Universitat
de les Illes Balears

TREBALL DE FI DE MÀSTER

LA INTUÏCIÓ EN PROBABILITAT EN L'APRENENTATGE DE LES MATEMÀTIQUES

Àngela Sart Vizcaíno

Màster Universitari en Formació del Professorat

Especialitat de Matemàtiques

Any acadèmic 2021-22

INTUÏCIÓ EN PROBABILITAT EN L'APRENENTATGE DE LES MATEMÀTIQUES

Àngela Sart Vizcaíno

Treball de Fi de Màster

Centre d'Estudis de Postgrau

Universitat de les Illes Balears

Any acadèmic 2021-22

Paraules clau del treball:

probabilitat, intuïció, aprenentatge, matemàtiques, secundària

Nom Tutor del Treball: Daniel Ruiz Aguilera

Resum

L’objectiu fonamental d’aquest Treball de Fi de Màster és estudiar la intuïció en probabilitat perquè els professors siguin conscients de les mancances existents i així, poder desenvolupar diferents activitats per la millora d’aquesta intuïció.

La primera part constarà d’un estudi exhaustiu de la intuïció en general i en probabilitat amb l’opinió de diversos autors experts en aquest tema.

La segona part replica un estudi dut a terme per Fischbein i Schnarch per obtenir dades empíriques sobre la intuïció en probabilitat en els alumnes de secundària i també en estudiants i graduats en matemàtiques. Es va passar un formulari amb els diferents problemes, cada un relacionat amb una idea errònia sobre un concepte d’intuïció en probabilitat, a diferents instituts per comprovar quin percentatge d’error existeix al nostre entorn. El resultat és el que s’esperava, la intuïció en probabilitat ha de millorar.

A partir de la coneixença dels errors, es poden elaborar diferents activitats enfocades a la millora de la intuïció en probabilitat. En el treball es dissenyen diverses d’aquestes activitats canviant la metodologia tradicional perquè pugui ajudar a l’alumnat a superar els errors, ja que molts d’ells es van arrossegant al llarg dels anys. També es fa èmfasi en l’ús d’activitats competencials i experimentals, amb la finalitat de donar més importància a la comprensió dels conceptes.

Índex

1. Introducció

L’estudi de les dificultats i els errors que poden sorgir al transcurs de l’aprenentatge dels individus en les diferents àrees de coneixements, és de gran importància i d’utilitat didàctica, perquè pot resultar en una eina molt útil pel professorat per ajudar a l’alumnat en la superació dels entrebancs que sorgeixen a l’hora d’adquirir nous coneixements. Aquest treball se centrarà en l’estudi dels errors que sorgeixen quan es posa en pràctica la intuïció en probabilitat a l’educació secundària.

L'ensenyament d'una branca de la ciència planteja molts problemes pel que fa als currículums, mètodes i materials; i, al seu torn, plantegen més preguntes sobre les implicacions psicològiques d'aquest pas. Quina és, per exemple, la millor edat per començar a ensenyar-lo? En quin ordre s'han d'ensenyar els conceptes, per tal que el conjunt de coneixements adquirits sigui el més fiable i viable possible? (Fischbein, 1975).

El present treball exposa una recerca sobre com es desenvolupa la intuïció a través dels anys i, en concret, la intuïció en probabilitat. A més, es dona una proposta didàctica per millorar la intuïció.

1.1 Objectius del treball

La probabilitat és un concepte de creixent importància en el pensament científic. Durant els 300 anys des de la famosa correspondència entre Pascal i Fermat sobre els jocs d'atzar, la teoria de la probabilitat s'ha convertit en una branca important de les matemàtiques amb àmplies repercussions en la ciència, la filosofia i l'activitat humana pràctica. Els intents de les escoles per adaptar els seus plans d'estudis als avenços científics han hagut de tenir en compte l'interès creixent per les idees i mètodes probabilístics i estadístics. A l'àrea de les matemàtiques en si, l'àrea de probabilitat s'ha donat molt més pes en les últimes dècades.

Moltes vegades, es demana si el resultat obtingut és el correcte i no hi estem del tot segurs. Aquesta manca de confiança amb l'estudi dels càlculs de probabilitat podria ser pensada a conseqüència de la poca dedicació en aquesta àrea en els estudis, tant de secundària com universitaris. Emperò diferents estudis han demostrat que la intuïció en probabilitat no és gaire bona dins la nostra societat, tant en infants com en adults. Aquest treball se centrarà a analitzar aquesta intuïció en els alumnes de secundària.

Al llarg del treball s'analitzarà la intuïció en general, la intuïció en geometria i, finalment, en probabilitat des d'una perspectiva teòrica. D'aquesta manera, s'intentarà comprendre quins són els comportaments i les causes de la intuïció, fent especial èmfasi en els alumnes de secundària. Cal destacar que, per estudiar aquest tema es consideraran diferents autors amb diferents punts de vista.

Una vegada s'hagi entès el funcionament de la intuïció, s'analitzaran les dificultats dels alumnes i es procedirà a una proposta didàctica per evitar i/o millorar els errors comesos pels estudiants a l'hora d'estudiar la probabilitat.

Les paradoxes també seran presents al treball. Una paradoxa és una idea que contradiu la lògica, és a dir, no es resoldrà amb una simple intuïció. No obstant, una paradoxa no duu implícit una contradicció lògica, sinó que tan sols ho aparenta. La teoria de la probabilitat és molt rica en paradoxes i encara que es resolguin, continuen sent difícils de creure per a molta gent, ja que xoca amb el sentit comú.

Així doncs, a continuació es detallaran els objectius que es persegueixen en el treball a través del següent llistat:

- Presentar un marc teòric sobre la idea d'intuïció en general, recopilant informació de diferents autors.

- Estudiar les intuïcions en altres àmbits de les matemàtiques, com la geometria.
- Estudiar les intuïcions en probabilitat en l'aprenentatge de les matemàtiques.
- Realitzar un estudi de camp sobre la intuïció dels alumnes sobre probabilitat. Es replica l'estudi desenvolupat per Fischbein i Schnarch (1997).
- Realitzar una proposta de millora de la intuïció en probabilitat a partir dels resultats obtinguts en l'estudi, tenint en compte la diversitat i el currículum.

2. Marc teòric

L'ensenyament de la probabilitat ve motivat per la forta presència d'aquesta en el dia a dia. Totes les notícies, les empreses, els comerços, les institucions, empren gràfiques, processen dades, etc. Per moure's en el món actual amb una mínima actitud crítica és imprescindible tenir certa cultura de probabilitat i d'estadística.

Els *data scientists* són una nova generació d'experts, molt demandats, en dades analítiques que tenen les habilitats tècniques per resoldre problemes complexos i la curiositat per explorar quins problemes s'han de resoldre. Són en part matemàtics, en part informàtics i en part detectors de tendències.

És per això que l'aprenentatge de la probabilitat és molt necessària, però no ha de consistir només a recordar conceptes, sinó comprendre el que s'està fent per a la futura aplicació. Aquesta nova manera d'ensenyament deixa de banda l'aprenentatge mecanicista, molt arrelat a l'educació, i obri un nou procés avaluatiu. Entenent per avaluar el procés continu, durant l'ensenyament-aprenentatge d'una certa àrea de coneixement, que *comporta recollir dades* i *analitzar*-les per *prendre decisions, orientades a regular les dificultats i errors que sorgeixen i a valorar els resultats* (Sanmartí, 2010).

Aconseguir treball combinant continguts i processos duu a les activitats competencials, que atenen tants els processos com els productes de l'aprenentatge (vegeu la llei LOMLOE (2022)).

2.1. Currículum de les Illes Balears

L'ensenyament de la probabilitat varia segons el país i la comunitat autònoma. S'ha de tenir en compte que cada lloc té les seves necessitats en referència a les professions més demandades, i aleshores, el currículum s'adapta.

El currículum de les Illes Balears que encara està en esborrany del Reial decret 217/2022, de 29 de març, pel qual s'estableix l'ordenació i els ensenyaments mínims de l'educació secundària obligatòria, exposa que:

- La probabilitat s'introdueix com a mesura de la incertesa d'experiments aleatoris.
- Identificació de fenòmens deterministes i aleatoris.
- Planificació, realització i anàlisi de la incertesa associada als experiments simples.
- Assignació de probabilitats mitjançant l'experimentació, el concepte de freqüència relativa i la regla de Laplace.
- Tècniques de recompte en experiments simples i compostos (mitjançant diagrames d'arbre, taules…) i aplicació a la presa de decisions fonamentades.

També es destaca l'ús d'esdeveniments de la història de les matemàtiques, recursos digitals, l'ús de materials manipulables i la relació entre continguts de distints blocs i entre distintes matèries.

La probabilitat té dues maneres de calcular-se: teòricament o experimentalment. De la segona, es pot destacar que hi ha esdeveniments els quals no es pot calcular la probabilitat teòricament, sinó que s'han de fer de manera experimental a través de fulls de càlculs. S'ha de tenir en compte que de l'observació d'experiments va sorgir la teoria de la probabilitat.

2.2. El marc de Catalunya

A part del currículum de les Illes Balears, també es donarà una pinzellada d'una part del de Catalunya.

Com es diu al Decret 34/2015, *el procés d'ensenyament-aprenentatge competencial s'ha d'abordar des de totes les àrees de coneixement*, ja que l'objectiu de l'educació secundària és formar a persones reflexives i amb possibilitats d'afrontar diferents situacions de la vida real. Amb tot això, el personal docent ha de ser conscient de les competències associades a la seva matèria, per tal d'incentivar l'assoliment de cada una d'elles. D'aquesta manera, el Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya ha concretat les competències lligades a cada una de les assignatures curriculars de l'educació secundària obligatòria.

Les competències bàsiques de l'àmbit matemàtic són dotze i s'especifiquen en el document publicat per Burgués i Sarramona (2017). Aquestes competències són les següents:

- Resolució de problemes.
    - Competència 1. Traduir un problema a llenguatge matemàtic o a una representació matemàtica utilitzant variables, símbols, diagrames i models adequats.
    - Competència 2. Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre problemes.
    - Competència 3. Mantenir una actitud de recerca davant d'un problema assajant estratègies diverses.
    - Competència 4. Generar preguntes de caràcter matemàtic i plantejar problemes.

- Raonament i prova.
    - Competència 5. Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques.
    - Competència 6. Emprar el raonament matemàtic en entorns no matemàtics.
- Connexions.
    - Competència 7. Usar les relacions que hi ha entre les diverses parts de les matemàtiques per analitzar situacions i per raonar.
    - Competència 8. Identificar les matemàtiques implicades en situacions properes i acadèmiques i cercar situacions que es puguin relacionar amb idees matemàtiques concretes.
- Comunicació i representació.
    - Competència 9. Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic.
    - Competència 10. Expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió i comprendre les dels altres.
    - Competència 11. Emprar la comunicació i el treball col·laboratiu per compartir i construir coneixement a partir d'idees matemàtiques.
    - Competència 12. Seleccionar i usar tecnologies diverses per gestionar i mostrar informació, i visualitzar i estructurar idees o processos matemàtics.

2.3. La intuïció

Conforme als Instituts d'Estudis Catalans (DIEC 2) la intuïció és el "coneixement directe i immediat, sensible o intel·ligible, d'una realitat *o d'una veritat, sense recórrer a inferència o raonament"*. Tanmateix, com es veurà més endavant a la valoració de les diferents etapes, moltes intuïcions són errònies i a vegades fan caure en el parany. Cert és que en moltes ocasions sempre es diu “Fes cas a la teva intuïció, ella no falla”, emperò la ment no sempre està preparada per resoldre situacions més complexes o antinaturals. Per aquesta raó, el present treball intenta donar explicació a les errades que es cometen quan es posa en marxa la intuïció per resoldre problemes de probabilitat.

Els estudis de Fischbein (1975) afirmen que la intuïció és una forma de cognició[1] immediata en què els elements justificatius, si n’hi ha, són implícits. El punt de vista inicial és que la intuïció i el raonament ens parlen de la mateixa realitat, tot i que, superficialment, el funcionament sigui diferent. La immediatesa de la intuïció és explicada amb l’estreta relació amb l’acció.

Es podria confondre la visualització d’imatges amb la intuïció, gràcies a la seva característica comuna, la immediatesa, que revela la seva relació amb l’acció. En conseqüència, la visualització esdevé intuïció quan constitueix una acció, sigui motora o cognitiva.

Aquesta immediatesa tan característica de la intuïció no prové de la seva naturalesa *a priori*, sinó del contacte i la verificació amb la realitat. A més, no comporta una espontaneïtat absoluta, ja que existeixen mecanismes verificats a través de l’educació de la persona, del seu bagatge, d’estructures mentals formades al llarg del temps, etc. És possible que certs patrons hereditaris facilitin la generació d’algunes intuïcions. Tanmateix, l’experiència personal és un factor determinant de la formació de les intuïcions.

La intuïció sembla, bastant raonablement, un estat intermedi entre l’acció exterior i l’acció interioritzada (o operació, en el sentit de Piaget (1951)). Emperò, Fischbein afirma que les intuïcions no són circumstàncies transitòries, sinó que constitueixen processos cognitius autònoms. En referència a la relació entre l’acció i les operacions intel·lectuals, les intuïcions poden ser abans o durant les operacions. També poden ocórrer després, com a resultat d’una

[1] La cognició fa referència a l’aptitud dels éssers humans de processar informació a partir de la percepció, dels coneixements previs i de la subjectivitat que permet considerar certs aspectes en lloc d’altres.

anàlisi global, col·laborant així a la decisió al nivell d'acció. En canvi, no sembla tan raonable que la intuïció tengui intrínsec el raonament, però sí que el té.

Hi ha un tipus d'intuïcions que es caracteritzen per tenir rapidesa i eficiència en referència a l'acció. Segons Fischbein, aquest tipus d'intuïcions provenen de les operacions intel·lectuals que són interioritzades i automatitzades en el cervell. I és gràcies a aquesta autonomització que sorgeix la rapidesa en l'acció.

