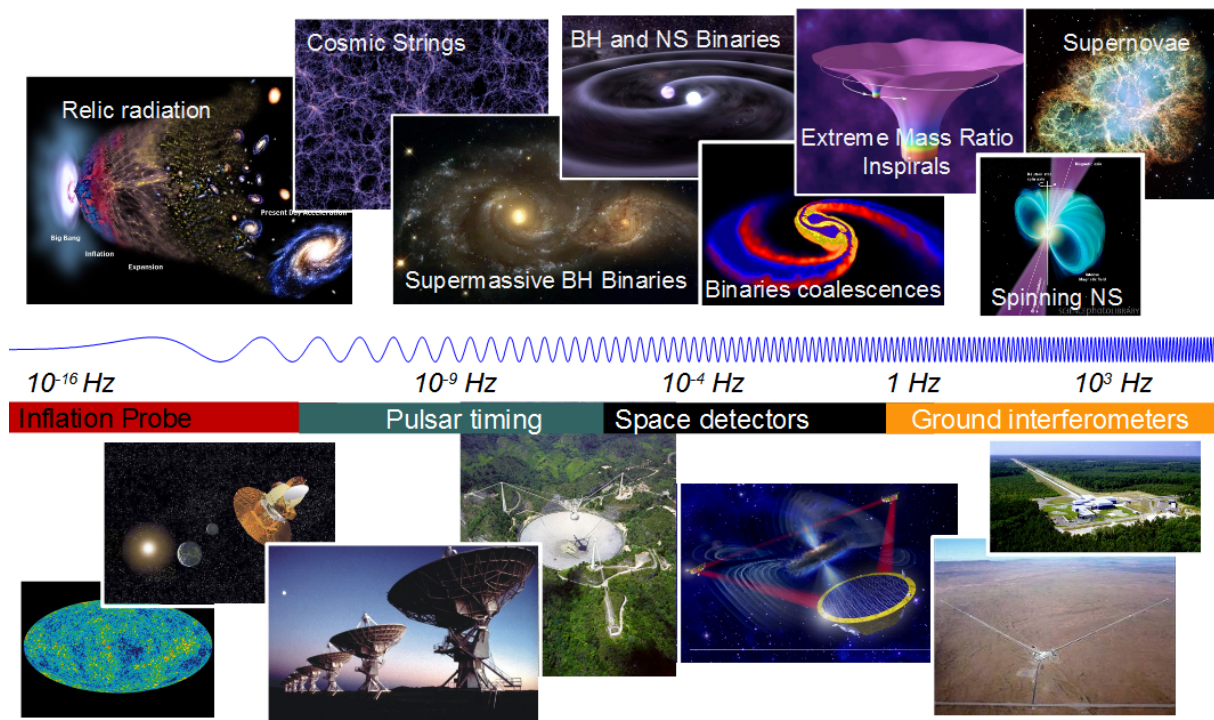


Fig. 6: Fonts d'OG, freqüències característiques i detectors corresponents a les freqüències.

Apart de les barres ressonants i dels interferòmetres, hi ha altres mètodes que es poden emprar per poder detectar OG a altres rangs de freqüències.

Un d'ells és "International Pulsar Timing Array", que es basa en la tècnica de Pulsar Timing Array. Consisteix en una col·lecció de tres o més pulsars molt estables amb altes velocitats de rotació ("milisecond pulsars MSP") que estan regularment monitoritzats per radio-telescopis. Els temps d'arribada de les pulsacions de radio de cada púlsar són mesurades amb molta precisió al llarg de molts anys. Aquests temps són comparats amb els temps predits basats en models dels pulsars que tenen en compte paràmetres com el període de l'espí, distància, localització al cel, etc. Les diferències entre el temps del model i el temps experimental s'anomenen "timing residuals". Amb aquests "timing residuals" es cerquen ones gravitacionals. Amb aquest mètode es poden trobar OG de freqüències molt baixes ($\sim 10^{-9} - 10^{-7}$ Hz) [15].

Un altre mètode consisteix en cercar els modes B de la pol·larització del fons de radiació còsmica, que proporcionarien evidències d'ones gravitacionals al voltant de 10^{-16} Hz. Aquest mètode es duu a terme a projectes com BICEP2, Planck o futurs com CMBPol.

Què es vol mesurar d'una ona gravitacional? És important determinar l'amplitud, la pol·larització i la fase de l'ona, com a funcions del temps; també la direcció al cel de la font d'emissió.

Si l'OG té una duració molt curta (com la d'una supernova), no es poden trobar les variables en funció del temps: es trobarà només un valor de l'amplitud de l'ona projectat al detector (una projecció de les dues polaritzacions). Si dura més, l'amplitud i la fase seran funció del temps, i es veuran afectades pel moviment del detector (el moviment de la Terra). Això produeix una modulació que no té a veure amb la font del senyal. Si es coneix la forma intrínseca de l'ona, es podrà usar aquesta modulació per determinar l'origen del senyal (l'amplitud serà màxima quan el detector apunti cap a la font).

Segons la seva duració, es pot classificar les OG en les següents categories:

- "Bursts" (explosió) desconeguts: de duració molt curta, la modulació no és observable. Es necessiten al menys tres detectors per triangularitzar la posició i trobar les pol·laritzacions h_+ i h_\times . Per exemple, una supernova.
- Col·lapse d'un sistema binari: de duració curta. La freqüència de les ones gravitacionals d'aquests col·lapse varia amb el temps. Al principi la freqüència no es troba al rang detectable, i canvia molt poc. Quan el col·lapse arriba al final, la freqüència es troba al rang detectable, però aquest moment dura poc temps.

- Ones contínues: de duració llarga, són afectades per la modulació. Basta un detector per trobar la posició al cel (mitjançant la modulació). Un exemple són les ones que produeixen les estrelles de neutrons en rotació.
- Senyal estocàstica de fons: com la radiació còsmica de microones de fons. Pot ser detectada com a renou pel detector. Si es coneix bé el renou del detector, la senyal es pot diferenciar d'aquest. També es pot trobar relacionant el renou de dos detectors diferents, ja que tenen renou intrínsec diferent però el mateix renou cosmològic.

A l'hora de detectar les ones gravitacionals, les ones contínues tenen una ventatja: la seva llarga duració permet disposar de dades en tot moment, repetir els experiments, etc. Les ones de durada curta, que només ocorren una vegada, no tenen aquesta ventatja: si es perd l'oportunitat ja no es torna a tenir (per un cas concret).

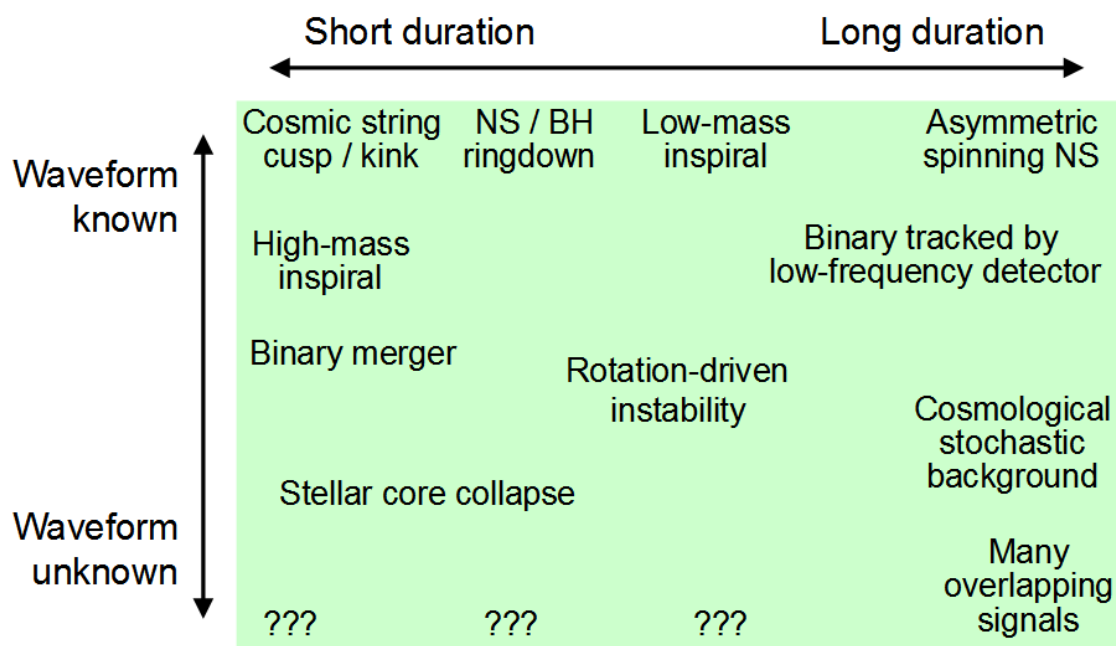


Fig. 7: Fonts d'emissió d'OG classificades per duració i pel coneixement de la forma de l'ona que es té actualment.

Com s'ha comentat anteriorment, qualsevol objecte pot emetre OG, però l'amplitud d'una OG emesa per un objecte poc massiu és molt petita. Sols es tracten els cossos tan massius que poden produir OG d'amplitud que sigui detectable. Així i tot, hi ha una varietat molt gran d'objectes que poden emetre OG d'aquestes característiques.

Al present treball sols es tractaran les ones gravitacionals contínues (de llarga duració i quasi monocromàtiques) emeses per els estels de neutrons aïllats en rotació, que formen part de la banda d'alta freqüència.

2 Ones gravitacionals dels estels de neutrons

2.1 Estels de neutrons

Un estel és un cos lluminós de plasma, normalment esfèric, subjectat per la força de gravetat, on tenen lloc reaccions nuclears. Els estels neixen a partir de col·lapses de núvols de pols i gas. El seu temps de vida és molt variat: poden existir des de milions fins a trilions d'anys. La major part d'aquest temps l'estela està a la fase principal: al seu nucli tenen lloc les reaccions nuclears que van transformant els elements lleugers en elements més pesats. Quan s'acaba el combustible per a les reaccions nuclears, l'estrella pot seguir diversos camins, un dels quals és explotar de manera violenta (supernova).

Hi ha tres tipus de remanents estel·lars (etapa final de l'evolució): nana blanca, estrella de neutrons i forat negre. L'evolució i final d'un estel depèn únicament de la seva massa i de la seva metal·licitat (teorema de Vogt-Russell).

2.1.1 Propietats dels estels de neutrons

Dos anys després del descobriment del neutró (any 1932), Walter Baade i Fritz Zwicky van proposar l'existència dels estels de neutrons [11].

Els estels de neutrons compensen el col·lapse gravitacional mitjançant la pressió de neutrons (degut al principi d'exclusió de Pauli). Provenen d'una supernova (una “explosió” estel·lar) d'una supergigant vermella, que tenia un nucli de ferro. Després de la supernova, el nucli de l'estrella col·lapsa gravitacionalment i es forma l'estrella de neutrons.

Abans del col·lapse, els neutrons es troben als nuclis atòmics. A mesura que l'estel col·lapsa, la densitat augmenta, els electrons es tornen relativistes, i tenen l'energia suficient per combinar-se amb els protons dels nuclis formant un neutró i un neutrino electrònic. Per això, la quantitat de neutrons augmenta, i quan l'energia arriba a determinat punt, alguns neutrons es troben fora dels nuclis. Aquests neutrons lliures es comporten com bosons (no estan subjectes al principi d'exclusió de Pauli) i formen un superfluid (no tenen viscositat). A partir d'aquest punt, les propietats de l'estel són poc conegudes: encara no existeix una equació d'estat.

Amb les propietats abans mencionades, i les equacions relativistes, es pot obtenir un model aproximat de l'estel numèricament. Encara que els detalls depenen de l'equació d'estat usada, s'obtenen alguns resultats típics: l'escorça exterior està formada per nuclis pesats, ja sigui en forma de fluid o de sòlid. A prop de la superfície, aquests nuclis són probablements de ferro. A mesura que ens endinsam a l'estel, els nuclis són més rics en neutrons. L'escorça interior està formada per nuclis encara més pesats, un fluid de neutrons lliures i electrons degenerats i relativistes. Més endins, l'estel està basicament formada per neutrons lliures, amb alguns electrons i protons. El nucli és la part que es desconeix més: pot estar formada per pions creats al “decay” del neutró o per altres partícules elementals.

Els estels de neutrons són el tipus d'estrelles conegudes més denses que hi ha, amb una densitat equivalent a comprimir tots els habitants de la Terra en un cub d'un centímetre de costat, només superades per els forats negres, que provenen d'estrelles encara més massives. El seu radi característic és tan sols d'uns kilòmetres, però la seva massa sol ser un poc major que la del Sol. La massa màxima que pot tenir una estrella de neutrons és de tres masses solars. Després de la seva formació, les estrelles de neutrons poden viure bilions d'anys.

