



Universitat
de les Illes Balears

TREBALL DE FI DE MÀSTER

**PROBABILITAT A BATXILLERAT: DIFERENTS
PROPOSTES DIDÀCTIQUES PER PORTAR A
L'AULA**

Jordi Penalva Vadell

**Màster Universitari de Formació del Professorat
(Especialitat de Matemàtiques)**

Any Acadèmic 2019-2020

PROBABILITAT A BATXILLERAT: DIFERENTS PROPOSTES DIDÀCTIQUES PER PORTAR A L'AULA

Universitat de les Illes Balears

Any Acadèmic 2019-20

Paraules clau del treball: probabilitat, batxillerat, estadística, material manipulatiu, proposta didàctica.

Nom de la Tutora del Treball: Cristina Olivares García

Resum

Des de la introducció als currículums del bloc de probabilitat i estadística, la probabilitat sempre ha sigut una de les branques de les matemàtiques que s'ensenya i es treballa menys.

No obstant això, de cada vegada es va prenent més consciència de la importància de la probabilitat a l'ensenyament de secundària. Ara bé, com l'estudi de la didàctica de la probabilitat és molt recent, els recursos pel seu ensenyament són pocs i molt limitats i, fins i tot, es proposa un ensenyament habitual a partir d'exercicis mecànics i descontextualitzats.

Aquest comportament s'amplifica en els cursos de batxillerat, ja que darrere tenen unes proves d'accés i es posa el focus d'atenció a preparar els alumnes a resoldre exercicis habituals d'aquestes proves.

Per tant, en aquest treball es fa una proposta d'exercicis dins l'àrea de la probabilitat, orientats principalment als cursos de batxillerat, per tal de donar distintes eines d'ensenyament al professorat de matemàtiques.

Paraules clau del treball: probabilitat, batxillerat, estadística, material manipulatiu, proposta didàctica.

Índex

Índex

1. Introducció	1
1.1. Objectius del treball	1
1.2. Estat de la qüestió	2
1.3. La probabilitat al món	4
Els Estats Units	4
Estònia	6
El Japó	8
1.4. Les matemàtiques a Espanya	9
Catalunya	9
2. Marc teòric	14
2.1. Currículum de secundària	15
2.2. Comparació curricular	20
2.3. Proposta	21
3. Proposta d'activitats	22
3.1. La classe com a conjunt	23
3.2. Estudis de casos reals	26
3.3. PoliDiagrames de Venn	31
3.4. Truca un dau	36
3.5. Quin és injust?	39
3.6. Pòquer reduït	42
3.7. Altres recursos	47
Dan Meyer	47

GeoGebra	48
Desmos	49
Jocs amb probabilitat	49
Paradoxes	49
4. Conclusions	50
5. Referències	51
6. Bibliografia	55
Annex 1: Elements del Currículum	56
Annex 2: La classe com a conjunt	61
Annex 3: Estudis de casos reals	62
Annex 4: Taula Covid-19	63
Annex 5: PoliDiagrames de Venn	65
Annex 6: Truca un dau	67
Annex 7: Quin és injust?	68
Annex 8: Ciència per a Tothom	70
Annex 9: Dan Meyer	77
Annex 10: GeoGebra	80
Annex 11: Desmos	83
Annex 12: Jocs amb probabilitat	85
Annex 13: Paradoxes	89

1. Introducció

Durant la meua etapa a centres educatius com alumne, l'ensenyament de la probabilitat sempre ha estat quelcom anecdòtic. Record de manera vaga alguns experiments aleatoris a primària, com llançar una moneda. Per altra banda, a secundària, vaig fer algunes classes de probabilitat a 4t d'ESO i estadística a 3r d'ESO i 2n de batxillerat, a l'assignatura d'ampliació de matemàtiques.

La manca d'ensenyament en aquesta branca de matemàtiques es trasllada al Grau de Matemàtiques mateix. Durant la carrera, vaig cursar 3 assignatures d'estadística (de les quals, 1 era optativa) i 1 assignatura de probabilitat.

Per mi és sorprenent que, sent una branca tan lligada a la realitat i amb tanta incidència en el nostre dia a dia, no m'acabàs de sentir còmode.

Per aquests motius, vaig decidir realitzar el Treball de Fi de Màster en probabilitat. Aquest treball suposa un repte per a mi, ja que m'ha obligat a actualitzar-me en aquesta àrea i endemés a ser-hi creatiu.

1.1. Objectius del treball

En el següent treball de fi de màster es pretén realitzar un seguit d'objectius:

1. Fer una anàlisi de l'estat de la Probabilitat en l'ensenyament de secundària, des d'una perspectiva teòrica.
2. Elaborar unes propostes educatives d'activitats de probabilitat, oferint així uns recursos nous o poc freqüents per ajudar a l'ensenyament d'ella.
3. Justificar les propostes d'activitats, mostrant quins continguts i quines competències es treballen. Adequar les propostes als cursos corresponents.

1.2. Estat de la qüestió

Malgrat que l'ensenyament de la probabilitat ha estat present en els diversos currículums escolars en els darrers vint anys, es nota una tendència actual a renovar el seu ensenyament, tractant-la d'una manera més experimental (Batanero, 2005). Per tant, actualment se cerca que els alumnes puguin experimentar amb la incertesa dels successos probabilístics.

L'augment d'interès en el desenvolupament estadístic i tecnològic ha fet que s'expliqui amb més èmfasi l'estadística freqüencial. De fet, els documents estàndards i molts de currículums suggereixen una introducció experimental de la probabilitat com a límit de freqüències relatives i, per tant, la probabilitat es presenta com una eina teòrica per apropar-se a problemes estadístics (Batanero, 2016).

A més, també se suggereix la introducció de la probabilitat a l'ensenyament de primària, de manera que es pugui proporcionar als alumnes experiències aleatòries, com més aviat millor (Batanero, 2013). El problema de la introducció de la probabilitat a l'ensenyament de primària és la necessitat d'una formació més completa en probabilitat dels professors, per evitar situacions d'inseguretats a l'hora d'impartir aquesta unitat (Pierce i Chick, 2011).

Aquesta inseguretats en el contingut afecta l'ensenyament de la matèria i a la transmissió de coneixements. Els mestres que no entenen bé alguns conceptes no transmeten adequadament el seu significat; cerquen la seva introducció a través de distintes eines sense saber si són o no adequades o efectives. Respecte a la probabilitat, cal evitar en qualsevol cas una perspectiva mecanicista; és important realitzar la seva introducció d'una manera raonada, com pot ser considerant una

justificació dels seus elements o donant una perspectiva històrica per tal de contextualitzar-la (Piemont, 1993).

Malauradament, l'estudi de l'ensenyament de la probabilitat i l'estadística és molt més recent en comparació a altres àrees d'estudi.

Les primeres investigacions sobre l'ensenyament de la probabilitat estan enfocades des d'una perspectiva purament psicològica. Per altra banda, al professorat el que li interessa és proporcionar tasques que pugui explicar a distintes edats i entendre les possibles dificultats que puguin trobar els alumnes.

Al començament, es tenia la teoria de Piaget, que considerava que els al·lots de menys de 7 anys no comprenien la diferència entre determinisme i atzar. Aquesta teoria fou contrastada per Fischbein, que mostrà que existeix una intuïció parcial de l'atzar en els nins de menys de 7 anys. En aquestes edats, és possible entendre que certs experiments aleatoris no són equiprobables. Per exemple, si es té una urna amb nou bolles negres i una blanca, els al·lots són capaços de veure que si s'agafa una bolla a l'atzar, el més probable és que treguin una bolla negra. A partir d'aquesta intuïció que ens mostra Fischbein que tenen els alumnes, s'ha d'anar treballant per tal de desenvolupar el concepte de probabilitat.

Després tenim el període de les operacions concretes, que compren els nins d'entre 7 i 11 anys. En aquest període, són capaços de resoldre problemes que impliquen una comparació de probabilitats d'un mateix succés, sempre que es dugui a terme una comparació equitativa entre casos favorables i casos no favorables. Després de resoldre aquests problemes, apareix el període de les operacions formals, amb nins d'11 a 15 anys. Aquí són capaços de resoldre problemes a on hi ha una proporció clara entre casos favorables i casos possibles.

1.3. La probabilitat al món

Malgrat les recomanacions que es fa des d'una perspectiva didàctica, cada país té establerta una metodologia per a l'ensenyament de les distintes matèries amb els seus respectius continguts i competències. En aquesta secció es comentarà com duen a terme alguns països l'ensenyament de la probabilitat.

Els Estats Units

Les comparacions amb el currículum dels Estats Units són molt usuals. Hi ha autors que s'han dedicat a realitzar comparatives de matemàtiques; en el cas de la probabilitat podem trobar autors com Ruiz (2013). Nosaltres la comparativa la farem a través de l'NCTM (2000). L'NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*) és un guia de recursos, continguts i competències de matemàtiques que s'empra als Estats Units, elaborada per professionals de l'educació i orientada a l'alumnat de 1r grau fins al 12è grau.

Mentre que el currículum d'Espanya divideix l'ensenyament de 3 a 17 anys en primària, secundària i batxillerat, els Estats Units els divideix en les mateixes edats però en un únic grau, el qual va del 1r grau al 12è grau. A la següent taula trobam els continguts que treballen al país, agrupat per nivells.

1r i 2n grau	Ordenar i classificar objectes segons els seus atributs i organitzar dades sobre els objectes. Representar dades emprant objectes concrets, dibuixos i gràfics. Descriure les parts de les dades i tot el conjunt per determinar el que mostren. Discutir els esdeveniments relacionats amb l'experiència dels estudiants com a probable o improbable.
3r, 4t i 5è grau	Descriure successos com a probables o improbables i discutir el grau de probabilitat usant paraules tals com segur, igual de probables i impossible.

	<p>Predir la probabilitat de resultats d'experiments senzills i posar a prova les prediccions.</p> <p>Entendre que la probabilitat d'un esdeveniment es representa per un nombre del 0 a l'1.</p>
6è, 7è i 8è grau	<p>Comprendre i utilitzar la terminologia adequada per descriure successos que són complementaris i mútuament excloents.</p> <p>Emprar la proporcionalitat i una comprensió bàsica de la probabilitat de fer i provar conjetures sobre resultats d'experiments i simulacions.</p> <p>Calcular les probabilitats d'esdeveniments compostos simples, usant mètodes com llistes organitzades, diagrames d'arbre i models d'àrea.</p>
9è, 10è, 11è i 12è grau	<p>Entendre els conceptes d'espai i distribució de mostres de probabilitat i construir espais de mostra i distribucions en casos senzills.</p> <p>Utilitzar simulacions per construir distribucions empíriques de probabilitat.</p> <p>Calcular i interpretar l'esperança de variables aleatòries en casos senzills.</p> <p>Entendre els conceptes de probabilitat condicionada i esdeveniments independents.</p> <p>Entendre com calcular la probabilitat d'un succés compost.</p>

L'ensenyament de matemàtiques als Estats Units demana crear una classe on tots els estudiants treballin amb professors especialitzats, de manera que aprenguin les idees a través de la comprensió, en entorns equitatius, amb el suport necessari i amb la tecnologia més avançada.

L'objectiu de l'ensenyament de les matemàtiques està subjecte a quatre pilars: el dia a dia de les persones, com a part d'una herència cultural, per ser competencial en les distintes feines i per tots aquells que vulguin formar part de la comunitat científica i tècnica.

L'ensenyament de la probabilitat als Estats Units va fortament lligat a l'estadística. La metodologia que es proposa a l'NCTM (2000) es basa en un ensenyament a través de dades reals, per tal de fer un ús estadístic i probabilístic més tangible pels alumnes.

Estònia

El sistema d'Estònia funciona per cursos. L'educació bàsica, que és el mínim de l'educació general obligatòria, es duu a terme a partir dels 7 anys, que començaria al 1r grau i hi hauria fins a 9è grau. Després, ens trobaríem l'educació secundària i la formació professional. A l'educació secundària, els alumnes poden triar entre dos itineraris de matemàtiques; l'itinerari reduït o l'extens.

1r a 3r grau	-
4t a 6è grau	Entendre el concepte de percentatge i saber trobar una part del total.
7è a 9è grau	Explicar el significat de probabilitat i calcular probabilitats clàssiques en els casos més simples.
Itinerari reduït	<p>Distingir entre esdeveniments aleatoris, segurs i impossibles.</p> <p>Entendre el concepte d'un succés aleatori i ser capaç de trobar els casos favorables i tots els casos (recompte, combinatòria).</p> <p>Conèixer la natura de la distribució de variables aleatòries i el significat de les seves característiques numèriques.</p> <p>Calcular la probabilitat d'un succés i emprar-la a l'hora de resoldre problemes senzills relacionats amb dades reals.</p> <p>Calcular les característiques numèriques d'un esdeveniment aleatori i extreure conclusions respecte al problema observat.</p>
Itinerari extens	<p>Distingir entre esdeveniment aleatori, segur i impossible i saber explicar els termes, els tipus i les propietats de la probabilitat d'un succés.</p> <p>Saber explicar el significat de permutacions, combinacions i variacions i saber-ne calcular.</p>

	<p>Saber explicar el significat d'un producte de successos dependents i independents i el significat de la suma d'esdeveniments exclusius i no exclusius.</p> <p>Poder calcular la probabilitat d'esdeveniments distints, incloent-hi d'alguns relacionats amb la vida real.</p> <p>Entendre la natura de la distribució d'una variable aleatòria i el significat de les característiques numèriques (mitjana, moda, mediana i desviació típica) de les variables aleatòries, descriure les distribucions binomial i normal i utilitzar la Fórmula de Bernoulli per calcular probabilitats.</p>
--	---

En aquest cas, el sistema d'Estònia no fa cap mena d'introducció a la probabilitat fins al nostre equivalent d'ESO. El principal objectiu del sistema educatiu d'Estònia és la promoció i l'aprenentatge permanent en què qualsevol persona tingui l'oportunitat de formar-se al llarg de la vida i així poder aportar el màxim rendiment a la societat (Rodríguez, 2015).

Per tal d'aconseguir aquest objectiu, el sistema educatiu proposa:

1. Un professorat competent i motivat.
2. Situacions de canvi freqüents en l'alumnat.
3. Oportunitat d'aprenentatge en el món del treball.
4. Ús de noves tecnologies.
5. Igualtat d'oportunitats en l'aprenentatge permanent i augment de la participació.

L'avaluació ha de servir com a guia pel desenvolupament de l'estudiant. És important que hi hagi coavaluació i autoavaluació, i també posar el focus en els punts forts i punts dèbils de l'alumne.

El Japó

Actualment, quan es parla de països asiàtics en currículum, es fa molta menció a països com Corea del Sud, el Japó, Singapur, Taiwan, entre altres. El Japó ha estat un dels països més competitius en educació i s'ha trobat adequat introduir aquest en el treball. El seu currículum per contra, només està en japonès i realitzar una comparativa resulta complicat. Takahashi (2008) ens ofereix una traducció a l'anglès del currículum pels graus 1r a 9è, corresponent al pla 2008. Aquesta franja comprèn dels 6 als 14 anys.

A continuació es mostren els continguts de probabilitat que hi ha en aquestes etapes.

3r grau	Ser capaç de reunir, ordenar i organitzar dades, representar d'una manera ordenada els continguts en taules i interpretar taules i gràfics.
4t grau	Ser capaç de reunir, ordenar i organitzar dades d'acord amb els seus objectius, per representar d'una manera ordenada els continguts en taules i gràfics, i investigar característiques d'aquestes.
5t grau	Entendre el concepte de percentatge. Ser capaç de reunir, ordenar i organitzar dades d'acord amb els seus objectius, per representar d'una manera ordenada els continguts en taules i gràfics, i investigar característiques d'aquestes.
6è grau	Entendre el concepte de ratio.
7è grau	-
8è grau	Entendre el concepte de probabilitat, a partir de l'observació i l'experimentació de fenòmens incerts, i així ser capaços d'emprar la probabilitat per a l'anàlisi i la representació.
9è grau	-

En aquest cas, l'ensenyament de la probabilitat fins a entrar a un equivalent de 3r d'ESO és bastant pobre. Als cursos més elementals només es treballa indirectament i només al 8è grau es fa una introducció al tema.

La primera etapa educativa (del 1r al 6è grau) té com a objectius:

1. Adquirir un coneixement essencial de les matemàtiques.
2. Cultivar la seva habilitat per relacionar situacions reals amb les matemàtiques, cultivar la lògica.
3. Entendre la gràcia de les matemàtiques i la seva manipulació.
4. Tenir iniciativa per emprar les matemàtiques en el dia a dia i en els estudis.

A la segona etapa (del 7è al 9è grau) es consideren els objectius:

1. Aprofundir en la comprensió dels principis i les regles de les matemàtiques.
2. Desenvolupar la fluïdesa de les representacions matemàtiques i els procediments.
3. Tenir iniciativa per emprar el raonament matemàtic, les representacions i els procediments i prendre decisions.

La metodologia d'aprenentatge de la probabilitat es basa en l'experimentació de situacions d'incertesa, i l'alumnat ha de ser capaç d'emprar-la per realitzar una anàlisi i representació d'aquestes situacions.

1.4. Les matemàtiques a Espanya

Catalunya

En el cas d'Espanya, un dels principals referents en educació és Catalunya. Els continguts del currículum venen descrits a la taula següent. Per estalviar notació, indicam amb el símbol ** en els cursos de tercer i quart aquells continguts que

diferencien les matemàtiques orientades a uns ensenyaments acadèmics o a uns ensenyaments aplicats.