De les tres classificacions que Fischbein aporta, la primera és la divisió de les intuïcions en tres classes diferents: preoperacionals, operatives i postoperacionals. Les preoperacionals són les que utilitzen l'experiència inicial útil per a l'acció en qüestió. Un exemple quotidià és la percepció espacial, com determinar distàncies i localitzar objectes. Aquest tipus d'intuïcions no desapareixen, sinó que estan durant tota la vida de l'individu. Les operatives són aquelles que fan servir el raonament i asseguren una conclusió vertadera a l'individu a causa de les dades donades. En darrer lloc, les postoperacionals són les que sintetitzant l'experiència prèvia en estructures operatives automatitzades, permeten la rapidesa en la solució dels problemes actuals. Un exemple d'aquest tipus serien les intuïcions que té un metge sobre el diagnòstic inicial del pacient sense saber tots els resultats de les proves.

La segona classificació és entre les intuïcions primàries i secundàries. Les primàries són les que es formen abans i independentment del coneixement sistemàtic. Les postoperacionals i les operatives són d'aquest grup. En canvi, les secundàries es formen després de la instrucció del coneixement sistemàtic, és a dir, sobrepassen les intuïcions primàries, i també es renoven amb l'experiència social. De la primera classificació, aquí hi entren les preoperacionals. Les intuïcions científiques i matemàtiques també formen part d'aquest grup. No s'ha de confondre les intuïcions amb la informació o els hàbits intel·lectuals. Per exemple, la resolució de l'equació de segon grau és informació adquirida i habilitat mental, però no és una intuïció, encara que la rapidesa en l’acció ho pugui confondre. Les intuïcions secundàries, com totes les altres, necessiten una bona part de l’àrea intel·lectual i s’originen amb elements motors, imaginatius i conceptuals. No basta amb simples explicacions teòriques per convertir la informació amb adquisicions estabilitzades, que són bàsiques per la formació de la intuïció. Aquest fet es justifica amb els errors produïts a l’hora de respondre un problema a través de la intuïció, com veurem al següent apartat. Les adquisicions s’estabilitzen als 16-17 anys, un cop passada aquesta edat és difícil modificar la infraestructura de la intuïció, és per això que aquest treball intenta donar eines per millorar la intuïció a l’àrea de la probabilitat.

La tercera i darrera classificació que fa Fischbein és entre les intuïcions afirmatives i les anticipatòries. Les afirmatives resulten de les anticipatòries que han passat la prova de demostració, és a dir, un cop demostrada aquesta veritat i s'ha convertit en un pensament habitual, es fa, amb el temps, evident i adquireix l'estatus d'intuïció anticipatòria. Quan ja s’ha demostrat un fet, s’utilitza i es torna trivial la seva justificació. Com per exemple, el punt mitjà d’un segment divideix aquest en dues parts iguals. Les anticipatòries són intuïcions que ocorren abans de la demostració, és com un sentiment *a priori* que es basa en altres intuïcions afirmatives anteriors. Com s’acaba de veure, aquesta darrera classificació lliga bastant un grup amb l’altre.

De tot el que s’ha anunciat abans, es pot extreure que les intuïcions es modifiquen a través de les experiències i de les vivències de cada individu, aleshores no són constants en el temps. Piaget afirma que “El pensament intuïtiu són esquemes prelògics, que encara representen molt de prop les dades perceptives i alhora les actualitzen” (Piaget, 1964, p. 156). A més, es pot relacionar la intel·ligència amb les intuïcions afirmant que aquestes, dins de l'estructura de la intel·ligència, fan la funció d'engranar el coneixement en acció.

Segons Gigerenzer (2007), sempre es pensa en el concepte d’intel·ligència i es relaciona amb pensaments lògics i conscients, en canvi, bona part d’ella és inconscient i es basa en l’instint o intuïcions. La seva obra s’anomena Gut Feelings, que vol dir instint. En ella descriu el món de la incertesa de les persones amb un temps limitat per prendre decisions i un futur incert, des d’un punt de vista totalment diferent del que representen els llibres escolars basats totalment en la lògica i la probabilitat. Gigerenzer afirma que amb molta informació i molt de pensament, no sempre resulta en la millor solució, perquè a vegades menys pot ser més.

Els éssers humans saben més del que poden explicar. Aquest fet és degut a la bona part de processos inconscients presents a l’escorça cerebral on resideix la consciència. Per exemple, quan un natiu parla català no pensa en conjugar tots els verbs ni la raó dels pronoms febles, tampoc sabria explicar les regles gramaticals de tot el que diu. És per això, que bona part dels actes d’un individu són insconsients.

Gigerenzer utilitza els termes instint, intuïció o pressentiment com a sinònims i els defineix com el que apareix ràpidament en la consciència, les raons subjacents dels quals els individus no són conscients i que són prou forts com per dur a terme una acció.

La pregunta clau és: es pot confiar en les intuïcions? Hi ha dues respostes antagòniques, la dels pessimistes i la dels optimistes. D’una banda, els primers tenen la visió de Sigmund Freud que afirma que esperar alguna cosa de la intuïció és una il·lusió. A més, psicòlegs contemporanis sostenen que la intuïció viola les lleis de la lògica i provoca desastres humans. D’altra banda, els optimistes tendeixen a ser gent del carrer i confien en les seves intuïcions. El punt en comú que tenen les dues visions són que quan són bones s’han d’usar, però quan són dolents no. Aleshores, la pregunta que sorgeix és: quan es pot confiar en les intuïcions? Per contestar aquesta pregunta, s'ha d'estudiar el seu funcionament.

Bàsicament, les intuïcions segueixen simples regles generals que aprofiten les capacitats evolucionades del cervell, com la capacitat de seguir objectes en moviment. Aquestes capacitats, tal com deia Fischbein, no són totes naturals del cervell, sinó que s'adquireixen mitjançant la pràctica i les experiències. Gigerenzer afirma que la ment és com una capsa d'eines adaptativa segons regles generals transmeses i creades genèticament, culturalment i individualment.

Les intuïcions formen part de la intel·ligència de l'inconscient que es basa en saber, sense pensar, quina regla és probable que funcioni en cada situació.

El funcionament del sistema perceptiu va més enllà de la informació rebuda, també inventa coses. El cervell veu més successos que els ulls dels individus. Addicionalment, les intuïcions segueixen el mateix funcionament que el sistema perceptiu. Quan la informació és insuficient, el cervell també inventa amb base a suposicions sobre el món. Un exemple de com el cervell descobreix parts d'una percepció és amb la següent imatge (figura 1):

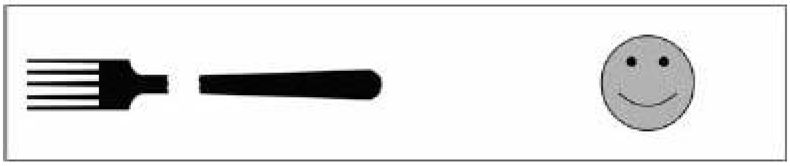

Figura 1: Percepció del cervell

Tancau el vostre ull dret i mirau la cara somrient de la Figura 1. Atracau-vos lentament a la pantalla i allunya-vos. Veureu que la forqueta miraculosament es repararà. Això és degut al fet que el nostre cervell inventa la línia negra que falta de la forqueta, perquè sap que un objecte allargat travessa el punt cec per un costat i continua per l'altre, per la qual cosa és probable que existeixi entremig. Aquesta inferència és inconscient i el nostre cervell sempre n'està executant.

D'acord amb la filosofia kantiana, tots els conceptes han d'estar relacionats amb una intuïció. En referència a les matemàtiques, aquesta es construeix a partir de tots els conceptes anteriors i fan que les intuïcions es realitzin *a priori* (Cedrés, 2009).

En la següent secció es veurà com s'aplica la intuïció per resoldre problemes de probabilitat i les concepcions errònies que té la societat en relació amb els conceptes. Ben mirat, a física i a biologia també s'han fet estudis sobre la concepció errònia de conceptes. Per més que s'hagi instruït, s'han continuat detectant errades (Joan Garfield & Ahlgren, 1988). Intuïtivament, l'espai sembla no isòtrop[2] (Fischbein & Fischbein, 1987, pàg. 25). L'espai absolut, buit, continu, homogeni i isòtrop de Newton és difícil d'acceptar intuïtivament. Emperò, l'estudiant s'hi acostuma a mesura que passen els anys i es torna intuïtivament acceptable. Així mateix, a part de la probabilitat, hi ha més branques de les matemàtiques on es pot analitzar la intuïció, com ara la geometria. "Per què la teoria de la probabilitat no ha pogut influir en les matemàtiques en la mateixa mesura que la geometria?" pregunta Arthur Engel. "Perquè tenim una intuïció geomètrica natural però cap intuïció de probabilitat" (Engel, 1970, pàg. 8). La intuïció en la geometria és essencial per resoldre problemes d'aquest camp, però la qüestió és saber com desenvolupar correctament aquestes habilitats en els estudiants, és a dir, com crear, imaginar i manipular figures geomètriques a la ment. Encara que matemàtics com Hilbert i Poincaré exposàvem positivament el rol de la intuïció en geometria i altres matemàtics pensen que és un tema essencial en el desenvolupament del pensament matemàtic (Atiyah, 2001), s'ha de dur a terme unes tasques de suport per aquest desenvolupament intuïtiu. Godfrey, un reformador líder a Anglaterra a principis del segle XX, va justificar que les matemàtiques no es

[2] Un espai no isòtrop és aquell que té direccions privilegiades, tal com li semblava a Aristòtil.

realitzen només per la lògica, sinó que cal un altre poder important, anomenat "poder geomètric". El va descriure com "el poder que exercim quan resolem una qüestió o una prova geomètrica difícil" (Godfrey, 1910). Els exercicis de Godfrey eren elegits meticulosament per tal de millorar la intuïció geomètrica dels estudiants. Per resoldre un problema de geometria s'ha de tenir la figura a la ment i ser capaç de separar-la en elements individuals i descobrir les seves relacions, per així poder fer l'elecció de les eines idònies (Goldenberg et al., 1998). Així doncs, la intuïció geomètrica es basa en saber aquests tres aspectes:

- Percebre propietats geomètriques.
- Relacionar imatges amb conceptes i teoremes de geometria.
- Decidir per on i com començar a l'hora de resoldre qüestions de geometria.

La principal diferència entre la intuïció en probabilitat i en geometria és que en aquesta darrera tenim imatges i figures, en canvi, a la primera no.

Per acabar, cal remarcar que la sobtadesa d'una solució en forma d'intuïció no implica l'absència d'antecedents en l'experiència de l'individu i que amb les experiències d'aquest, les intuïcions es transformen.

2.3.1. La intuïció en probabilitat

Quan es tira una moneda tres vegades i surten tres cares, una persona amb estudis, que no estigui familiaritzada amb la teoria de la probabilitat, pot contestar que quan es tiri per quarta vegada la moneda és més probable que surti creu. En un joc de daus de dos colors (blau i vermell), el primer jugador guanya si al tirar els dos daus surten dues cares del mateix color. El segon jugador guanya si surten dues cares de colors diferents. El dau del primer jugador té 5 cares blaves i 1 vermella. Si volem que el joc sigui equiprobable, com hauria de ser el dau del segon jugador? És molt probable que la primera resposta sigui 1 cara blava i 5 vermelles, però la correcta és 3 cares blaves i 3 vermelles, (Jareño, 2021). Aquests són exemples d'intuïcions errònies en probabilitat, en qualsevol cas intuïcions. La teoria de la probabilitat requereix unes aptituds cognitives que són, majoritàriament, antinaturals. Avui en dia, es té un substrat intuïtiu molt magre, és per això que en les següents seccions s'analitzarà el comportament d'alumnes en diverses edats resolent problemes probabilístics.

La probabilitat és un bon camp per estudiar la intuïció perquè està lligada a l'acció. Sempre que s'ha de resoldre un problema, la intuïció s'involucra suggerint solucions. En geometria aquestes intuïcions es transformen en imatges o figures, en canvi, en probabilitat no, encara que també inclouen imatges de daus, capses, monedes, etc. Les intuïcions en probabilitat es basen en experiments, que no és tan natural com les figures geomètriques. De tota manera, l'estreta relació de les intuïcions probabilístiques amb l'acció, fa pensar que haurien de ser fàcils d'observar. Una altra justificació per aquest estudi és que el comportament humà és probabilístic, com també ho són els esdeveniments de l'entorn.

Es poden anunciar cinc hipòtesis sobre el comportament probabilístic:

1. Es pot suposar que existeixen unes intuïcions naturals per les nocions d'atzar i probabilitat, perquè el dia a dia dels infants comprèn processos estocàstics. A causa d'aquests processos, es forma una eina adaptada en el cervell dels infants, com per exemple estimar proporcions o fer prediccions.
2. Si les intuïcions són extretes de l'experiència dels individus, aleshores el comportament probabilístic s'hauria de desenvolupar al mateix temps que el desenvolupament intel·lectual general.
3. S'ha de distingir la generació de les intuïcions naturals i les secundàries. Les primeres, amb relació a probabilitat, són bastant pobres i a vegades, contradictòries. Aleshores, s'ha de posar especial atenció en l'educació per tenir unes intuïcions secundàries correctes. Feller afirma que

"Indubtablement, la intuïció es pot entrenar i desenvolupar" (Feller, 1968).

4. Si la teoria de la probabilitat està fomentada per unes intuïcions específiques, i si s'han d'adquirir a través del procés d'educació, aleshores l'ensenyament de la probabilitat s'ha de realitzar abans o no més tard dels dotze anys.
5. El que està clar és que, abans d'impartir les nocions de qualsevol branca de la ciència, s'ha de tenir un coneixement previ de les intuïcions primàries d'aquesta.

Amb tot això, Fischbein afirma que abans de realitzar el currículum d'una assignatura, s'han d'estudiar les intuïcions primàries relacionades amb aquesta. D'una banda, si aquestes intuïcions fan referència a veritats de la ciència, aleshores ajudaran a assimilar els conceptes proposats pels educadors. D'altra banda, si no fan referència a veritats, impossibilitaran l'assimilació de noves nocions.