Una característica important dels estels de neutrons és el seu camp magnètic. El flux magnètic a través de la superfície de l'estel es mantindrà constant mentre colapsa per formar una estrella de neutrons. Si s'aproxima el flux per el producte entre el camp magnètic i la superfície de l'estel, s'obté [11]:

$$B_i 4\pi R_i^2 = B_f 4\pi R_f^2 \quad (9)$$

on B_i i B_f és el camp magnètic inicial i final respectivament, i R_i i R_f és el radi inicial i final respectivament. La superfície d'una esfera és: $S = 4\pi R^2$. Es pot comparar el camp magnètic i el radi entre una nana blanca (wd) i un estel de neutrons (ns):

$$B_{ns} \simeq B_{wd} \left(\frac{R_{wd}}{R_{ns}} \right)^2 = 1.3 \times 10^{14} \text{ G} \quad (10)$$

on s'ha usat com a valor de camp magnètic per a la nana blanca $B \approx 5 \times 10^8 \text{ G}$, que és el valor màxim de camp magnètic trobat a una nana blanca. Per tant, aquest resultat es pot entendre com un “upper limit”, és a dir, un valor màxim esperat. És un valor de camp magnètic molt alt: el camp magnètic que produeix la Terra és de l'ordre de 1 G.

Els estels de neutrons han de rotar ràpidament. Per molt petita que fos la rotació del nucli de la supergigant vermella abans de la supernova, degut a la disminució de radi i a la conservació de moment angular, la rotació de l'estel de neutrons serà molt gran. Es pot comprovar aproximadament: si $I_i \omega_i = I_f \omega_f$, on I és el moment d'inèrcia inicial i final ($I = CMR^2$ on C és una constant), i ω la velocitat angular, queda:

$$P_f = P_i \left(\frac{R_f}{R_i} \right)^2 \quad (11)$$

$$P_{ns} \simeq 3.8 \times 10^{-6} P_{wd} \quad (12)$$

on P és el període de l'estel. Si es suposa un període de la nana blanca de 1350 segons (estrella 40 Eridani B), el període de l'estel de neutrons serà de l'ordre de milisegons.

Una altra propietat important dels estels de neutrons és la seva temperatura. Quan es produeix la supernova, l'estel es troba a uns 10^{11} K. Degut a processos que emeten neutrins, antineutrins i fotons, l'estel va perdent energia i es refreda. Quan ja han passat centenars d'anys, l'estel es sol trobar a uns 10^8 K a l'interior i a uns 10^6 K a la superfície, temperatures que són estables per milions d'anys. La lluminositat de cos negre deguda a aquesta temperatura és de l'ordre de la del Sol: $L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4 = 7.13 \times 10^{32}$ erg s^{-1} . La dificultat per observar els estels de neutrons és deguda a que aquesta radiació és principalment emesa en forma de raigs X, i del tamany petit de l'estel (de la mida d'una ciutat).

2.1.2 Púlsars

L'any 1967, Jocelyn Bell va descobrir el primer púlsar [11]. Els púlsars són estels de neutrons amb una freqüència de rotació molt alta (la majoria tenen períodes entre 0.25 i 2 segons) i un camp magnètic molt intens. Aquest període s'incrementa poc a poc ($\dot{P} \simeq 10^{-15}$ s/s). Els períodes estan mesurats amb una precisió molt gran, i donada la seva regularitat, poden competir amb els millors rellotges atòmics.

El púlsar més famós s'anomena "Crab" (Cranc). És un remanent d'una supernova observada a l'any 1054. És un dels pocs púlsars que s'ha pogut identificar visualment.

Quan s'observen, els púlsars s'assemblen a un far (fig. 8): per les línies de camp magnètic, l'estel emet ones electromagnètiques desde dos punts, i només es pot observar quan un d'aquests punts està apuntant a la Terra (l'estrella rota i per això també ho fan aquests dos punts). La resta del temps és invisible. Les ones electromagnètiques són principalment de radio, encara que també s'emeten raigs gamma, raigs X i espectre visible. Geminga va ser el primer púlsar que es va observar que emetia principalment raigs gamma i no radio.

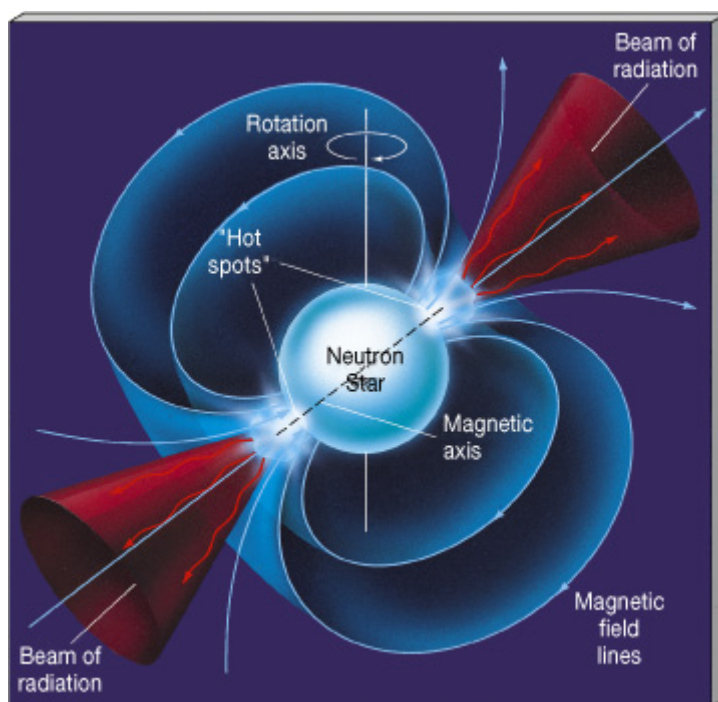


Fig. 8: Esquema del "lighthouse model" (far): línies de camp magnètic del púlsar i eix de rotació de l'estrella. Figura extreta de <http://astronomy.nyu.edu.cn/lixd/GA/AT4/AT422/HTML/AT42202.html>

Els pulsos que es reben són deguts a la rotació de l'estrella. La velocitat angular de rotació té un màxim, ja que l'estel s'ha d'aguantar gravitacionalment. Per tant, es pot saber quina és la velocitat angular màxima a partir d'igualar la força centrípeta i la gravitacional a l'equador de l'estel (suposant una forma esfèrica perfecta) [11]:

$$w_{max}^2 R = G \frac{M}{R^2} \quad (13)$$

on G és la constant de gravitació universal, M i R la massa i el radi del púlsar respectivament. Si $P_{min} = 2\pi/\omega_{max}$, queda:

$$P_{min} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} \quad (14)$$

que per una estrella de neutrons és aproximadament de l'ordre de 10^{-4} segons, resultat que concorda amb els valors observats experimentalment. El camp magnètic als pols magnètics del púlsar és:

$$B = \frac{1}{2\pi R^3 \sin \theta} \sqrt{6c^3 I P \dot{P}} \quad (15)$$

on R és el radi de l'estrella, θ és l'angle entre l'eix de rotació i l'eix de radiació magnètica, I és el moment d'inèrcia, i P i \dot{P} són el període i la derivada d'aquest. Per la majoria dels púlsars aquest valor es troba al voltant de 10^{12} G.

Els paràmetres més importants dels púlsars són la freqüència de rotació, la derivada de la freqüència (a quin ritme augmenta o disminueix la seva freqüència), la distància, el radi i la massa. Hi ha alguns púlsars que es coneixen dels quals no es saben tots els paràmetres.

La distància a la que es troba un púlsar es pot calcular observant la radiació electromagnètica que ens arriba. Degut a la interacció de la radiació amb el medi interestel·lar, les ones es retarden i tenen una velocitat inferior a la de la llum. Les ones de menor freqüència es retrasen més. Degut a n'aquest fet, es pot calcular la distància a la Terra.

2.1.3 Població d'estels de neutrons

La radiació electromagnètica dels púlsars interacciona amb el medi interestel·lar a mesura que viatja fins La Terra. Per això, és més difícil detectar púlsars quan més enfora estan. La majoria de púlsars que es coneixen es troben situats al pla de la Via Làctea.

Es suposa que hi ha aproximadament uns 10^8 estels de neutrons a la nostra galàxia. Dels 10^8 estels de neutrons, aproximadament unes 10^5 són púlsars, dels quals s'en coneixen uns 2000. La majoria d'estels de neutrons no s'observen electromagnèticament, sigui perquè la senyal és dèbil (o interacciona amb pols interestel·lar) o perquè el feix de radiació no passa per la Terra.

Es pot diferenciar entre estels de neutrons vells i joves. Degut a l'augment del període, per norma general els vells tendran una freqüència més petita que els joves.

Aproximadament un 1% dels púlsars coneguts formen part d'un sistema binari, mentre que almenys la meitat dels estels formen part de sistemes múltiples. Aquest fet concorda amb l'explicació de la supernova com a origen dels estels de neutrons.

2.2 Senyal gravitacional dels estels de neutrons

La senyal gravitacional d'un estel de neutrons aïllat en rotació és quasi monocromàtica (senyal continua), encara que també pot emetre en forma de "burst". Els canvis a la freqüència de rotació de l'estel es deuen en part a l'emissió d'energia en forma d'ones gravitacionals.

Com s'ha dit abans, l'amplitud escalar mesurada $h(t)$ degut a l'efecte d'una OG $h_{\mu\nu}^{TT}$ ens ve donada per:

$$h(t) = F_+(t)h_+(t) + F_\times(t)h_\times(t) \quad (16)$$

Al marc de referència de la font l'OG es pot escriure com:

$$h_+(t, \tau) = A_+(\tau)\cos\Phi(\tau), h_\times(t, \tau) = A_\times(\tau)\sin\Phi(\tau) \quad (17)$$

on Φ és la fase de la senyal, diferent per cada emissor.

Assumint una ona quasi monocromàtica, la fase de la senyal Φ es pot expandir mitjançant Taylor:

$$\Phi(t) = \phi_0 + 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{(n+1)!} (T(t) - T(t_0))^{n+1} \quad (18)$$

La fase de la senyal depèn de la fase inicial, de l'evolució de la freqüència de la senyal i de la velocitat instantània relativa entre la font i el detector. $T(t)$ és el temps d'arribada de la senyal al baricentre del sistema solar, t el temps al detector. Al cas particular d'un estel de neutrons, tenim que:

$$A_+ = \frac{1}{2}h_0(1 + \cos^2(\iota)), A_\times = h_0\cos(\iota) \quad (19)$$

on h_0 és l'amplitud de l'OG i ι és l'angle entre l'eix de rotació de l'estrella i la línia que va desde el centre de l'estrella al centre de la Terra, com es veu a la figura 9.

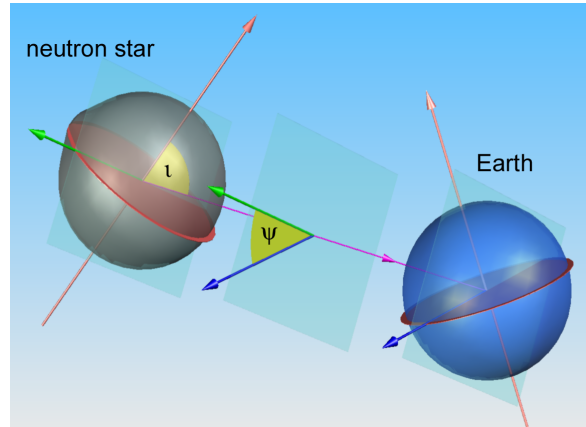


Fig. 9: Representació gràfica dels angles ι i ψ .

El valor d' h_0 depèn de l'emissor i del mètode d'emissió. Es veu que l'amplitud d'ona $h(t)$ consta de la suma de dues amplituds A_+ i A_\times que venen modulades per l'antenna patern $[-1,1]$ i per el cosinus i el sinus de la fase de la senyal $[-1,1]$. El que es farà més envant és calcular el valor d' h_0 , que indica quina podria ser l'amplitud màxima de l'ona.

Encara que la senyal que emet la font sigui quasi monocromàtica, la senyal que rep el detector està modulada en freqüència degut a l'efecte Doppler del moviment relatiu font-Terra i en amplitud degut al canvi dels "antenna-pattern".

La freqüència d'emissió i la que rep el detector es poden relacionar mitjançant la fórmula de Doppler:

$$f_{det} - f_{emisor} = f_{emisor} \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{c} \quad (20)$$

on $\vec{v} \cdot \vec{n}$ és el producte escalar entre el vector velocitat de la Terra i el vector normal que apunta cap a l'emissor (des del Sol en el sistema de coordenades "Solar System barycenter"), i c és la velocitat de la llum.

2.3 Mecanismes d'emissió d'ones gravitacionals dels estels de neutrons

Els estels de neutrons emeten ones gravitacionals mitjançant diversos mecanismes, d'entre els quals en s'en poden destacar tres. Són processos que emeten OG contínues, i requereixen temps d'integració molt grans per poder ser detectades.