1r-2n	<p>Organització i representació de dades obtingudes a partir d'experiències de comptatge i d'ordenació, mitjançant objectes concrets, dibuixos i gràfics.</p> <p>Utilització d'un vocabulari per descriure els atributs i per classificar segons criteris determinats.</p> <p>Ús d'expressions com possible o impossible en resposta a preguntes relacionades amb les experiències pròpies sobre la probabilitat de successos.</p> <p>Reconeixement de l'atzar mitjançant la realització d'experiments amb materials (extracció de fitxes de colors d'una bossa, tirar daus, ruletes...).</p>
3r-4t	<p>Descripció de la forma i de les característiques importants d'un conjunt de dades.</p> <p>Anàlisi de les característiques d'una col·lecció de dades quantitatives ordenades.</p> <p>Descripció de successos i discussió del seu grau de probabilitat utilitzant expressions com ara segur, possible, impossible.</p> <p>Quantificació de la probabilitat que un succés sigui segur, possible o impossible en casos senzills.</p> <p>Predicció de la probabilitat de resultats d'experiments senzills i comprovació d'aquestes prediccions.</p> <p>Exploració de la probabilitat mitjançant experiments i jocs que produeixin pocs resultats.</p> <p>Resolució de problemes on intervinguin factors d'atzar.</p> <p>Relació de l'atzar amb els conceptes numèrics.</p>
5è-6è	<p>Relació de les taules de doble entrada i els diagrames en arbre amb la multiplicació.</p> <p>Determinació del tipus de representació més apropiada en resoldre problemes.</p> <p>Comprensió i utilització de la terminologia probabilística apropiada per descriure successos complementaris i mútuament excloents.</p>

	<p>Comprensió que la mesura de la probabilitat d'un succés pot representar-se per un nombre comprès entre 0 i 1.</p> <p>Relació del càlcul de probabilitats amb els nombres fraccionaris.</p> <p>Realització de prediccions i discussió si els resultats obtinguts concorden o no amb les prediccions.</p> <p>Ús dels recursos digitals per treballar amb mostres grans. Aplicació a la resolució de problemes.</p>
1r ESO	<p>Successos probables o no probables, grau de probabilitat (qualitatiu).</p> <p>Vocabulari: segur, igualment probable i improbable.</p> <p>Predicció de la probabilitat de resultats d'experiments senzills.</p> <p>Comprovació de les prediccions amb proves reiterades.</p> <p>Identificació de la probabilitat d'un succés amb un nombre comprès entre 0 i 1.</p> <p>Simulació amb recursos digitals per al càlcul de probabilitats.</p>
2n ESO	<p>Predicció de resultats en experiments aleatoris.</p> <p>Proporcionalitat per assignar probabilitats a resultats d'experiments aleatoris.</p> <p>Simulacions i comprovació de les prediccions.</p> <p>Eines TAC per a les simulacions i el càlcul de probabilitats, calculadores i GeoGebra.</p> <p>Història dels jocs d'atzar en diferents cultures</p>
3r ESO ac-apl	<p>** Successos i espai mostral.</p> <p>** Vocabulari bàsic.</p> <p>**Càlcul de probabilitats de successos compostos en casos senzills (taules de contingència i diagrames d'arbre).</p> <p>** Simulació amb recursos digitals per al càlcul de probabilitats.</p> <p>** L'origen de la teoria de probabilitats</p>

4t ESO ac-apl	<p>** Probabilitat condicionada i successos independents.</p> <p>Càlcul de probabilitats de successos compostos (taules de contingència i diagrames d'arbre).</p> <p>** Combinatòria (variacions, permutacions i combinacions) per quantificar.</p> <p>Simulació amb recursos digitals per al càlcul de probabilitats.</p>
1r bat	<p>Aplicació de les tècniques de recompte i del càlcul de probabilitats per resoldre situacions i problemes en àmbits tant científics com socials.</p> <p>Tècniques de recompte en casos senzills: de les llistes ordenades i els diagrames en arbre a l'estudi de les combinacions.</p> <p>Independència d'esdeveniments. Experiències successives i proves repetides.</p> <p>Probabilitat condicionada.</p> <p>L'ajust d'una distribució estadística a un model de probabilitat: la llei normal.</p>
1r bat ccss	<p>Aplicació de les tècniques de recompte i del càlcul de probabilitats per resoldre situacions i problemes de la vida quotidiana</p> <p>Tècniques de recompte en casos senzills: de les llistes ordenades i els diagrames en arbre a l'estudi de les combinacions.</p> <p>Freqüència relativa d'un esdeveniment. Llei de l'atzar.</p> <p>Definició clàssica de probabilitat. Llei de Laplace.</p> <p>Esdeveniments independents en probabilitat. Experiències successives i proves repetides.</p> <p>L'ajust d'una distribució estadística a un model de probabilitat: la llei normal.</p>

Aquest currículum es planteja per a l'educació primària per a un aprenentatge que els ajudi a interpretar el seu entorn a través de les matemàtiques i a relacionar-les en altres àmbits. La competència matemàtica a primària se centra en quatre blocs: la resolució de problemes; el raonament i la prova; les connexions i la comunicació; la representació.

En relació amb la probabilitat, el currículum separa els continguts en distints blocs i aquest cau diluït dins el bloc d'estadística i l'atzar. Dins aquest bloc, el currículum estipula que s'ha de "potenciar la formulació de preguntes que es puguin respondre a través de l'ús de dades; la selecció i ús de mètodes estadístics elementals per analitzar dades, per treure conclusions i per fer prediccions basades en dades; i la comprensió i aplicació dels conceptes bàsics d'atzar". En definitiva, la probabilitat queda reduïda a una comprensió i aplicació senzilla, mentre que l'estadística ocupa gran part de l'espai del bloc.

L'educació secundària obligatòria cerca el desenvolupament d'una sèrie d'objectius establerts pel currículum. Dins l'àmbit matemàtic, l'objectiu és el desenvolupament de la competència matemàtica, que es basa en la seva pròpia capacitat d'emprar eines matemàtiques de pensament i de representació.

L'avaluació de l'alumne a l'educació secundària ha de ser contínua, diferenciada i genèrica, depenent de la matèria i amb l'objectiu de millorar els seus processos d'aprenentatge. Per tant, el professorat ha d'avaluar considerant els distints elements que apareixen en el currículum.

L'estadística i l'atzar apareixen a tots els cursos, pel fet d'estar relacionades amb altres matèries i per la seva importància actual. El currículum proposa que l'ordre dels blocs a cada curs sigui rotatiu. D'aquesta manera, s'evitaria que determinats blocs s'imparteixin sempre al final del curs. D'aquesta manera, el bloc de probabilitat passa a ser un dels primers blocs que s'imparteixen a algun dels nivells.

2. Marc teòric

L'ensenyament de la probabilitat ve motivat principalment per factors socials. Les empreses prenen decisions a partir del tractament de dades, emprant processos estadístics, com *Business Intelligence* o *Data Mining* (Pajares i Tomeo, 2009). Aquests processos estadístics molts d'ells estan basats en la probabilitat.

Endemés, aquests processos que empren les empreses apareixen en el nostre dia a dia: ens trobam exemples a la publicitat, a les xarxes socials i a les distintes fonts d'informació que ens arriben. L'ús de gràfiques, diagrames, la realització de sondeigs o altres formes de representació i processament de dades ens farceix constantment i ens obliga a estar actualitzats i tenir una visió més crítica, per tal de comprendre i identificar la veracitat de la informació.

Per tant, per la seva estreta relació, l'ensenyament de la probabilitat ha anat lligat a l'ensenyament de l'estadística i l'atzar. Cal destacar l'ús de conceptes que queden allunyats de les situacions deterministes habituals de les matemàtiques i l'ús de la probabilitat per a la formalització de conceptes estadístics i les seves aplicacions.

No obstant això, no s'ha de confondre probabilitat amb estadística o atzar. L'estadística tracta l'anàlisi, la recopilació, la interpretació i la representació de dades. L'atzar ens mostra com, a partir d'un conjunt de causes no conegudes, un esdeveniment pot reproduir diferents resultats, els quals no som capaços de garantir amb tota certesa quin serà aquest resultat. La probabilitat estudia aquests fenòmens atribuïbles a l'atzar. Gràcies a la probabilitat, som capaços de representar situacions lligades a processos socials, biològics o científics, entre altres. Per consegüent, l'estudi de la probabilitat és necessari per a la formació d'una societat competent.

Finalment, cal afegir el lligam entre la probabilitat i la combinatòria. És molt habitual la introducció del primer després del segon, ja que a l'hora de realitzar la regla de Laplace, en molts de problemes es pot fer el recompte dels casos favorables i els casos possibles a partir de regles combinatòries senzilles. Ara bé, moltes vegades la combinatòria es complica de manera innecessària per a les competències que cerquem desenvolupar.

2.1. Currículum de secundària

Els continguts i els estàndards d'aprenentatge s'elaboren segons el Decret 34/2015, de 15 de maig, pel qual s'estableix el currículum de l'educació secundària obligatòria a les Illes Balears. En el cas de batxillerat, els continguts i els estàndards d'aprenentatge s'elaboren segons el Decret 35/2015, de 15 de maig.

Segon el Decret 34/2015, un dels blocs de matemàtiques és el Bloc de Probabilitat i Estadística. Aquest correspon al Bloc 5 en tots els nivells, exceptuant a les matemàtiques aplicades a les ciències socials, dintre de batxillerat, que correspon al Bloc 4, tal com indica el Decret 35/2015.

En general, els continguts a matemàtiques van lligats cada dos cursos, amb l'objectiu de mantenir una continuïtat. Els dos primers cursos d'ESO tothom cursa la mateixa assignatura de matemàtiques, amb els mateixos continguts i competències. En aquest cas, hi ha un contingut comú per ambdós nivells, de forma que cada Departament de Matemàtiques de cada centre es posa d'acord en distribuir els continguts entre ambdós cursos.

A partir de 3r d'ESO i fins a 4t, l'alumne pot triar unes matemàtiques orientades als ensenyaments acadèmics o orientades als ensenyaments aplicats. Aquí ja es distingeix d'una persona que realitzarà matemàtiques a batxillerat o d'una que farà un batxillerat humanístic o artístic, o un curs de Formació Professional (FP). En

qualsevol cas, ambdós nivells d'ambdues modalitats ja tenen els continguts fixats, a diferència de 1r i 2n d'ESO.

A batxillerat succeeix el mateix que amb 3r i 4t d'ESO. Cada nivell de batxillerat de cada especialitat té els continguts fixats. L'única diferència radica que a 2n de batxillerat es preparen per a una prova competencial per a l'accés a la Universitat. És cert que el currículum estableix que en finalitzar el quart curs i segon de batxillerat, els alumnes realitzen una avaluació final, en què es comprova l'assoliment dels objectius de l'etapa de secundària i el seu grau d'adquisició de les competències. Ara bé, segons el Decret-Llei 5/2016, de 9 de desembre, de mesures urgents per a l'ampliació del calendari d'implantació de la Llei Orgànica 8/2013, l'Article 2 deixa sense efectes aquestes proves.

A continuació, es comenta dins cada parell de cursos quins continguts hi ha.

- A 1r i 2n d'ESO, els continguts estrictament dins la branca de la Probabilitat que trobam al Bloc 5 són: “fenòmens deterministes i aleatoris; formulació de conjetures sobre el comportament de fenòmens aleatoris senzills i disseny d'experiències per comprovar-les; freqüència relativa d'un esdeveniment i la seva aproximació a la probabilitat mitjançant la simulació o l'experimentació; esdeveniments elementals equiprobables i no equiprobables; espai mostral en experiments senzills. Taules i diagrames d'arbre senzills; càlcul de probabilitats mitjançant la regla de Laplace en experiments senzills”.

En aquesta etapa trobam èmfasi en la diferenciació entre fenòmens aleatoris i deterministes. Dins els fenòmens aleatoris, se cerca diferenciar entre equiprobabilitat i no equiprobabilitat i així entendre que hi ha successos aleatoris amb distintes probabilitats. Recordem que estem, segons Piaget, dins el període de les operacions formals i els alumnes ja comencen a entendre que successos aleatoris poden succeir en distinta freqüència.

Segons el Decret 34/2015, en aquests cursos “es pretén fer una aproximació natural a l'estudi de fenòmens aleatoris senzills mitjançant l'experimentació i el tractament amb taules i gràfics de dades estadístiques. La probabilitat introdueix els alumnes en l'estudi i la comprensió de situacions d'incertesa i d'atzar, presents en múltiples àmbits de la vida quotidiana, amb l'objectiu de prendre decisions fonamentades”.

- A 3r i 4t d'ESO de matemàtiques orientades als ensenyaments acadèmics, trobam:
 - A 3r d'ESO: “experiències aleatòries. Esdeveniments i espai mostral; càlcul de probabilitats mitjançant la regla de Laplace. Diagrames d'arbre senzills; permutacions, factorial d'un nombre; utilització de la probabilitat per prendre decisions fonamentades en diferents contextos”.
 - A 4t d'ESO: “introducció a la combinatòria: combinacions, variacions i permutacions; càlcul de probabilitats mitjançant la regla de Laplace i altres tècniques de recompte; probabilitat simple i composta. Esdeveniments dependents i independents; experiències aleatòries compostes. Utilització de taules de contingència i diagrames d'arbre per a l'assignació de probabilitats; probabilitat condicionada”.

En aquests cursos es comença a introduir la combinatòria i distints mètodes de càlcul d'ella. També apareix la probabilitat composta, les distintes formes de representació, com taules de contingència i diagrames d'arbres, la dependència d'esdeveniments i la probabilitat condicionada.

- A 3r i 4t d'ESO de matemàtiques orientades als ensenyaments aplicats, trobam:
 - A 3r d'ESO: “experiències aleatòries. Esdeveniments i espai mostral; càlcul de probabilitats mitjançant la regla de Laplace. Diagrames

d'arbre senzills; permutacions, factorial d'un nombre; utilització de la probabilitat per prendre decisions fonamentades en diferents contextos”.

- A 4t d'ESO: “atzar i probabilitat. Freqüència d'un esdeveniment aleatori; càlcul de probabilitats mitjançant la regla de Laplace; probabilitat simple i composta. Esdeveniments dependents i independents. Diagrama en arbre”.

En aquest cas, trobam una variació significativa, principalment a 4t, entre ambdues modalitats de matemàtiques. Per qualque raó, a les matemàtiques orientades als ensenyaments aplicats, la Probabilitat queda reduïda al simple càlcul emprant la regla de Laplace i a la realització de diagrames d'arbre. Els alumnes no entenen si dos successos tenen dependència o independència, o bé si un succés està condicionat per qualque factor i com aquest pot fer variar la probabilitat. Per contra, a la part d'Estadística, sí que trobam una introducció a la correlació entre successos.

- A 1r i 2n de batxillerat de matemàtiques, trobam:
 - A 1r de batxillerat: “taules de contingència; distribució conjunta i distribucions marginals; distribucions condicionades”.
 - A 2n de batxillerat: “esdeveniments. Assignació de probabilitats a esdeveniments mitjançant la regla de Laplace i a partir de la seva freqüència relativa. Axiomàtica de Kolmogorov; aplicació de la combinatòria al càlcul de probabilitats; experiments simples i compostos. Probabilitat condicionada. Dependència i independència d'esdeveniments. Teoremes de la probabilitat total i de Bayes. Probabilitats inicials i finals i versemblança d'un esdeveniment; variables aleatòries discretes. Distribució de probabilitat. Mitjana, variància i desviació típica; distribució binomial. Caracterització i

identificació del model. Càlcul de probabilitats; distribució normal. Tipificació de la distribució normal. Assignació de probabilitats en una distribució normal. Càlcul de probabilitats mitjançant l'aproximació de la distribució binomial per la normal”.

En aquest cas, el pes de la Probabilitat radica a 2n de batxillerat, on el Bloc 5 complet se'n dedica. Malgrat que a 1r hi hagi alguns punts de Probabilitat, el currículum pareix suggerir l'ensenyament a partir de l'Estadística inferencial, ja que als estàndards d'aprenentatge en fa una referència purament estadística.

- A 1r i 2n de batxillerat de matemàtiques aplicades a les ciències socials, trobam:
 - A 1r de batxillerat: “taules de contingència; distribució conjunta i distribucions marginals; distribucions condicionades¹; esdeveniments. Assignació de probabilitats a esdeveniments mitjançant la regla de Laplace i a partir de la seva freqüència relativa. Axiomàtica de Kolmogorov; aplicació de la combinatòria al càlcul de probabilitats; experiments simples i compostos. Probabilitat condicionada. Dependència i independència d'esdeveniments; variables aleatòries discretes. Distribució de probabilitat. Mitjana, variància i desviació típica; distribució binomial. Caracterització i identificació del model. Càlcul de probabilitats; variables aleatòries contínues. Funció de densitat i de distribució. Interpretació de la mitjana, variància i desviació típica; distribució normal. Tipificació de la distribució normal. Assignació de probabilitats en una distribució normal; càlcul de probabilitats mitjançant l'aproximació de la distribució binomial per la normal”.

¹ Encara que aquesta part està pensada per Estadística.

- A 2n de batxillerat: “aprofundiment en la Teoria de la Probabilitat. Axiomàtica de Kolmogorov; assignació de probabilitats a esdeveniments mitjançant la regla de Laplace i a partir de la seva freqüència relativa; experiments simples i compostos. Probabilitat condicionada. Dependència i independència d’esdeveniments; teoremes de la probabilitat total i de Bayes. Probabilitats inicials i finals i versemblança d’un esdeveniment”.

En aquest cas, la introducció de la Probabilitat és més completa i gradual. S’aprofundeix tant en els aspectes de formalisme, com és l’axiomàtica de Kolmogorov, i a més es dona un seguit de recursos per tal de calcular diverses probabilitats.

Com es pot veure, hi ha una clara continuïtat entre els continguts d’un curs i un altre. Segons els decrets, l’aprenentatge ha de tenir el suport en els coneixements que ja s’han assolit i a partir de situacions properes per l’alumne. També es dona importància a dotar de sentit i context als continguts, evitar exercicis mecànics, usar molta varietat de recursos i plantejar qüestions de tota mena; obertes, problemes amb més d’una solució o amb cap solució, i amb distintes estratègies de resolució.

També es destaca l’ús d’esdeveniments de la història de les matemàtiques, l’ús de materials manipulables, recursos digitals i la relació entre continguts de diferents blocs i entre distintes matèries.