Segons Joan Jareño, la intuïció és fer una predicció o una conjectura d'una manera molt ràpida (Jareño, 2021). Hi ha tres aspectes que afavoreixen la intuïció: l'experiència, la familiaritat i el coneixement. Al mateix temps, hi ha tres qüestions que afecten negativament: les creences, la versemblança atorgada i la immediatesa. Llavors, s'han de tenir en compte i evitar aquest efecte negatiu. Per exemple, una creença és que el nombre més difícil que surti en tirar un dau és el 6. Una raó és que jugant a un joc de daus i el 6 tarda molt a sortir, aleshores la ment de l'individu recorda que treure un 6 és exigent, per tant, menys probable.

Segons Laplace, uns dels pares de la probabilitat, "La théorie des probabilités tient à des considérations si délicates, qu'il n'est pas surprenant qu'avec les mêmes données, deux personnes trouvent des résultats différens, surtout dans les questions très compliquées (La teoria de probabilitats va unida a consideracions delicades i no és estrany que, partint de les mateixes dades, dues persones arribin a resultats diferents, sobretot en temes molt complicats) (Laplace, 1840, pàg. 12). D'aquí, extreim que entrar en l'àmbit de la probabilitat és entrar en terreny complicat i divers.

Hi ha molts d'aspectes que interfereixen en la intuïció en probabilitat com:

- La memòria d'experiències, és a dir, no tenir-la o tenir-la falsejada.
- La ponderació de l'espai mostral i la ponderació de casos favorables.
- Les situacions artificioses que no són de la vida quotidiana i poden afectar amb la familiaritat de les intuïcions de cada problema, com per exemple la paradoxa de la caixa de Bertrand (Bertrand, 1889). D'aquesta paradoxa és realment interessant el contrast entre el raonament que segueixen molts d'estudiants amb la resposta correcta (Contreras García et al., 2011). La paradoxa és la següent:

    > Tenim tres caixes i cada caixa té dos compartiments amb una moneda dins cada compartiment: una caixa té dues monedes d'or, l'altra té dues de plata i la darrera una d'or i una de plata. Després d'elegir una caixa a l'atzar, es tria un compartiment a l'atzar i resulta que conté una moneda d'or. Quina és la probabilitat que l'altra també sigui d'or?

    Molts d'estudiants seguiran el següent raonament: només hi ha dues opcions, la primera que s'hagi elegit la caixa amb les dues monedes d'or i la segona que s'hagi elegit la caixa amb una moneda d'or i una de plata. Aleshores, per la llei de Laplace[3], la probabilitat que l'altra moneda també sigui d'or és ½. Emperò, aquest raonament és erroni perquè tenim tres opcions: que s'hagi extret del primer compartiment de la capsa que té dues monedes d'or, que s'hagi extret del segon compartiment de la capsa que té dues monedes d'or i que s'hagi extret

[3] La regla de Laplace consisteix en el càlcul de la probabilitat d'un succés associat a un experiment aleatori mitjançant una fórmula que suposa que tots els successos d'aquesta experiència són equiprobables (és a dir, que tinguin la mateixa probabilitat de verificar-se): P = nombre de casos favorables / nombre de casos totals.

de la capsa amb una moneda d'or i una de plata. Aleshores, per la llei de Laplace, la probabilitat que l'altra moneda també sigui d'or és $\frac{2}{3}$.

Una altra paradoxa molt famosa dins el món matemàtic és el problema de Monty Hall. La versió original la va plantejar Marilyn vos Savant provocant així l'opinió de molts de matemàtics, entre ells Paul Erdös (un dels matemàtics més importants del segle XX) que va dir: Això és impossible. Finalment, Paul va comprovar amb una simulació per ordinador que la paradoxa era certa. La paradoxa és la següent:

> Un concursant elegeix una porta d'entre tres. El seu premi consisteix en el que es troba darrere la porta. Una d'elles amaga un cotxe i, darrere les altres dues, hi ha una cabra. Amb tot, abans d'obrir-la, el presentador, que sap on està el premi, obri una de les dues portes i ensenya que darrere d'ella hi ha una cabra. Ara el concursant té una darrera oportunitat de canviar la porta escollida. El concursant ha de mantenir la seva elecció original o ha d'elegir l'altra porta? Hi ha alguna diferència? Quina seria l'opció correcta?

1. Quedar-se amb la porta inicial
2. Canviar a l'altra porta
3. És irrellevant canviar o no canviar

A primera vista, la intuïció ens diu que, com que al final tenim dues portes, la probabilitat d'encertar serà d'un 50% i que, per tant, és igual canviar o no (Fernández Fernández, 2021, 61-62). Però aquest raonament és erroni. Com es veu a la figura 2, en total tenim nou casos possibles. La porta marcada és l'elegida inicialment. I, al canviar de porta, el concursant guanya sis dels nou casos, és a dir, $p(guanyar\ canviant\ de\ porta) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. En canvi, si el concursant no canvia de porta, té $\frac{1}{3}$ de probabilitat de guanyar.

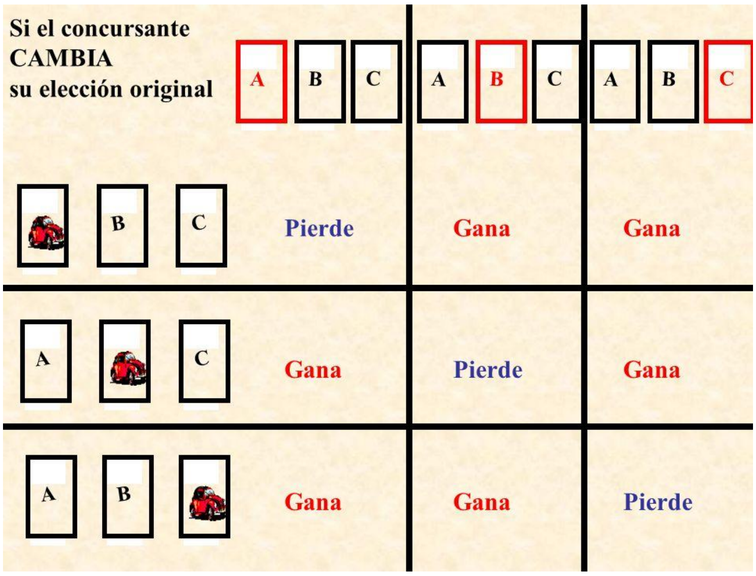

Figura 2: Monty Hall, extreta del llibre Azar y probabilidad en matemáticas (Fernández Fernández, 2021, 62)

- La probabilitat condicionada. Per exemple, tenim una caixa amb 10 bolles, 8 blanques i 2 negres. S'extreuen bolles fins que surt una negra. Òbviament no tots els llocs (1r, 2n, 3r…) tenen la mateixa probabilitat, aleshores quin seria el joc guanyador? Molta gent diria entre el 3r, el 4rt i el 5è lloc per tema de proporcions. Però si realment és calcula la probabilitat de cada lloc, el guanyador és la posició 1 ($p(negra\ 1r\ posició) = \frac{2}{10} = 20\ \%$). A més, aquestes probabilitats fan una escala descendent: $p(negra\ 2n\ posició) = \frac{8}{10}\frac{2}{9} = 17'77\%$ ja que la primera serà blanca; $p(negra\ 3r\ posició) = \frac{8}{10}\frac{7}{9}\frac{2}{8} = 15'55\%$, ja que les dues primeres seran blanques, etc.
- Interferència d'altres experiències, com per exemple la propietat de la transitivitat, que realment no és present. Un exemple és el joc de Penney on hi ha dos jugadors i una moneda. Cada un aposta una seqüència concreta de cares i creus de tres monedes seguides. El joc

consisteix en anar tirant la moneda fins que apareix una de les seqüències apostades. Sigui el conjunt $x_1x_2x_3$ la tirada corresponent, amb $x_i = \{cara,\ creu\}\,\forall i$, aleshores es pot demostrar que (Jareño, 2020):

$$p(ccx) < p(xcc) < p(xxc) < p(cxx) < p(ccx)$$

Així, s'arriba a que el conjunt ccx trenca la transitivitat perquè el conjunt cxx és menys probable que ccx.

- La llei dels "petits nombres": és el pensament que quan es fa una sèrie d'experiments unes poques vegades, aleshores passarà el mateix a gran escala. En realitat, no sol ser així. Per exemple, tirar un dau 6 vegades no donarà les mateixes probabilitats dels esdeveniments que tirar-lo 5000 vegades.
- L'aprenentatge de les eines matemàtiques també afecten la intuïció. Com per exemple la llei de Laplace, la independència o dependència de successos, el recompte de casos possibles de l'espai mostral, quan s'ha de sumar o multiplicar probabilitats, probabilitat del complementari, etc.

Tots aquests aspectes interfereixen d'una manera o d'altra a la intuïció. És per això, que des de la coneixença d'aquests elements, l'aprenentatge en probabilitat ha d'estar guiat i enfocat en la millora de la intuïció i en la consciència que no sempre és bona i, en conseqüència, s'ha de contrastar. A més, si l'ensenyament de la probabilitat es perfecciona des d'una edat primerenca, es tendrà una ciutadania més educada en aquest àmbit. Però quina és l'edat òptima per explicar els conceptes de probabilitat? El llibre Azar y Probabilidad (Batanero Bernabéu et al., 1988) analitza la intuïció de l'atzar i de la freqüència relativa, l'estimació de probabilitats, les operacions combinatòries i l'efecte de l'educació sobre cada un d'aquests aspectes en cada etapa de l'infant.

La primera etapa correspon al nin de preescolar. Piaget i Inhelder aclareixen que no hi ha existeix una intuïció innata de l'atzar en l'infant (Piaget & Inhelder, 1951). En canvi, Fischbein afirma que la intuïció primària de l'atzar, això és, la distinció entre fenomen aleatori i determinista, està present en la conducta de l'infant. A través d'experiments, es confirma que les prediccions que fan els infants de les probabilitats dels successos que els presenten com estímuls són correctes, encara que no perfectes. En relació d'estimació de possibilitats i noció de probabilitat, Fischbein afirma que si es realitzen experiments adequats i simples, els infants són capaços de fer apostes basades en una estimació probabilística. Segons Piaget i Inhelder el nin de preescolar només efectua operacions combinatòries de forma empírica i no exhaustiva.

La segona etapa és a partir dels set anys, quan el nin adquireix la capacitat de distingir entre l'atzar i el deduïble. Comença a comprendre la cadena de causes que condueixen a successos imprevisibles. En relació amb la freqüència relativa, aquesta millora amb l'edat gràcies als diferents experiments que ha duit a terme l'individu. En problemes on les possibilitats han d'estar determinades a partir d'un dibuix geomètric (com per exemple canals bifurcats per on ha de passar una bolla de manera aleatòria), les respostes són pitjors que les dels nins de preescolar. Fischbein afirma que als deu anys, amb ajuda del professor, poden entendre el procés combinatori d'un diagrama d'arbre. Amb una bona formació, els alumnes poden millorar el rendiment en qüestions més complexes de probabilitat, fins i tot, diu Fischbein, es pot arribar a esquemes només aconseguits, segons Piaget i Inhelder, a l'edat de l'adolescència.

La darrera etapa és la dels adolescents, quan s'hauria de comprendre totalment el concepte de probabilitat. Però el problema és que la intuïció de l'atzar es fa irreconciliable amb l'estructura del pensament lògic, aleshores és relegada a una classe inferior i el seu ensenyament no és tan profund. Amb relació a la freqüència relativa, els adolescents milloren la seva intuïció.

L’estimació de possibilitats millora a aquesta etapa, per exemple amb un experiment que consisteix a tenir una capsa amb bolles. A més, l’individu adquireix la capacitat d’utilitzar procediments sistemàtics per realitzar inventaris de totes les combinacions d’un conjunt d’elements donat. Fischbein afirma que amb una bona instrucció, a l’etapa anterior també seria possible aquests resultats. Per acabar, amb una bona educació, els adolescents són capaços de restaurar la seva base intuïtiva, i en conseqüència, millorar-la.

Per concloure, s’ha de tenir en compte que per tenir una bona base de probabilitat, és necessari entrenar, des dels primers nivells, la base intuïtiva rellevant al pensament probabilístic. Però per convertir una informació en una intuïció no n'hi ha prou amb una simple explicació teòrica, sinó que l'alumne l’ha de fer servir en les seves pròpies accions i prediccions al llarg de gran part del seu desenvolupament intel·lectual.

3. Enquesta sobre la intuïció en probabilitat

3.1. Introducció

Com s'ha vist a l'apartat anterior, alguns autors afirmen que la probabilitat no és gaire bona en els estudiants. Una de les raons és que els individus tendeixen a creure que una determinada causa sempre produirà un mateix resultat, i no sempre és així. Com s’ha vist anteriorment, cada etapa té la seva dificultat i amb un bon aprenentatge es pot fer una millora significativa. Però primer s’han d’analitzar quines complicacions presenten els individus, i és per això que s’ha duit a terme un formulari amb diverses preguntes sobre intuïció en probabilitat.

3.2. Estudi original

Un dels estudis que es va desenvolupar per saber com era la intuïció en probabilitat dels estudiants, va ser el de Fischbein i Schnarch (1997). El qüestionari va ser contestat per 98 alumnes amb cap ensenyament de probabilitat previ. Aquests alumnes tenien entre 10 anys i 17, i a més també varen enquestar a professors. Cap dels estudiants sabia el propòsit del formulari on cada problema està relacionat una idea errònia probabilística. Les preguntes es troben a l'Annex A, encara que l'estudi era amb anglès i amb un ordre diferent.

Els resultats obtinguts varen ser que algunes idees errònies disminueixen amb l'edat, una és estable i altres són més influents en el pensament a mesura que avança l'edat. En termes generals, es conclou que de la intuïció en els estudiants s'identifica la següent estructura comuna: la solució es configura entre un esquema intel·lectual, acceptat intuïtivament per l'estudiant, i determinades limitacions del problema. L'impacte d'aquest esquema incrementa amb els anys.

Una reflexió que fan els autors és que a les escoles s'hauria de canviar el pensament quan s'estudia probabilitat, ja que s'han de generar noves intuïcions. L'ensenyament ha de mostrar experimentalment els conflictes de les intuïcions primàries i, en conseqüència, informar sobre els raonaments que s'han de dur a terme. Si els alumnes són capaços d'analitzar les causes dels seus errors, els podran superar i aconseguir una autèntica manera de pensar.