- Distorsions asimètriques ("muntanyes"). Aquestes deformacions tenen diverses causes: per la disminució del període (spindown), per acreció en un sistema binari, degut a camps magnètics molt forts, etc. Expressada en funció de l'elipticitat $\epsilon = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}}$ on I_{jj} són els principals moments d'inèrcia. Aquestes distorsions no s'han de confondre amb l'efecte centrífug de la rotació, ja que aquest efecte és simètric i no causa OG. Una estrella a distància d , amb freqüència de rotació ν al voltant de l'eix I_{zz} emet OG amb freqüència $f=2\nu$ i amplitud [3]:

$$h_0 = \frac{4\pi^2 G}{c^4} \frac{I_{zz} f^2}{d} \epsilon \quad (21)$$

Es pot tractar l'estrella de neutrons com un cos esfèric amb radi $R = 10$ km i masa $M = 1.4 M_\odot$ (1.4 vegades la massa del Sol)[11]:

$$I_{zz} = \frac{2}{5} MR^2 = 1.1 \times 10^{38} \text{ kg m}^2 \quad (22)$$

A aquest valor se l'anomena el moment d'inèrcia canònic d'un estel de neutrons. Substituint els valors de les constants, i aplicant el valor del moment d'inèrcia, queda:

$$h_0 = 3.25 \times 10^{-5} \frac{f^2}{d} \epsilon \quad (23)$$

El valor de ϵ no es sol conèixer molt bé, però el valor més alt esperat és de l'ordre de 10^{-6} degut a la tensió que pot suportar la superfície de l'estrella [17]. Per poder observar una OG d'un estel de neutrons, és important que estigui el més a prop possible, que tengui la màxima assimetria, i que la seva freqüència pertanyi al rang desitjat dels detectors. Com es veia a la figura 7, aquest mecanisme crea una ona de duració llarga i amb forma d'ona coneguda.

- Inestabilitats dels R-modes. Quan els estels de neutrons són joves, roten molt rapidament i estan molt calents. Hi ha ones de densitat que viatgen en sentit contrari que la rotació de l'estel. Aquestes ones de densitat generen ones gravitacionals. Aquestes ones de densitat depenen de la temperatura, i quan l'estel sigui menys jove, s'aturaran degut a la viscositat. L'amplitud de l'OG és [12]:

$$h_0 = \left(\frac{8\pi}{5}\right)^{1/2} \frac{G\alpha\omega^3 MR^3 J}{dc^3} \quad (24)$$

on $J = \frac{1}{MR^4} \int_0^R \rho r dr$, α depèn de la lluminositat i $\omega = \frac{4\nu}{3}$. Les ones creades mitjançant aquest mecanisme són emeses a $f = \frac{4}{3}\nu$.

- Precessió. Si el moment angular de l'estel es desvia de l'eix de simetria, l'estel precessionarà a la vegada que rota. L'amplitud de l'OG és [13]:

$$h_0 = \frac{G}{c^4} \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 \frac{(\Delta I)\Theta}{d} \quad (25)$$

on ΔI és la diferència entre I_3 i I_1 , moments d'inèrcia de l'eix de simetria i un altre eix, Θ és l'angle de precessió, i Φ és la freqüència angular inercial de precessió. Les ones creades mitjançant aquest mecanisme són emeses a la suma de la freqüència de rotació més la freqüència de precessió, que és aproximadament igual a la freqüència de rotació.

Un púlsar pot emetre ones gravitacionals mitjançant més d'un mecanisme a la vegada. A més dels mecanismes d'emissió d'ones contínues, els púlsars també poden emetre ones no contínues (“bursts”). Els càlculs realitzats als següents apartats usaran el primer dels tres mètodes enunciats.

2.4 Catàleg de púlsars

Per poder calcular l'amplitud d'ona gravitacional h_0 , es necessita conèixer alguns paràmetres dels púlsars. Per fer això, es pot acudir a un catàleg astronòmic que contengui informació sobre els púlsars.

Hi ha disponibles diversos catàlegs que llisten els púlsars. El més complet i actualitzat és el catàleg “Australia Telescope National Facility” [14]. Hi ha llistats més de 2400 púlsars. El llistat inclou tant sistemes binaris com púlsars individuals. Es pot seleccionar una llista de paràmetres, entre els que s'inclouen el nom, la distància, les coordenades galàctiques, la freqüència, la derivada de la freqüència, etc. Una vegada seleccionats els paràmetres desitjats, es pot treure una taula amb les dades corresponents ordenades a voluntat de l'usuari a partir d'algun paràmetre. També es poden crear gràfics.

Com es veu a la fórmula (21), es necessari conèixer la freqüència, la distància i l'el·lipticitat de l'assimetria dels púlsars. Els dos primers paràmetres es coneixen per quasi tots els púlsars, no així l'el·lipticitat de l'assimetria.

A la taula 2 es presenten els paràmetres d'alguns púlsars del catàleg. A la taula hi ha diversos exemples que mostren els paràmetres màxims i mínims. S'observa que: la freq. de rotació va des de 0.085 Hz fins a 641.93 Hz; la derivada de la freq. de rotació, va des de -3.775×10^{-10} Hz/s (Cranc) fins a -3.991×10^{-18} Hz/s; i la distància va des de 0.16 kpc fins a 62.40 kpc. Aquests mínims i màxims estan subjectes a canvis degut al descobriment de nous púlsars o de la millor observació/dedució dels paràmetres. Els púlsars es troben molt enfora: la distància al Sol és de l'ordre de 10^{-8} kpc, i la distància entre el Sol i el centre de la Via Làctea és de 8.5 kpc. La majoria de púlsars es troben a l'ordre del kiloparsec, fent que la senyal que rebem sigui molt dèbil (a l'equació (21) es veu que l'amplitud és inversament proporcional a la distància).

Nom	Freq. de rotació (ν) [Hz]	Derivada freq. ($\dot{\nu}$) [Hz/s]	Distància (d) [kpc]
Cranc (PSR B0531+21)	29.946923	-3.775×10^{-10}	2.00
Geminga (J0633+1746)	4.217639623538	-1.952×10^{-13}	0.25
J0113-7220	3.068586	-4.575×10^{-14}	62.40
J1309-6526	2.510720	-1.160×10^{-16}	19.94
J1903+0327	465.135238	-4.072×10^{-15}	6.45
J0437-4715	173.687946	-1.728×10^{-15}	0.16
J2144-3933	0.117511	-6.849×10^{-18}	0.16
J1841-0456	0.084825	-2.944×10^{-13}	9.60
B1937+21	641.928234	-4.291×10^{-14}	5.00
J1545-4550	279.697699	-4.107×10^{-15}	2.01
J0537-6910	62.026190	-1.992×10^{-10}	53.70
B1509-58	6.611515	-6.694×10^{-11}	4.40
J1232-4742	0.533904	-3.991×10^{-18}	1.40
Vela (PSR B0833-45)	11.194650	-1.567×10^{-11}	0.28

Taula 2: Paràmetres d'alguns púlsars (1 kiloparsec = 3.0857×10^{19} metres).

A la figura 10 es representa la derivada de la freqüència d'ona gravitacional ($\dot{f} = 2\dot{\nu}$) enfront de la freqüència ($f = 2\nu$).

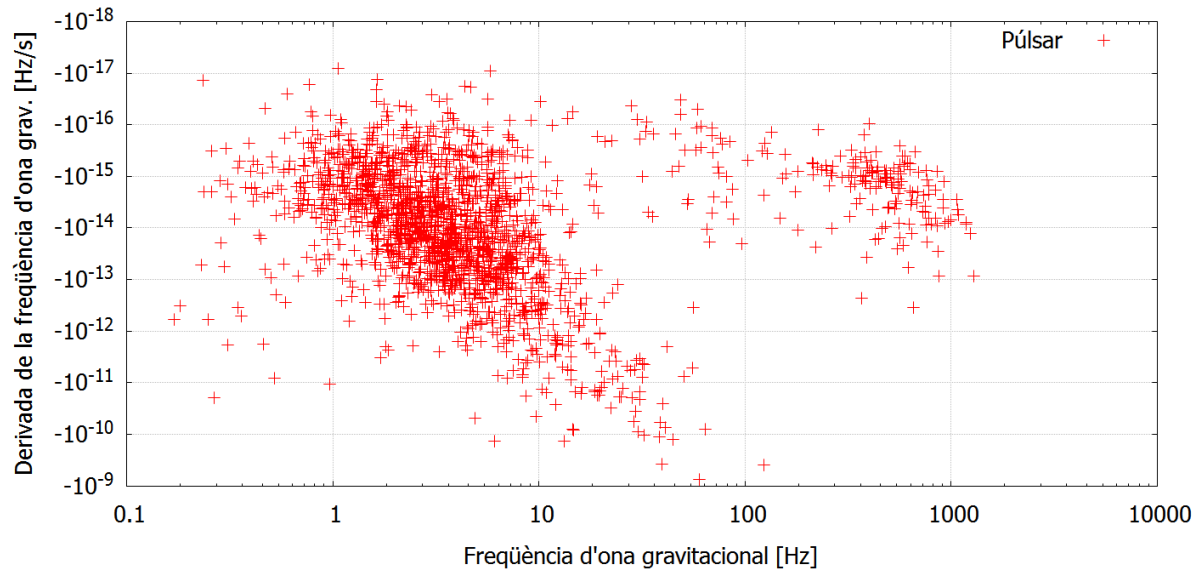


Fig. 10: Derivada de la freqüència d'ona gravitacional enfront de la freqüència d'ona gravitacional dels púlsars.

S'observa que la gran majoria de púlsars tenen una freq. d'ona gravitacional menor de 10 Hz, i també una derivada de la freq. menor que 10^{-14} Hz/s.

A la figura 11 es representa un histograma de la derivada de la freqüència.

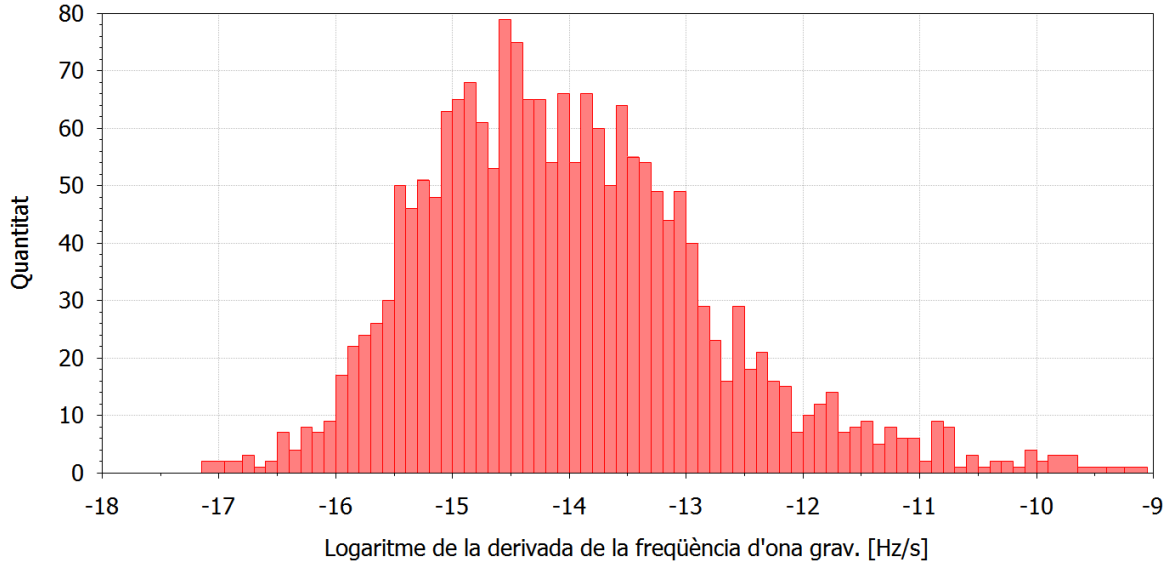


Fig. 11: Histograma de la derivada de la freqüència d'ona gravitacional dels púlsars del catàleg “Australia Telescope National Facility”.

S'observa que la majoria de púlsars tenen la derivada de la freqüència entre 10^{-15} i 10^{-13} Hz/s, com ja s'havia vist a la figura 10.

2.5 Spindown-limit

Els púlsars emeten energia, degut a diversos mecanismes: radiació del dipol magnètic, acceleració de partícules carregades a la magnetosfera, emissió d'ones gravitacionals, etc.

Com s'ha dit anteriorment, encara no s'han detectat directament ones gravitacionals. A mesura que s'obtenen resultats als Science Run, i no es detecten OG, s'obté el que s'anomena “upper limit”. Són valors que ja es sap que són màxims perquè si no ja s'hauria detectat una ona gravitacional.

Els “spindown upper limit” són màxims teòrics. S'obtenen de la següent manera: suposant que un púlsar emet ones gravitacionals mitjançant el primer mecanisme (distorsions no simètriques) i suposant que tota l'energia que emet és deguda a les ones gravitacionals (no emet energia electromagnètica, etc.), es pot trobar l'spindown límit, una amplitud de l'ona gravitacional que és un límit superior de l'amplitud de l'ona real (degut a la suposició feta). Aquests límits es calculen per fonts conegudes.