2.2. Comparació curricular

Tal com s’ha vist, els elements que formen part del currículum de matemàtiques a les Illes Balears són elements que apareixen als altres currículums que s’han esmentat. L’enfocament a través de situacions properes està estretament

relacionat amb l'anàlisi a partir de dades reals dels Estats Units; la relació entre matèries i la motivació de l'alumnat del currículum de Catalunya també hi és al nostre currículum; l'ús de noves tecnologies i eines diverses d'avaluació que destaca del currículum d'Estonia també es fa menció a Balears. Amb qui quedam més allunyats és amb el Japó, que treballa des d'un enfocament de resolució de problemes, els quals no tenen perquè estar contextualitzats.

En qualsevol cas, el currículum en matèria de probabilitat està ben tractat, amb propostes diverses, constructives i enfocat amb el desenvolupament de l'alumne per ser competent a la societat.

2.3. Proposta

En aquest treball es durà a terme una proposta d'ensenyament de la probabilitat. Aquesta proposta anirà reflectida en una sèrie de propostes en dues direccions:

1. Per al centre, on es realitzarà una anàlisi més profunda del significat de la probabilitat. En aquest cas, es proposaran activitats a través de l'experimentació, el registre de resultats, la simulació, l'ús de materials manipulatius i la formalització.
2. Per als participants de Ciència per a tothom, on es facilitarà l'experimentació i la interpretació de resultats.

En qualsevol cas, es procurarà seguir la metodologia establerta pel currículum i es consideraran les capacitats de l'alumnat o els participants a l'hora de resoldre els problemes matemàtics, de forma que els ajudem a superar les seves errades i dificultats.

Per altra banda, també es considerarà un material addicional i en línia més genèric, per treballar de manera similar els continguts del currículum.

3. Proposta d'activitats

En aquesta secció, descriurem les distintes activitats que s'han pensat per realitzar tant a l'aula com a Ciència per a Tothom. Llevat de l'activitat de Ciència per a Tothom, la resta d'activitats estan pensades per realitzar a grups de batxillerat.

Aquestes activitats no pretenen ser cap novetat ni substituir la forma d'ensenyar de cap professor. Més aviat, es pretén dotar d'unes eines per ensenyar probabilitat, les quals moltes d'elles s'empren a les aules o inclús hi ha bibliografia d'elles, però es reserven aquestes activitats principalment a primària o ESO, quan són totalment extrapolables a l'ensenyament de batxillerat i a més el seu ús ve recomanat pel mateix currículum.

A banda d'això, tractarem l'atenció a la diversitat de les distintes activitats. Endemés, també es posarà a disposició un seguit de recursos que poden ser d'ajuda.

D'aquesta manera, presentarem les activitats mitjançant un format que constarà dels següents apartats:

- Objectius. Aquí es para esment en els objectius específics del currículum. És cert que trobam algunes diferències entre els objectius d'un batxillerat social i un pur. No obstant això, s'ha procurat compactar aquests objectius.
- Continguts del currículum. En aquest punt, enumeram els continguts que es treballen a cada curs. En general, es treballaran continguts del Bloc de Probabilitat i Estadística, encara que sempre es poden treballar continguts d'altres blocs, principalment del Bloc de Processos.
- Competències. A l'annex "Elements del Currículum" es detalla una taula amb les competències que es treballaran. Ens centrarem únicament a posar

les competències matemàtiques. A les activitats, només posarem l'abreviatura corresponent.

- **Material.** Es farà referència tota classe d'eina o material que es faci servir per realitzar l'activitat: paper, bolígraf, recursos TIC, materials manipulatius...
- **Metodologia.** Les metodologies seran variades i es basaran principalment en aquelles que el currículum proposa emprar.
- **Criteris d'avaluació.** Els criteris seran aquells que venen determinats pel currículum, de forma que estiguin relacionats amb els continguts.
- **Eines d'avaluació.** Es detallarà una proposta d'avaluació per a l'activitat.
- **Enunciat.** Aquí es descriurà l'activitat a realitzar, amb les pautes mínimes a seguir.
- **Comentaris.** En aquest punt, es faran els comentaris adients a cada activitat. Es xerrarà de tipus d'ampliacions, d'incisos o ajudes, de comentaris pel docent...
- **Atenció a la diversitat.** Es comentarà breument quina problemàtica pot tenir aquesta activitat i com es podria solucionar.

3.1. La classe com a conjunt

Objectius. Introduir els elements bàsics de la teoria de conjunts, els quals s'empren amb molta freqüència a la teoria de la Probabilitat: unió, intersecció, conjunt complementari, conjunt buit, conjunt total. BC13 i BS13.

Continguts del currículum. En el currículum de matemàtiques aplicades a les ciències socials trobam:

- 1r batxillerat: experiències aleatòries. Esdeveniments i espai mostral.

- 2n batxillerat: probabilitat simple i composta. Esdeveniments dependents i independents.

En el currículum de matemàtiques als ensenyaments acadèmics trobam:

- 1r batxillerat: distribució conjunta i distribucions marginals.
- 2n batxillerat: probabilitat simple i composta. Esdeveniments dependents i independents.

Competències. CM1.4, CM1.7, CM3.2, CM4.1 i CM4.2.

Material. L'activitat proposada no fa ús de cap mena de material. Ara bé, els alumnes aniran omplint una graella per avaluar el seu desenvolupament de l'activitat i, per tant, caldrà material per escriure.

Metodologia. L'activitat es realitzarà en el grup classe i serà el professor qui anirà guiant sobre què cal fer cada pic. Temps aproximat: 10-20 minuts.

Criteris d'avaluació. Es pot valorar la capacitat de l'alumnat de col·laborar i es pot considerar com una nota de comportament i participació de classe.

En concret: utilitzar el vocabulari adequat per a la descripció de situacions relacionades amb l'estadística, interpretant de forma crítica informacions estadístiques; assignar probabilitats a esdeveniments aleatoris en experiments simples i compostos, utilitzant la regla de Laplace en combinació amb diferents tècniques de recompte i l'axiomàtica de la probabilitat.

Eines d'avaluació. Com és una activitat dirigida principalment pel professor i tota la classe participa alhora, el més adient és emprar una escala d'autoavaluació. En aquest cas, seria una graella senzilla (vegeu annex "La classe com a conjunt"). Cada alumne és conscient de com va desenvolupant l'activitat i anirà apuntant a la graella com realitza cada activitat.

Enunciat. Per un moment, ens imaginam que tots nosaltres formam un conjunt, el qual anomenam conjunt “classe”. Cada persona és un element de l’espai “classe” i cercam persones que satisfacin certes condicions. Les condicions proposades són:

- A. Dur ulleres
- B. Dur una camisa/dessuadora blanca.
- C. Ser al·lot.

També es poden realitzar propostes de condicions, o canviar-les. A partir d’aquestes, volem:

- Que s’aixequin les persones que satisfan A o B (unió).
- Que s’aixequin les persones que satisfan A i B. (intersecció)
- Que s’aixequin les persones que no satisfan C.
- Que s’aixequin les persones que satisfan A, però no C.
- Fer una proposta de condició, li direm condició D, de forma que D estigui continguda dins B. La condició ha de ser com més clara millor. Per exemple, un succés com “tenir el pèl curt” pot dur a confusió, ja que aquesta consideració varia depenent de la persona.

Heu d’apuntar, en cada cas, si us heu classificat correctament a cada punt a la rúbrica d’autoavaluació, i si s’ha donat el cas que heu ajudat qualche company.

Comentaris. L’activitat és idònia per realitzar-se com a introducció a la probabilitat, ja que no requereix cap coneixement matemàtic previ. Endemés, és una activitat totalment participativa, la qual requereix un treball de cooperació i comprensió per part dels alumnes.

Aquesta activitat és idònia per treballar-se durant els anys de batxiller, tant en el batxiller científic com en el batxiller social. Les activitats que es treballen de manera continuada en els anys serveixen com a referència i ajuden a consolidar

coneixements. Si es fa bé, aquestes experiències passen a formar part dels coneixements previs pertinents, els quals són necessaris per treballar la matèria (Castellanos, 2012).

Atenció a la diversitat. En cas que hi hagi alumnes que no es puguin aixecar, es procurarà altres alternatives per identificar els membres que satisfan qualche propietat. Per exemple, en lloc d'aixecar-se, podrien aixecar la mà, o si tampoc pot aixecar la mà, o estaria assegut amb un altre company i aquest l'ajudaria o faria el seu paper.

També podria haver-hi gent sorda o cega entre l'alumnat. En aquest cas, la solució més senzilla és indicar, a la vegada que es va parlant, imatges de la característica que defineixi el conjunt. En principi, la majoria d'aules disposen de recursos TIC i, en cas que no, sempre es poden dur unes fitxes grans amb dibuixos, per mostrar què es vol indicar.

Si es tenen alumnes a la classe amb altres condicions sexuals (per exemple, transsexuals), sempre es pot evitar l'opció c esmentada o bé, introduir-la per reforçar la diversitat de l'aula. En aquest cas, l'activitat ha d'estar molt ben conduïda i les condicions han de ser com més clares millor.

Finalment, aquesta activitat va molt bé per alumnes amb TDAH, ja que els fas estar actius i els dones l'oportunitat de moure's.

3.2. Estudis de casos reals

Objectius. Partir d'unes dades reals i, a partir d'elles, treballar la construcció de taules de contingència. A partir de les taules, estudiariem les dades reals, cercant què pot ser interessant, tot sempre relacionat amb la Probabilitat. BC2, BC7, BC11, BS2, BS7 i BS11.

Continguts del currículum. En el currículum de matemàtiques aplicades a les ciències socials trobam:

- 1r batxillerat: experiències aleatòries. Esdeveniments i espai mostral.
- 2n batxillerat: probabilitat simple i composta. Esdeveniments dependents i independents.

En el currículum de matemàtiques als ensenyaments acadèmics trobam:

- 1r batxillerat: taules de contingència; distribució conjunta i distribucions marginals.
- 2n batxillerat: experiments simples i compostos. Probabilitat condicionada. Dependència i independència d'esdeveniments.

I de manera genèrica:

- Bloc Processos, Mètodes i Actituds en Matemàtiques: realització d'investigacions matemàtiques a partir de contextos de la realitat.

Competències. CM1.1, CM1.5, CM1.7, CM2.2 i CM3.2.

Material. En aquest cas, serà necessari tenir uns recursos TIC al centre, per tal de projectar la informació. En cas contrari, sempre es pot fer ús de fotocòpies pels estudiants. Per altra banda, com serà un exercici de construcció de taules, serà necessari per la seva part un material per poder escriure, com paper i bolígraf.

Metodologia. La metodologia es basarà en la descripció d'una activitat a classe i, mentre tothom va realitzant l'activitat, el professor guiarà els alumnes. També es podria plantejar com una activitat de classe, preparant-ho com una fitxa i realitzant-se en grups de 2 o 3 persones. Aquesta segona funció millor si no es tenen recursos TIC per mostrar en pantalla els resultats, per tal de comprovar

amb més agilitat, o bé si es vol treballar el treball cooperatiu. Temps aproximat: entre 1 i 2 sessions.

Criteris d'avaluació. Assignar probabilitats a esdeveniments aleatoris en experiments simples i compostos, utilitzant la regla de Laplace en combinació amb diferents tècniques; descriure i comparar conjunts de dades de distribucions bidimensionals, amb variables discretes o contínues, procedents de diferents contextos; desenvolupar processos de matematització en contextos de la realitat quotidiana (estadístics o probabilístics) a partir de la identificació de problemes en situacions problemàtiques de la realitat.

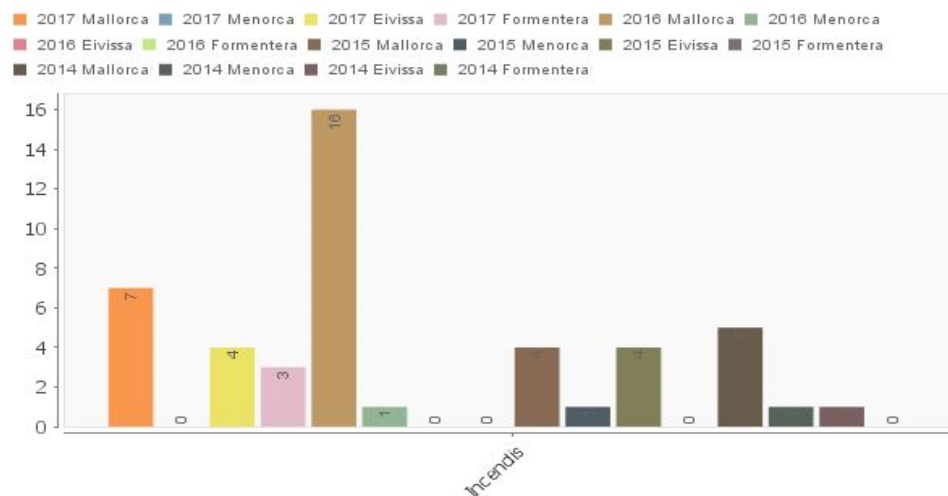
Eines d'avaluació. L'avaluació seria per observació directa de la classe, si és com a activitat conduïda pel professor. En altre cas, el més interessant seria la coavaluació pels altres membres del grup a través d'una diana d'avaluació (vegeu annex "Estudis de casos reals").

Enunciat. Partirem d'unes dades reals, com poden ser articles, dades d'empreses, instituts d'estadística o del Ministeri, i a partir d'aquestes dades realitzarem un estudi a través de taules de contingència. Entre les següents fonts, triau:

- L'IBESTAT, amb dades estadístiques de les Illes Balears. En aquest cas, haureu de fer una recerca de la plana web i triar unes dades de les quals es puguin extreure unes taules de contingència. A les següents figures teniu exemples dels quals es poden fer taules i, tal vegada, poden ser del vostre interès. A partir d'aquestes dades, demanau-vos què pot ser interessant establir: independència de variables, major efecte depenent del lloc (illa, municipi), dades atípiques per qualche any...

2017	
MALLORCA	
Recursos: D.1 Remuneració d'assalariats	10.429.285
Recursos: B.2b EBE/B.3b Renda Mixta	5.365.103
Recursos: D.4 Rendes de la propietat	956.484
MENORCA	
Recursos: D.1 Remuneració d'assalariats	960.263
Recursos: B.2b EBE/B.3b Renda Mixta	598.773
Recursos: D.4 Rendes de la propietat	83.625
EIVISSA	
Recursos: D.1 Remuneració d'assalariats	1.624.009
Recursos: B.2b EBE/B.3b Renda Mixta	995.759
Recursos: D.4 Rendes de la propietat	176.316
FORMENTERA	
Recursos: D.1 Remuneració d'assalariats	102.893
Recursos: B.2b EBE/B.3b Renda Mixta	70.801
Recursos: D.4 Rendes de la propietat	17.519

Figura 1: Dades sobre la renda municipal disponible de les Illes al 2017, per illes.



Font: Institut d'Estadística dels Illes Balears (IBESTAT) a partir de dades de la Conselleria d'Agricultura, Medi ambient i Mobilitat, Govern de les Illes Balears. Espanya (CC BY 3.0)

Figura 2: Nombre d'incendis per illa, des del 2014 fins al 2017.

- Anàlisi del coronavirus (fet d'actualitat el 2020). A l'article China, 2020, trobam referències al nombre de coronavirus classificats per distints grups: sexe, edat, malalties, etc. (vegeu annex "Taula Covid-19"). S'ha de realitzar les taules de contingència per cada grup i demanar-se què pot ser

interessant establir: si hi ha independència d'edats, de sexe, quins són els grups de risc, entre altres.

- A la web del ministeri podem trobar dades diverses referents a molts de temes: sanitaris, addiccions, economia, etc. En aquest cas, triau unes dades de les quals es pugui generar una taula de contingència, com la de la següent figura, i a partir d'aquesta taula, fer-se preguntes que puguin ser d'interès.

Tabla 9. Prevalencia de consumo de bebidas alcohólicas entre los estudiantes de Enseñanzas Secundarias de 14-18 años, según sexo y edad (%). España, 1994-2018.

Alguna vez en la vida													
	1994	1996	1998	2000	2002	2004	2006	2008	2010	2012	2014	2016	2018
Total	84,1	84,2	86,0	78,0	76,6	82,0	79,6	81,2	75,1	83,9	78,9	76,9	77,9
Sexo													
Hombre	84,3	84,3	85,5	78,2	75,9	81,5	78,4	80,8	74,9	82,9	77,8	75,7	76,3
Mujer	84,0	84,1	86,4	77,9	77,2	82,5	80,7	81,7	75,2	84,9	80,1	78,2	79,4
Edad													
14 años	69,6	67,6	71,5	52,4	52,7	59,2	57,1	62,6	49,7	65,9	60,1	57,1	58,3
15 años	81,8	81,7	82,5	73,4	70,4	76,6	76,1	78,7	71,5	77,7	73,7	75,4	72,5
16 años	88,0	88,7	89,7	83,1	81,7	86,9	86,0	86,2	81,6	86,2	84,1	83,1	84,3
17 años	91,9	91,3	92,8	89,6	89,0	91,9	91,2	90,5	87,8	90,8	90,6	89,9	88,5
18 años	92,5	93,4	96,2	93,8	92,2	93,8	92,3	92,3	88,6	92,6	92,4	91,9	89,0

Figura 3: Consum de begudes alcohòliques entre estudiants d'ESO i Batxillerat, segons sexe i edat. FONT: OEDA. Encuesta sobre Uso de Drogas en Enseñanzas Secundarias en España (ESTUDES).

Comentaris. Respecte a cadascun dels blocs per triar, pot ser útil tenir en compte l'itinerari de matemàtiques, a banda d'altres aspectes temporals o del grup.