3.3. Metodologia

Per fer un estudi similar al de Fischbein i Schnarch, s'ha duit a terme un formulari a diferents instituts de Mallorca. Perquè el formulari fos una anàlisi per edats, s'han enquestat tots els cursos d'ESO, des de primer fins a 2n de Batxillerat. Perquè les respostes no estiguessin gaire esbiaixades, s'ha demanat col·laboració a diferents instituts. Han participat l'IES Joan Maria Thomàs, amb un percentatge bastant elevat del còmput total, l'ES Ramon Llull, l'IES Madina Mayurqa, l'IES Antoni Maura i l'IES Politècnic. A més, ha participat un grup reduït d'estudiants i de graduats en matemàtiques de la Universitat de les Illes Balears (UIB).

La metodologia que s'ha seguir ha estat assistir a diferents classes de l'IES Joan Maria Thomàs demanant permís als professors per utilitzar uns quinze minuts de la seva matèria. Tots els professors varen ser receptius i acceptaren la proposta, ja que aquest treball també pot ser útil per a la seva futura tasca docent. En relació amb els altres instituts, es va passar el mateix formulari digital de Google (vegeu Annex A) als respectius professors i, aquests, el varen passar als seus estudiants i als companys del departament de matemàtiques.

En total s'han aconseguit 372 respostes. El percentatge de respostes d'estudiants cursant tercer d'ESO és molt elevat, un $32,5\%$ del total. El percentatge menys elevat és el de graduat en matemàtiques, amb 10 respostes, és a dir un $2,7\%$. El següent gràfic mostra la participació de cada curs:

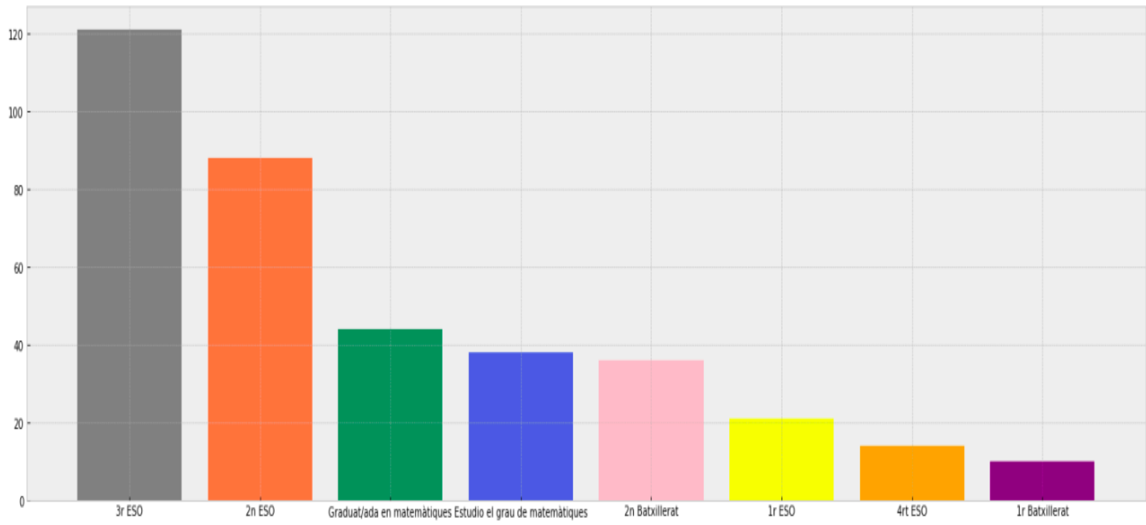

Figura 3: Gràfic del percentatge de participació en l'enquesta

A l'experiment de Fischbein i Schnarch els alumnes no havien estudiat cap any de probabilitat ni tampoc sabien el propòsit de l'estudi. En canvi, a l'estudi d'aquest treball sí que hi ha molts d'alumnes que han estudiat nocions bàsiques de probabilitat. L'objectiu de l'estudi és observar l'evolució, a través dels anys, de les respostes a les preguntes relacionades amb idees errònies de probabilitat. L'ordre de les preguntes es va alterar del de l'estudi de Fischbein i Schnarch, perquè es va ordenar de la més important a la menys, per si els estudiants no tenien temps d'acabar el formulari.

3.4. Resultats

En aquest apartat, s'analitzen els resultats del formulari amb una explicació detallada de les respostes a les preguntes plantejades.

A la pregunta inicial es va demanar el curs que feien i si havien estudiat probabilitat a qualque curs. La resposta es va haver de filtrar amb el llenguatge de programació Python (vegeu Annex B), ja que era resposta lliure. En total 227 alumnes han estudiat en qualque moment probabilitat i la resta, 95, no. Per tal que les respostes siguin més visuals, es dona la següent taula amb els recomptes percentuals per curs de les respostes correctes (color verd) i les idees errònies (color vermell):

Problemes	Curs						
	1r	2n	3r	4rt	1r Bat	2n Bat	Graduat o estudiant de matemàtiques
1. En un joc de loteria, s'han d'elegir 6 números de l'1 al 40 (ambdós inclosos). En Tomeu ha elegit 1, 2, 3, 4, 5 i 6. Na Ruth ha elegit 39, 1, 17, 33, 8 i 27. Qui té més probabilitat de guanyar?							
- Na Ruth té més probabilitat de guanyar.	**53**	39	29	18	26	19	0
- En Tomeu té més probabilitat de guanyar.	5	9	11	4	8	10	4
- Na Ruth i en Tomeu tenen les mateixes probabilitats de guanyar.	42	**52**	**60**	**78**	**66**	**71**	**96**
2. Una persona tira dos daus alhora. Què és més probable?							
- Ambdós tenen la mateixa probabilitat.	**56**	**65**	**68**	**82**	**79**	**100**	37
- Obtenir el parell 6-6.	14	11	8	5	5	0	0

- Obtenir el parell 5-6.	30	24	24	13	16	0	**63**
3. A una ciutat tenim dos hospitals, un petit on hi ha de mitjana 15 naixements per dia, i un gran on hi ha 45 naixements per dia. Com se sap, un 50% de nadons són nins, encara que hi ha dies que neixen més d'un 50% de nins o menys. Un any, cada hospital va apuntar els dies que naixien nadons dels quals més del 60% eren nins. Quins dels dos hospitals creus que va apuntar més d'aquests dies?							
- El nombre de dies on més del 60% de nadons eren nins va ser el mateix en els dos hospitals.	22	22	26	34	19	30	23
- A l'hospital GRAN varen apuntar més dies on més del 60% de nadons eren nins.	**42**	**47**	**40**	**39**	**55**	**40**	8
- Altres	3	0	3	0	0	0	8
- A l'hospital PETIT varen apuntar més dies on més del 60% de nadons eren nins.	33	31	31	27	26	30	**61**
4. La probabilitat d'obtenir cara com a mínim dues vegades al tirar tres monedes és:							
- IGUAL que la probabilitat d'obtenir com a mínim 200 cares al tirar 300 monedes.	**42**	**47**	**53**	**55**	**58**	**62**	**46**
- Més PETITA que la probabilitat d'obtenir com a mínim 200 cares al tirar 300 monedes.	25	22	19	18	21	29	13
- Més GRAN que la probabilitat d'obtenir com a mínim 200 cares al tirar 300 monedes.	33	31	28	27	21	9	41
5. Quan triam una comissió formada per 2 persones d'entre 10 candidats el nombre de possibilitats és							
- Més GRAN que el nombre de possibilitats al triar una comissió de 8 persones d'entre 10 candidats.	**46**	33	22	18	11	24	29
- Més PETIT que el nombre de possibilitats al triar una comissió de 8 persones d'entre 10 candidats.	40	**42**	**55**	**61**	**60**	**62**	21
- IGUAL que el nombre de possibilitats al triar una comissió de 8 persones d'entre 10							

candidats.	14	25	23	21	29	14	**50**
6. En Joan i na Maria tenen cada un una caixa que conté dues bolles blanques i dues bolles negres. 6.1. En Joan extreu una bolla de la seva caixa i resulta que és blanca. Sense tornar aquesta bolla a la caixa, agafa una segona bolla de la caixa. La probabilitat que la segona bolla també sigui blanca és ____ que la probabilitat que la segona bolla sigui negra. 6.2. Na Maria extreu una bolla de la seva caixa i la deixa a la taula fora mirar-la. Després, extreu una segona bolla i veu que és blanca. La probabilitat que la primera bolla fos blanca és ____ que la probabilitat que sigui negra. - 6.1 correcta i 6.2 incorrecta. - 6.1 i 6.2 incorrectes. - 6.1 i 6.2 correctes.	31 **44** 25	**38** 37 25	34 **40** 26	**49** 21 30	**53** 26 21	**52** 10 38	37 13 **50**
7. En Dan somia en convertir-se en doctor. Li agrada ajudar a la gent. Quan va anar a l'institut, va ser voluntari de la Creu Roja. Va acabar batxillerat amb unes notes molt bones i va servir a l'exèrcit com assistent mèdic. Després de servir a l'exèrcit, en Dan va anar a la universitat. Hi ha un centenar de persones que encaixen amb la descripció anterior. Pensa quants d'ells són estudiants de medicina o simplement estudiants. - Hi ha més estudiants de medicina. - Hi ha més estudiants.	35 **65**	**56** 44	47 **53**	41 **59**	**53** 47	29 **71**	13 **87**
8. Quan tirem una moneda no trucada, hi ha dos possibles resultats: cara o creu. En Ron va tirar la moneda tres vegades i en els tres casos li va sortir cara. En Ron vol tornar a tirar la moneda, quina és la probabilitat que li torni a sortir cara? - Més PETITA que la probabilitat que surti creu. - Més GRAN que la probabilitat que surti creu.	23 37	12 25	17 18	11 20	21 24	14 5	13 4

- IGUAL que la probabilitat que surti creu.	**40**	**63**	**65**	**69**	**55**	**81**	**83**

Taula 1: Recompte respostes formulari

Com s'observa a la primera pregunta, el 53% dels alumnes de primer d'ESO tenen la idea errònia d'estimar la probabilitat d'un esdeveniment tenint en compte com de bé representa l'espai mostral (Kahneman & Tversky, 1972). Això és degut al fet que tan sols 8 alumnes de 36 han estudiat probabilitat a aquesta edat. Aquesta idea errònia s'anomena representativitat. Aleshores, es podria concloure que aquesta idea encara no ha estat modificada per l'ensenyament, com es pot apreciar als cursos superiors, o simplement es veu reduïda a mesura que l'individu creix.

Les respostes de la pregunta 2 representen perfectament la idea errònia dels esdeveniments compostos i simples que perdura al llarg dels anys. Si es fa una taula de doble entrada (vegeu Annex C) es veu perfectament que $p(obtenir\ 5\ i\ 6) = \frac{2}{36}$ i $p(obtenir\ 6\ i\ 6) = \frac{1}{36}$, ja que tenim els parells (5,6) i (6,5).

El problema de la pregunta 3 és que els individus tendeixen a menysprear el valor de la mida de la mostra. Per la llei dels grans nombres, com més gran és la mostra, menys probable és que es desviï del 50%. Aleshores, l'hospital petit apuntarà més dies anòmals que el gran, pel fet que teòricament hi han de néixer 50% de nins i de nines. Tanmateix, a les respostes del formulari els alumnes contestaren majoritàriament que a l'hospital gran apuntarien més dies d'aquests, pel fet que en el còmput total hi ha més naixements a l'hospital gran. Aleshores, es podria concloure que els alumnes en respondre la pregunta es varen oblidar de l'inici de l'enunciat.

De la pregunta 4, que també es relaciona amb la idea errònia de l'efecte de la mida de la mostra, es pot comentar que a totes les edats es té dificultats en la intuïció de la resposta. Perquè s'entengui millor, les possibilitats en tirar tres monedes són:

$$CCC\ CCX\ CXC\ CXX\ XCC\ XCX\ XXC\ XXX,$$

on $C = cara$ i $X = creu$. Aleshores, la probabilitat d'obtenir cara com a mínim dues vegades seria $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Per la llei dels grans nombres, com que la mostra ara és gran, $n = 300$, la probabilitat tendeix a la teòrica, aleshores haurien de sortir 150 cares $\left(p(obtenir\ 150\ cares) = \frac{1}{2}\right)$. L'enunciat diu que hem de calcular la probabilitat que surtin com a mínim 200 cares, aleshores com que és diferent del que ha de passar, la probabilitat és menor que la teòrica $\left(\frac{1}{2}\right)$, aleshores és menor que la probabilitat d'obtenir cara com a mínim dues vegades.

La pregunta 5 és sorprenent perquè quasi tota la gent ha contestat erròniament però no a la idea errònia, sinó a la segona opció. Aquesta idea errònia és anomenada l'heurística de la disponibilitat. De totes maneres, sols un 24% han contestat correctament. La idea errònia darrera aquesta pregunta és que la probabilitat s'estima per la facilitat amb què es poden recordar els casos (Kahneman & Tversky, 1973), és a dir, els casos de 2 pareix que n'hi han d'haver més que els de 8. Teòricament, es pot demostrar que el combinatori de 10 sobre 2 és igual al de 10 sobre 8:

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\,8!} = \binom{10}{8} = \frac{10!}{8!\,2!}.$$

A la pregunta 6, es veu clarament que amb els anys la idea errònia, anomenada fenomen de Falk, de contestar la 6.1 bé i la 6.2 malament perdura. La resposta correcta a les dues preguntes és *més petita*, i les opcions per contestar eren més petita, més gran o igual. La raó per la qual la 6.2 se sol contestar malament és sobre la base del principi que un esdeveniment no pot actuar retroactivament sobre la seva causa. L'oposat d'això contradiu la nostra intuïció (Fischbein & Schnarch, 1997), a més, no tenim una bona intuïció en probabilitat condicionada. Per comprovar teòricament que les dues respostes són *més petita*, vegi's el següent diagrama d'arbre:

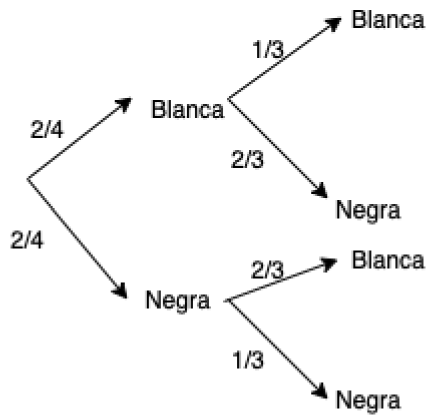

Figura 4: Diagrama d'arbre

La resposta de la 6.1 és

$$p(2a\,Blanca/1a\,Blanca) = \frac{1}{3} < p(2a\,Negra/1a\,Blanca) = \frac{2}{3},$$

aleshores si en Joan extreu una bolla de la seva caixa i resulta que és blanca, la probabilitat que la segona bolla també sigui blanca és més petita que la probabilitat que la segona bolla sigui negra. A la resposta de la 6.2 s'ha d'aplicar la probabilitat *a posteriori*, és a dir, la fórmula de Bayes:

$$p(1a\,Blanca/2a\,Blanca) = \frac{p(Blanca \cap Blanca)}{p(Blanca)} = \frac{\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$p(1a\,Negra/2a\,Blanca) = \frac{p(Negra \cap Blanca)}{p(Blanca)} = \frac{\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}.$$

Aleshores, la probabilitat que la primera bolla fos blanca és més petita que la probabilitat que sigui negra.