La lluminositat (energia emesa en forma d'ona gravitacional per unitat de temps) expressada en el formalisme quadripolar és:

$$L_{GW} = \frac{G}{5c^5} \ddot{\Gamma}_{jk} \ddot{\Gamma}^{jk} \quad (26)$$

on $\ddot{\Gamma}_{jk}$ és el tensor quadripolar de massa i moment de la font, que per un estel de neutrons queda:

$$L_{GW} = \frac{G}{10c^5} (4\pi\nu)^6 I_{zz}^2 \epsilon^2 \quad (27)$$

Si assumim que l'energia d'emissió d'OG ve de l'energia rotacional $E_{rot} = 2\pi^2\nu^2 I_{zz}$, derivant i igualant:

$$L_{GW} = x(-\dot{E}_{rot}) = -2\pi^2(2I_{zz}\nu\dot{\nu} + \nu^2\dot{I}_{zz})x \quad (28)$$

on x és un factor que indica quin percentatge d'energia de l'estrella és emès per radiació gravitacional (és igual a 1 si suposam que tota l'energia de rotació s'envà com a ones gravitacionals, menor que 1 si no és tota.). Si el moment d'inèrcia és constant ($\dot{I}_{zz} = 0$) podem aïllar l'elipticitat de l'equació de la lluminositat (recordant que $f = 2\nu$ és la freqüència de l'OG i que $\dot{f} = 2\dot{\nu}$ és la derivada de la freqüència de l'OG):

$$\epsilon_{sd} = C_1 \sqrt{x \frac{|\dot{f}|}{f^5}} \quad (29)$$

que és el valor de l'el·lipticitat del púlsar amb les suposicions abans esmentades, on $C_1 = \sqrt{\frac{5(2c)^5}{2(4\pi)^4 G I_{zz}}} = 1.08 \times 10^6 \sqrt{\frac{m \text{ kg}}{s \text{ N}}}$. Introduint aquest valor a (21):

$$h_{sd} = \frac{C_2}{d} \sqrt{x \frac{|\dot{f}|}{f}} \quad (30)$$

on $C_2 = \sqrt{\frac{5 G I_{zz}}{c^3}} = 35.15 \frac{\sqrt{m \text{ N}}}{\text{kg}} s^3$.

S'observen diverses característiques: l'amplitud és inversament proporcional a la distància: quan més enfora sigui la font d'emissió, més baixa serà l'amplitud; a menor freqüència, major amplitud i major el·lipticitat, per tant és preferible cercar objectes de baixa freqüència (dins les limitacions dels detectors disponibles); a major spindown (derivada de freqüència), major amplitud (si el púlsar canvia la seva freqüència més aviat produirà una ona gravitacional de més amplitud).

Amb les fórmules anteriors i les dades del catàleg, es pot fer un gràfic que representa el valor de l'amplitud de l'ona gravitacional per spindown en funció de la freqüència. Dels púlsars del catàleg només s'utilitzen els púlsars amb derivada de la freqüència negativa (els que la tenen positiva són púlsars de sistemes binaris que estan augmentant la seva freqüència). També es poden excloure els púlsars que tinguin freqüències fora del rang dels interferòmetres amb bona sensibilitat (~ 10 -1000 Hz). Amb un codi FORTRAN es fan els càlculs i a la figura 12 es presenten els resultats.

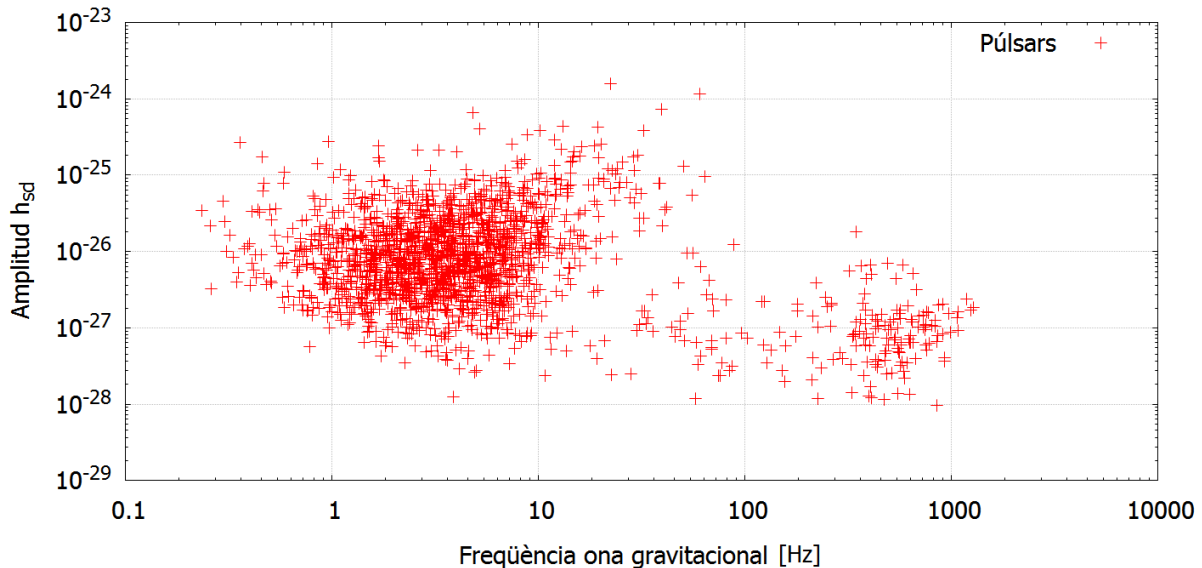


Fig. 12: Amplitud de l'ona gravitacional emesa per uns 1900 púlsars mitjançant distorsió no simètrica en funció de la freqüència d'ona gravitacional ($f = 2\nu$) a qualsevol distància i freqüència.

A la figura 12 es veu que el valor més alt de l'amplitud d'ona és el de Vela ($f=22.38$ Hz), que és de 3.29×10^{-24} , i el segon el de Cranc ($f=59.88$ Hz) que és de 1.43×10^{-24} . La majoria de púlsars es troben per davall de 10^{-25} . Només hi ha 224 púlsars amb freqüència d'ona gravitacional major que 10 Hz, la majoria estan entre 0 i 10 Hz, com s'ha vist a la figura 10. Això no va bé per les freqüències de detecció òptimes dels interferòmetres terrestres (encara que Vela i Cranc sí que es troben a l'interval desitjat).

Aquests valors d'amplitud d'ona al límit spindown poden tenir un error d'alguns ordres de magnitud degut a la suposició feta. Apart, la distància del catàleg pot no ser 100% acertada, així com la freqüència i la seva derivada. A més, per calcular aquestes amplituds s'ha usat el mencionat valor canònic del moment d'inèrcia d'un estel de neutrons, però aquest valor també podria ser un poc diferent per cada estel. Per tant, l'amplitud d'ona mostrada a la figura 12 podria variar considerablement.

2.5.1 El·lipticitat dels púlsars

Abans s'ha dit que als catàlegs no es disposa de l'el·lipticitat de l'assimetria dels púlsars. Però a partir de l'equació (29) es poden calcular els valors de l'el·lipticitat de l'spindown límit pels púlsars. Aquests valors seran límits màxims d'aquesta el·lipticitat.

A la figura 13 es representa un histograma de l'el·lipticitat d'spindown per tots els púlsars, i a la figura 14 només per els púlsars amb una freqüència d'ona gravitacional major a 10 Hz.

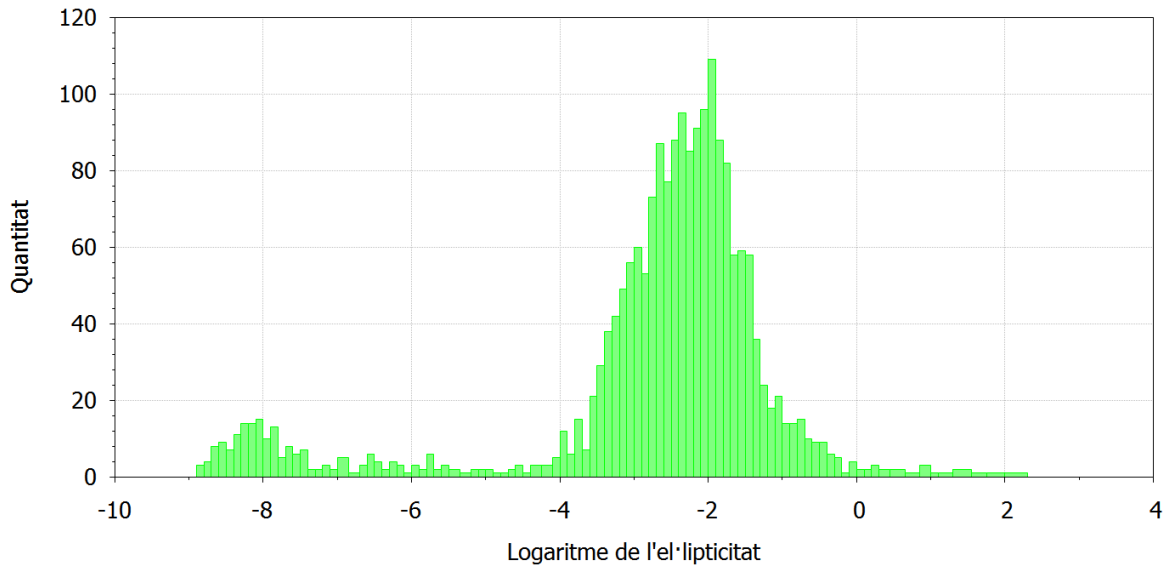


Fig. 13: Histograma del logaritme de l'el·lipticitat per l'spindown-límit per tots els púlsars del catàleg.

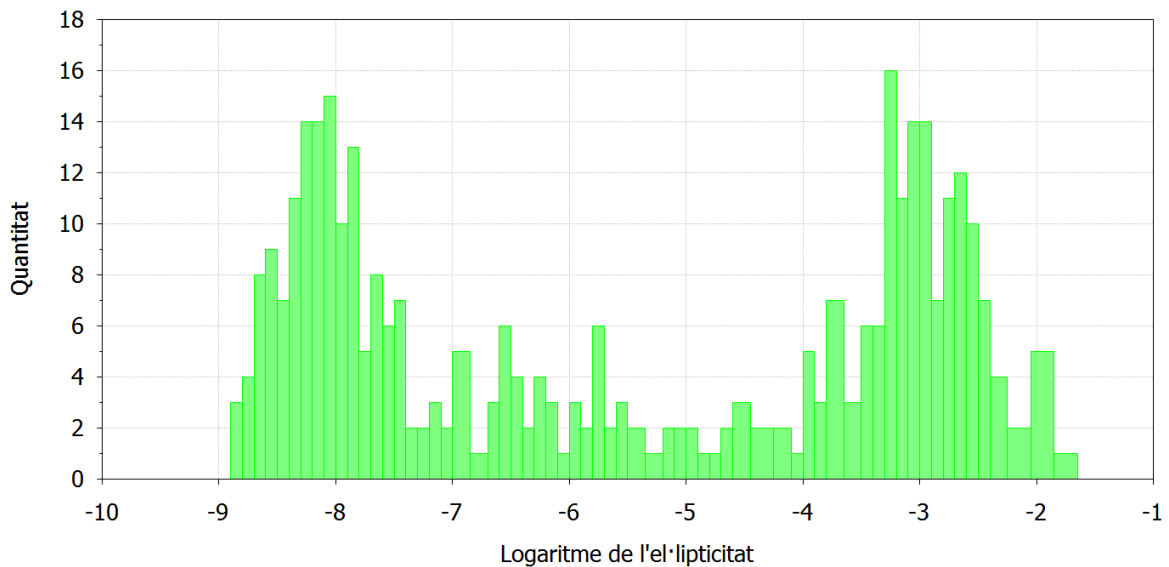


Fig. 14: Histograma del logaritme de l'el·lipticitat per l'spindown-límit per els púlsars del catàleg amb freqüència d'ona gravitacional major a 10 Hz.

A la figura 13 s'observen valors majors a 0 degut a errors causats als càlculs perquè alguns púlsars pertanyen a sistemes binaris i això té efectes que no s'han tengut en compte. A les figures 13 i 14 s'observa una diferència important als valors d'el·lipticitat. A la primera figura el gruix dels púlsars es troba al voltant de 10^{-2} , mentre que a la segona figura el gruix està repartit entre aquest mateix valor i 10^{-8} . La fórmula (29) indica que a menor freqüència l'el·lipticitat és major, per tant si s'eliminen els púlsars amb les freqüències d'ona gravitacional menors a 10 Hz es perden els valors més alts. A més, s'observa la coincidència entre les quantitats als valors més petits, fet que indica que aquests són els púlsars amb freqüència major a 10 Hz. Els valors d'el·lipticitat de la segona figura són molt petits (els valors reals ho seran encara més) fet que dificulta molt la detecció d'una OG emesa mitjançant el mecanisme de la distorsió axisimètrica. El valor d'el·lipticitat al límit spindown de Vela és 1.8×10^{-3} [19].

Si es dona un valor constant de f es pot calcular quin seria així el valor de l'el·lipticitat per els púlsars al spindown limit. Aquests resultats es mostren a la figura 15.