- IBESTAT: aquí els alumnes poden cercar les dades que més els pugui interessar i trobaran informació corresponent. Pot ser bastant útil, per exemple, pels d'itinerari de matemàtiques aplicades, ja que es té informació diversa de dades econòmiques. També es tenen dades d'entorn físic i sostenibilitat, que poden ser d'especial interès per als de l'itinerari d'acadèmiques, especialment per gent que vol cursar carreres de biologia o ecologia.

- Anàlisi del coronavirus: aquesta anàlisi es basa a cercar un fet d'actualitat per generar taules de contingència. Moltes vegades, és més entretingut pels alumnes emprar recursos d'actualitat i que els afecta, que no dades qualsevol.
- Web del ministeri: s'ha d'anar amb molt de compte, ja que hi ha moltes dades que no estan completes. Per exemple, hi ha taules amb les dades de consum de distintes drogues en adolescents, però només t'indica el nombre d'adolescents que pren cada tipus de droga i per tant mancarien les dades creuades.

La idea d'aquesta activitat es basa en el desenvolupament propi de l'alumne, fent que es demani ell mateix què pot ser interessant estudiar. Per tant, l'alumne és el protagonista i és qui posa el límit a l'activitat. També es pot

Atenció a la diversitat. En ser una activitat de recerca, si es tenen les dades per projectar, l'únic problema el podem tenir per alumnes amb capacitat de vista reduïda. En tal cas, l'activitat s'hauria de fer en dues fases: primer, demanar abans als alumnes què els pot interessar i, a la propera classe, tenir preparades les dades perquè fossin accessibles per a tothom.

Per alumnes amb altes capacitats, aquest tipus d'activitat es pot ampliar fàcilment. A més, si hi ha alumnes amb problemes per desenvolupar-la, el professor serà a l'aula per ajudar en qualsevol problema.

3.3. PoliDiagrames de Venn

Objectius. Saber construir i representar diagrames de Venn, jugar amb les propietats bàsiques dels conjunts i amb les propietats bàsiques de la probabilitat. BC6, BC13, BS6 i BS13.

Continguts del currículum. En el currículum de matemàtiques aplicades a les ciències socials trobam:

- 1r batxillerat: experiències aleatòries. Esdeveniments i espai mostral.
- 2n batxillerat: probabilitat simple i composta. Esdeveniments dependents i independents.

En el currículum de matemàtiques als ensenyaments acadèmics trobam:

- 2n batxillerat: experiments simples i compostos. Probabilitat condicionada. Dependència i independència d'esdeveniments.

Competències. CM1.1, CM1.2 i CM3.1.

Material. En aquest cas, necessitarem papers, llapis i tisores. També anirà bé disposar de recursos TIC per projectar imatges.

Metodologia. La metodologia en aquest cas es tractaria d'una explicació del diagrama de Venn estàndard a partir d'un material manipulatiu, seguit d'una activitat cooperativa amb una fitxa orientativa. Temps aproximat: 1 sessió.

Criteris d'avaluació. Assignar probabilitats a esdeveniments aleatoris en experiments simples i compostos, utilitzant la regla de Laplace; utilitzar el vocabulari adequat per a la descripció de situacions relacionades amb l'atzar.

Eines d'avaluació. En aquest cas, es passaria com a eina d'autoavaluació una rúbrica, de manera que cada alumne es corregeixi a ell mateix (vegeu Annex "PolDiagrames de Venn"). A la rúbrica, vendrien descrits els estàndards d'aprenentatge, les competències, els continguts i els objectius en forma de graella.

Enunciat. Som uns ciutadans d'un món màgic, el qual cada ciutadà té el seu propi emblema. Aquest emblema simbolitza la unió que hi pugui haver entre distints

habitants d'aquest món. Com a ciutadà d'aquest indret, voleu formar part d'aquesta màgia i per tant:

1. Construïu el vostre emblema. Aquest emblema s'ha de fer a partir d'un paper i ha de ser una figura geomètrica simple de les següents: un quadrat, un triangle equilàter, un triangle rectangle, un triangle isòsceles o un rectangle o un rombe. Un dels costats del polígon ha de ser de 5 cm.

Una vegada tenim el nostre propi emblema, queda saber com d'únics som.

2. Comptau quants dels vostres companys han fet la mateixa figura que vosaltres i feis una llista de les distintes figures fetes. Aquesta llista en probabilitat té un nom, sabríeu dir-lo?
3. Si ara triau una persona aleatòria d'aquest món, quina és la probabilitat de què els vostres emblemes coincideixin?

La següent passa és saber la relació que establim amb els companys. Aquesta relació ve donada quan es superposen els emblemes (els direm A i B) i la intersecció ens dona una figura. Si aconseguim que la relació ens doni la igualtat

$$\frac{\text{àrea}(A \cap B)}{\text{àrea}(A)} = \frac{\text{àrea}(B)}{\text{àrea}(A \cup B)},$$

direm que hem establert una *relació noble* entre les persones dels respectius emblemes.

4. Probabilísticament xerrant, a què relacionaríeu el significat de noble?
5. Ajunteu-vos amb altres companys i mirau com podríeu establir aquesta relació. Hi ha casos particularment fàcils d'aconseguir? Podríeu dir quins?

Comentaris. L'enunciat del problema, tal com s'ha comentat anteriorment, vendria després d'una introducció als diagrames de Venn. Malgrat que ja s'empren de manera habitual, és un recurs visual i molt útil per revisar propietats o

contextualitzar un problema. En aquest cas, la proposta de presentació dels diagrames està pensada en diverses direccions.

- Per entendre la fórmula de la unió. S'empraria aquí dos cercles (per exemple, retallats d'un full) i es marcaria la intersecció comuna. També es tendria el bocí de la intersecció a banda. A l'hora de considerar la unió dels dos cercles, veurien que han de llevar la part comuna.



Figura 4: Diagrames de Venn casolans. També es pot fer en dibuix a la pissarra o amb GeoGebra, però el fet de canviar d'eina representa un estímul distint per a l'alumne i el convida a escoltar.

- Per a successos independents, representar els conjunts com a quadrats. En aquest cas, dibuixaríem l'espai E com un quadrat 1×1 . Per tant, la probabilitat d' E és la seva àrea $P(E)=1 \cdot 1=1$, i la probabilitat de qualsevol succés dins E és també l'àrea del succés.

Una manera d'entendre els successos independents és veure'ls com dos rectangles dins E , un vertical i l'altre horitzontal (Figura 5). L'àrea de cada succés serà $P(A)=a \cdot 1=a$ i $P(B)=b \cdot 1=b$, i la de la intersecció serà $P(A \cap B) = a \cdot b$. El fet de descriure els successos d'aquesta manera ve motivat per compensar les proporcions.

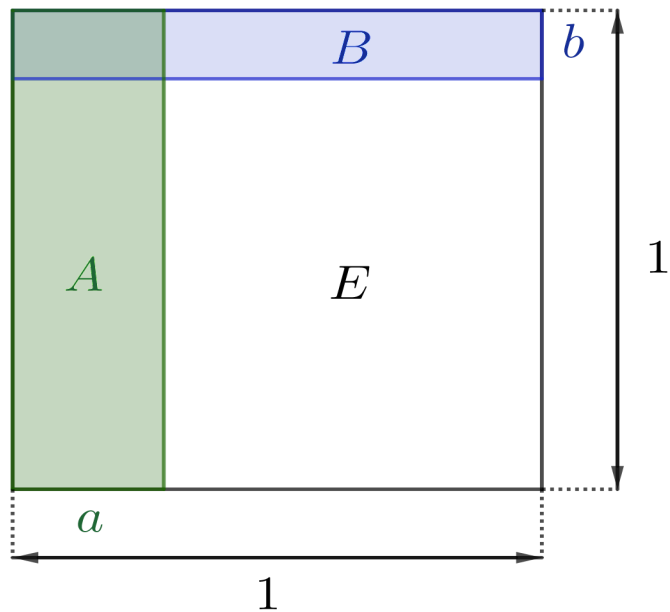


Figura 5: Representació d'un diagrama de Venn amb dos successos A, B independents.

L'activitat per entendre la fórmula de la unió es pot plantejar a diferents cursos, com 1r i 2n de batxiller, tant a la branca acadèmica com a la branca social. Ara bé, l'activitat d'independència només es plantejaria per als cursos de 2n de batxillerat.

Respecte a l'activitat, aclarir que a la pregunta 5, caldrà donar l'incís que es tracta de resoldre, de manera genèrica, l'equació:

$$a \cdot b = (a+b-y) \cdot y,$$

on a és l'àrea de A, b l'àrea de B i y l'àrea de la intersecció. Això ens duu a una equació de segon grau per a y , de forma que o bé $y=a$ o bé $y=b$. En aquest cas, voldrà dir que una de les figures ha d'estar dintre de l'altre i, si no es pot, no es podrà establir una relació noble entre els membres.

Atenció a la diversitat. Cal dir que aquesta activitat va molt bé per tractar la diversitat de l'aula. Per exemple, una persona cega pot palpar amb les mans el

diagrama de Venn i, si a més, se li dona una textura distinta als dos conjunts, el resultat és molt més palpable i pot ajudar bastant. També pot ajudar amb persones daltòniques, on els colors no ajuden molt, o altres problemes de vista.

A banda d'això, com hi ha moments en què l'alumnat es mou, pot anar bé per alumnes amb qualche classe de trastorn d'hiperactivitat.

3.4. Truca un dau

Objectius. Aquesta activitat té com a objectiu principal entendre el concepte d'equiprobabilitat: a un dau normal tens 6 cares amb 6 nombres, cada una d'elles té un nombre distint de l'1 al 6, mentre que ara tendríem daus amb els nombres que volguéssim. Els objectius específics són: BC2, BC3, BS2 i BS3.

També es podria fer ús d'aquest material al tema d'estadística. Ens serviria per veure conceptes de mitjana i desviació típica. Es podria donar el cas de daus amb distints nombres però amb la mateixa mitjana, i a la vegada distinta desviació típica.

Continguts del currículum. En el currículum de matemàtiques aplicades a les ciències socials trobam:

- 1r batxillerat: esdeveniments. Assignació de probabilitats a esdeveniments mitjançant la regla de Laplace i a partir de la seva freqüència relativa. Axiomàtica de Kolmogorov; variables aleatòries discretes. Distribució de probabilitat. Mitjana, variància i desviació típica.
- 2n batxillerat: assignació de probabilitats a esdeveniments mitjançant la regla de Laplace i a partir de la seva freqüència relativa; experiments simples i compostos. Probabilitat condicionada. Dependència i independència d'esdeveniments.

En el currículum de matemàtiques als ensenyaments acadèmics trobam:

- 2n batxillerat: esdeveniments. Assignació de probabilitats a esdeveniments mitjançant la regla de Laplace i a partir de la seva freqüència relativa. Axiomàtica de Kolmogorov; variables aleatòries discretes. Distribució de probabilitat. Mitjana, variància i desviació típica.

Del bloc genèric per a tots els cursos esmentats, tenim:

- Estratègies i procediments posats en pràctica: relació amb altres problemes coneguts, modificació de variables.

Competències. CM1.5 i CM1.6.

Material. En aquest cas, necessitarem papers, tisores, material per plastificar i retoladors o, si no pot ser, gomets.

Metodologia. La metodologia es basa en la realització i la utilització d'un material manipulatiu. Temps aproximat: entre 30 minuts i una sessió.

Criteris d'avaluació. Utilitzar processos de raonament i estratègies de resolució de problemes, fent els càlculs necessaris i comprovant les solucions obtingudes; assignar probabilitats a esdeveniments aleatoris en experiments simples i compostos, utilitzant la regla de Laplace.

Eines d'avaluació. En aquest cas, el més interessant és emprar una eina d'autoavaluació i coavaluació. De cada un dels punts que s'ha de contestar de l'enunciat, l'alumne haurà mostrat com estan distribuïts els nombres del dau. A l'annex "Truca un dau" trobam l'explicació deallada de l'eina.

Enunciat: Partim del material dissenyat per vosaltres, un dau en blanc amb sis cares. En aquest dau, podem afegir els nombres que vulguem. Aquests nombres poden ser diferents als d'un dau clàssic. Llavors, volem daus que satisfacin:

1. Que tots els nombres siguin diferents, però que sigui distint a un dau usual.
2. Que el nombre 2 sigui el nombre amb major freqüència.
3. Un dau tal que el resultat no depengui de l'atzar.
4. Un dau amb dos nombres distints amb més probabilitat que altres.
5. Un dau amb totes les cares distintes, de manera que la suma de les cares oposades doni sempre 8.
6. Un dau tal que la suma de tots els seus nombres sigui 0 i no es repeteixi cap nombre en valor absolut.

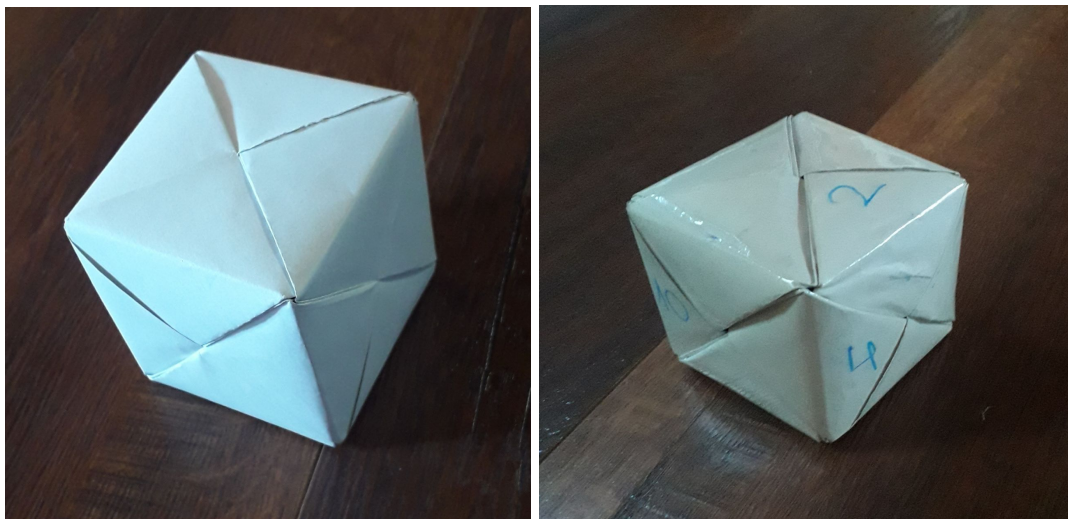


Figura 6: exemple de construcció d'un dau amb papers. En aquest cas, s'han emprat papers reciclats i, per tal de poder canviar els nombres, s'ha plastificat el paper i s'empren retoladors. També es poden tenir altres estratègies: fer més daus, pintar les cares i associar-les a colors, emprar gomets, etc.

Feis un dau per a cada un dels punts anteriors, i feis-li fotografies de les cares o un dibuix del dau planificat. Si feis fotografies, ha de quedar quina és la distribució del dau. A més, per a cada dau, hi ha d'haver una explicació raonada del resultat que donau.

Comentaris. Aquesta activitat pot ser interessant per diversos motius. El primer, l'alumne juga ell mateix amb un material manipulatiu, que a més haurà fet ell. El

segon, que ens pot servir no només per a probabilitat, sinó també per a estadística. Recordem que, com més ús es faci d'un material, més records tendran els alumnes i més assimilaran els conceptes treballats amb aquest material. Finalment, cal mencionar que aquesta activitat ha estat motivada dins l'assignatura de Metodologia i Recursos del màster de professorat, on uns companys van presentar el material manipulatiu. A més, hi ha diversos autors que recomanen presentar aquesta activitat, com per exemple Calvo (2016).

Atenció a la diversitat. Amb els daus també es pot treballar a partir de la diversitat; per a persones cegues, per exemple, si es posen a les cares gomets, no es trucaria massa el dau (sempre queda un poc trucat), i aquests gomets podrien representar els nombres i ells palpant les distintes cares podrien entendre el valor numèric per cara; endemés, és un material fàcil de posar i llevar, sobretot si es plastifica el dau.

En cas que es tinguin alumnes amb altes capacitats, sempre es poden posar apartats extres, com per exemple construir l'espai mostral de la suma o la resta de dos daus trucats. Per alumnes amb certes dificultats, el professor pot ajudar una mica i, com es farà en grups, també es podria considerar el treball cooperatiu com ajuda addicional. Depenent de com sigui el cas, s'hauria d'adequar l'avaluació del treball cooperatiu a l'eina d'avaluació.

3.5. Quin és injust?

Objectius. BC6, BC7, BS6 i BS7.

Continguts del currículum. En el currículum de matemàtiques aplicades a les ciències socials trobam:

- 1r batxillerat: esdeveniments. Assignació de probabilitats a esdeveniments mitjançant la regla de Laplace i a partir de la seva freqüència relativa.

Axiomàtica de Kolmogorov; variables aleatòries discretes. Distribució de probabilitat. Mitjana, variància i desviació típica; aplicació de la combinatòria al càlcul de probabilitats.

- 2n batxillerat: assignació de probabilitats a esdeveniments mitjançant la regla de Laplace i a partir de la seva freqüència relativa; experiments simples i compostos. Probabilitat condicionada. Dependència i independència d'esdeveniments.

En el currículum de matemàtiques als ensenyaments acadèmics trobam:

- 2n batxillerat: esdeveniments. Assignació de probabilitats a esdeveniments mitjançant la regla de Laplace i a partir de la seva freqüència relativa. Axiomàtica de Kolmogorov; variables aleatòries discretes. Distribució de probabilitat. Mitjana, variància i desviació típica; aplicació de la combinatòria al càlcul de probabilitats.

Per a tots els cursos esmentats, tenim:

- Bloc Processos, Mètodes i Actituds en Matemàtiques: realització d'investigacions matemàtiques a partir de contextos de la realitat o contextos del món de les matemàtiques.

Competències. CM1.1, CM1.2, CM1.3, CM1.6 i CM2.1.

Material. Paper i bolígraf. Perquè sigui més visual, es pot fer ús d'una baralla de cartes i d'una llista dels noms de la classe.

Metodologia. Es donarà una fitxa per als alumnes i el professor els ajudarà a desenvolupar-la. Temps aproximat: una sessió.