A la pregunta 7 la idea errònia s'anomena la fal·làcia de la conjunció. De 1r d'ESO molts no han contestat i es pot dir que no hi ha una resposta clara per part de l'alumnat, perquè la meitat ha contestat que en Dan és simplement estudiant i l’altra que és estudiant de medicina. A mesura que els individus es fan grans, tendeixen a tenir una bona intuïció sobre la resposta. Una intersecció de dos esdeveniments (en Dan és estudiant de medicina) no pot ser més probable que un dels esdeveniments en sí (en Dan és estudiant) (Kahneman & Tversky, 1983). La inferència inconscient és així: si l'estudiant llegeix la descripció d’en Dan, és molt probable que sigui rellevant per al que espera que faci. No obstant això, la descripció seria totalment irrellevant si hom entengués el terme probable com a probabilitat matemàtica. Per aquesta raó, es demana “Pensa quants d’ells són estudiants de medicina o simplement estudiants”, enlloc de “Què és més probable?” (com es planteja a l’estudi original). Ara bé, si la gent no entén que un conjunt no pot ser més petit que un subconjunt i comet constantment aquest error lògic, aquesta nova versió hauria de produir els mateixos resultats que l'antiga (Gigerenzer, 2007).

A la darrera pregunta, es veu clarament que amb els anys quasi tothom contesta correctament. En canvi, a primer d’ESO, que no tenen tantes nocions de probabilitat, el percentatge d’estudiants que han contestat erròniament és major que els qui han contestat adequadament. Existeix l’anomenada fal·làcia del jugador que tendeix a creure que si es tira una moneda tres vegades i surt cara, la següent és més probable que sigui creu. L’efecte contrari ocorre quan es pensa que les condicions no són juntes i aleshores sortirà una altra vegada cara. Aquesta pregunta es va posar la darrera de totes perquè s’esperava un bon resultat del qüestionari, i així ha estat.

3.5. Conclusions

En aquest apartat s’extreuen les conclusions del formulari realitzat a aquest treball i es comparen amb les de Fischbein i Schnarch.

De la preguntes de representativitat, tant al formulari original i a la rèplica, es pot concloure que l’esquema intel·lectual millora amb els anys i, finalment, supera l'heurística intuïtiva primitiva de la representativitat. En el cas d’aquest treball, cal destacar que dels estudiants i graduats de matemàtiques hi ha un 4% d'error. Encara que és una xifra baixa, no és menyspreable per una pregunta que en principi s'ha de contestar correctament quan es té un nivell elevat d'estudis matemàtics.

La idea errònia dels esdeveniments compostos i simples perdura al llarg dels anys, i a més, en el cas d'aquest treball, augmenta amb els anys, llevat dels individus amb nivells elevats d'estudis matemàtics. El mateix passa amb el document original, que defensa que és l'única idea errònia estable de l'estudi.

El tercer problema, com ja s'ha dit a l'apartat anterior, els alumnes en respondre la pregunta es varen oblidar de l'inici de l'enunciat i no contestaren ni la idea errònia ni la correcta. A l'estudi original, la idea errònia és la més elegida i augmenta de percentatge amb els anys. Cal destacar que a l'original el percentatge a la resposta correcta va ser nul, en el cas d'aquest treball és baix però no nul. L'efecte de la mida de la mostra és una idea errònia a totes les edats, tant a l'estudi d'aquest treball com a l'original.

En referència a l'heurística de la disponibilitat, a l'estudi original la majoria d'estudiants han contestat la idea errònia i augmenta amb els anys. En canvi, en el present treball es contesta majoritàriament la resposta no correcta, però no la idea errònia, encara que també augmenta amb els anys. Dels graduats i estudiants de matemàtics cal dir que el percentatge en la resposta apropiada és baix, sols un 50%. No obstant, en treball original és només un 6%.

En relació amb el fenomen de Falk, la idea errònia perdura amb els anys i inclús creix, llevat dels estudiants i graduats de matemàtiques, tant a l'estudi original com al del treball. Es destaca que sols el 50% de graduats i estudiants de matemàtiques han contestat correctament la pregunta.

Respecte a la fal·làcia de la conjunció, en el present treball hi ha una millora amb els anys, així com a l'estudi original. No obstant, els resultats del treball són millors pel canvi de plantejament de la pregunta, explicat a la secció anterior, pel que fa a l’estudi original. Els resultats dels estudiants i graduats de matemàtiques són bastant bons en aquesta pregunta.

La fal·làcia del jugador no és molt present en aquest treball ni tampoc a l’original. Encara que els individus no s’hagin instruït en probabilitat, es veu clarament a l’estudi original que la idea errònia va desapareixent amb els anys.

Com a conclusió global, s’extreu que sí és necessari revisar la intuïció en probabilitat i cercar eines per millorar-la, ja que moltes vegades és errònia. En conseqüència, s’ha de ser conscient dels errors que se solen cometre en els estudiants i detallar-los-hi per una futura millora en el raonament probabilístic.

4. Proposta d’activitats

Ara que s’ha situat i contextualitzat les dificultats amb la intuïció en probabilitat, es procedirà a establir unes propostes que es creu que milloraran aquest problema. Aquestes propostes estan orientades a l’educació secundària obligatòria i dividides segons el problema concret de les preguntes del formulari. No obstant, a aquelles preguntes que no s’han trobat dificultats, no es proposa cap activitat.

A banda d’això, es tractarà l’atenció a la diversitat de les distintes activitats. A més, també es posarà a disposició un seguit de recursos que poden ser d’ajuda pel professorat.

A raó que la Normativa currículum Educació Secundària Obligatòria LOMLOE encara no està acabada, s’utilitzaran alguns apartats del Decret 34/2015, de 15 de maig. No obstant, quan surti la Normativa definitiva, es pot actualitzar el document intercanviant els apartats necessaris.

Llavors, les activitats es presentaran mitjançant un format que constarà dels següents apartats:

- Continguts del currículum segons el Decret 34/2015, de 15 de maig. En aquest punt, enumeram els continguts que es treballen a cada curs. En general, es treballaran continguts del Bloc de Probabilitat, encara que sempre es poden treballar continguts d'altres blocs, principalment del Bloc de Processos.
- Competències. A l'Annex D es detalla una taula amb les competències que es treballaran. Ens centrarem únicament a posar les competències matemàtiques. A les activitats, només posarem l'abreviatura corresponent. A més, també es treballaran les competències citades a l'apartat 2.2.
- Material. Es farà referència tota classe d'eina o material que es faci servir per realitzar l'activitat: paper, bolígraf, recursos TIC, materials manipulatius…
- Metodologia. Les metodologies seran variades i es basaran principalment en aquelles que el currículum proposa emprar.
- Criteris d'avaluació. Els criteris seran aquells que venen determinats per la Normativa currículum Educació Secundària Obligatòria LOMLOE, de forma que estiguin relacionats amb els continguts.
- Eines d'avaluació. Es detallarà una proposta d'avaluació per a l'activitat.
- Enunciat. Aquí es descriurà l'activitat a realitzar, amb les pautes per alumnes i professors.
- Comentaris. Es faran els comentaris adients a cada activitat. Es parlarà de tipus d'ampliacions, d'incisos o ajudes, de comentaris pel docent…
- Atenció a la diversitat. Es té en compte els alumnes amb altes capacitats, així mateix, es respecte els diferents ritmes i estils d'aprenentatge mitjançant pràctiques de treball individual i cooperatiu.

Per tal que les classes siguin més profitoses, a l'inici de curs és convenient determinar els coneixements que té l'alumnat en relació amb la matèria. Amb la finalitat d'identificar els punts forts i febles en què incidir més a l'hora de fer les classes, i adaptar l'ensenyament d'acord amb ells. Això es farà per mitjà dels fulls Knowledge and Prior Study Inventory (KPSI), amb els quals l'alumnat farà una autoavaluació d'allò que sap abans de començar la unitat didàctica. Aquesta eina d'avaluació es tornarà a emplenar en acabar la matèria. És convenient que el full KPSI es passi a l'inici de cada unitat didàctica, en el nostre cas la probabilitat (vegeu Annex E).

4.1. Esdeveniments compostos i simples

La idea errònia que més s'ha observat que perdura al llarg dels anys és la dels esdeveniments compostos i simples. Un suggeriment per millorar aquesta és que els alumnes facin el formulari i si els resultats de la pregunta 2 són negatius, proposar dur a terme la següent activitat per entendre millor la pregunta.

Objectius. Entendre de manera correcta el concepte d'esdeveniment compost i simple. Com que no diferencien entre esdeveniments simples i compostos, els estudiants sovint assignen probabilitats iguals a esdeveniments compostos quan seria apropiat assignar probabilitats iguals a esdeveniments simples.

Continguts del currículum. Variable estadística d'un esdeveniment real amb dos daus. Càlcul de probabilitats mitjançant la regla de Laplace en experiments senzills.

Competències. Del document publicat per Burgués i Sarramona s'apliquen les competències 1, 2, 5 i 12. De l'Annex D s'apliquen CMCT 1.14, CMCT 1.18, CMCT 2.4, CMCT 3.5 i CMCT 4.3.

Material. Material per escriure i un ordinador per alumne o un per a tota la classe amb projector per tal de fer una simulació.

Metodologia. L'activitat es durà a terme en parelles que farà el professor de manera heterogènia i es posaran els resultats en comú amb tota la classe. El professor complementarà el seguiment de l'activitat amb aclariments i dades addicionals sobre el tema que es tracta i recordarà i reforçarà els continguts que es treballen. El professor anirà donant targetes als grups amb les diferents passes a seguir a mesura que el grup va avançant en la resolució. Temps estimat d'una sessió.

Criteris d'avaluació. Fa servir un vocabulari adequat per descriure, quantificar i analitzar situacions relacionades amb l'atzar. Es pot valorar la capacitat de l'alumnat de col·laborar i es pot considerar com una nota de comportament i participació de classe.

De la Normativa LOMLOE s'apliquen els següents criteris:

- 1.3. Obtenir solucions matemàtiques d'un problema mobilitzant els coneixements i utilitzant les eines tecnològiques necessàries.
- 3.2. Plantejar variants d'un problema donat modificant algun de les seves dades o alguna condició del problema.
- 8.1. Comunicar informació utilitzant el llenguatge matemàtic apropiat, oralment i per escrit, per descriure, explicar i justificar raonaments, procediments i conclusions.

Eines d'avaluació. Com és una activitat dirigida principalment pel professor, el més adient és emprar un registre d'autoavaluació. En aquest cas, és una graella senzilla on cada alumne apunta una reflexió de l'activitat.

Criteri	Sí/No	Proposta de millora
He prestat atenció a les indicacions que em donava el professor o la professora i al treball que havia de realitzar? He aprofitat el temps en el treball grupal?		
He executat les tasques que se m'han encomanat de forma autònoma sense demanar ajuda a una		

persona adulta?		
Puc extreure una idea del que avui he après a la sessió d'aquesta assignatura?		
He de millorar per a la sessió següent?		

Taula 2: Registre d'autoavaluació

Enunciat.

1a targeta:

Després d'haver contestat el formulari, ens hem adonat que molta gent contesta erròniament la segona pregunta:

2. Una persona tira dos daus alhora. Què és més probable?

- Ambdós tenen la mateixa probabilitat (idea errònia).
- Obtenir el parell 6-6 (incorrecta).
- Obtenir el parell 5-6 (correcta).

Per grups de dos heu d'intentar esbrinar la raó per la qual tanta gent s'equivoca en la resposta d'aquesta pregunta.

2a targeta:

Heu de realitzar una taula de doble entrada per veure totes les possibilitats al tirar dos daus. Calculau la probabilitat d'obtenir el parell 6-6 i el 5-6.

3a targeta:

Si en Miquel, un estudiant de matemàtiques, pensa que la probabilitat d'obtenir el parell (5,6) és el mateixa que el parell (6,5) i, per tant, obtenir un 5 i un 6 és igual de probable que obtenir dos 6. En aquest cas l'espai mostral quin seria? Quina seria la probabilitat d'obtenir (5,6) i la d'obtenir (6,6)?

4a targeta:

Per saber si en Miquel està o no equivocat anem a fer simulacions per veure com funciona el món real. La probabilitat d'aconseguir (5,6) és realment 0'056 o 0'048? Per fer aquesta simulació, utilitza la pàgina web següent: http://www.randomservices.org/random/prob/index.html → Dice Experiment. Comprova quin resultat és el que surt.

Comentaris. Aquesta activitat està dirigida als alumnes que estan començant a estudiar probabilitat, com també als alumnes més avançats. Per calcular la probabilitat han de saber la regla de Laplace o per intuïció també ho poden fer. El professor s'ha d'encarregar de guiar als alumnes en tot moment per tal que arribin fins al problema desitjat, a més podrà ajudar i donar indicacions als alumnes que ho necessitin.