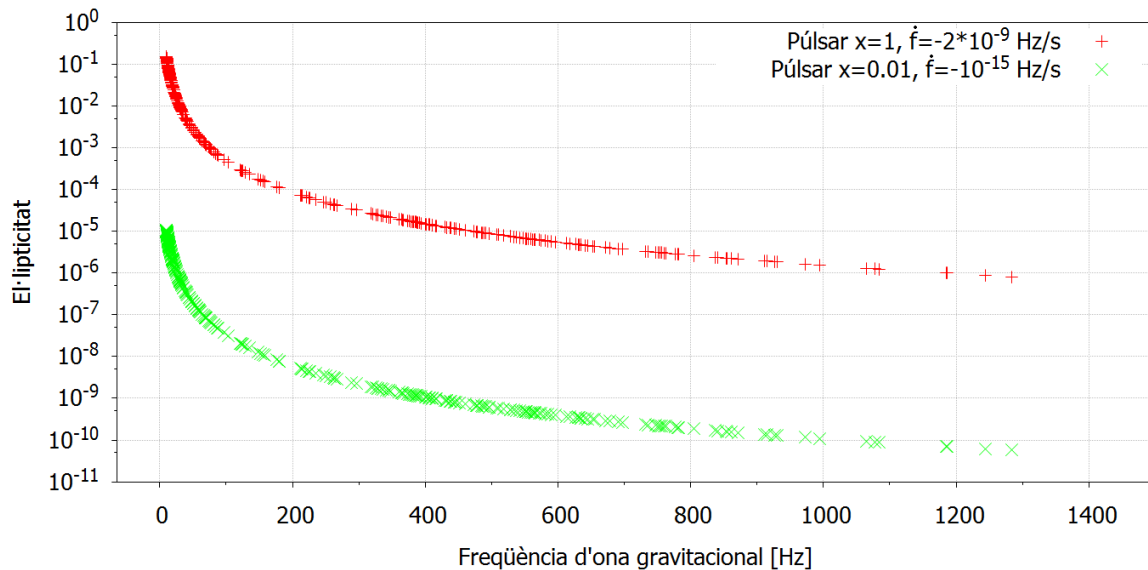


Fig. 15: El·lipticitat en funció de la freqüència per $\dot{f} = -2 \times 10^{-9} \frac{\text{Hz}}{\text{s}}$ i $x=1$ (spindown límit) i per $\dot{f} = -10^{-15} \frac{\text{Hz}}{\text{s}}$ i $x=0.01$ usant la fórmula (29).

Perquè l'el·lipticitat sigui realista, hauria de ser igual o major que 10^{-6} , ja que aquest és el valor màxim teòric que es suposa que pot tenir la deformació a l'estrella de neutrons [17]. A la figura 15 es veu que això passa a partir de 1000 Hz pel primer cas. Tenint en compte el valor màxim teòric, es pot dir que el primer cas de la figura 15 no representa un cas molt realista. El segon cas de la figura 15 és més realista, ja que la derivada de la freqüència utilitzada s'ajusta més als valors de l'histograma 11. Els valors d'el·lipticitat calculats així s'ajusten millor al màxim valor teòric i a les observacions experimentals.

Per tant, al límit spindown es pot calcular un valor de l'el·lipticitat. Si aquest valor és gran (major que el límit teòric abans citat) i el púlsar no és exòtic (no té característiques extremes) es pot suposar que el resultat és dolent. Per tant, alguna de les suposicions que s'ha fet és incorrecta: tant podria ser el percentatge d'energia que s'emet en forma d'ones gravitacionals, com l'equació d'estat de l'estel de neutrons. Per això, encara que el valor pareixi massa gran, no es pot descartar amb total seguretat.

3 Mètodes d'anàlisi de dades

Abans s'ha dit que els interferòmetres terrestres tenen diverses fonts de renou. Per poder distingir la senyal desitjada entre aquest renou, normalment s'ha d'integrar les dades des de mesos fins a anys.

Quan es cerca una ona gravitacional, es poden fer dos tipus de cerques:

- Cerques a tot l'espai de paràmetres per fonts desconegudes (cerques a cegues): requereix una cerca a tot l'espai de paràmetres (freqüència, spindown, posició al cel, etc.) de possibles senyals, i això fa que el cost computacional s'incrementi molt amb el temps d'observació. En aquest cas, la sensibilitat de la cerca està limitada per les proves que es fan: quantes més se'n fan, més candidats provinents de renou s'introdueixen a les dades.
- Cerques concretes de fonts conegudes: aquestes cerques no tenen els problemes abans mencionats ja que es coneixen alguns paràmetres de la font com la posició al cel o la freqüència, i per això poden aconseguir la màxima sensibilitat.

Depenent de quin tipus de cerca es vol fer, s'implementarà un mètode d'anàlisi de dades. En quant a ones de tipus contínues, que són les que s'analitzen al present treball, els dos tipus de mètodes més importants són els mètodes coherents i els mètodes semicoherents. Uns són molt sensibles però amb un alt cost computacional si es fa una cerca a tot l'espai (mètodes coherents), i els altres són més ràpids però menys sensibles (mètodes semicoherents).

- Mètodes coherents: es compara la senyal rebuda amb púlsars dels quals es coneix l'amplitud i l'evolució de la fase. Per relacionar-ho, necessitam una sèrie de paràmetres: posició, angle

d'inclinació, pol·larització, amplitud, freqüència, derivada de la freqüència i fase inicial. Es necessita conèixer l'evolució de la fase de la senyal durant tot el temps d'observació per poder comparar-la. Es fan diverses suposicions sobre els paràmetres desconeguts i es compara la senyal rebuda amb aquestes senyals modelades. Com que es compara la senyal amb púlsars coneguts, ja es tenen alguns paràmetres i no s'han de fer suposicions per tots: la sensibilitat és millor (el quocient entre senyal i soroll augmenta com l'arrel del temps d'observació, per això és convenient integrar durant el màxim de temps possible). Existeixen diversos mètodes coherents, d'entre els que destaquen tres mètodes: Bayesian, “F statistics” i “5-vector method” [19]. El problema d'aquests mètodes és que tenen un cost computacional molt alt si es volen usar per fer una cerca a tot el cel, per culpa del llarg temps d'observació necessari.

- Mètodes semicoherents: requereixen una predicció de l'evolució de la freqüència de la senyal, però no de la fase. Té un cost computacional més petit, però és menys sensible. Existeixen diversos mètodes semicoherents, d'entre els que destaquen tres mètodes: “StackSlide”, “Hough Transform” [18] i “PowerFlux” [21]. El temps d'observació T_{obs} total es divideix en N trossos de duració $T_{coh} = T_{obs}/N$, i cadascun d'aquests trossos s'integra mitjançant un mètode coherent, per després sumar-se de manera incoherent. En aquest cas no es necessita conèixer l'evolució de la fase de la senyal per tot el temps d'observació, ja que la fase de cadascun dels N trossos en que es divideix el temps no necessita estar relacionat amb els altres.

A part d'aquests dos tipus de mètodes, es pot intentar implementar una combinació jeràrquica dels dos per obtenir el millor de cada un d'ells. Per millorar el poder de computació disponible, existeix el projecte públic Einstein@Home, que es basa en la plataforma de computació distribuïda BOINC. És un programa informàtic que es pot descarregar qualsevol persona i que utilitza part de l'ordenador de l'usuari per fer anàlisi de dades i enviar els resultats, i també per trobar púlsars nous.

Per tant, quan es vol detectar l'ona gravitacional d'un púlsar conegut, com Vela, s'usa el mètode coherent. Quan es cerca una ona gravitacional sense “apuntar” a cap púlsar en concret, s'empra el mètode semicoherent o una combinació jeràrquica dels dos.

Per veure quines són les possibilitats de detecció, s'ha de comparar els valors d'amplitud d'ona de la figura 12 amb les amplituds màximes que podem detectar amb els interferòmetres. Per fer això és necessari relacionar la sensibilitat dels detectors amb l'amplitud d'ona.

La relació depèn del mètode d'anàlisi utilitzat (és diferent pel mètode coherent i pel semicoherent). Suposant una probabilitat de falsa alarma de 1 % i una probabilitat de fals rebuig de 10 %, en cas de soroll gaussià i estacionari, s'obtenen unes equacions que caracteritzen la sensibilitat teòrica d'aquests mètodes [3]:

$$h_{coh} = 11.4 \sqrt{\frac{S_n}{T_{obsefectiu}}} \quad (31)$$

$$h_{sem} = 8.54(N)^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{S_n}{T_{coh}}} \quad (32)$$

on $N = \frac{T_{obsefectiu}}{T_{coh}}$, $\sqrt{S_n}$ és la sensibilitat del detector (Fig. 5), $T_{obsefectiu}$ és el temps d'observació que dura la recollida de dades multiplicat per el “duty-cycle” (d'aquest temps d'observació total no se n'aprofita el 100% degut a errors diversos: aquest fet ve recollit per el factor “duty-cycle”), i T_{coh} és el temps en que dividim el temps total d'integració al mètode semicoherent (habitualment és de 30 minuts). El mètode coherent és més sensible, així que hauria de donar valors d'amplitud més petits que el semicoherent (això vol dir que es podran detectar ones gravitacionals amb una amplitud més baixa). Aquestes fórmules canvien en funció del número de detectors que s'empren. La fórmula per el mètode semicoherent és vàlida només per a N gran.

Les fórmules anteriors s'han obtingut usant una aproximació freqüentista a l'anàlisi de dades. Quan s'analitzen dades, es poden fer dues hipòtesis: que no hi ha senyal a les dades, o que si que n'hi ha. A més, es decideix un paràmetre llindar: si la variable que cercam es troba per damunt d'aquest paràmetre, s'accepta la segona hipòtesis; si es troba per davall, s'accepta la primera. La probabilitat de fals alarma es defineix com la probabilitat de traspasar el paràmetre llindar malgrat que la primera hipòtesi sigui certa; la probabilitat de fals rebuig es defineix com la probabilitat que la variable no sigui major que el paràmetre llindar malgrat la segona hipòtesi sigui certa. És beneficiós que aquests números siguin el més petits possible.

Aquestes fòrmules no són certes ja que s'assumeix que el filtratge òptim que es fa emprà el patró de la senyal, i que aquest és totalment conegut.

Run	$T_{obsefectiu}$ [s](Hanford/Livingston)	N (Hanford/Livingston)
S5	43032816/35759664	23992/19331 [22]
S6	21410736/20602784	9745/7964 [23]
ADV	23716800	12960

Taula 3: Usant les dades de la figura 4 i les dades experimentals dels papers citats s'obtenen N i $T_{obsefectiu} = T_{obs} \times DutyCycle$ per S5 i S6 (Hanford (4 km) i Livingston) i Advanced LIGO ($T_{obs} = 9$ mesos, duty cycle del 100 %). La N d'aquesta taula és diferent a la N teòrica T_{obs}/T_{coh} (no per Advanced LIGO, donat que encara no hi ha dades experimentals), ja que a la realitat no s'aprofiten tots els "trossos" del mètode semicoherent degut a errors: s'usa una N experimental extreta de papers basats en cerques reals.

3.1 Cerques per púlsars coneguts

Com s'ha dit abans, per intentar detectar l'ona gravitacional d'un púlsar conegut s'empra un mètode coherent.

Es poden calcular les amplituds màximes mitjançant les fòrmules teòriques anteriors. Usant les dades de sensibilitat de Advanced LIGO i del "Science Run" 6 per el detector de Hanford amb els valors de $T_{obsefectiu}$ i de N de la taula 3 i $T_{coh} = 30$ minuts:

$$h_{cohADV} = 11.4 \sqrt{\frac{S_n}{T_{obsefectiu}}} = 2.34 \times 10^{-3} \sqrt{S_n} \quad (33)$$

$$h_{semADV} = 8.54(N)^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{S_n}{T_{coh}}} = 1.89 \times 10^{-2} \sqrt{S_n} \quad (34)$$

$$h_{cohS6} = 11.4 \sqrt{\frac{S_n}{T_{obsefectiu}}} = 2.46 \times 10^{-3} \sqrt{S_n} \quad (35)$$

$$h_{semS6} = 8.54(N)^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{S_n}{T_{coh}}} = 2.03 \times 10^{-2} \sqrt{S_n} \quad (36)$$

Es veu que l'amplitud d'ona depèn de l'arrel de la sensibilitat per un coeficient. Mitjançant les anteriors fòrmules a la figura 16 es representa aquesta amplitud d'ona en comparació a les dels púlsars al límit spindown. A la figura 16 s'observa que la zona de màxima sensibilitat dels detectors es troba al voltant de 100-300 Hz. També s'observa que per Advanced LIGO, mitjançant qualsevol dels dos mètodes es podrien trobar diversos púlsars, mentre que només un (Cranc) per S6 mitjançant el mètode coherent. Es veu que encara que hi hagi púlsars amb amplituds d'ona grans, la detecció ve molt determinada pel rang de freqüències òptim dels interferòmetres. Advanced LIGO millora la sensibilitat de S6, i a més millora també el rang de freqüències òptim, fet que amplia el ventall de possibles observacions. També es comprova que el mètode coherent és més sensible que el semicoherent.