Criteris d'avaluació. Planificar adequadament el procés d'investigació, tenint en compte el context en el qual es desenvolupa i el problema d'investigació plantejat;

assignar probabilitats a esdeveniments aleatoris en experiments simples i compostos, utilitzant la regla de Laplace en combinació amb taules de contingència.

Eines d'avaluació. En aquest cas, es valorarà el desenvolupament i el rigor realitzat a la fitxa. Els alumnes tendran accés als continguts i les competències els quals se'ls avalua, a partir d'una escala d'avaluació (vegeu annex "Quin és injust?"). Aquesta escala servirà d'autoavaluació i de coavaluació, de forma que per grups de 3 o 4 alumnes faran les escales entre ells.

Enunciat. Anem a fer un estudi de sistemes d'elecció. Es tracta que raoneu si es tracta de sistemes justos o injustos, argumentant el perquè. A continuació, en feim una breu explicació dels sistemes.

1. *Sorteig de lletra per cognom.* A l'hora de triar un ordre per segons què, com elecció d'horaris, és bastant habitual ordenar a les persones per cognom, triar una lletra de l'abecedari de manera aleatòria i començar per aquesta lletra fins a tornar-hi a arribar, passant de la "z" a la "a". És just el sistema?
2. *Qui té el jòquer.* Si per exemple, jugam a un joc amb N persones on cadascú rep una carta i n'hi ha una dolenta, el jòquer. Llavors, tothom té la mateixa probabilitat de tenir el jòquer?

Comentaris. En aquest cas, farem esment a sistemes d'elecció que poden o no semblar equiprobables i en farem un estudi probabilístic.

1. *Sorteig de lletra per cognom.* Aquesta tria no és del tot justa. Per començar, si no hi ha gent que tengui llinatges que comencin per "v", "w", "x", "y" i "z", les persones amb cognom que comenci per "a" tenen un avantatge respecte a les altres persones, ja que tenen una probabilitat de 6/26 de

començar².

Endemés, si hi ha moltes persones que comencin per un mateix cognom, aquestes vendran sempre ordenades i els que tenen segones i terceres lletres més enrere tornen a jugar en desavantatge (per exemple Azur seria de les darreres persones que comencen per A sempre, mentre que Abad seria dels primers).

2. *Qui té el jòquer*. En aquest cas, es pot pensar que el repartiment no té per què ser equitatiu. Ara bé, si es calcula la probabilitat de què a cada jugador li toqui el jòquer:

a. $\text{pr}(1r \text{ jòquer}) = \frac{1}{N}$,

b. $\text{pr}(2n \text{ jòquer}) = \frac{N-1}{N} \cdot \frac{1}{N-1} = \frac{1}{N}$,

c. $\text{pr}(n\text{-èssim el jòquer}) = \frac{N-1}{N} \cdots \frac{N-n}{N-n+1} \cdot \frac{1}{N-n} = \frac{1}{N}$.

Atenció a la diversitat. Aquesta activitat no requereix cap classe d'atenció especial. La descripció dels sistemes es pot fer per escrit i en veu alta, per tal d'evitar problemes d'accés. En qualsevol cas, el professor estarà durant la realització de l'activitat i podrà donar suport als alumnes que ho requereixin.

3.6. Pòquer reduït

Objectius. 12E2, 12E13, EAc2, EAc13, EAp2, EAp13, BC3, BC4, BC11, BS3, BS4 i BS11.

Continguts del currículum. En l'activitat de Ciència per tothom es desenvolupa el currículum de manera transversal. Trobam per cursos:

- 1r i 2n d'ESO: freqüències absolutes i relatives; organització en taules de dades recollides en una experiència; freqüència relativa d'un esdeveniment

² A l'alfabet català. Si empram el castellà, 6/27.

i la seva aproximació a la probabilitat mitjançant la simulació o l'experimentació.

- 3r i 4t ESO aplicades: utilització de la probabilitat per prendre decisions fonamentades en diferents contextos; probabilitat simple i composta. Esdeveniments dependents i independents.
- 3r ESO acadèmiques: experiències aleatòries. Esdeveniments i espai mostral; càlcul de probabilitats mitjançant la regla de Laplace; utilització de la probabilitat per prendre decisions fonamentades en diferents contextos.
- 4t ESO acadèmiques:³ introducció a la combinatòria: combinacions, variacions i permutacions; càlcul de probabilitats mitjançant la regla de Laplace i altres tècniques de recompte; probabilitat simple i composta. Esdeveniments dependents i independents; probabilitat condicionada.
- 1r batx. Social: esdeveniments. Assignació de probabilitats a esdeveniments mitjançant la regla de Laplace i a partir de la seva freqüència relativa. Axiomàtica de Kolmogorov; aplicació de la combinatòria al càlcul de probabilitats; experiments simples i compostos. Probabilitat condicionada. Dependència i independència d'esdeveniments.
- 2n batx. Social: aprofundiment en la Teoria de la Probabilitat; assignació de probabilitats a esdeveniments mitjançant la regla de Laplace i a partir de la seva freqüència relativa; experiments simples i compostos. Probabilitat condicionada. Dependència i independència d'esdeveniments.
- 1r batx. Científic: distribucions condicionades; independència de variables estadístiques.

³ Es té en compte també en cas que s'expliqués de manera general l'activitat a 4t. Si no, serien els dos darrers punts.

- 2n batx. Científic: esdeveniments. Assignació de probabilitats a esdeveniments mitjançant la regla de Laplace i a partir de la seva freqüència relativa; experiments simples i compostos. Probabilitat condicionada. Dependència i independència d'esdeveniments.

S'ha preferit descriure únicament els continguts del bloc de probabilitat, a causa que es faria molt densa la descripció i l'objectiu principal és mostrar com s'adequa l'activitat a tots els cursos. En qualsevol cas, la interpretació de dades estadístiques, l'ús de noves tecnologies i la presa de decisions formen part dels continguts del Bloc de Processos de tots els nivells.

Competències. CM1.2, CM1.4, CM1.5, CM1.7, CM4.1 i CM4.2.

Material. És necessari tenir unes quantes baralles franceses. També serà convenient tenir paper i bolígraf per apuntar. Si l'activitat es realitza en el centre, l'ús del projector és convenient per mostrar alguns dels càlculs.

Metodologia. Ens plantejam realitzar tres estratègies metodològiques distintes en l'àmbit de la probabilitat (Leon, 2019). Aquestes estratègies venen donades a partir d'una idea principal: descriure un joc probabilístic basat en el pòquer tradicional. Temps aproximat: 15-20 minuts a Ciència per a Tothom, 1 sessió a classe.

1. A la classe de 2n de batxiller social. Descriurem el joc, realitzarem grups de jocs experimentant amb la taula de freqüències de les distintes opcions, juntament amb les probabilitats condicionades de guanyar o perdre depenent del contingut de la nostra mà i explicarem el procediment de càlcul de les distintes probabilitats, mostrant endemés el seu càlcul computacional.

2. Al primer dia de Ciència per a tothom. S'explicarà la dinàmica del joc, es mostrarà una taula amb les distintes probabilitats i ells apuntaran les seves mans i la presa de decisions, indicant si els ha anat bé o no.
3. Al segon i tercer dia de Ciència per a tothom. Es realitzarà de manera anàloga a la segona metodologia descrita, amb la diferència que es tendrà l'anàlisi estadística dels dies anteriors i els participants podran veure els resultats.

D'ara endavant, anomenarem les tres metodologies anteriors com a estratègies metodològiques 1, 2 i 3, respectivament. El marc teòric d'aquest treball se centra en distints camps: el biaix de raonament com a prejudicis cognitius, la competència de resolució de problemes de probabilitat i l'ús d'un esquema probabilístic.

Criteris d'avaluació. Les activitats de Ciència per a Tothom no són avaluable. Ara bé, hi ha una versió que es durà a terme a l'institut i aquesta sí que admet una avaluació amb uns criteris ben fixats. L'activitat de classe està pensada per a 2n de batxillerat, tant el social com el científic.

Els criteris són: assignar probabilitats a esdeveniments aleatoris en experiments simples i compostos, utilitzant la regla de Laplace en combinació amb diferents tècniques de recompte (diagrames d'arbre) i l'axiomàtica de la probabilitat, així com a esdeveniments aleatoris condicionats, en contextos relacionats amb el món real, i emprar els resultats numèrics obtinguts a la presa de decisions.

Eines d'avaluació. A causa de la complexitat de l'activitat, és preferible que el professor faci de guia a tota l'activitat i realitzi l'avaluació a partir de l'observació, considerant la participació de l'alumne i la seva capacitat d'abstracció i seguiment.

En qualsevol cas, com s'ha comentat abans, només s'avaluarà l'activitat a l'aula, i no a Ciència per a Tothom.

Enunciat. Es planteja un pòquer simplificat amb 17 cartes: 4J, 4Q, 4K, 4A i 1 jòquer. Per a cada una de les lletres hi haurà una carta de cada color i el jòquer funcionarà com a comodí, tant de color com de nombre. Les normes del pòquer són:

- Es fan partides 1 contra 1. Cada un dels participants rebrà 5 cartes.
- L'escala de prioritats segueix sent la mateixa que en el joc original.

Cada alumne haurà d'apuntar abans a la fitxa del joc (vegeu annex "Ciència per a Tothom"): què ha obtingut, si creu que pot guanyar, i qui ha guanyat. Els alumnes tendran a disposició seva unes taules amb les distintes probabilitats de cada tipus de jugada, endemés d'unes probabilitats condicionades (vegeu Annex "Ciència per a Tothom").

Comentaris. Aquesta activitat està enfocada en dues direccions: la primera com una activitat per a la classe i la segona com una activitat per a Ciència per a Tothom. Depenent de l'estratègia metodològica, es treballarà (respectivament):

1. En aquest cas, a l'enunciat genèric se li hauria d'afegir que es comparés amb els resultats teòrics obtinguts computacionalment. (vegeu annex "Ciència per a Tothom".)
2. Al primer dia de Ciència per a Tothom, només es farà el joc part dels alumnes, es discutiran els resultats obtinguts i es farà una recollida d'informació.
3. Als altres dies de Ciència per a Tothom, es farà el mateix que el primer dia, però a la vegada, a l'explicació dels alumnes s'afegirà la comparativa entre

les dades estadístiques dels dies anteriors i la comparativa amb la probabilitat teòrica.

Atenció a la diversitat. En aquest cas, l'activitat funciona millor si els participants coneixen el joc de cartes. En cas contrari, es perdria molt de temps. Endemés, podem tenir alumnes que els costi entendre regles. En aquest cas, sempre podem optar per posar-los de dos en dos. En qualsevol cas, es mantindria la idea de l'1 contra 1, ja que els dos jugadors funcionarien com a un.

Aquesta activitat a Ciència per a Tothom es faria amb ràtios molt reduïdes i, per tant, serà fàcil controlar possibles problemes. A l'aula de batxillerat, el professor farà de guia i ajudarà a qui calgui per desenvolupar correctament l'activitat.

3.7. Altres recursos

En aquest apartat afegim uns recursos de probabilitat més genèrics. En aquest cas, es descriurà el recurs de manera breu i se'n detallarà un exemple d'activitat de cada un d'ells als annexos corresponents.

Dan Meyer

A la pàgina de Dan Meyer podem trobar molts de recursos matemàtics de moltes matèries. El material d'aquesta pàgina tracta d'unes activitats pensades a fer en tres actes.

1. El primer acte és la visualització d'un vídeo. A partir d'aquest vídeo, l'alumne s'ha de fer unes preguntes que puguin ser d'interès.
2. El segon acte és la cerca d'informació que l'alumne pugui considerar interessant o important per resoldre les preguntes. En general, la informació disponible la tindrà el professor i aquest els l'anirà donant així com la vagin demanant, si és que es tracta d'informació rellevant.

3. El tercer acte és la resolució del problema pensat. En general, la resolució ve donada també per un vídeo.
4. Finalment, si es vol plantejar, molts de continguts tenen “seqüeles”, que serveixen per aprofundir en el contingut el qual s’ha treballat, o inclús de vegades relacionar-ho amb altres continguts.

Aquest contingut se’ns van presentar al màster de professorat en diverses assignatures, com Metodologia i Recursos en el Procés d’Ensenyament i Avaluació a l’Àrea de Matemàtiques.

Els vídeos de Dan Meyer van molt bé per introduir un tema o inclús per dotar d’una importància pràctica a alguns continguts matemàtics. Ara bé, la presentació d’aquests continguts ha d’estar molt ben elaborada i pensada pel professor, perquè la conducció sigui el més nítid possible i s’empri una quantitat de temps no massa extensa.

En el cas de probabilitat, per exemple, es podria fer servir el vídeo de “Royal Flush”, en el qual es planteja un problema de cartes en tres actes. A l’annex “Dan Meyer” es fa una explicació detallada del problema.

GeoGebra

El GeoGebra torna a ser una eina genèrica que conté molts de recursos per a moltes branques. Dins la probabilitat trobam, per exemple, material interactiu, ordenat per distintes categories.

El cas de GeoGebra com eina de suport és bastant usual i, de fet, hi ha molts d’estudis que xerren de la utilitat del programari. Un exemple és Arbain, N., & Shukor, N. A. (2015), on es comenta com el GeoGebra pot beneficiar l’aprenentatge dels estudiants i donar varietat a les classes. També trobam Li (2007), on trobam referències de com d’influent són els continguts tecnològics.

L'ús de material en línia motiva a l'alumne i el dota d'eines d'aprenentatge pel seu propi desenvolupament. Els alumnes mateixos ho consideren més eficient, mentre que encara es poden trobar professors propensos a evitar aquestes tecnologies i emprar mètodes més tradicionals, o bé dedicar les tecnologies principalment a activitats complementàries per alumnes avançats.

A l'annex "GeoGebra", trobam un exemple d'aplicació dins l'àrea de la probabilitat.

Desmos

El Desmos és també una gran eina d'aprenentatge, amb molts de recursos, activitats i jocs en totes les àrees. Té un ús bastant similar al GeoGebra i, per tant, tots els avantatges que s'extreuen d'un, també hi són a l'altre. A l'annex "Desmos" es troba un exemple d'activitat que es pot realitzar a través de la pàgina.

Jocs amb probabilitat

Un altre recurs pot ser emprar un joc on figurin elements probabilístics. Són molts de jocs que tenen aquests elements, com poden ser el parxís, molts jocs de cartes, etc. En especial, un joc extensament conegut és el pescamines. És un joc bastant idoni per treballar la probabilitat, l'estadística i la lògica. A l'annex "Jocs amb probabilitat", hi ha una proposta d'activitat a través de material manipulatiu.

Paradoxes

L'ús de paradoxes com a eina d'aprenentatge també és molt freqüent i està molt estudiat per molts d'autors en la didàctica de les matemàtiques. Paradoxes com la del Monty Hall o la paradoxa de Simpson resulten ser recursos molt emprats. A l'annex "Paradoxes" es pot trobar un exemple d'aplicació a una aula, en aquest cas, d'una proposta centrada a 2n de batxillerat.

4. Conclusions

En aquest treball s'ha fet un estudi respecte a la probabilitat en els cursos de batxillerat. Aquest estudi conté, per una banda, una anàlisi dels distints ensenyaments del bloc en distints llocs del món i, per l'altra, un seguit de propostes d'activitats dins aquest àmbit.

L'ensenyament de la probabilitat està incorporat ja a tots els currículums esmentats, encara que no hi ha un consens en el moment d'introduir aquests continguts. Igualment, la majoria coincideix en el fet que és una àrea de les matemàtiques actual, molt relacionada amb el nostre dia a dia i que cal treballar-la per tenir una societat ben formada.

Les propostes realitzades són totes basades en elements curriculars. La metodologia és la mateixa que menciona el currículum de les Illes Balears, basada en contextos reals, la història de les matemàtiques, materials TIC i materials manipulatius. Ara bé, en general hi ha molt de material divers i existent, però està enfocat principalment als primers cursos de secundària. Sembla que no es realitzen aquestes propostes a batxillerat, sinó que se cerca la resolució directa de problemes, sobretot al 2n curs, a causa de les proves d'accés a la universitat.

En definitiva, en aquest treball s'ha proposat treballar la probabilitat a batxillerat, cercant principalment la motivació, la participació i l'interès de l'alumne i deixant de banda l'ensenyament clàssic de problemes complexos i descontextualitzats.

5. Referències

- Arbain, N., & Shukor, N. A. (2015). The Effects of GeoGebra on Students Achievement. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 172(2007), 208–214. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.01.356>
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, RELIME, 8(3),247-263. ISSN: 1665-2436. Extret dia 31 de Març del 2020, a partir de <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=335/33508302>
- Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños. ¿Qué podemos aprender de la investigación? Atas Do III Encontro de Probabilidades e Estatística En La Escuela. Braga: Centro de Investigación En Educación. Universidad Do Minho, 1–13. Extret dia 7 d’Abril del 2020, a partir de <https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/1Batanero.pdf>
- Batanero, C. (2016). Posibilidades y retos de la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria. *Curem* 6, 24–31. Extret dia 31 de Març del 2020, a partir de <https://semur.edu.uy/curem6/actas/pdf/48.pdf>
- Calvo, C., Deulofeu, J., Jareño, J., & Morera, L. (2016). Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria obligatoria. *Madrid: Editorial Síntesis*.

Castellanos, Norma, Luis Enrique Morga, América Castellanos (2012). *Educación por competencias: hacia la excelencia en la educación superior*. México: Red Tercer Milenio.

Contreras, J. & Cañadas, G. & Serrano, M. & Batanero, C. (2012). La paradoja de Simpson. *SUMA*. 71. 27-34.