Atenció a la diversitat. Aquesta activitat està plantejada amb les bases del Disseny Universal de l'Aprenentatge (DUA). Es fomenta l'interès i la motivació per l'aprenentatge, s'utilitzen diferents llenguatges (escrits i per ordinador) i l'activitat en sí és escalonada per respectar els diferents ritmes d'aprenentatge.

Es formaran parelles de la manera més heterogènia possible de manera que els mateixos alumnes s'ajudin entre ells. El professor posarà especial atenció en aquells alumnes que la necessitin. Durant la realització de l'activitat, el professor donarà suport als alumnes que ho puguin necessitar.

Pels alumnes més avançats es pot proposar de programar la seva pròpia simulació amb el llenguatge de programació Python o Scratch (videotutorial: https://www.youtube.com/watch?v=T0FIqWDbcFI)

4.2. El fenomen de Falk

La idea errònia anomenada fenomen de Falk està basada en el principi que un esdeveniment no pot actuar retroactivament sobre la seva causa. Aquesta inversió de l'eix del temps contradiu una de les nostres intuïcions bàsiques (Falk, 1979). Un suggeriment per millorar aquesta intuïció és que els alumnes facin el formulari i si els resultats de la pregunta 6 són negatius, proposar dur a terme la següent activitat (extreta i modificada de l'estudi de Carmen Díaz (Díaz, 2010)) per raonar sobre els efectes de la probabilitat condicionada.

Objectius. En molts problemes concrets, de vegades no està clar com utilitzar les dades per calcular una probabilitat condicional de l'esdeveniment objectiu. Aquesta activitat ensenya diferents maneres de practicar aquesta probabilitat amb diversos recursos.

Continguts del currículum. Freqüència relativa d'un esdeveniment i la seva aproximació a la probabilitat mitjançant la simulació o l'experimentació. Taules i diagrames d'arbre senzills. Càlcul de probabilitats mitjançant la regla de Laplace en experiments senzills. Probabilitat condicionada. Organització en taules de dades recollides en una experiència. Formulació de conjectures sobre el comportament de fenòmens aleatoris senzills i disseny d'experiències per comprovar-les.

Competències. Del document publicat per Burgués i Sarramona s'apliquen les competències 1, 2, 3, 11 i 12. De l'Annex D s'apliquen CMCT 1.12, CMCT 1.14, CMCT 1.18, CMCT 2.1 i CMCT 3.1.

Material. Material per escriure i ordinador per fer simulacions. Tres cartes: una blava per ambdós costats, una verda per ambdós costats i la darrera és blava per un costat i verda per l'altre.

Metodologia. L'activitat es durà a terme en parelles que farà el professor de manera heterogènia i es posaran els resultats en comú amb tota la classe. El professor guiarà l'activitat i la complementarà amb aclariments i dades addicionals sobre el tema que es tracta i recordarà i reforçarà els continguts que es treballen. Temps estimat: una sessió.

Criteris d'avaluació. Fa servir un vocabulari adequat per descriure, quantificar i analitzar situacions relacionades amb l'atzar. L'alumnat ha d'entregar un informe individual sobre tot el procés i explicació de l'activitat.

De la Normativa LOMLOE s'apliquen els següents criteris:

- 1.3. Obtenir solucions matemàtiques d'un problema mobilitzant els coneixements i utilitzant les eines tecnològiques necessàries.
- 3.1. Formular i comprovar conjectures senzilles de forma guiada analitzant patrons, propietats i relacions.
- 3.3. Emprar eines tecnològiques adequades en la recerca i comprovació de conjectures o problemes.
- 6.1. Reconèixer situacions susceptibles de ser formulades i resoltes mitjançant eines i estratègies matemàtiques, establint connexions entre el món real i les matemàtiques i usant els processos inherents a la recerca: inferir, mesurar, comunicar, classificar i fer prediccions.
- 8.1. Comunicar informació utilitzant el llenguatge matemàtic apropiat, oralment i per escrit, per descriure, explicar i justificar raonaments, procediments i conclusions.
- 9.2. Mostrar una actitud positiva i perseverant, acceptant la crítica raonada en fer front a les diferents situacions d'aprenentatge de les matemàtiques.

Eines d'avaluació. Es passa com a eina d'autoavaluació una rúbrica, de manera que cada alumne es corregeixi a ell mateix (vegeu Annex F). A la rúbrica, vendrien descrits els estàndards d'aprenentatge, les competències, els continguts i els objectius en forma de graella. A més, el professor corregirà l'informe individual.

Enunciat. Hi ha tres cartes en un barret. Una és blava per ambdós costats, una és verda per ambdós costats i la darrera és blava per un costat i verda per l'altre. Agafem una carta a cegues i la posem sobre la taula. Si la cara que ha sortit cap amunt és blava, quina és la probabilitat que el costat ocult també sigui blau?

Comentaris. Segons Falk en el seu estudi (1989) afirma que la majoria de la gent dona espontàniament una resposta de $\frac{1}{2}$ al problema. Condicionen el seu càlcul a l'esdeveniment "la carta doble verda està fora" i argumenten que cada una de les dues cartes restants és igual de probable que sigui la de la taula. Tot i que la inferència que la carta doble verda no pot ser la de la taula és correcta, aquest no és l'esdeveniment al qual s'ha de condicionar la probabilitat de l'esdeveniment objectiu. Hi ha sis resultats elementals de l'experiment estadístic, és a dir, les sis cares de les tres cartes. I cada cara és un candidat igualment probable que aparegui damunt de la taula. Hem obtingut una carta de "cara blava cap amunt". És aquest esdeveniment al qual s'ha de condicionar la probabilitat de "blau a la part posterior". Aquest esdeveniment, per si mateix, redueix les possibles cartes a dues i les possibles cares blaves superiors a tres. Dos dels tres resultats de l'esdeveniment de condicionament tenen blau al costat ocult i un té verd, per tant, la resposta és $\frac{2}{3}$.

Una manera de visualitzar les matemàtiques que hi ha darrere de la solució és imaginar que a cada carta posem el número "1" a un costat i "2" a l'altre costat. Així, podríem representar cada carta amb un parell de lletres amb subíndex, que indiquen els costats. Feim el consens que la primera posició indica la cara que podem observar a la taula i la segona posició fa referència a la cara oculta. L'espai mostral es representa llavors per:

$$\Omega = \{B_1B_2, B_2B_1, V_1V_2, V_2V_1, B_1V_2,\ V_1B_2\}.$$

La condició de l'esdeveniment és que nosaltres veim una cara blava, és a dir:

$$E = \{B_1B_2,\ B_2B_1,\ B_1V_2\}.$$

Aleshores, si aplicam Laplace tenim que la probabilitat que la segona cara sigui també blava és $\frac{2}{3}$.

Una altra manera de resoldre el problema és amb simulació. Una manera senzilla de convèncer els estudiants que les seves idees o les seves solucions a les dificultats de probabilitat són errònies és confrontar les seves idees amb experiments. Per exemple, si els alumnes es confonen amb la solució de l'exercici, podríem organitzar un experiment a l'aula amb les tres cartes, on els estudiants que treballin en parelles repeteixin moltes vegades l'assaig descrit i registren els resultats. A continuació, poden comparar aquelles proves on el costat visible de la carta és blau i comptar en quants d'ells la cara oculta també és blava. Experimentalment, poden estimar i comparar les probabilitats implicades a l'enunciat. Es pot posar en comú tots els resultats dels estudiants i, per parelles, intenten resoldre l'exercici amb les simulacions obtingudes. A més a més, també es pot utilitzar l'excel com a eina per fer simulacions i així fer més via. Es pot ensenyar el següent vídeo a classe que mostra com usar l'excel en aquest cas: https://mindyourdecisions.com/blog/2016/06/19/the-3-card-riddle-sunday-puzzle/. Finalment, els estudiants han de sortir a la pissarra i explicar el seu raonament i els resultats aconseguits. Al llarg d'aquesta discussió, es revelaran tant el raonament correcte com les possibles idees errònies. Aquestes activitats serviran per reflexionar sobre les propietats de la probabilitat condicional i dels experiments compostos. Al mateix temps, l'alumnat emprarà altres conceptes com esdeveniment, probabilitat i convergència, operacions combinatòries, regles de suma i multiplicació, independència, variable aleatòria, expectativa i mostreig.

En darrer lloc, la tercera opció per entendre la situació és fer ús dels diagrames d'arbre que presenten característiques intuïtives importants. Ofereixen una representació global de l'estructura de la situació i això contribueix a la immediatesa de comprensió i a trobar la solució del problema. Es pot oferir als alumnes que facin un diagrama d'arbre com el següent o paregut, i així vegin totes les possibilitats més visualment:

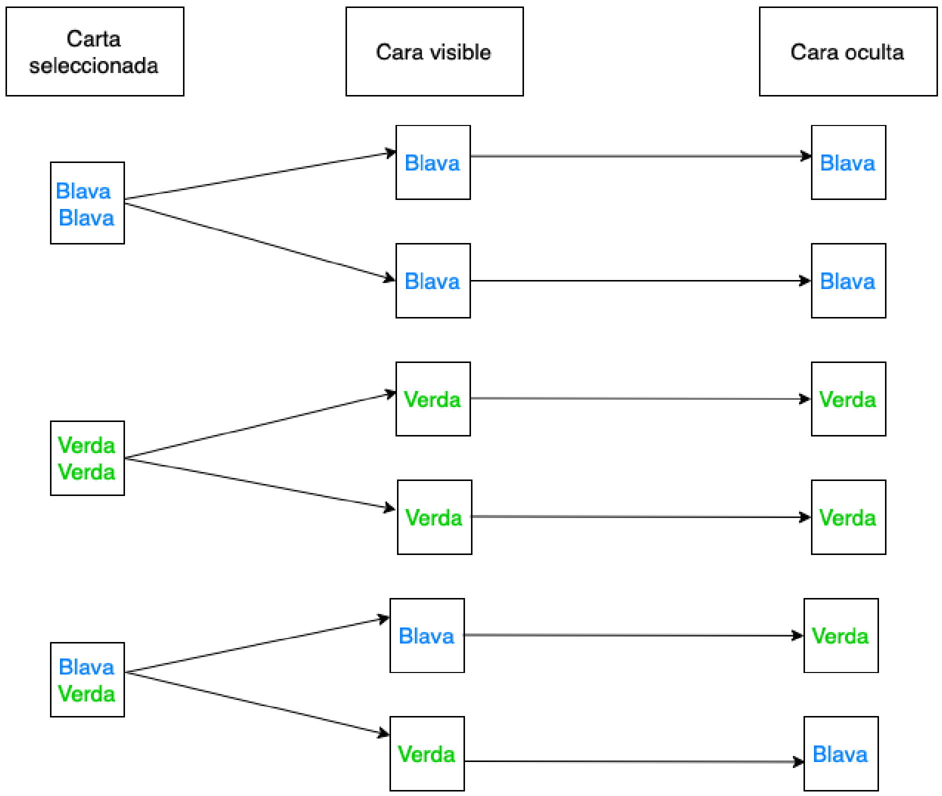

Figura 5: Diagrama d'arbre tres cartes

Atenció a la diversitat. Aquesta activitat està plantejada amb les bases del Disseny Universal de l'Aprenentatge (DUA). Es fomenta l'interès i la motivació per l'aprenentatge, s'utilitzen diferents llenguatges (escrits i per ordinador) i l'activitat en sí és escalonada per respectar els diferents ritmes d'aprenentatge. A més, s'utilitzen moltes opcions per a la comprensió ja que es plantegen diferents maneres per entendre el mateix problema, com també s'ofereixen oportunitats per a la manipulació.

Aquesta activitat es podria adaptar perfectament a una persona amb discapacitat visual. La idea és canviar el color de les cartes per dues textures diferents (una llisa i una rugosa). D'aquesta manera, i amb ajuda dels companys, l'alumne pot saber quina carta surt a la taula. El diagrama d'arbre també es podria fer amb pals i cartes reals, en lloc de paper o ordinador.

Altrament, pels alumnes amb hiperactivitat es podria adaptar l'activitat i que fos a l'aire lliure. En jugar amb cartes, aquests alumnes poden moure's i fer feina més còmodament.

D'igual manera que a l'activitat anterior, pels alumnes més avançats es pot proposar programar una simulació.

4.3. Heurística de la disponibilitat

L'heurística de la disponibilitat consisteix a estimar la probabilitat d'un esdeveniment segons la facilitat amb què es recorden exemples en què aquest succés va passar o per la facilitat amb què es poden generar exemples de tal succés (Sáenz, 1998). Paulos (2002) afirma que la literatura psicològica té una gran quantitat de recerques sobre l'error de l'accessibilitat i que es tracta d'un fenomen altament difós en els mitjans de comunicació.

L'enunciat de l'activitat és extret del treball de final de màster de Miguel Asensio Mucientes (Mucientes, 2019, pàg 33-34), emperò la resolució s'ha adaptat.

Objectius. Saber identificar l'heurística de la disponibilitat i raonar i entendre un problema on la intuïció no sempre encerta.

Continguts del currículum. Estratègies i procediments posats en pràctica: ús del llenguatge apropiat (gràfic, numèric, algebraic), reformulació del problema, resolució de subproblemes, recompte exhaustiu, inici per casos particulars senzills, recerca de regularitats i lleis. Formulació de conjectures sobre el comportament de fenòmens senzills i disseny d'experiències per comprovar-les. Permutacions.

Competències. Del document publicat per Burgués i Sarramona s'apliquen les competències 1, 5 i 6. De l'Annex D s'apliquen CMCT 1.1, CMCT 1.7, CMCT 1.14, CMCT 1.18, CMCT 1.19, CMCT 2.9, CMCT 3.6.

Material. Es necessita material per escriure i un chromebook per fer la recerca.

Metodologia. En primer lloc, s'ha de passar el formulari de la taula 1 i explicar als alumnes quins errors han comès.

A continuació, es demana als alumnes que facin una recerca exhaustiva sobre l'heurística de la disponibilitat, dipositant tota la informació a un informe final.