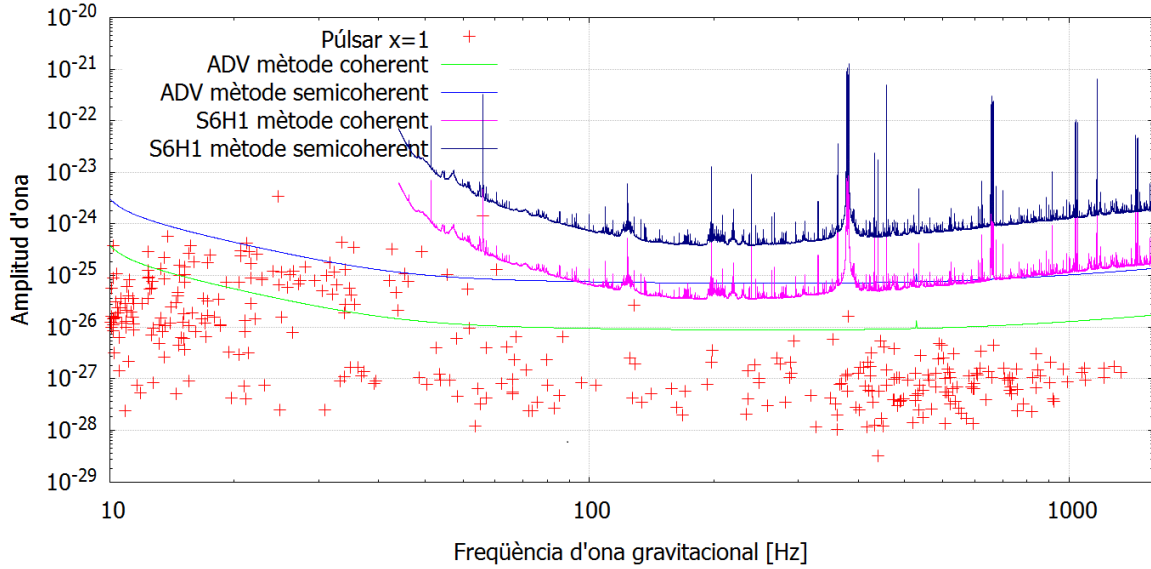


Fig. 16: Comparació entre els spindown límits dels púlsars coneguts (freqüència d'ona gravitacional major a 10 Hz) i les corbes de sensibilitat h_o per Advanced LIGO i S6 (Hanford) de les cerques coherents i semicoherents usant les fórmules teòriques extretes de [3] i els coeficients calculats a les fórmules (33)-(36), amb les dades de sensibilitat mostrades a la figura 5. Els púlsars que estan per damunt d'alguna corba, poden ser detectats per aquell detector. Com que es tracta del límit spindown, els púlsars podrien apareixer més abaix a la figura, i no ser detectables.

Si no es detecta l'ona gravitacional d'un púlsar mitjançant aquest anàlisi, no es pot descartar com a emissor d'ones gravitacionals, ja que és possible que emeti ones mitjançant un dels altres mecanismes abans descrits.

Les fórmules anteriors són teòriques, on s'ha suposat que el soroll és gaussià i estacionari. Es poden obtenir fórmules a partir de dades experimentals, que seran més realistes. Usant dades de cerques reals de S5 ([20], [21]), i a partir dels "upper limits", es dedueix una relació empírica que dona lloc a les següents equacions [16]:

$$h_{cohe\text{xp}} = 3.8 \times 10^{-3} \sqrt{S_n} \quad (37)$$

$$h_{seme\text{xp}} = 3.8 \times 10^{-2} \sqrt{S_n} \quad (38)$$

A partir de les anteriors equacions basades en dades de S5, es poden aconseguir expressions experimentals que es podran utilitzar per S6 i Advanced LIGO. Comparant les fórmules teòriques (31) i (32) amb les dues experimentals anteriors, es pot trobar un nou coeficient λ que després es podrà usar per formular noves expressions per S6 i Advanced LIGO. Usant un temps coherent de 30 minuts, i les dades de la taula 3:

$$3.8 \times 10^{-3} = \lambda_{coh} \frac{1}{\sqrt{T_{obse\text{fectiu}S5}}} \quad (39)$$

on $T_{obse\text{fectiu}S5}$ és la suma de Hanford i Livingston de la taula 3. Això dona un coeficient $\lambda_{coh} = 33.73 \sqrt{\text{Hz}}$. Per el mètode semicoherent:

$$3.8 \times 10^{-2} = \lambda_{sem} \frac{1}{N_{S5}^{1/4} \sqrt{T_{coh}}} \quad (40)$$

on N_{S5} és la suma de Hanford i Livingston. Això dona un coeficient $\lambda_{sem} = 23.26 \sqrt{\text{Hz}}$.

Per tant, es poden reescriure les equacions teòriques amb un coeficient experimental:

$$h_{coh} = 33.73 \sqrt{\frac{S_n}{T_{obs}}} \quad (41)$$

$$h_{sem} = 23.26(N)^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{S_n}{T_{coh}}} \quad (42)$$

Es veu que les constants que multipliquen són majors que al cas teòric (menys sensibilitat), ja que en realitat sempre hi ha algun problema que fa funcionar el detector pitjor que a la teoria. La diferència entre el cas teòric i el cas experimental és deguda en part a que en realitat el soroll del detector no és ni gaussià ni estacionari. Les cerques es fan sobre un espai de paràmetres discretitzat, fet que degrada la sensibilitat de la cerca. A més, degut a que es fa un escombrament gran de paràmetres, el número de proves (“templates”) dels diferents valors dels paràmetres pot fer-se molt gran. Per això, habitualment es demana un valor de probabilitat de falsa alarma molt més petit que l’usat anteriorment, de l’ordre de 10^{-9} .

A les figures 17 i 18 es fa el mateix tipus de gràfic que a la figura 16, però amb les equacions experimentals i usant només el mètode coherent, que és el que s’empra quan es fan cerques per púlsars coneguts.

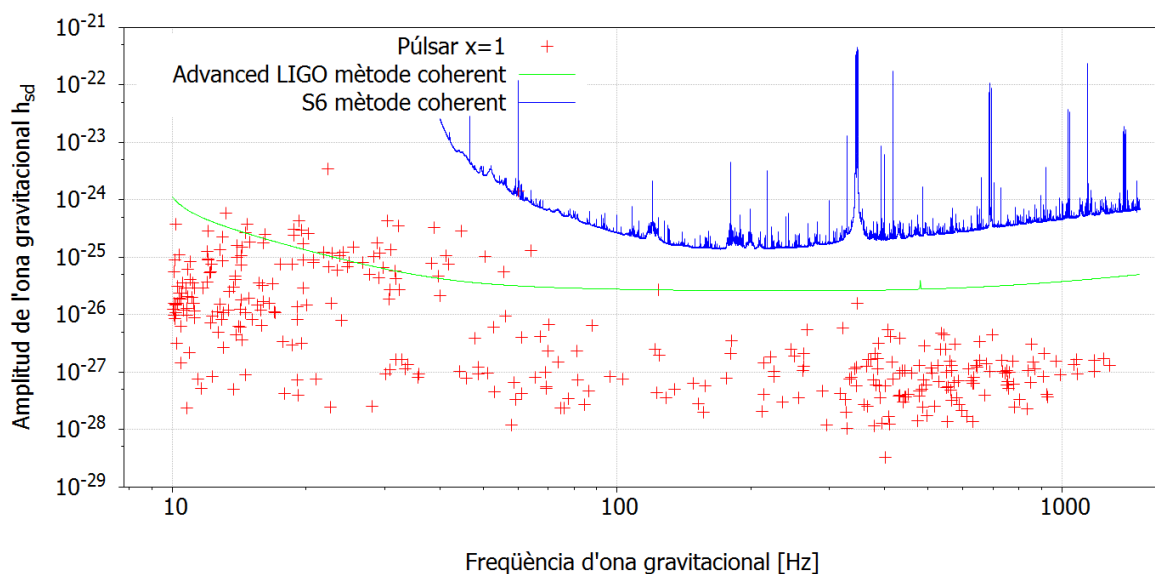


Fig. 17: Comparació entre els spindown limits dels púlsars coneguts (freqüència d’ona gravitacional major a 10 Hz) i les corbes de sensibilitat h_o per Advanced LIGO i S6 (Hanford) de les cerques coherents usant la fórmula experimental i el coeficient calculat a la fórmula (41), amb les dades de sensibilitat mostrades a la figura 5, usant un $T_{coh} = 30$ minuts, i el temps observacional efectiu i la N de la taula 3. Els púlsars que estan per damunt d’alguna corba, poden ser detectats per aquell detector. Com que es tracta del límit spindown, els púlsars podrien apareixer més baix a la figura, i no ser detectables.

Si els púlsars emetessin el 100 % d’energia mitjançant OG ($x = 1$, spindown-limit), a la figura 16 es veu que s’hauria d’haver trobat alguna senyal al S6. Com això no va passar, es suposa que els púlsars no emeten el 100 % d’energia en forma d’OG, sinó menys. Això vol dir que s’ha trobat un “upper limit”: un valor el qual estam segurs que l’amplitud d’ona no superarà, perquè si no ja s’hauria detectat. Per el púlsar Cranc, es sap que l’emissió ha de ser menor a l’1%, i per Vela menor al 10 %. Saber el percentatge d’emissió d’energia en forma d’OG és útil per conèixer millor el funcionament dels cossos emissors.

Per tenir un gràfic del cas més realista, es pot representar els púlsars en comparació amb les equacions amb coeficients experimentals i per al cas on $x = 0.01$ (un 1 % de l’energia és emesa en forma d’OG), per S6 i Advanced LIGO (usant un T_{obs} de 9 mesos). Els resultats es mostren a la figura 18.

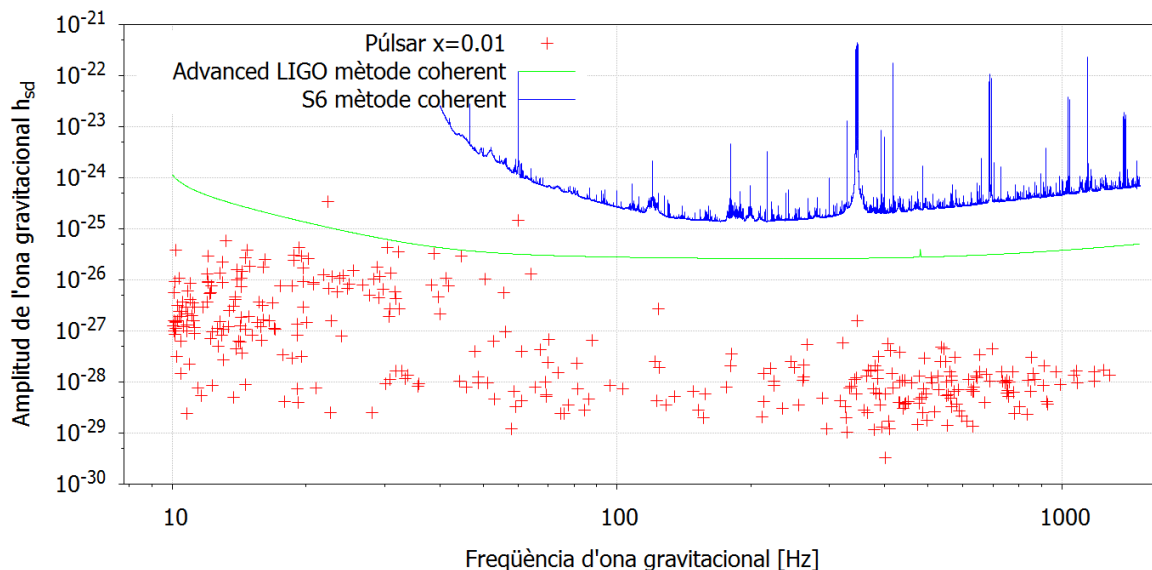


Fig. 18: Com a la figura 17, però amb un 1% d'energia emesa per ones gravitacionals (ja no és el límit spindown).

A les figures 17 i 18 es veu que per S6 només es pot observar un púlsar al límit spindown (Cranc), però en aquest cas la possible detecció és molt més justa que a la figura 16. Per Advanced LIGO s'en poden observar molts al límit spindown, tal com passava a la figura 16. Però per $x=0.01$, només s'en poden observar dos: Vela i Cranc. Com que a S6 no se'n va observar cap, la figura 18 és més creïble. Per tant, s'espera que per Advanced LIGO es pugui detectar les ones gravitacionals provinents de Cranc i Vela.

3.2 Cerques a cegues

Com s'ha dit abans, es suposa que hi ha una població molt gran d'estrelles de neutrons que encara és desconeguda. Per això, es pot fer una cerca a tot el cel, ja que hi podria haver algun púlsar que encara no es coneix que tingués els paràmetres adequats per crear una OG amb amplitud suficient per ser detectada. Per fer això, s'usa el mètode semicoherent, ja que el cost computacional del mètode coherent és massa gran per fer una cerca d'aquest tipus.

Per una cerca d'aquest estil, és interessant saber a quina distància màxima poden detectar una ona gravitacional els interferòmetres terrestres. A partir de l'equació (30) es pot aïllar la distància, i amb els valors d'amplitud d'ona calculats per els detectors mitjançant la sensibilitat (equacions (41) i (42)), es pot saber la distància a la que pot arribar el detector en funció de la freqüència. Aquesta és la distància calculada al límit spindown, i per això seria la distància màxima. Si es suposa que la derivada de la freqüència és constant i igual a $\dot{f} = -2 \times 10^{-9} \frac{\text{Hz}}{\text{s}}$, queda:

$$d = 1.572 \times 10^{-3} \frac{\sqrt{x}}{h_{det}\sqrt{f}} \quad (43)$$

on h_{det} pot ser mitjançant el mètode coherent o semicoherent. Per tractar-se d'una cerca a cegues, s'usarà el semicoherent.