Decret 34/2015, de 15 de maig, pel qual s'estableix el currículum de l'educació secundària obligatòria a les Illes Balears, *Boletín Oficial del Estado*, 73, de 16 de maig de 2015, 25016 a 25302. Extret dia 25 de Març del 2020, a partir de

http://weib.caib.es/Normativa/Curriculum_IB/versio_consolidada/Versio_consolidada_Decret_342015_ESO.pdf

Decret 35/2015, de 15 de maig, pel qual s'estableix el currículum de l'educació secundària obligatòria a les Illes Balears, *Boletín Oficial del Estado*, 73, de 16 de maig de 2015, 25303 a 25710. Extret dia 25 de Març del 2020, a partir de

http://weib.caib.es/Normativa/Curriculum_IB/versio_consolidada/Versio_consolidada_Decret_352015_Batxillerat.pdf

Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya. (2008). Decret de Batxillerat LOE. *Dog*, 5183, 59055-59062 59117-59119.

Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya. (2013). Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic. *Identificació i desplegament de l'educació secundària obligatòria*.

Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya. (2015). Decret 187/2015. *Dogc*, Núm 6945(Disposició), 305.

<https://doi.org/CVE-DOGC-A-15237051-2015>

Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya. (2015). Ordenació dels ensenyaments de l'educació primària. Diari Oficial de La Generalitat de Catalunya, 6900, 1–136.

Desmos Graphing Calculator (2015). Extret dia 9 de Juny del 2020, a partir de <https://www.desmos.com/>

Fischbein (1975). The intuitive sources of probabilistic thinking in children. Dordrecht: Reidel.

GeoGebra Online. Extret dia 9 de Juny del 2020, a partir de <https://www.GeoGebra.org/>

Institut d'Estadística de les Illes Balears (IBESTAT). Extret dia 31 de Març del 2020, a partir de <https://ibestat.caib.es/ibestat/inici>

Irmgard Kneissler (1989). Origami, Papel plegado. Ediciones CEAC.

La Moncloa. G.d.E. Extret dia 14 de Juny de 2019, a partir de <https://www.lamoncloa.gob.es/Paginas/index.aspx>

Meyer, D. 3acts. Extret dia 9 de Juny del 2020, a partir de <https://blog.mrmeyer.com/category/3acts/>

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics, Reston, VA; NCTM. <http://standards.nctm.org/>.

Pajares, A.; Tomeo, V. (2009). Enseñanza de la Estadística y la Probabilidad en Secundaria: experimentos y materiales. En M. J. González; M. T. González y J. Murillo (eds.), Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XIII Simposio de la SEIEM. Santander.

- Parada, F. L., Distrital, U., & José, F. (2019). Ambiente virtual al resolver situaciones bajo incertidumbre. Experiences of the self-validation process in a virtual environment when solving uncertainty situations. 32, 732–740.
- Piaget, J., y Inhelder, B. (1951). La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant. Paris: Presses Universitaires de France.
- Piemont, I. (1993). Matemàtiques : postes didàctiques. Editorial EUMO.
- Pierce, R. y Chick, H. (2011). Teachers' beliefs about statistics education. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), Teaching statistics in school mathematics — Challenges for teaching and teacher education (pp. 151-162). New York: Springer.
- Qing Li. (2003). Student and Teacher Views About Technology: A Tale of Two Cities? *Journal of Research on Technology in Education*, 39(4), 377–397.
- Rodríguez Bravo, Marcos Fco. (2015). Características del sistema educativo estonio / estonian education system features. 1–10.
- Ruiz, J. (2013). Estudio comparativo de los currículos de probabilidad y estadística español y americano. 265–272.
- Takahashi, A., Watanabe, T., & Yoshida, M. (2008). English Translation of the Japanese Mathematics Curricula in the Course of Study.
- The Novel Coronavirus Pneumonia Emergency Response Epidemiology Team. The Epidemiological Characteristics of an Outbreak of 2019 Novel Coronavirus Diseases (COVID-19) — China, 2020[J]. *China CDC Weekly*, 2020, 2(8): 113-122. Extret dia 26 de Març del 2020, a partir de <http://weekly.chinacdc.cn/en/article/id/e53946e2-c6c4-41e9-9a9b-fea8db1a8f5>

6. Bibliografia

Juan Verdoy, P., Beltrán, M. J., & Peris, M. J. (2015). Problemes resolts de probabilitat i inferència aplicats a les ciències socials.

Vidal, Maria Barceló, Miquel Mayol, Josep Lluís Pol, D. R. (n.d.). 95 propostes per a treballar l'estadística i la probabilitat a l'ESO.

OCDE (2019). Informe PISA 2018.

Child Mind Institute (2020). Extret dia 18 de Juny de 2019, a partir de <https://childmind.org/about-us/>

Annex 1: Elements del Currículum

A la següent taula es troben els objectius específics que apareixen en el currículum de les Illes Balears i, a més, en feim menció al treball. Per a la seva referenciació, s'escriu l'abreviatura de la referència del curs seguit de l'objectiu específic. Per exemple, 12E2 faria referència a l'objectiu específic dos de l'etapa de 1r-2n d'ESO.

Curs	Ref	Objectius Específics
1r-2n d'ESO	12E	2. Progressar en l'adquisició d'habilitats de pensament matemàtic, com analitzar i investigar, interpretar, formular i comunicar de manera matemàtica, usant les representacions adequades, fenòmens i problemes en diferents contextos. 13. Reconèixer situacions d'incertesa, i valorar i usar la probabilitat com a mesura d'aquesta incertesa i per superar prejudicis habitualment associats a algunes d'aquestes situacions.
3r-4t d'ESO Aplic.	EAp	
3r-4t d'ESO Acad.	EAc	
1r-2n Batx CCSS	BS	2. Identificar la possibilitat de matematització de situacions problemàtiques de la realitat, plantejar i resoldre el problema mitjançant l'ús de les eines i els models matemàtics adients, i interpretar les solucions en el context original. 3. Desenvolupar, en la forma d'afrontar els problemes de la vida quotidiana, actituds i maneres inherents a l'activitat matemàtica, com la feina sistemàtica, la constància, la reflexió sobre les decisions preses i els errors comesos o la capacitat de canviar el punt de vista. 4. Desenvolupar una actitud positiva davant la resolució de problemes i les situacions desconegudes, augmentar l'autoestima i la confiança en les pròpies capacitats, i superar bloqueigs i inseguretats. 5. Emprar les eines tecnològiques adequades tant per fer diferents tipus de càlculs, representacions i simulacions, com per cercar, analitzar i seleccionar informació, elaborar documents propis i exposar-los o compartir-los, si és el cas, ja sigui per resoldre situacions problemàtiques o per al mateix procés d'aprenentatge. 6. Adquirir i millorar tècniques de resolució de problemes, des de la lectura comprensiva de l'enunciat i les estratègies de resolució fins a la revisió del

		<p>procés seguit, i incorporar al llenguatge les formes d'expressió que permetin explicar raonadament aquest procés de manera clara i precisa.</p> <p>7. Planificar processos d'investigació a partir de contextos de tipus social, econòmic, històric, geogràfic, artístic o altres; practicar les estratègies de la investigació científica per dur-los endavant, com l'experimentació, l'aplicació de la inducció i la deducció, la formulació i l'acceptació o el rebuig de conjectures o la comprovació de resultats, i elaborar l'informe científic corresponent amb el rigor i la precisió adequats.</p> <p>9. Emprar diferents tipus de nombres i les eines algebraiques adequades per recollir, transformar i intercanviar informació, fer estimacions raonables, i plantejar i resoldre problemes en contextos reals, un cop traduïdes les situacions expressades en llenguatge usual al llenguatge algebraic o al gràfic.</p> <p>11. Descriure i comparar conjunts de dades procedents de contextos relacionats amb l'economia i altres fenòmens socials, interpretar la possible relació entre ells mitjançant els paràmetres i les eines estadístiques corresponents, interpretar amb actitud crítica informacions estadístiques dels mitjans de comunicació, la publicitat i altres àmbits, i estimar paràmetres desconeguts d'una població usant la inferència estadística.</p> <p>13. Incorporar al vocabulari propi elements del llenguatge matemàtic per expressar-se oralment i per escrit en contextos en què és necessària una comunicació científica correcta.</p>
1r-2n Batx	BC	<p>2. Identificar la possibilitat de matematització de situacions problemàtiques de la realitat, plantejar i resoldre el problema mitjançant l'ús de les eines i els models matemàtics adients, i interpretar les solucions en el context original.</p> <p>3. Desenvolupar, en la forma d'afrontar els problemes de la vida quotidiana, actituds i maneres inherents a l'activitat matemàtica, com la feina sistemàtica, la constància, la reflexió sobre les decisions preses i els errors comesos o la capacitat de canviar el punt de vista.</p> <p>4. Desenvolupar una actitud positiva davant la resolució de problemes i les situacions desconegudes, augmentar l'autoestima i la confiança en les pròpies capacitats, i superar bloqueigs i inseguretats.</p> <p>5. Emprar les eines tecnològiques adequades tant per fer diferents tipus de càlculs, representacions i simulacions, com per cercar, analitzar i seleccionar informació, elaborar documents propis i exposar-los o compartir-los, si és el cas, ja sigui per resoldre situacions problemàtiques o per al mateix procés d'aprenentatge.</p> <p>6. Adquirir i millorar tècniques de resolució de problemes, des de la lectura comprensiva de l'enunciat i les estratègies de resolució fins a la revisió del</p>

	<p>procés seguit, i incorporar al llenguatge les formes d'expressió que permetin explicar raonadament aquest procés de manera clara i precisa.</p> <p>7. Planificar processos d'investigació, practicar les estratègies de la investigació científica per dur-los, endavant, com l'experimentació, l'aplicació de la inducció i la deducció, la formulació i l'acceptació o el rubig de conjetures o la comprovació de resultats, i elaborar l'informe científic corresponent amb el rigor i la precisió adequats.</p> <p>9. Emprar diferents tipus de nombres i les eines algebraiques adequades per recollir, transformar i intercanviar informació, fer estimacions raonables, i plantejar i resoldre problemes en contextos reals, un cop traduïdes les situacions expressades en llenguatge usual al llenguatge algebraic o al gràfic.</p> <p>11. Descriure i comparar conjunts de dades procedents de contextos científics o de l'entorn, interpretar la possible relació entre ells mitjançant els paràmetres i les eines estadístiques corresponents, i interpretar amb actitud crítica informacions estadístiques dels mitjans de comunicació, la publicitat i altres àmbits.</p> <p>13. Incorporar al vocabulari propi elements del llenguatge matemàtic per expressar-se oralment i per escrit en contextos en què és necessària una comunicació científica correcta.</p>
--	--

A la següent taula, trobam ara els acompliments que s'han emprat al llarg del treball. Cada acompliment té associat un indicador, un descriptor i una abreviatura. Aquests acompliments s'han extret a partir dels acompliments proposats pel Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya (2013).

INDICADOR (Dimensió)	DESCRIPTOR		ACOMPLIMENT
Resolució de problemes	1. Traducció a llenguatge matemàtic un problema o una representació matemàtica emprant diagrames, models, símbols i variables	CM1.1	Comprendre un problema: assoliment del contingut, simplificació dels elements, entendre què dona l'enunciat i que es demana.
		CM1.2	Identificar els aspectes matemàtics del problema.
		CM1.3	Triar representacions adequades.
	2. Usar conceptes,	CM1.4	Utilitzar amb agilitat i soltura els continguts

	eines i estratègies matemàtiques per a la resolució de problemes		matemàtics adequats.
		CM1.5	Considerar el context en què esta plantejat el problema: que el model matemàtic s'adeqüi a la situació.
	3. Tenir una actitud de recerca vers un problema, emprant distintes estratègies per abordar-lo	CM1.6	Confiar en les pròpies capacitats matemàtiques. Perseverar i mantenir un treball metòdic. Entendre que existeixen distintes mètodes per a la resolució de problemes.
	4. Generar preguntes d'aspecte matemàtic i plantejar-se problemes	CM1.7	Entendre que hi ha elements del nostre entorn que es poden traduir al llenguatge matemàtic i ser capaç de fer-ho. Respondre a problemes relacionats amb l'entorn a partir d'aquesta representació.
Raonament i prova	1. Construir, contrastar i expressar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques	CM2.1	Argumentar sobre: - Propietats d'objectes matemàtics. - Relacions entre conceptes. Emprar algorismes, construccions, patrons i proporcions. Emprar procesos de raonament: contraexemples, recursió, deducció, inducció. Interpretar objectes matemàtics: taules, gràfics, símbols, anàlisi de dades.
	2. Utilitzar el raonament matemàtic en entorns no matemàtics	CM2.2	Emprar raonaments algebraics, estadístics, mètrics, numèrics i utilitzar el llenguatge matemàtic en situacions de l'entorn. Identificar elements propers amb elements matemàtics. Treballar el pensament i raonament matemàtic, emprar el llenguatge matemàtic i fer ús de representacions matemàtiques a altres disciplines, per tal de traslladar el raonament matemàtic dins cada matèria i ajudar a assolir els coneixements d'aquestes matèries.
Connexions	1. Emprar les relacions que existeixen entre les distintes parts de les matemàtiques per analitzar situacions i raonar	CM3.1	Relacionar conceptes dels distintes temes i relacionar els procediments amb els conceptes implicats. Unir conceptes que estan relacionats a través de raonaments matemàtics. Connectar idees transversals i relacionar els blocs de continguts.
	2. Identificar les matemàtiques	CM3.2	Associar estructures matemàtiques o models a contextos quotidians o de distintes

	relacionades en situacions, tant properes com acadèmiques, i cercar situacions que es puguin relacionar amb les matemàtiques		disciplines, més enllà de la resolució de problemes extrets del món real. Saber de l'existència de models matemàtics diversos.
Comunicació i representacions	1. Saber expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió i comprendre les idees dels altres	CM4.1	Ser capaç de comprendre i expressar idees matemàtiques tant de manera oral com per escrit. Ser capaç de descriure, explicar, justificar, interpretar, argumentar; primerament, a partir del llenguatge verbal. A mesura que es va avançant en el procés s'afegeix l'ús del llenguatge matemàtic: ús de símbols, gràfics, figures, taules, esquemes,.. Finalment, aquesta competència s'assoleix quan, de manera natural en la vida quotidiana, s'utilitza la terminologia matemàtica apresada.
	2. Fer ús de la comunicació i el treball col·laboratiu per compartir i construir els coneixements a través d'idees matemàtiques	CM4.2	Ser capaç de presentar el raonament o la solució aconseguit una vegada entès un concepte matemàtic o resolt un problema. Comunicar i construir arguments i explicacions en el context del problema. Raonar i criticar el model emprat. Generar preguntes que permetin avançar en el procés de construcció i ampliació del pensament matemàtic.
	3. Triar i emprar diverses tecnologies per tal de mostrar i gestionar informació, i estructurar i visualitzar idees o processos matemàtics	CM4.3	Usar eines de mesura, cercadors d'Internet, editors d'equacions i de diagrames. Saber emprar eines de càlcul per treballar els continguts; càlcul mental, estimacions, algorismes, comprovacions de resultats, simplificacions d'operacions complexes. A més, Usar programes per fer gràfics estadístics i funcionals, els quals permeten la interactivitat i mostren la connexió entre fórmula, taula i gràfica. Manipular programes de geometria dinàmica que simplifiquin l'estudi de les figures geomètriques de dues i tres dimensions: característiques, propietats i processos de construcció.

Annex 2: La classe com a conjunt

A continuació, es mostra l'eina d'avaluació per a l'activitat "La classe com a conjunt". En aquest cas, cal marcar el grau d'assoliment del conjunt al qual pertany i, per altra banda, si ha ajudat els companys amb la classificació del conjunt.

Exercici	Veig ràpid si hi pertany o no	Tard en entendre si pertany al conjunt	No m'he classificat correctament
A, B, C			
$A \cup B$			
$A \cap B$			
C'			
$A \cap C'$			
Proposta			

Llavors, l'alumne realitzaria una autoavaluació de l'activitat, valorant si s'ha classificat a cada exemple i com de ràpida ha estat la seva reacció, juntament amb la seva capacitat d'ajuda si s'ha donat el cas.

Annex 3: Estudis de casos reals

A la següent figura es mostra la diana d'avaluació que es proposa per realitzar l'activitat d'“Estudis de casos reals”. En general, quan parlem de diana d'avaluació, també parlem de diana de coavaluació i, per tant, sempre que estiguin en grups, cada membre haurà de fer la seva pròpia diana, juntament amb una diana per a cada un dels companys del grup.

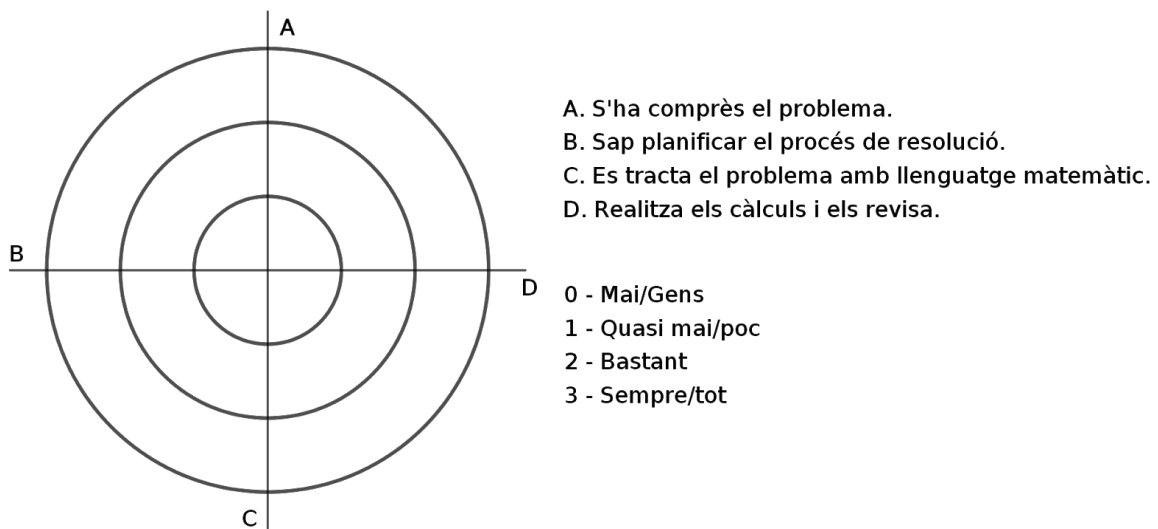


Figura: diana d'avaluació.