En tercer lloc, el professor comunicarà l'enunciat del problema i els alumnes el resoldran amb parelles. El professor ha d'estar atent als dubtes que sorgiran i sempre ha d'intentar ajudar. Ha de ser un guia de l'activitat i anar dient les passes a seguir en cada moment. Finalment, s'ha de dur a terme una mostració[4].

Criteris d'avaluació. L'alumnat ha d'entregar un informe individual sobre tot el procés i explicació de l'activitat.

De la Normativa LOMLOE s'apliquen els següents criteris:

- 1.2. Aplicar eines i estratègies apropiades que contribueixin a la resolució de problemes.
- 2.1. Comprovar la correcció matemàtica de les solucions d'un problema.
- 3.1.Formular i comprovar conjectures senzilles de forma guiada analitzant patrons, propietats i relacions.
- 6.1 Reconèixer situacions susceptibles de ser formulades i resoltes mitjançant eines i estratègies matemàtiques, establint connexions entre

[4] Una mostració no arriba a ser demostració pel seu caràcter poc formal, és l'explicació d'un fet matemàtic amb raons certes però que no demostren de manera matemàtica tot el teorema o proposició.

el món real i les matemàtiques i usant els processos inherents a la recerca: inferir, mesurar, comunicar, classificar i fer prediccions.

- 6.3 Reconèixer l'aportació de les matemàtiques al progrés de la humanitat i la seva contribució a la superació dels reptes que demanda la societat actual.
- 8.1. Comunicar informació utilitzant el llenguatge matemàtic apropiat, oralment i per escrit, per descriure, explicar i justificar raonaments, procediments i conclusions.

Eines d'avaluació. El més adient per aquest tipus d'activitat és que el professor tengui una rúbrica i l'ompli en corregir l'informe final. Els alumnes han de tenir des del principi al seu abast aquesta rúbrica per poder assolir les competències. A més, hi haurà un apartat a la rúbrica perquè el company coavaluï. Vegeu Annex G.

Enunciat. Un professor imparteix classe a 2 aules de 24 alumnes i 18 alumnes respectivament. El professor distribueix els pupitres dels alumnes de la següent manera: a la classe A, els col·loca en 3 files i 8 columnes, mentre que a la classe B, els col·loca en 9 files i 2 columnes. En quina de les dues classes, el professor té més accessibilitat de passar de la primera fila a l'última?

a) A la classe A.

b) A la classe B.

c) En totes dues igual.

Comentaris. En fer la recerca sobre l'heurística de la disponibilitat, trobaran molta informació perquè és un tema bastant estès i, sobretot, s'adonaran de la facilitat amb què esbiaixam la nostra opinió segons les referències que obtenim.

És important que el treball no sigui individual perquè, des del meu punt de vista, el treball grupal és molt profitós pels adolescents i els ajuda a estar més tranquils i confiar en ells mateixos.

Perquè els alumnes entenguin l'enunciat han de fer un dibuix com el següent:

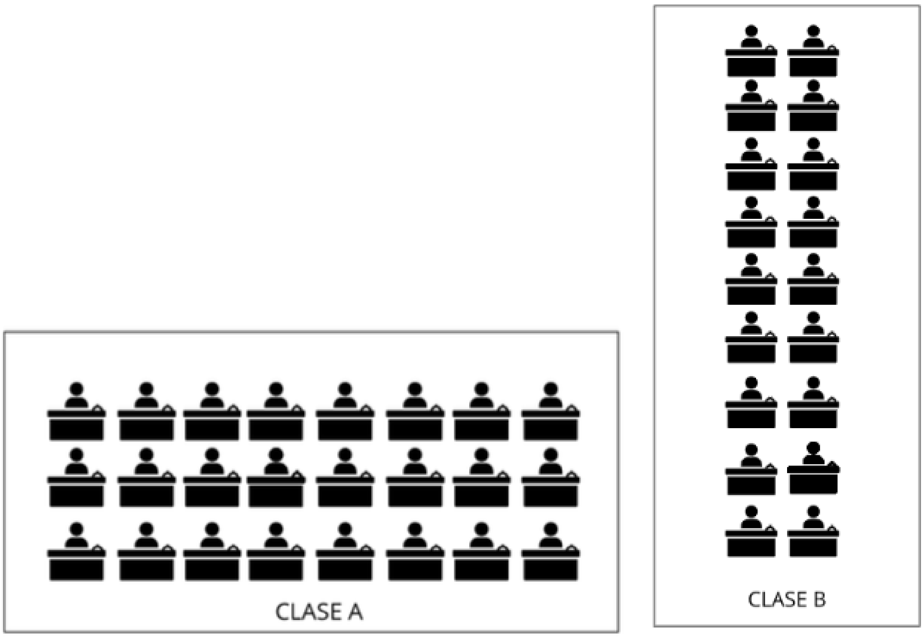

Figura 6: Posició de la classe, extreta de (Mucientes, 2019)

La resposta que marcarà moltes intuïcions dels alumnes serà dir que el professor té més maneres possibles d'accedir a la darrera fila a la classe A. No obstant, les dues classes tenen el mateix nombre de maneres possibles per passar de la primera fila a la darrera. El que passa és que el nostre raonament està esbiaixat per la "disponibilitat", és a dir, per com estan disposades les taules a les imatges. A l'aula A sembla que com que només hi ha 3 files, el recorregut és menor que el que hem de fer respecte a la classe B, i fa que errem a l'hora d'emetre un judici. Per tant, la nostra intuïció, que ens ha indicat que suposadament sembli més senzilla l'opció A perquè el professor només hauria de recórrer 3 files de taules, és errònia.

Per fer una mostració matemàtica d'aquest fet, cal calcular el nombre de camins que hi ha des de la primera fila a la darrera. Per fer aquest càlcul és simplement calcular el nombre combinatori m^n, on m és el nombre de columnes i n el de files. Aleshores:

$$nombre\ de\ camins\ a\ la\ classe\ A\ =\ 8^3 = 512$$

$$nombre\ de\ camins\ a\ la\ classe\ B\ =\ 2^9 = 512$$

Per poder comprovar aquest fet, anem a fer casos més senzills de calcular. Imaginem que tenim una classe 2x1, llavors el camí verd és l'únic camí que tenim i, com que $m = 1$ i $n = 2$, $1^2 = 1$:

Figura 7: Posició de la classe 2x1.

Ara, imaginem que tenim una classe 2x2. Ara tenim 4 camins, $m = 2$ i $n = 2$ $m^n = 2^2 = 4$. Per comprovar, dibuixam la classe i els possibles camins en verd com la figura 8. Per afegiment, aquí es podria introduir el concepte de vèrtex i aresta.

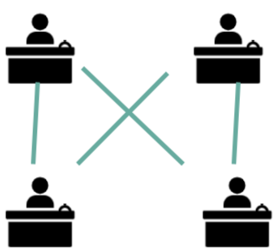

Figura 8: Posició de la classe 2x2.

Finalment, el darrer exemple és la classe amb tres files i dues columnes, 3x2. El nombre de camins és $m^n = 2^3 = 8$. Vegeu la següent figura:

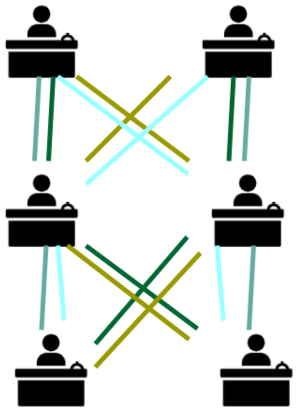

Figura 9: Posició de la classe 3x2.

Amb aquesta mostració els alumnes poden arribar a la conclusió que el nombre de camins d'una classe nxm és m^n.

Atenció a la diversitat. Aquesta activitat està plantejada amb les bases del Disseny Universal de l'Aprenentatge (DUA). Es fomenta l'interès i la motivació per l'aprenentatge i l'activitat en sí és escalonada per respectar els diferents ritmes d'aprenentatge. Es pot plantejar fer un vídeo amb una explicació clara i així tenir diferents opcions per a la comprensió.

Amb l'alumnat amb dificultats d'aprenentatge es pot plantejar l'activitat de manera manipulativa amb pals o fils de colors que representin els camins, i cartes que representin les taules. A més a més, es pot plantejar canviar la distribució de la pròpia classe i mirar quins camins són possibles dins la pròpia classe d'estudi. Així, s'ofereixen oportunitats per a la manipulació, tal com anuncia el DUA.

5. Conclusions

En aquest treball s'ha estudiat la intuïció dels individus de manera general. A continuació, la intuïció en probabilitat ha estat el tema principal i, aleshores, el seu estudi és el que intentam desenvolupar a través d'opinions de diferents autors. Així, s'han assolit els tres primers objectius del treball, citats a l'apartat 1.1 Objectius del treball.

Per tenir una visió més pròxima i tangible de les intuïcions dels alumnes en probabilitat, s'ha duit a terme un formulari amb una sèrie de preguntes enfocades als diferents errors comuns en la intuïció. Així, s'ha assolit el quart objectiu del treball. En total s'han obtingut 372 respostes d'alumnes de diferents cursos i instituts, encara que la mostra més gran és de l'IES Joan Maria Thomàs. Cal destacar que tots els professors varen ser molt col·laboratius i comprensius. Les preguntes del formulari es varen extreure de l'estudi realitzat per Efraim Fischbein i Ditza Schnarch (1997).

Els resultats del formulari varen ser variats, però sí és cert que es varen detectar idees errònies a moltes de les preguntes. D'aquestes idees que perduren al llarg dels anys en destacam el fenomen de Falk, l'heurística de la disponibilitat i els esdeveniments compostos i simples. En comparació a l'estudi original de Fischbein i Schnarch, cal mencionar que els resultats són bastants similars als d'aquest treball.

Per millorar la intuïció en probabilitat dels estudiants de secundària, es proposen una sèrie d'activitats per millorar les intuïcions errònies. La base d'aquestes activitats és que els alumnes coneguin diferents procediments per a un mateix problema, així és més probable que l'entenguin acuradament. La primera activitat s'enfoca amb millorar i entendre els esdeveniments compostos i simples. La segona fa referència al fenomen de Falk i ajuda a raonar sobre els efectes de la probabilitat condicionada. Finalment, la tercera activitat té com objectiu saber identificar l’heurística de la disponibilitat i raonar i entendre un problema on la intuïció no sempre encerta. Així, s’ha assolit el darrer objectiu del treball que és realitzar una proposta de millora de la intuïció en probabilitat a partir dels resultats obtinguts en l’estudi, tenint en compte la diversitat i el currículum.

Esperem que els exemples d'aquest treball puguin ajudar els professors a construir els seus propis exercicis i problemes a l'aula per ensenyar i avaluar la probabilitat.

Per concloure, si acabam la secundària i l’alumnat no es refia molt de la seva intuïció, ja haurem aconseguit molt. I si assolim activar-la per contrastar-la millor, perquè en probabilitat no sempre són correctes.

Bibliografia

Atiyah, M. (2001). Mathematics in the 20th Century. *Mathematics Today*, *37*(2), 46-53.

Batanero Bernabéu, M. C., Díaz Godino, J., & Cañizares Castellanos, M. J. (1988). *Azar y probabilidad*. Síntesis Editorial.

Bertrand, J. (1889). *Calcul des probabilités* (Gauthier Villars ed.). Paris (França).

Burgués, C., & Sarramona, J. (2017). *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic.* Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament. https://educacio.gencat.cat/web/.content/home/departament/publicacions/colleccions/competencies-basiques/eso/ambit-matematic.pdf

Cedrés, Á. J. P. (2009). Construcción, necesidad e intuición de esencias en geometría. *Scientiae Studia*, *7*(4), 595-617.

Contreras García, J. M., Batanero Bernabeu, C., Arteaga Cezón, P., & Cañadas de la Fuente, G. (2011). La paradoja de la caja de Bertrand: algunas formulaciones y cuestiones didácticas. *28*(78), 7-17.

Díaz, C. (2010). *Teaching Independence and Conditional Probability*, 8-11. https://www.academia.edu/26336081/Teaching_independence_and_conditional_probability

Engel, A. (1970). Teaching probability in intermediate grades. In *The Teaching of Probability and Statistics* (L. Rade ed., pp. 87-150). Almqvist & Wiksell, Stockholm.

Falk, R. (1979). *Revision of probabilities and time axis*. Hebrew University.

Falk, R. (1989). *Studies in mathematics education: The teaching of statistics* (R. Morris ed., Vol. 7). Inference under uncertainty via conditional probabilities. Paris: UNESCO

Feller, W. (1968). *An introduction to probability theory and its applications*. John Wiley.

Fernández Fernández, S. (2021). *Azar y probabilidad en matemáticas* (Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas & Instituto de Ciencias Matemáticas, Eds.). Catarata.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Springer Netherlands. 10.1007/978-94-010-1858-6

Fischbein, E., & Fischbein, H. (1987). *Intuition in science and mathematics : an educational approach*. Springer Netherlands.

Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). The Evolution with Age of Probabilistic, Intuitively Based Misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(1), 96-105. https://doi.org/10.2307/749665

Fujita, T., Jones, K., & Yamamoto, S. (2004). Geometrical intuition and the learning and teaching of geometry. *10th International Congress on Mathematical Education (ICME10), Topic Study Group 10 (TSG10) on*

Research and Development in the Teaching and Learning of Geometry, Copenhagen, Denmark. http://eprints.soton.ac.uk/id/eprint/14687

Gigerenzer, G. (2007). *Gut Feelings*. Penguin Putnam.

Godfrey, C. (1910). The Board of Education Circular on the Teaching of Geometry. *Mathematical Gazette*, *V*, 195-200.