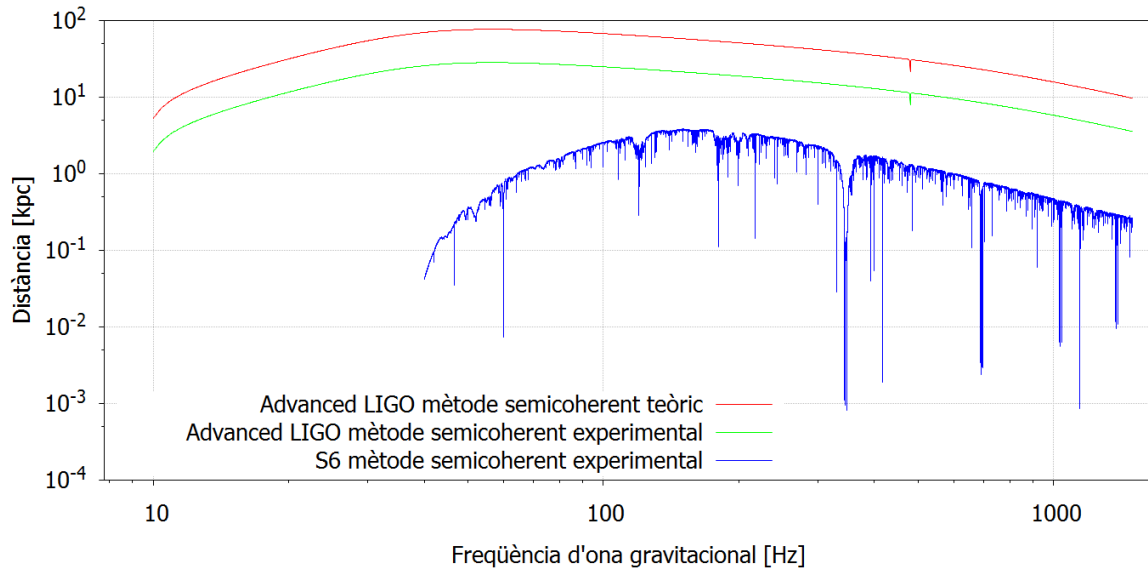


Fig. 19: Distància màxima al límit spindown a la que arriben els detectors en funció de la freqüència mitjançant el mètode semicoherent (usant les dades de la taula 3), amb tres sensibilitats diferents: Advanced LIGO teòric, Advanced LIGO experimental i S6 experimental usant la fórmula (43) per $x=1$ i per $\dot{f} = -2 \times 10^{-9} \frac{\text{Hz}}{\text{s}}$. $1 \text{ kpc} = 3.09 \times 10^{19} \text{ m}$.

Es veu que el màxim es produeix a uns 50 Hz pels cas de l'Adv LIGO, i a uns 100 Hz per l'S6.

Com s'ha vist a l'histograma 11, el valor de la derivada de freqüència que solen tenir els pulsars és de l'ordre de 10^{-15} . Per tant, es pot refer la figura 19 usant un altre valor més adient. Aquest resultat es mostra a la figura 20.

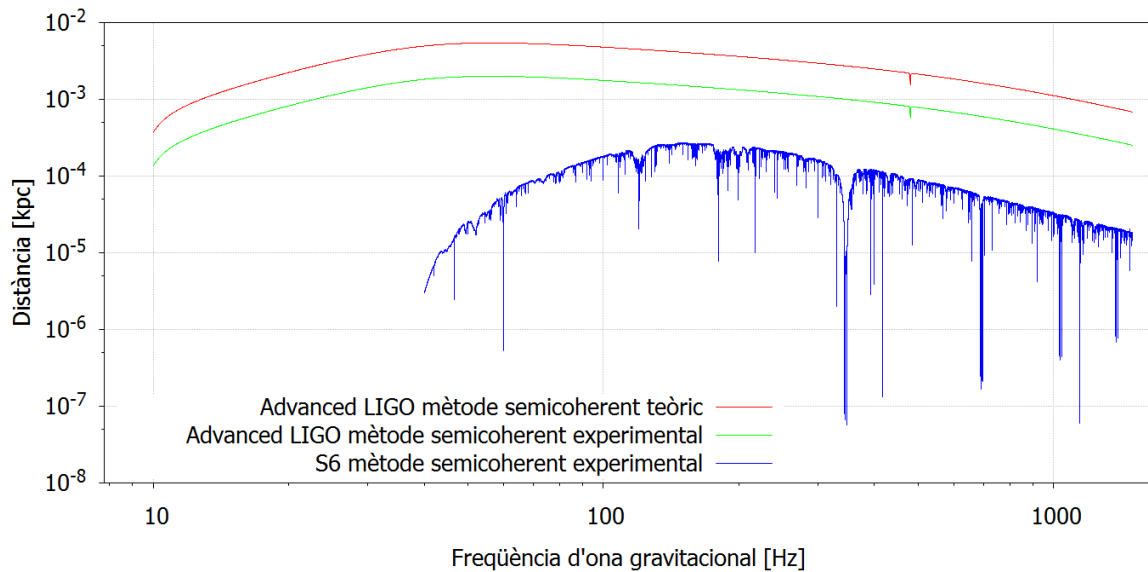


Fig. 20: Distància màxima al límit spindown a la que arriben els detectors en funció de la freqüència mitjançant el mètode semicoherent (usant les dades de la taula 3), amb tres sensibilitats diferents: Advanced Ligo teòric, Advanced LIGO experimental i S6 experimental usant la fórmula (43) per $x=0.01$ i per $\dot{f} = -10^{-15} \frac{\text{Hz}}{\text{s}}$.

S'observa una clara diferència entre les figures 19 i 20, ja que si la primera quasi arriba als 100 kpc al voltant de 100 Hz per Advanced LIGO amb la fórmula teòrica, la segona es troba només al voltant de 10 pc. Si s'observa la figura 15 al voltant de 100 Hz, es veu que el valor d'el·lipicitat per el primer cas no és realista. Per que ho sigui, la freqüència ha de ser major a 1000 Hz, fet que produeix una disminució de la millor distància observable (enlloc de 100 kpc, només 10). El segon cas té uns valors d'el·lipicitat més realistes, però la distancia màxima és molt menor.

A partir de les equacions (29) i (30) es pot aïllar la derivada de la freqüència:

$$|\dot{f}| = f^5 \frac{\epsilon_{sd}^2}{xC_1^2}, |\dot{f}| = f \frac{h_{det}^2 d^2}{xC_2^2} \quad (44)$$

Amb aquestes expressions es pot representar un gràfic per a distàncies i el·lipticitats constants. Per tant, es tendran diferents corbes en funció de la freqüència, com es mostra a la figura 21.

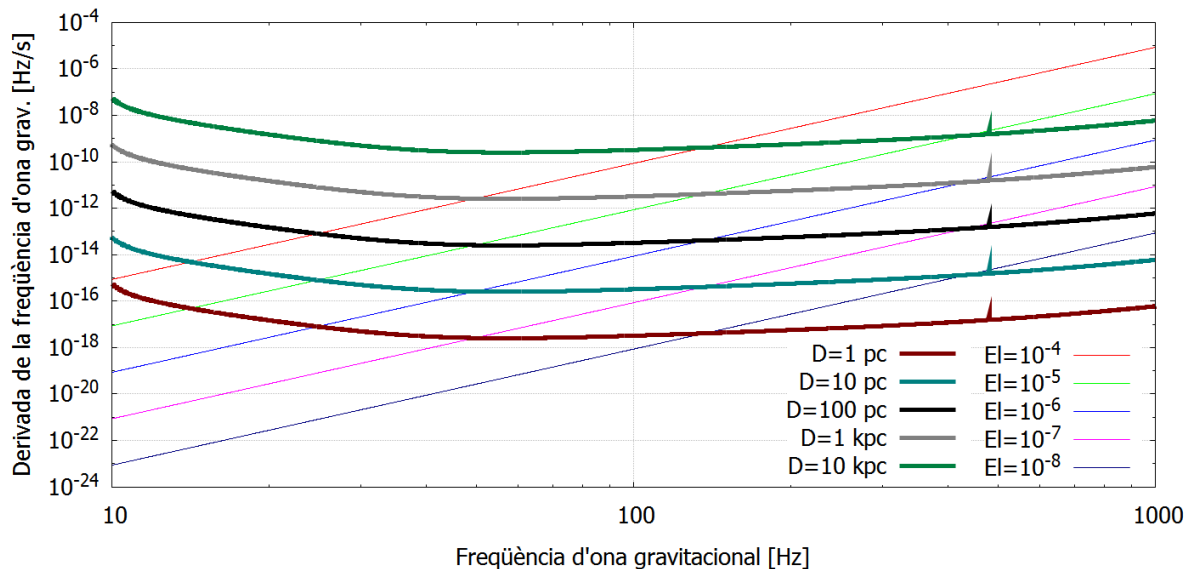


Fig. 21: Màximes distàncies i el·lipticitats a les que es podria detectar un púlsar en funció de la freqüència d'ona gravitacional i del valor absolut de la derivada de la freqüència per Advanced LIGO amb el mètode semicoherent experimental (fòrmula (42) amb un temps coherent de 30 minuts i les dades de la taula 3) per $x=1$.

De la figura 21 es poden extreure diverses observacions. Per exemple, si un púlsar té una el·lipticitat de 10^{-8} , com a molt es podrà detectar a 50 pc, i hauria de tenir una freqüència d'ona gravitacional de 1000 Hz i una derivada de -10^{-13} Hz/s. Les rectes d'el·lipticitat constant indiquen la distància observable en funció de la freqüència i de la seva derivada. També es pot saber quins púlsars es poden observar a determinada distància, si es segueix una línia de distància constant. Per exemple, a 1 kpc, i 50 Hz, es podran observar púlsars d'el·lipticitat igual a 10^{-4} que tinguin una derivada igual a 10^{-12} . Si ens fixam a una freqüència constant, per exemple a 100 Hz, zona on la sensibilitat dels detectors és millor, hi ha diverses combinacions: un púlsar d'el·lipticitat igual a 10^{-6} es podrà observar si està a 100 pc o menys i si té una derivada igual a 10^{-14} o major; a una distància de 10 kpc, els púlsars hauran de tenir una el·lipticitat de 10^{-4} o major per ser detectables. Com es veu, la figura 21 dona lloc a observacions molt diverses.

Enlloc de trobar la distància màxima al límit spindown, es pot trobar la distància a la que arriben els detectors mitjançant la fòrmula (21). Si s'aïlla la distància queda:

$$d = \frac{4\pi^2 G}{c^4} \frac{I_{zz} f^2}{h} \epsilon \quad (45)$$

Depèn de l'el·lipticitat, de la freqüència i de l'amplitud d'ona. Si es dona un valor d'el·lipticitat i de freqüència, i s'usa com a valor d'amplitud d'ona el del detector per aquella freqüència (equació (42)), es pot obtenir una distància. Aquesta distància seria la major possible a la que es pot veure un estel de neutrons de determinada freqüència i el·lipticitat.

Usant el mètode semi-coherent amb la fòrmula experimental, si es substitueix el valor de les constants queda:

$$d = 9.66 \times 10^{-4} \frac{\epsilon f^2}{h_{semexp}} = 1.76 \times 10^{-3} \frac{\epsilon f^2 N^{1/4}}{\sqrt{S_n}} \quad (46)$$

A les taules 4 i 5 es mostren diversos resultats per S6 i per Advanced LIGO, usant les dades de la taula 3 i un temps coeent de 1800 segons.

El·lipticitat	Freqüència [Hz]	Sensibilitat detector [$Hz^{-1/2}$] (Fig. 5)	Distància [kpc]
10^{-6}	100	5×10^{-23}	0.113
10^{-6}	1000	10^{-22}	5.673
10^{-7}	100	5×10^{-23}	0.011
10^{-7}	1000	10^{-22}	0.567

Taula 4: Distància màxima a la que els detectors poden detectar una OG donada una el·lipticitat i una freqüència mitjançant el mètode semicoherent amb la fórmula experimental per S6 (Hanford).

El·lipticitat	Freqüència [Hz]	Sensibilitat detector [$Hz^{-1/2}$] (Fig. 5)	Distància [kpc]
10^{-6}	10	10^{-22}	6.093×10^{-4}
10^{-6}	100	5×10^{-24}	1.219
10^{-6}	1000	8×10^{-24}	76.158
10^{-7}	10	10^{-22}	6.093×10^{-5}
10^{-7}	100	5×10^{-24}	0.122
10^{-7}	1000	8×10^{-24}	7.616
10^{-10}	100	5×10^{-24}	0.122×10^{-3}

Taula 5: Distància màxima a la que els detectors poden detectar una OG donada una el·lipticitat i una freqüència mitjançant el mètode semicoherent amb la fórmula experimental per Advanced LIGO.

Com s'ha vist a les figures 13 i 14, els valors d'el·lipticitat dels púlsars són molt més petits que els usats a les taules 4 i 5. No es pot usar un valor qualsevol de ϵ , ja que aquest està relacionat amb la derivada de la freqüència \dot{f} , i aquest valor no pot ser qualsevol. A més, com s'ha explicat a l'apartat sobre l'el·lipticitat dels púlsars, els models teòrics donen un valor màxim per l'el·lipticitat. Per tant, les distàncies calculades (menys la darrera) són superiors a valors realistes.

És interessant poder augmentar la distància, ja que es suposa que al nucli galàctic hi ha una població molt gran d'estrelles de neutrons. S'observa que quan major sigui la freqüència, més gran serà la distància, però la sensibilitat del detector també depèn de la freqüència (per freqüències més grans que 1000 Hz és molt pitjor), per això no interessa augmentar indefinidament la freqüència cercada. A més, la majoria de púlsars emeten a una freqüència menor que 1000 Hz.