Aquestes dianes se'ns van presentar a l'assignatura de Disseny i Desenvolupament Curricular a l'Àrea de Matemàtiques.

Annex 4: Taula Covid-19

A la taula següent es reproduïxen part de la taula de l'article de la Covid-19.

Característiques	Casos confirmats, N (%)	Morts, N (%)
Total	44.672	1023
Franja d'edat		
0-9	416 (0.9)	-
10-19	549 (1.2)	1 (0.1)
20-29	3619 (8.1)	7 (0.7)
30-39	7600 (17.0)	18 (1.8)
40-49	8571 (19.2)	38 (3.7)
50-59	10008 (22.4)	130 (12.7)
60-69	8583 (19.2)	309 (30.2)
70-79	3918 (8.8)	312 (30.5)
≥80	1408 (3.2)	208 (20.3)
Sexe		
Home	22981 (51.4)	653 (63.8)
Dona	21691 (48.6)	370 (36.2)
Contacte amb Wuhan		
Si	31974 (85.8)	853 (92.8)
No	5295 (14.2)	66 (7.2)
Ns/Nc	7403	104
Afecció comòrbida		
Hipertensió	2683 (12.8)	161 (39.7)
Diabetis	1102 (5.3)	80 (19.7)

Malaltia cardiovascular	873 (4.2)	92 (22.7)
Malaltia respiratòria crònica	511 (2.4)	32 (7.9)
Càncer	107 (0.5)	6 (1.5)
Cap	15536 (74.0)	133 (32.8)
Ns/Nc	23690 (53.0)	617 (60.3)

Annex 5: PoliDiagrames de Venn

A continuació, es mostra la rúbrica per a l'activitat "PoliDiagrames de Venn". Per a la realització de la taula, s'han considerat els objectius, els continguts, els criteris i les competències esmentades.

Criteri	Molt bé	Bé	Regular	Malament
He resolt el problema emprant el que hem treballat a classe.	He utilitzat la Regla de Laplace i he assignat les probabilitats als esdeveniments correctament	He sabut assignar les probabilitats, però no està justificat, o bé, està justificat però hi ha errades de càlcul	He utilitzat la Regla de Laplace, però no està ben justificat i no està ben calculat	No he sabut assignar probabilitats
La solució és clara i precisa, i no escric de més ni relacion conceptes que no són part del problema.	La solució és clara i sense continguts de més.	La solució és clara, però hi ha càlculs innecessaris	La solució no és clara, encara que es pot seguir	La solució no és clara
He emprat el llenguatge adequat a la solució.	El llenguatge és correcte i adequat	El llenguatge és correcte i adequat, llevat d'una o dues paraules	El llenguatge és correcte i adequat de vegades	El llenguatge és incorrecte
Quan hem fet la feina de grups, els meus companys han entès el meu plantejament.	Els companys responen a la meva comunicació, encara que al principi de l'activitat em costés expressar-me	Els companys entenen el que vull dir, però m'he de tornar a explicar de tan en tant	Hi ha companys que m'entenen quan em repetesc, però d'altres no	Els companys no m'entenen
Quan hem fet la feina per grups, he escoltat i he participat amb el desenvolupament de l'activitat.	Escolt als companys i som constructiu	Escolt als companys, però de vegades em costa seguir el fil	Escolt als companys, però no ens entenem del tot	No escolt els meus companys
Identific els	Identific: figures	Identific dos o tres	Identific un dels	No identific

aspectes matemàtics del problema.	planes, taules, probabilitats, equacions, teoria de conjunts	dels aspectes anteriors	aspectes anteriors	cap dels aspectes anteriors
Ho he sabut relacionar amb els distints blocs que apareixen: probabilitat, estadística, geometria i àlgebra.	Identific: figures geomètriques amb equacions, taules de freqüència amb taules de contingència, relació entre la probabilitat i la geometria	Identific dos dels aspectes anteriors	Identific un dels aspectes anteriors	No identific cap dels aspectes anteriors
He sabut traduir al llenguatge matemàtic els elements del problema.	Responc correctament l'apartat 2 i el 4 i els argumenta	Responc els apartats 2 i 4, però no els argumenta o els argumenta a mitges	Responc algun dels apartats 2 o 4 de manera correcta	No responc bé els apartats 2 i 4

Annex 6: Truca un dau

A continuació, es mostra l'eina d'avaluació per a l'activitat "Truca un dau". En aquest cas, s'avalua cada un dels punts i es fa a partir d'una escala d'avaluació.

De cada un dels punts que s'ha de contestar de l'enunciat, l'alumne haurà mostrat com estan distribuïts els nombres del dau. A l'escala es mostrarà, per a cada apartat: si està bé amb raonament correcte; si està bé, però sense raonament; si no està bé, però ho ha intentat; si no ho ha intentat.

Llavors, el professor agruparia els alumnes en grups de 3 o 4, i cada membre del grup ha d'omplir la graella per a cada un dels altres. Després, el professor es dedicaria a agrupar les notes.

	Bé, amb raonament correcte	Bé, però no raonat o un raonament incorrecte	No està bé, però ho ha intentat	No ho ha fet	Propostes de millora
Dau 1					
Dau 2					
Dau 3					
Dau 4					
Dau 5					
Dau 6					

És important la diferència entre "bé, amb raonament correcte" i "bé, però amb raonament incorrecte". A matemàtiques, pot passar que els alumnes arribin a la solució correcta de l'exercici, però el raonament no sigui correcte. En aquest cas, l'alumne ha d'entendre que ha comès un error, igual d'important que si no hagués obtingut el resultat correcte i que, per tant, ha de rectificar.

Annex 7: Quin és injust?

A continuació, es mostra l'eina d'avaluació per a l'activitat "Quin és injust?". Es tracta en aquest cas d'una escala. A la graella s'especifica què s'avaluarà i tenim un espai per a cada sistema. A l'espai vendria l'avaluació del criteri descrit, tant a nosaltres com als nostres companys. És recomanable fer-ho amb nombres d'1 (malament) a 4 (correcte). Igualment, també es pot fer a partir d'una nota de 0 a 10 o com es consideri més oportú a partir de l'escala.

A l'apartat de comentaris es farien propostes de millora i de reflexió, sempre que els alumnes les trobin adients.






Criteri	Sist	Autoaval	Coaval			Comentaris Propis	Comentaris Companys
S'ha plantejat el problema per escrit.	1						
	2						
S'ha descrit el problema amb llenguatge matemàtic.	1						
	2						
S'ha emprat una representació adequada del problema (diagrama d'arbre, taula de contingència o forma de	1						
	2						




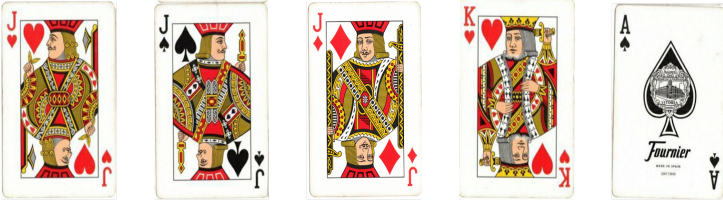

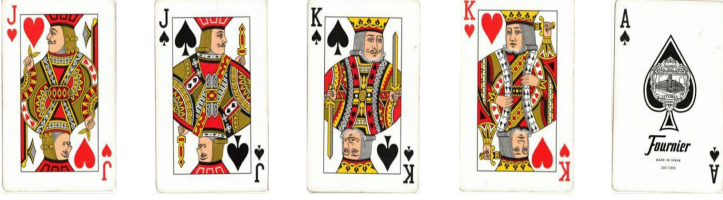
representació de la probabilitat visualment fàcil i espai mostal correcte).							
S'ha plantejat de diferents maneres el problema.	1						
	2						
La resolució està ben argumentada: - Si és injust, s'ha fet ús de contraexemples. - Si és just, s'ha demostrat.	1						
	2						











Cal dir que es poden plantejar altres problemes per a l'activitat; en aquest cas s'afegirien a la taula. En qualsevol cas, el temps de l'activitat pot variar, així com els continguts, objectius o competències i, per tant, s'hauria d'adequar la graella.

Annex 8: Ciència per a Tothom

Primer, es mostra taula amb les distintes combinacions de cartes i l'ordre de preferència (és a dir, quina mà és millor que l'altra).

Pos	Mà	Casos
1	Escala de Color	
2	Pòquer o repòquer	  
3	Full	

		
4	Color	
5	Escala	
6	Trio	 
7	Doble parella	

8	Parella					
9	Carta més alta					

En el nostre cas, hem posat per ordre de major valor a menor, de manera que, per exemple, el 3 guanya al 6; és a dir, el full guanya al color. També consideram sempre la combinació més gran possible que permet les cartes: per exemple, 2J, 1Q, 1K i 1 jòquer ens permet fer tant un trio com una doble parella, però l'associem sempre al que té més valor i, per tant, serà un trio.

S'ha de considerar que, en cas que els dos jugadors tinguin una mà del mateix nivell, no hi haurà cap mena de preferència: es considerarà un empat, independentment del color i dels nombres. A més, el pòquer i el repòquer els ficam dins el mateix nivell, per simplicitat.

A la figura següent, podem veure les probabilitats de cada tipus de mà i les probabilitats condicionades de guanyar, perdre o empatar, partint de la teva mà. Es pot observar una influència important en tenir o no el jòquer.

Mà	p(Mà)	p(Guanyar)	p(Perdre)
Escala de Color	0.0006	1	0
Pòquer	0.0394	1	0
Full amb jòquer	0.0814	0.9798	0.0202

Full sense jòquer i tenim tots els colors		0.9091	0.0909
Full sense jòquer, però no tenim tots els colors		0.8687	0.1313
Color	0	-	-
Escala	0.0408	0.9545	0.0455
Trio amb jòquer	0.3103	0.9354	0.0646
Trio sense jòquer		0.7752	0.2248
Doble parella	0.2293	0.4028	0.5972
Parella	0.2482	0.2386	0.7614
Carta més alta	0	-	-

A partir d'aquesta taula, els alumnes o participants hauran d'assabentar-se de fets estranys: que el trio sigui la combinació més probable, que tenir un jòquer és significativament avantatjós, que color i carta més alta no són successos possibles, entre altres. Dins la probabilitat de guanyar, també va inclosa la probabilitat d'empatar, per simplicitat.

Finalment, mostrem la graella que hauran d'emplenar els alumnes o participants, en la qual s'apunta la mà que li ha tocat, si és més convenient rendir-se i si la decisió presa ha estat bona.

Jugador 1	Jugador 2	Qui s'ha rendit?	Resultat	Ha acertat amb la decisió?
Mà	Mà	1r - 2n	Jugador o empat	1r - 2n
Full	Doble Parella	No - Sí	Jugador 1	Sí - Sí
...

La columna tres està a tall d'exemple. En cas d'empat, la decisió és correcta pel qui no es rendeixi. Igualment, en el tractament de les dades, es revisaria que els participants hagin emplenat correctament les dues darreres caselles, les quals es poden deduir de les 3 primeres.

Finalment, respecte a l'estratègia metodològica 1, és a dir, quan l'activitat està pensada per realitzar-se a classe, cal parar esment en dues coses:

- És interessant mostrar als alumnes el càlcul d'alguna probabilitat de la taula de probabilitats, particularment de columna $p(Mà)$ i que no siguin trivials. Per exemple, per trobar $p(Mà='parella')$ cal veure-ho com a 5 caselles on hem de posar cartes:

1 1	2 1	3 2	4 3	5 4
-----	-----	-----	-----	-----

El primer nombre de la casella representa la posició de la casella i el segon nombre l'n-èssim nombre distint que ha sortit (en el nostre cas, seran únicament figures). Per simplificar els càlculs suposarem que l'ordre de les figures importa, això és $2 < 3 < 4$ (els liles). Per tant,

Opcions 1 (1r): 4; opcions 1 (2n): 3; opcions 2: 4; opcions 3: 4; opcions 4: 4.

Formes de combinar els nombres en lila per a cada posició: $4+3+2+1$; (si el 1r 1 està a la 1a posició, tenim 4 opcions pel 2n 1; si està a la 2a, en tenim 3; si està a la 3a tenim 2; si està a la 4a en tenim 1).

Per associar 1,2,3,4 amb J,Q,K,A, tenim $4!$ formes de fer-ho.

Finalment, cal dividir entre la fracció de cartes que ens va quedant; $17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13$.

Ajuntant-ho tot treim:

$$\frac{(4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4) \times (4+3+2+1) \times (4!)}{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13} = 0.2482.$$

No són càlculs senzills de combinatòria i és clar que aquestes sessions s'han de preparar especialment perquè siguin les més àgils i clares possibles. També pot ajudar el càlcul computacional. El següent codi mostra com es faria el càlcul de totes les probabilitats amb R. És necessari la càrrega de la llibreria "arrangements".

```
library("arrangements")
cartas=paste0(rep(c("J","Q","K","A"),each=4),1:4)
cartas=c(cartas,"R")
aux=permutations(cartas,5)
clas_mano = function(x) {
  mano=substr(x, 1,1)
  if("R" %in% mano){
    if(length(unique(mano))==2){
      return("poker")
    }
    else if(length(unique(mano))==3){
      if(all(sort(table(mano),decreasing = TRUE)==c(3,1,1))){
        return("poker")
      } else {return("full")}
    }
    else if(length(unique(mano))==4){
      return("trio")
    }
    else {
      color <- substr(x,2,2)
      if(length(unique(color))!=5){
        return("escalera")
      } else {return("escalera_color")}
    }
  } else if(length(unique(mano))==2){
    if(all(sort(table(mano),decreasing=TRUE)==c(3,2))){
      return("full")
    }
  }
}
```



```

    } else{return("poker")}
  } else if(length(unique(mano))==3){
    if(all(sort(table(mano),decreasing=TRUE)==c(2,2,1))){
      return("doble_par")
    } else{return("trio")}
  }
  else{return("parella")}
}

```

Finalment, executaríem la funció i mostrariem la taula:

```

cuento_todos= apply(aux,1,clas_mano)
sort(table(cuento_todos)/npermutations(17,5), decreasing=TRUE)

```

trio	doble_par	parella	full	poker
0.310277957	0.279250162	0.248222366	0.081447964	0.039431157
escalera	escalera_color			
0.037491920	0.003878474			

Annex 9: Dan Meyer

La proposta que es fa de Dan Meyer serà la que trobam al següent enllaç:

<https://whenmathhappens.com/2015/03/09/royal-flush/>

De totes maneres, si hom és creatiu, pot fer la seva pròpia activitat Dan Meyer. És convenient emprar aquests vídeos com un material introductori i que, a més, es faci amb qualque freqüència entre distints temes. Com s'ha comentat al llarg del treball, les activitats que es proposen moltes vegades ajuden a l'aprenentatge de l'alumne.

Objectius. BC2, BS2.

Continguts del currículum.

- Bloc Processos, Mètodes i Actituds en Matemàtiques: utilitzar processos de raonament i estratègies de resolució de problemes, fent els càlculs necessaris i comprovant les solucions obtingudes.
- Bloc Probabilitat i Estadística: Esdeveniments: assignació de probabilitats a esdeveniments mitjançant la regla de Laplace i a partir de la seva freqüència relativa. Axiomàtica de Kolmogorov.

Competències. CM1.2, CM1.5 i CM1.7.

Material. En aquest cas, serà necessària la utilització d'un projector o d'un ordinador, per tal d'ensenyar als alumnes la simulació. La resta es pot fer a partir de paper i bolígraf. Temps aproximat: 20-25 minuts.

Metodologia. La metodologia es basa en la utilització de recursos TIC i la investigació i resolució de problemes. Són ells mateixos que, donat un context, es

faran la pregunta i hauran de cercar respondre-la, demanant la informació adequada per poder respondre-la.

Criteris d'avaluació. Assignar probabilitats a esdeveniments aleatoris en experiments simples i compostos, utilitzant la regla de Laplace; utilitzar processos de raonament i estratègies de resolució de problemes, fent els càlculs necessaris i comprovant les solucions obtingudes.

Eines d'avaluació. Com és l'alumne que investiga, ell mateix hauria d'autoavaluar-se a partir d'una rúbrica, on s'indicarien els continguts, els objectius, les competències i el grau d'assoliment.

Enunciat. Visualitzem tots plegats el vídeo del següent enllaç:

<https://www.youtube.com/watch?v=H2fi-69huw0>

- Acte 1. Quines preguntes trobes interessant fer-se? Podries fer una estimació d'aquest resultat?
- Acte 2. Quina informació és útil per resoldre aquest problema?
- Acte 3. Vegem la resolució al següent enllaç!

<https://www.youtube.com/watch?v=3LpimaCM2AU>

Comentaris. És important que tothom realitzi una estimació del resultat. El professor, en cap cas, ha de fer cap gest que pugui influenciar la decisió de l'alumne, per molt desbaratada que sigui la resposta. És clar que la informació que no serveixi no s'ha de donar. En concret. La informació que s'ha de donar són:

- Les cartes de tothom
- Les quatre cartes revelades
- I les cartes descartades.

Tota aquesta informació es troba a l'enllaç de l'activitat. Si es troba convenient, sempre es pot ampliar l'activitat amb seqüeles.

Atenció a la diversitat. En principi, aquesta activitat no precisa cap mena especial d'atenció a la diversitat. En general, l'únic problema podrien ser els cecs, però bastaria descriure el que va succeint a cada escena. En cas de tenir un alumne amb dificultats d'aprenentatge, sempre es pot anar més pausadament o parar-li més atenció.