Quan es suposa un valor d'el·lipticitat i no es detecta una ona gravitacional, és possible que aquest valor sigui més petit. Gràcies a les deteccions fallides, es poden eliminar equacions d'estat i models dels estels de neutrons en funció de l'el·lipticitat que prediuen, ja que si s'ha comprovat que per el valor que donen no es troba una OG, el model és incorrecte perquè l'estel no té aquell valor d'el·lipticitat.

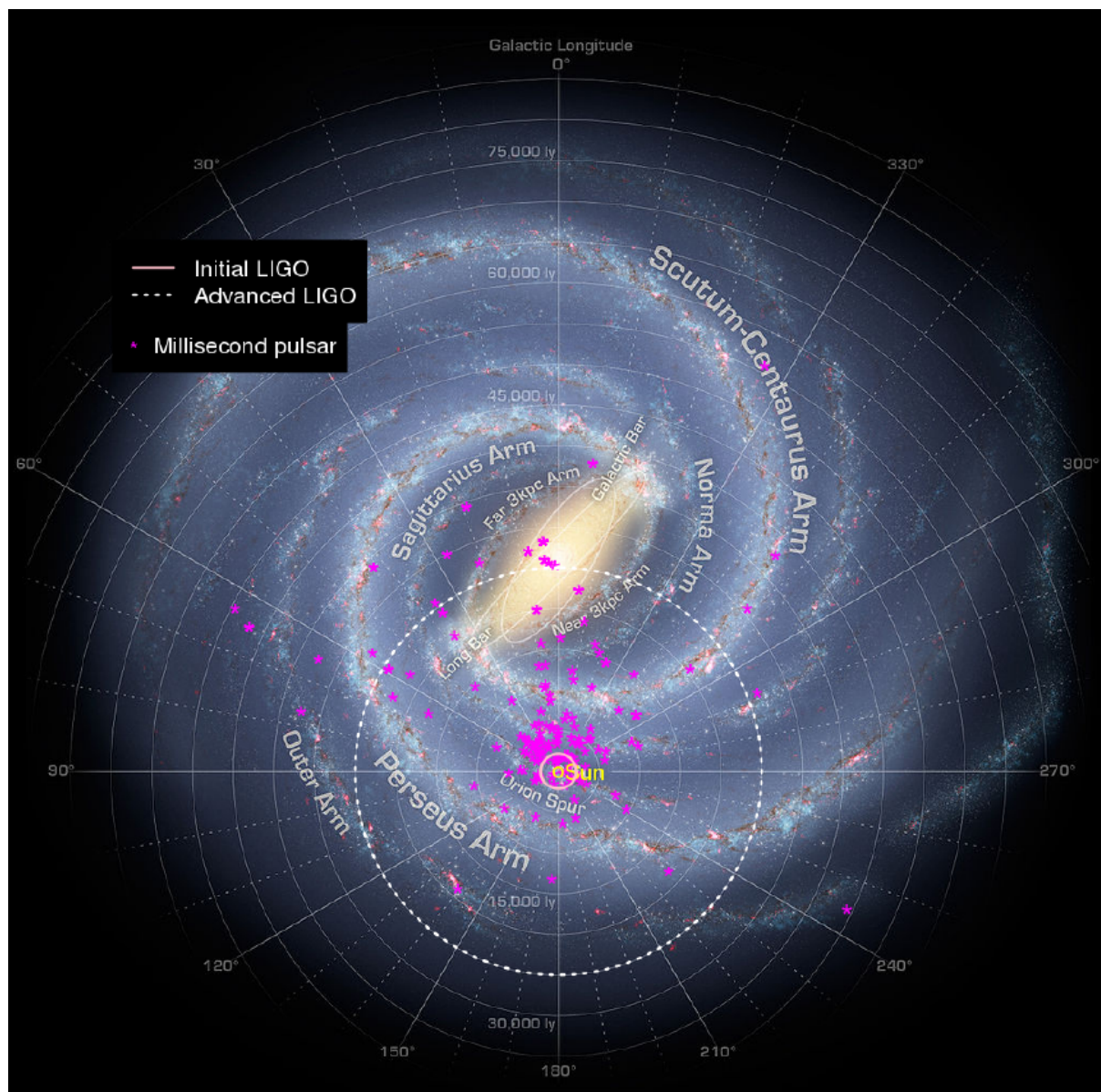


Fig. 22: La figura mostra la Via Làctea amb els púlsars de freqüència de rotació major a 25 Hz marcats. El cercle de punts discontinus amb el Sol al centre senyala a quina distància màxima arriben els detectors mitjançant una cerca semicoherent amb una el·lipticitat de 10^{-6} i una freqüència $f=1500$ Hz. Imatge extreta de [16].

En vista dels resultats obtinguts, es pot dir que per paràmetres d'el·lipticitat i spindown habituals dels púlsars, mitjançant un mètode semicoherent per Advanced LIGO, els detectors poden arribar a detectar una ona que com a molt es trobi al voltant de 10 pc (figura 20). Si es dona el cas de l'existència d'un púlsar amb propietats exòtiques, l'interferòmetre seria capaç de detectar una ona a una distància de quasi 100 kpc. Ja que aquesta distància cobreix un gran volum, les possibilitats no són tan escasses.

4 Conclusions

El present treball ha consistit en una introducció a les ones gravitacionals. S'ha parlat del seu origen, dels diversos tipus de fonts emissores (en particular dels estels de neutrons) i de com es poden detectar aquestes ones. La detecció directa d'una ona gravitacional encara no ha estat possible, malgrat que hi ha evidències indirectes (com la deguda al púlsar binari PSR 1913+16) que suporten la seva existència.

S'ha parlat dels diversos detectors per interferometria que existeixen, i s'ha vist que les recollides de dades s'organitzen en "Science Run". Entre cada "Science Run" es milloren els detectors. Aquesta

millora de sensibilitat s'ha comprovat a la figura 16 al cas entre el Science Run 6 i Advanced LIGO, i s'ha vist com la millora de sensibilitat és aproximadament d'un ordre de magnitud. Si per Advanced LIGO no s'aconsegueix detectar una ona gravitacional, és factible pensar que una subseqüent millora als detectors ho podria aconseguir. A més dels interferòmetres de segona generació, s'estan preparant també els de tercera, com Einstein Telescope, que milloraran dràsticament la sensibilitat dels detectors anteriors.

Per trobar una ona gravitacional, s'han d'analitzar les dades recollides mitjançant els detectors. S'ha vist quina és la diferència que existeix entre una cerca per púlsars coneguts i una cerca a tot el cel, i els diversos mètodes d'anàlisi de dades que hi ha per cada tipus de cerca. A la figura 17 s'ha vist que Advanced LIGO disposa de diversos candidats per la detecció mitjançant un mètode coherent. Si els paràmetres dels púlsars que es coneixen no fan que es pugui detectar una ona, és molt important poder fer una cerca per tot el cel ja que així es podria detectar una ona gravitacional d'un púlsar de característiques més adients. Al final del treball s'ha vist a quina distancia arribaran els detectors per Advanced LIGO mitjançant un mètode semicoherent.

Les ones gravitacionals porten informació de la font emisora. Si s'aconsegueixen detectar ones gravitacionals, es podrà aconseguir informació complementària a la que ens ofereix l'espectre electromagnètic, i millorar considerablement el coneixement que tenim del Cosmos. A més, es podran fer tests a la Relativitat General en condicions no estudiades abans.

Encara que no es detecti una ona gravitacional, l'esforç no haurà estat en va. La nova tecnologia desenvolupada es pot aplicar a altres investigacions; a més, no detectar una ona significaria que els models teòrics dels que disposam no són del tot correctes, fet que permetria corregir i millorar aquests models. S'ha vist als càlculs al límit spindown que per els púlsars Cranc i Vela ja s'hauria d'haver detectat una ona gravitacional. Per això, s'ha deduït que el percentatge d'emissió d'energia en forma d'ona gravitacional ha de ser menor a un 1% i un 10% respectivament, fet que ens dona informació dels mecanismes d'emissió d'energia dels púlsars.

Que es pot esperar en el futur pròxim?

- La millora en la sensibilitat i el rang de freqüències dels detectors interferomètrics terrestres actuals, i la posada en marxa de nous detectors, com els de tercera generació (Einstein Telescope), o els detectors a l'espai (eLISA), fa que es tenguin quasi per segura la primera detecció d'una ona gravitacional.
- El descobriment de nous púlsars o objectes astronòmics molt compactes podria ser decisiu a l'hora de detectar una ona gravitacional degut a que tenguin uns paràmetres més adequats per a la creació d'ones d'amplitud major.
- L'anàlisi de dades actual depèn del poder de computació dels ordenadors. La millora en la velocitat dels processadors informàtics i la possible arribada de la computació quàntica podria canviar la manera en que s'analitzen les dades rebudes, millorant dràsticament els mètodes i els temps d'espera, contribuint a una gran millora de la sensibilitat dels detectors.

5 Bibliografia

- [1] Albert Einstein. The foundation of the general theory of relativity. *Annalen Phys.*, 49:769-822, 1916.
- [2] R.A. Hulse and J.H. Taylor. Discovery of a pulsar in a binary system. *Astrophys.J.*, 195:L51-L53, *Astrophys.J.*, 1975.
- [3] Reinhard Prix for the LIGO Scientific Collaboration. Gravitational Waves from Spinning Neutron Stars. In "Neutron Stars and Pulsars", ed. W. Becker, Springer-Verlag 2009, LIGO-P060039-v3
- [4] Ciufolini I., Gorini V., Moschella U. and Fré P. Gravitational Waves. IOP, 2001. ISBN: 0-7503-0741-2
- [5] <http://www.ligo.org/>; <http://www.geo600.org/>; <http://wwwcascina.virgo.infn.it/>

-
- [6] G. M. Harry and LIGO Scientific Collaboration. *Classical and Quantum Gravity*, 27, 084006 (2010).
- [7] T. Accadia, F. Acernese, F. Antonucci, P. Astone, G. Ballardin, et al. *Class.Quant.Grav.*, 28, 114002
- [8] K. Somiya (KAGRA Collaboration). *Class.Quant.Grav.*, 29, 124007 (2012). arXiv:1111.7185 [gr-qc].
- [9] The LIGO Scientific Collaboration. The Virgo Collaboration Sensitivity Achieved by the LIGO and Virgo Gravitational Wave Detectors during LIGO's Sixth and Virgo's Second and Third Science Runs. <https://dcc.ligo.org/LIGO-T1100338/public> LIGO Document T1100338-v13 (2012). arXiv:1203.2674
- [10] David Shoemaker. Advanced LIGO anticipated sensitivity curves. (2010) LIGO Document T0900288-v3. <https://dcc.ligo.org/cgi-bin/DocDB/ShowDocument?docid=2974>
- [11] Bradley Carroll, Dale Ostlie. *An introduction to modern astrophysics*. Pearson education, 1995. ISBN: 0-201-54730-9
- [12] Simin Mahmoodifar, Tod Strohmayer. Upper bounds on r-mode amplitudes from observations of low-mass X-ray binary neutron stars. *The Astrophysical Journal*, Volume 773, Issue 2, article id. 140, 10 pp. (2013). arXiv:1302.1204v2
- [13] D. I. Jones, N. Andersson. Gravitational waves from freely precessing neutron stars. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*331:203,2002 DOI:10.1046/j.1365-8711.2002.05180.x
- [14] Manchester, R. N., Hobbs, G. B., Teoh, A. and Hobbs, M. The Australia Telescope National Facility Pulsar Catalogue. *The Astronomical Journal*, Volume 129, Issue 4, pp. 1993-2006 (2005). <http://www.atnf.csiro.au/people/pulsar/psrcat/>
- [15] G. Hobbs et al. The international pulsar timing array project: using pulsars as a gravitational wave detector. 2010 *Class. Quantum Grav.* 27 084013, doi:10.1088/0264-9381/27/8/084013. arXiv:0911.5206 [astro-ph.SR]
- [16] Vladimir Dergachev. Present and future of continuous wave searches for neutron stars. California Institute of Technology. LIGO Internal Document G1200458 2012.
- [17] C. J. Horowitz and Kai Kadau. Breaking Strain of Neutron Star Crust and Gravitational Waves. *Phys. Rev. Lett.* 102, 191102 (2009)
- [18] Pia Astone et alii. Method for all-sky searches of continuous gravitational wave signals using the frequency-Hough transform. arXiv:1407.8333
- [19] J Abadie et alii. Beating the spin-down limit on gravitational wave emission from the vela pulsar. *The Astrophysical Journal*, 737:93 (16pp), 2011 August 2.
- [20] B.P.Abott et alii. Searches for gravitational waves from known pulsars with Science Run 5 LIGO data. *The Astrophysical Journal*, 713:671?685, 2010 April 10. doi:10.1088/0004-637X/713/1/671C2010.
- [21] B. Abbott et al. All-sky Search for Periodic Gravitational Waves in the Full S5 Data. The LIGO and Virgo Scientific Collaboration, *Phys. Rev. D* 85, 022001 (2012)
- [22] J Aasi et al. Application of a Hough search for continuous gravitational waves on data from the fifth LIGO science run. *Class. Quantum Grav.* 31 (2014) 085014 .
- [23] LIGO Scientific Collaboration (private communication 2015)