Annex 10: GeoGebra

L'ús de GeoGebra en la probabilitat hauria d'estar pensat en activitats que des d'un enfoc estadístic. En el fons, la probabilitat d'un esdeveniment representa la proporció entre el nombre de vegades que ha succeït l'esdeveniment i el nombre total de repeticions de l'experiment. Ara bé, perquè s'hi aproxi, necessitam fer moltes repeticions d'aquest experiment. GeoGebra ens permet fer ràpidament aquestes repeticions.

Objectius. BC5, BC9, BS5 i BS9.

Continguts del currículum. Aquesta activitat es pot realitzar tant a 2n de batxillerat científic com a 1r i 2n de batxillerat de matemàtiques aplicades a les ciències socials. En concret, es treballen (per blocs):

- Bloc Processos, Mètodes i Actituds en Matemàtiques: utilització de mitjans tecnològics en el procés d'aprenentatge per: dissenyar simulacions i elaborar prediccions sobre situacions matemàtiques diverses.
- Bloc Probabilitat i Estadística: esdeveniments: assignació de probabilitats a esdeveniments mitjançant la regla de Laplace i a partir de la seva freqüència relativa. Axiomàtica de Kolmogorov. Experiments simples i compostos.

Competències. CM1.3, CM1.5 i CM4.3.

Material. En aquest cas, només serà necessari usar llapis i paper per escriure, i un projector per mostrar el GeoGebra. Si es vol fer més palpable pels alumnes i que ells mateixos experimentin, és convenient l'ús d'ordinadors.

Metodologia. L'activitat proposada amb GeoGebra fa ús de recursos TIC. D'aquesta manera, es procura jugar a través de l'experiència i la comprovació empírica dels resultats. Temps aproximat: 20-30 minuts.

Criteris d'avaluació. Emprar les eines tecnològiques adequades, de forma autònoma, fent càlculs estadístics, elaborant representacions gràfiques, recreant situacions matemàtiques mitjançant simulacions o analitzant amb sentit crític situacions diverses que ajudin a comprendre conceptes matemàtics o a resoldre problemes.

Eines d'avaluació. Com l'activitat és molt senzilla, bastaria l'observació per part del professor.

Enunciat. Entrau a l'enllaç

<https://www.GeoGebra.org/m/PucJknDN#material/xo5CTe1D>

I triau una de les simulacions següents. Per exemple, la de llençar dos daus.

1. Feis una taula o representació amb les distintes opcions que hi ha i els distintes resultats.
2. Calculau la probabilitat de cada succés elemental.
3. Posau en marxa el simulador. Mirau si es va atracant al resultat per un nombre de llançaments $N=100,200,500,1000\dots$

Comentaris. La simulació de llençar tres daus probablement és molt laboriosa i costi molt de temps. Probablement, convendria més evitar aquesta simulació.

També és interessant comentar que aquest tipus d'activitats són molt emprades i es recomana l'ús de simuladors com a forma alternativa d'entendre i consolidar el problema (Calvo, 2016).

Atenció a la diversitat. En aquest cas, no hi hauria d'haver gaires problemes. Els alumnes amb problemes de vista, sempre se'ls pot anar dient com va avançant el resultat estadístic. Per altra banda, els alumnes amb altes capacitats sí que podrien intentar de fer la simulació de tres daus.

D1\D2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Figura: llançament de dos daus D1 i D2, i la seva suma.

Annex 11: Desmos

L'ús de Desmos en la probabilitat, igual que el GeoGebra, està pensat en activitats des d'un enfocament estadístic i freqüentístic. A partir de Desmos, proposam una activitat guiada de les moltes que hi ha desenvolupades.

Objectius. BC5, BC9, BS5 i BS9.

Continguts del currículum. Aquesta activitat es pot realitzar tant a 2n de batxillerat científic com a 1r i 2n de batxillerat de matemàtiques aplicades a les ciències socials. En concret, es treballen (per blocs):

- Bloc Processos, Mètodes i Actituds en Matemàtiques: utilització de mitjans tecnològics en el procés d'aprenentatge per: dissenyar simulacions i elaborar prediccions sobre situacions matemàtiques diverses.
- Bloc Probabilitat i Estadística: esdeveniments: assignació de probabilitats a esdeveniments mitjançant la regla de Laplace i a partir de la seva freqüència relativa. Axiomàtica de Kolmogorov. Experiments simples i compostos.

Competències. CM1.1, CM1.2, CM2.1, CM3.1 i CM4.3.

Material. Serà necessari ús eines tecnològiques, com tauletes o ordinadors. Si és una activitat per a casa, en principi no caldria projector; si es fa a l'aula, estaria bé, una vegada que l'alumnat ha acabat de realitzar l'activitat, fer una descripció detallada de cada apartat. El problema pot ser si els alumnes tarden molt a realitzar l'activitat. En aquest cas, s'haurà de fer l'explicació en una altra sessió.

Metodologia. La metodologia tracta d'una activitat que fa ús de recursos TIC i es procura jugar a través de l'experiència i la comprovació empírica dels resultats. Temps aproximat: 30-45 minuts.

Criteris d'avaluació. Emprar les eines tecnològiques adequades, de forma autònoma, fent càlculs estadístics, elaborant representacions gràfiques, recreant situacions matemàtiques mitjançant simulacions o analitzant amb sentit crític situacions diverses que ajudin a comprendre conceptes matemàtics o a resoldre problemes.

Eines d'avaluació. Com els alumnes realitzen una fitxa, el millor seria realitzar una valoració de cada exercici a través de la coavaluació. Cada alumne rebria de manera anònima la fitxa d'un company i, a partir del seu raonament i comparació, corregiria la tasca del company. Després, el professor en faria una valoració de la correcció. Aquesta valoració vendria pautaada a través d'una escala d'avaluació.

Enunciat. Entrau a l'enllaç, realitzau la fitxa i contestau a les preguntes que se us demanen.

<https://student.desmos.com/activitybuilder/student-greeting/5edecfd9a78bd92913769539>

Comentaris. En principi, serà necessari la creació d'un usuari i una contrasenya, almenys pel professor. L'activitat es recull de l'enllaç:

<https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/59233c9aefd17610dbbd684e>

Si es crea el compte i envia l'enllaç generat per compartir l'activitat, després el professor tindrà accés al resultat dels alumnes.

Aquesta activitat també la recomanen diversos autors, inclús realitzar-les amb més aprofundiment (Calvo, 2016).

Atenció a la diversitat. En aquest cas, no hi hauria d'haver gaires problemes. Els alumnes amb problemes de vista, sempre ho poden fer en grup, encara que l'activitat està pensada per realitzar-se individualment.

Annex 12: Jocs amb probabilitat

Un exemple de joc que pot anar molt bé per treballar la Regla de Laplace és el pescamines. En aquest cas, es tractaria de disposar d'un tauler i proposar unes configuracions de nombres, de manera que hagin de veure totes les combinacions possibles per a mines.

Objectius. BC2, BC3, BS2 i BS3.

Continguts del currículum. Els continguts d'aquesta activitat s'adequen molt bé tant al 2n de batxillerat científic com a 1r i 2n de batxillerat de matemàtiques aplicades a les ciències socials. En concret, es treballen (per blocs):

- Bloc Processos, Mètodes i Actituds en Matemàtiques: planificació del procés de resolució de problemes; anàlisi dels resultats obtinguts: coherència de les solucions amb la situació, revisió sistemàtica del procés, altres formes de resolució, problemes semblants.
- Bloc Probabilitat i Estadística: Esdeveniments: assignació de probabilitats a esdeveniments mitjançant la regla de Laplace i a partir de la seva freqüència relativa. Axiomàtica de Kolmogorov.

Competències. CM1.1, CM1.7 i CM4.2.

Material. Aquesta activitat es duu a terme a partir d'un material manipulatiu. Per tant, cal un tauler o quelcom que ens divideixi un pla en quadrats (en el cas de la imatge de la secció, s'ha fet ús d'un tauler d'escacs), unes fitxes que simbolitzarien les mines i uns papers que indiquin els nombres. Els papers que es mostren a les imatges estan plastificats, per tal que durin més i a la vegada poder escriure i esborrar nombres fàcilment.

Metodologia. L'activitat es tractaria de treballar-ho en grups de 3 persones, ja que es farà ús de taulers, fitxes i papers. Per tant, hi ha una part important de treball cooperatiu. Endemés, és una metodologia basada en un material manipulatiu i sobre un joc que molts d'ells hauran vist, ja que ve per defecte amb els sistemes operatius de Windows. Finalment, són ells mateixos que es creen el tauler i per tant ells mateixos es creen el problema i resolen el seu propi problema. Temps aproximat: 20-30 minuts; amb exposició, 2 sessions.

Criteris d'avaluació. Assignar probabilitats a esdeveniments aleatoris en experiments simples i compostos, utilitzant la regla de Laplace; utilitzar processos de raonament i estratègies de resolució de problemes, fent els càlculs necessaris i comprovant les solucions obtingudes.

Eines d'avaluació. Com treballen en grups, es podria avaluar a través d'una diana de coavaluació. També es podria realitzar una presentació d'un dels taulers pensats de cada grup, de forma que expliquin com ho han deduït, quines opcions de mines hi ha, perquè no n'hi ha més, etcètera. En aquest cas, l'exposició vendria pautaada a través d'una rúbrica i cada grup avaluaria als altres.

Enunciat. El pescamines és un joc clàssic que ve amb els sistemes operatius de Windows. L'origen i la finalitat del joc divergeixen bastant de l'estudi actual del joc. Disposau cada grup d'un tauler, amb unes fitxes i uns papers per escriure nombres. Es tracta que:

1. Trieu una regió del tauler i poseu els paperots en aquesta regió. A cada paper li heu de posar un nombre. Aquest nombre simbolitzarà les mines adjacents a aquesta posició, tant en costat com en diagonal. Pensau bé els nombres perquè doni joc!
2. Comptau quantes configuracions de mines possibles hi ha. Sabries dir la probabilitat de què hi hagi mina a cada quadrat?

3. Mirau de crear configuracions dels següents tipus: configuracions impossibles, configuracions on només hi ha una possibilitat, configuracions on hi ha exactament dues possibilitats, configuracions que tenguin mines independents unes d'altres.

Comentaris. Si es troba interessant, sempre es pot aprofundir en molts d'aspectes: la història del pescamines, l'objectiu original del joc, quin interès té ara, quins tipus de pescamines hi ha, estratègies del joc, etc.

Atenció a la diversitat. En aquest cas, com es fa per grups, qualsevol problema que pugui tenir un alumne quedaria bastant controlat. Si tenim un alumne ceg, en lloc de reescriure nombres, es pot posar fitxes d'altres formes damunt les graelles, les quals simbolitzarien el nombre de mines que hi ha adjacents a aquella graella.

Els alumnes amb altes capacitats, se'ls pot motivar amb graelles més elaborades o amb altres preguntes.

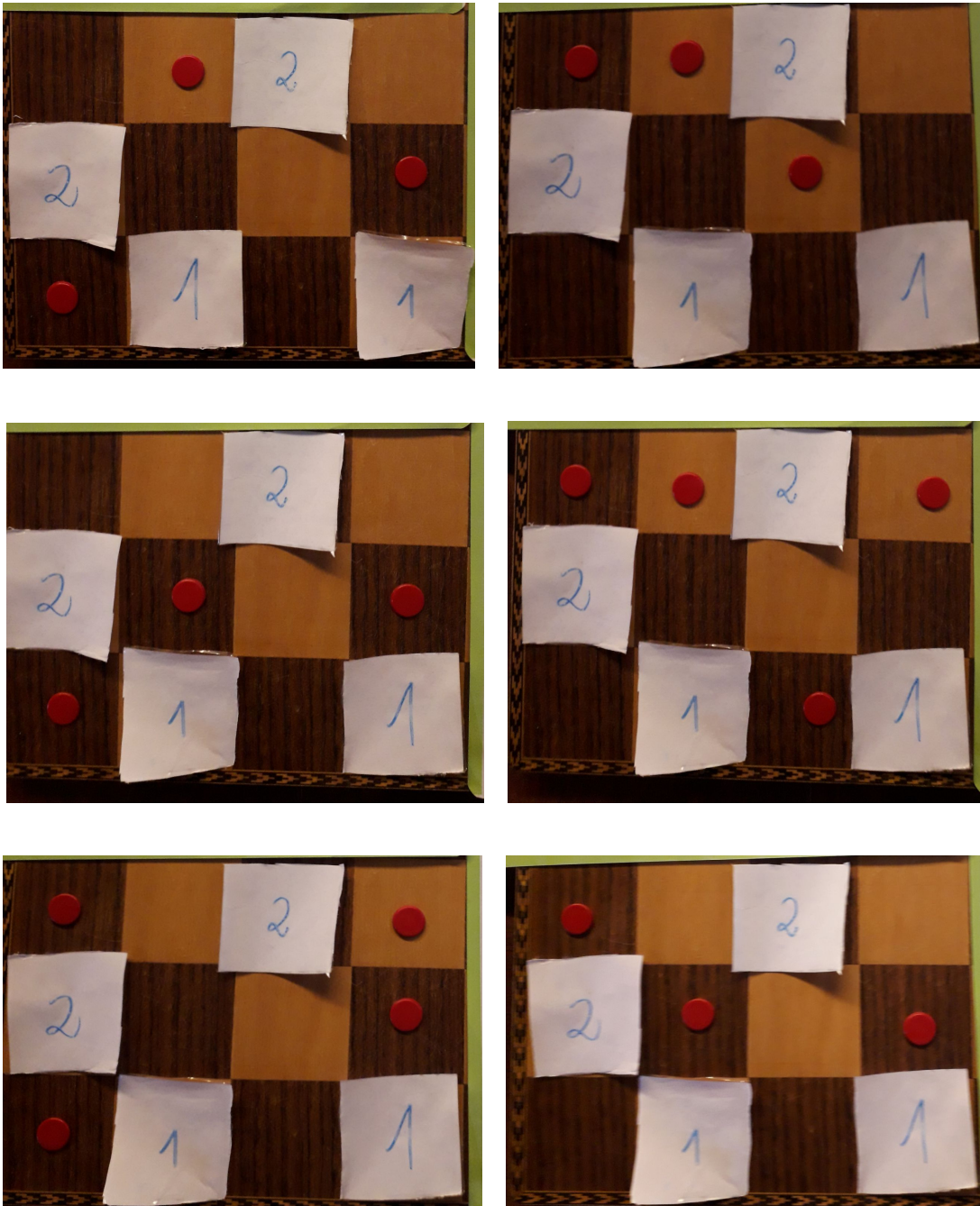


Figura: configuracions de mines possibles per a una configuració de nombres donada.

Annex 13: Paradoxes

Dins la probabilitat, és molt usual trobar-se en situacions aparentment paradoxals. Habitualment, això és a causa que la nostra intuïció no és del tot correcte, o bé no hem entès correctament allò que se'ns demanava o hem realitzat una interpretació errònia d'una informació donada o obtinguda.

La paradoxa de Simpson és un exemple molt emprat i està a l'ensenyament de la probabilitat i nosaltres proposam una activitat basada en ella. És un exemple clar de contextualitzar les matemàtiques amb la seva història i, alhora, amb una situació real. Tota la informació que empram està presa de Contreras (2012).

Objectius. BC11, BS11.

Continguts del currículum. En aquest cas, els continguts s'adequen millor als cursos de 2n de batxillerat, degut a que entrem ja amb probabilitats condicionades i una capacitat d'abstracció més elevada.

- Bloc Processos, Mètodes i Actituds en Matemàtiques: realització d'investigacions matemàtiques a partir de contextos de la realitat o contextos del món de les matemàtiques.
- Bloc Probabilitat i Estadística: Esdeveniments: experiments simples i compostos. Probabilitat condicionada. Dependència i independència d'esdeveniments.

Competències. CM1.1, CM1.3, CM1.5, CM1.11, CM2.1 i CM2.2.

Material. L'enunciat es projectarà o es passarà a través de fulls als alumnes. Els alumnes han de tenir a disposició seu paper i bolígraf i, com s'hauran de calcular proporcions bastant grans, serà convenient l'ús de calculadora.

Metodologia. En aquest cas, la metodologia es basa a situar als alumnes en un context real i històric de la teoria de la probabilitat. Temps aproximat: entre 30 minuts i una sessió.

Criteris d'avaluació. Planificar adequadament el procés d'investigació, tenint en compte el context en el qual es desenvolupa i el problema d'investigació plantejat; assignar probabilitats a esdeveniments aleatoris en experiments simples i compostos, utilitzant la regla de Laplace en combinació amb taules de contingència.

Eines d'avaluació. En aquest cas, l'observació directa del professor i la correcció de les fitxes.

Enunciat. Per comprovar l'efectivitat d'una cirurgia, dos hospitals A i B el posen en pràctica amb els pacients. Els pacients se'ls classifica com a pacients amb bona salut o delicats de salut.

Es sap que de l'hospital A, el nombre de pacients que s'han sotmès a la cirurgia són 2100, dels quals 600 delicats de salut i a l'hospital B són 800, on només hi ha 200 delicats. Dels pacients delicats, es sap que 57 han mort a l'hospital A i 8 a l'hospital B. Mentre que dels pacients sans, només han mort 6 a l'hospital A i 8 a l'hospital B.

1. Realitza tres taules de contingència. Una pel total de pacients, l'altra pels pacients amb bona salut i l'altre pels pacients delicats.
2. Troba les probabilitats d'haver mort: depenent de l'hospital; depenent de l'hospital i la seva condició de salut.
3. Trobes qualche succès estrany? Sabries explicar per què succeeix aquest fet?

Comentaris. És necessari una guia de cada una de les passes de l'enunciat. L'alumne ha d'arribar a veure que hi ha qualche fet paradoxal en o que, en circumstàncies normals, s'escapen d'allò que un espera. La reflexió ha d'anar dirigida en què el nombre total de pacients va variant depenent de l'hospital.

Atenció a la diversitat. Aquesta activitat no requereix un tractament específic concret. En tot cas, si un alumne necessita ajuda, el professor pot adequar la dificultat de l'activitat o pot ajudar com trobi necessari a l'alumne en el desenvolupament d'aquesta.