Goldenberg, E.P., Cuoco, A.A., & Mark, J. (1998). A Role for Geometry in General Education. In *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space* (R. Lehrer and D. Chazan, D. ed.). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Jareño, J. (2020, April 5). *Un joc de cares i creus amb sorpreses (El joc de Penney)*. Blog Calaix +ie. Retrieved June 1, 2022, from http://calaix2.blogspot.com/2020/04/un-joc-de-cares-i-creus-amb-sorpreses.html

Joan Garfield, J., & Ahlgren, A. (1988). Difficulties in Learning Basic Concepts in Probability and Statistics: Implications for Research. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(1), 44-63. https://doi.org/10.2307/749110

Jornada APMCM: Conferència Joan Jareño. (2021, November 20). YouTube. Retrieved May 27, 2022, from https://www.youtube.com/watch?v=iICqc2Gdea4

Kahneman, D., & Tversky, A. (1972). Subjective probability: A judgment of representativeness. *Cognitive Psychology*, *3*(3). https://doi.org/10.1016/0010-0285(72)90016-3

Kahneman, D., & Tversky, A. (1973). Availability: A heuristic for judging frequency and probability. *Cognitive Psychology*, *5*(2). https://doi.org/10.1016/0010-0285(73)90033-9

Kahneman, D., & Tversky, A. (1983). Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. *Psychological Review*, *90*(4). https://doi.org/10.1037/0033-295X.90.4.293

Laplace, P.-S. (1840). *Essai philosophique sur les probabilités*. Bachelier, Paris.

LOMLOE Currículums educació CAIB-ESO LOMLOE. (2022). CAIB Intranet. Retrieved June 24, 2022, from https://intranet.caib.es/sites/lomloe/ca/eso/

Mucientes, M. A. (2019, Junio). Enseñanza y aprendizaje de la probabilidad en Bachillerato. *Departamento de Estadística. Universidad de Valladolid*.

Paulos, J. A. (2002). *Un matemático lee el periódico* (A. P. Moya, Trans.). Tusquets Editores.

Piaget, J. (1964). *La psychologie de l'intelligence* (Alcan, Paris, Ed.).

Piaget, J., & Inhelder, B. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant* (Press Universitaires de France ed.). Paris.

Sáenz, C. (1998). Teaching Probability for Conceptual Change. *Educational Studies in Mathematics*, *35*(3), 233-254. https://doi.org/10.1023/A:1003182219483

Sanmartí, N. (2010). Avaluar per aprendre. *L'avaluació per millorar els aprenentatges de l'alumnat en el marc del currículum per competències.*

Generalitat de Catalunya. Departament d'Educació. Direcció General de l'Educació Bàsica i el Batxillerat.

Annex A. Formulari emprat en l'enquesta

A continuació es mostra el formulari de Google que es va passar als estudiants. D'aquesta manera és més senzill recopilar les respostes i no s'usa tant de paper. Les preguntes marcades amb un asterisc són obligatòries.

Probabilitat

Instruccions: Les respostes han de ser intuïtives, no heu d'utilitzar fórmules matemàtiques. No és cap examen, aleshores no vos puntuarem i és totalment anònim

asart@iesjmthomas.eu (no compartit) Canvia de compte

* Obligatori

Quin curs fas? *

- 1r ESO
- 2n ESO
- 3r ESO
- 4rt ESO
- 1r Batxillerat
- 2n Batxillerat
- Estudio el grau de matemàtiques
- Graduat/ada en matemàtiques

Has estudiat probabilitat a qualque curs? A quins? *

La vostra resposta

1. En un joc de loteria, s'han d'elegir 6 números de l'1 al 40 (ambdós inclosos). En Tomeu ha elegit 1, 2, 3, 4, 5 i 6. Na Ruth ha elegit 39, 1, 17, 33, 8 i 27. Qui té més probabilitat de guanyar?

- Na Ruth té més probabilitat de guanyar.
- En Tomeu té més probabilitat de guanyar.
- Na Ruth i en Tomeu tenen les mateixes probabilitats de guanyar.

2. Una persona tira dos daus alhora. Què és més probable?

- Obtenir el parell 5-6.
- Obtenir el parell 6-6
- Ambdós tenen la mateixa probabilitat.

3. A una ciutat tenim dos hospitals, un petit on hi ha de mitjana 15 naixements per dia, i un gran on hi ha 45 naixements per dia. Com se sap, un 50% de nadons són nins, encara que hi ha dies que neixen més d'un 50% de nins o menys. Un any, cada hospital va apuntar els dies que naixien nadons dels quals més del 60% eren nins. Quins dels dos hospitals creus que va apuntar més d'aquests dies?

- ◯ A l'hospital PETIT varen apuntar més dies on més del 60% de nadons eren nins.
- ◯ A l'hospital GRAN varen apuntar més dies on més del 60% de nadons eren nins.
- ◯ El nombre de dies on més del 60% de nadons eren nins va ser el mateix en els dos hospitals.
- ◯ Altres: ____________________

4. La probabilitat d'obtenir cara com a mínim dues vegades al tirar tres monedes és:

- ◯ Més PETITA que la probabilitat d'obtenir com a mínim 200 cares al tirar 300 monedes.
- ◯ Més GRAN que la probabilitat d'obtenir com a mínim 200 cares al tirar 300 monedes.
- ◯ IGUAL que la probabilitat d'obtenir com a mínim 200 cares al tirar 300 monedes.
- ◯ Altres: ____________________

5. Quan triam una comissió formada per 2 persones d'entre 10 candidats el nombre de possibilitats és

- Més PETIT que el nombre de possibilitats al triar una comissió de 8 persones d'entre 10 candidats.
- Més GRAN que el nombre de possibilitats al triar una comissió de 8 persones d'entre 10 candidats.
- IGUAL que el nombre de possibilitats al triar una comissió de 8 persones d'entre 10 candidats.
- Altres: ______

6. En Joan i na Maria tenen cada un una caixa que conté dues bolles blanques i dues bolles negres.

6.1. En Joan extreu una bolla de la seva caixa i resulta que és blanca. Sense tornar aquesta bolla a la caixa, agafa una segona bolla de la caixa. La probabilitat que la segona bolla també sigui blanca és

- més PETITA que la probabilitat que la segona bolla sigui negra
- més GRAN que la probabilitat que la segona bolla sigui negra
- IGUAL que la probabilitat que la segona bolla sigui negra

6.2. Na Maria extreu una bolla de la seva caixa i la deixa a la taula fora mirar-la. Després, extreu una segona bolla i veu que és blanca. La probabilitat que la primera bolla fos blanca és

- més PETITA que la probabilitat que sigui negra
- més GRAN que la probabilitat que sigui negra
- IGUAL que la probabilitat que sigui negra

7. En Dan somia en convertir-se en doctor. Li agrada ajudar a la gent. Quan va anar a l'institut, va ser voluntari de la Creu Roja. Va acabar batxillerat amb unes notes molt bones i va servir a l'exèrcit com assistent mèdic. Després de servir a l'exèrcit, en Dan va anar a la universitat. Hi ha un centenar de persones que encaixen amb la descripció anterior. Pensa quants d'ells són estudiants de medicina o simplement estudiants.

- Hi ha més estudiants de medicina.
- Hi ha més estudiants.

8. Quan tirem una moneda no trucada, hi ha dos possibles resultats: cara o creu. En Ron va tirar la moneda tres vegades i en els tres casos li va sortir cara. En Ron vol tornar a tirar la moneda, quina és la probabilitat que li torni a sortir cara?

- més PETITA que la probabilitat que surti creu
- més GRAN que la probabilitat que surti creu
- IGUAL que la probabilitat que surti creu

Envia

Esborra el formulari

Annex B. Codi Python per analitzar els resultats

Les següents imatges són captures de pantalla del programa realitzat amb google colab amb el llenguatge python.

```
[1] import pandas as pd
```

```
[2] from google.colab import drive #connectam el Colab al drive
    drive.mount('/content/drive')

Drive already mounted at /content/drive; to attempt to forcibly remount, call drive.mount("/content/drive", force_remount=True).
```

```
[6] File = pd.read_csv("/content/drive/My Drive/Probabilitatformulari.csv") #llegim el csv de les respostes del drive
```

```
[7] File.head()
```

Marca de temps	Quin curs fas?	Has estudiat probabilitat a qualque curs? A quins?	1. En un joc de loteria, s'han d'elegir 6 números de l'1 al 40 (ambdós inclosos). En Tomeu ha elegit 1, 2, 3, 4, 5 i 6. Na Ruth ha elegit 39, 1, 17, 33, 8 i 27. Qui té més probabilitat de guanyar?	2. Una persona tira dos daus alhora. Què és més probable?	naixements per dia, i un gran on hi ha 45 naixements per dia. Com se sap, un 50% de nadons són nins, encara que hi ha dies que neixen més d'un 50% de nins o menys. Un any, cada hospital va apuntar els dies que naixien nadons dels quals més del 60% eren nins. Quins	4. La probabilitat d'obtenir cara com a mínim dues vegades al tirar tres monedes és:	5. Quan triam una comissió formada per 2 persones d'entre 10 candidats el nombre de possibilitats és	6.1. En Joan extreu una bolla de la seva caixa i resulta que és blanca. Sense tornar aquesta bolla a la caixa, agafa una segona bolla de la caixa. La probabilitat que la segona bolla també sigui blanca és	6.2. Na Maria extreu una bolla de la seva caixa i la deixa a la taula fora mirar-la. Després, extreu una segona bolla i veu que és blanca. La probabilitat que la primera bolla fos blanca és	la Creu Roja. Va acabar batxillerat amb unes notes molt bones i va servir a l'exèrcit com assistent mèdic. Després de servir a l'exèrcit, en Dan va anar a la universitat. Hi ha un centenar de	moneda no trucada, hi ha dos possibles resultats: cara o creu. En Ron va tirar la moneda tres vegades i en els tres casos li va sortir cara. En Ron vol tornar a tirar la moneda, quina és la probabilitat que li torni

						que va apuntar més d'aquests dies?					la descripció anterior. Pensa quants d'ells són estudiants de medicina o simplement estudiants.	
0	04/05/2022 9:05:52	3r ESO	No	Na Ruth té més probabilitat de guanyar.	Ambdós tenen la mateixa probabilitat.	A l'hospital GRAN varen apuntar més dies on mé...	IGUAL que la probabilitat d'obtenir com a míni...	Més PETIT que el nombre de possibilitats al tr...	IGUAL que la probabilitat que la segona bolla ...	més GRAN que la probabilitat que sigui negra	Hi ha més estudiants de medicina.	més GRAN que la probabilitat que surti creu
1	04/05/2022 9:06:07	3r ESO	No	Na Ruth i en Tomeu tenen les mateixes probabil...	Ambdós tenen la mateixa probabilitat.	El nombre de dies on més del 60% de nadons ere...	IGUAL que la probabilitat d'obtenir com a míni...	IGUAL que el nombre de possibilitats al triar ...	més PETITA que la probabilitat que la segona b...	més PETITA que la probabilitat que sigui negra	Hi ha més estudiants.	IGUAL que la probabilitat que surti creu
2	04/05/2022 9:07:25	3r ESO	Si, 5 i 6 de primaria, i actualment a 3 eso	Na Ruth i en Tomeu tenen les mateixes probabil...	Obtenir el parell 6-6	A l'hospital PETIT varen apuntar més dies on m...	IGUAL que la probabilitat d'obtenir com a míni...	IGUAL que el nombre de possibilitats al triar ...	IGUAL que la probabilitat que la segona bolla ...	IGUAL que la probabilitat que sigui negra	Hi ha més estudiants de medicina.	IGUAL que la probabilitat que surti creu
3	04/05/2022 9:09:28	3r ESO	No	Na Ruth i en Tomeu tenen les mateixes probabil...	Obtenir el parell 5-6.	El nombre de dies on més del 60% de nadons ere...	Més GRAN que la probabilitat d'obtenir com a m...	Més PETIT que el nombre de possibilitats al tr...	més GRAN que la probabilitat que la segona bol...	més PETITA que la probabilitat que sigui negra	Hi ha més estudiants de medicina.	més GRAN que la probabilitat que surti creu
	04/05/2022	3r	Sí, a sisè de	Na Ruth i en Tomeu tenen	Ambdós tenen la	A l'hospital PETIT	IGUAL que la probabilitat	Més PETIT que el nombre de	més GRAN que la probabilitat	més GRAN que	Hi ha més	IGUAL que la

Com que cada persona ha posat una resposta diferent, observant el data frame s'ha decidit prendre com a resposta afirmativa de que s'ha estudiat probabilitat a les respostes amb qualcuna d'aquestes paraules: si, poc, eso, primaria, sí, primària, carrera, batxillerat, ESO, aquest, este, Si, Sí, Primaria, tots, aprenent, tercero, Batxiller, carrera.

```
df = File[File['Has estudiat probabilitat a qualque curs? A quins?'].str.contains('si') |
         File['Has estudiat probabilitat a qualque curs? A quins?'].str.contains('Si') |
         File['Has estudiat probabilitat a qualque curs? A quins?'].str.contains('Sí') |
         File['Has estudiat probabilitat a qualque curs? A quins?'].str.contains('sí') |
         File['Has estudiat probabilitat a qualque curs? A quins?'].str.contains('poc')|
         File['Has estudiat probabilitat a qualque curs? A quins?'].str.contains('eso')|
         File['Has estudiat probabilitat a qualque curs? A quins?'].str.contains('primaria') |
         File['Has estudiat probabilitat a qualque curs? A quins?'].str.contains('primària') |
         File['Has estudiat probabilitat a qualque curs? A quins?'].str.contains('carrera') |
         File['Has estudiat probabilitat a qualque curs? A quins?'].str.contains('batxillerat') |
         File['Has estudiat probabilitat a qualque curs? A quins?'].str.contains('ESO') |
         File['Has estudiat probabilitat a qualque curs? A quins?'].str.contains('aquest') |
         File['Has estudiat probabilitat a qualque curs? A quins?'].str.contains('este') |
         File['Has estudiat probabilitat a qualque curs? A quins?'].str.contains('Primaria') |
         File['Has estudiat probabilitat a qualque curs? A quins?'].str.contains('tots') |
         File['Has estudiat probabilitat a qualque curs? A quins?'].str.contains('aprenent') |
         File['Has estudiat probabilitat a qualque curs? A quins?'].str.contains('tercero') |
         File['Has estudiat probabilitat a qualque curs? A quins?'].str.contains('Batxiller') |
         File['Has estudiat probabilitat a qualque curs? A quins?'].str.contains('carrera')]
```

```
df.describe()
```

3. A una ciutat	7. En Dan somia en convertir-se

				probabilitat de guanyar?		naixien nadons dels quals més del 60% eren nins. Quins dels dos hospitals creus que va apuntar més d'aquests dies?			també sigui blanca és	bolla fos blanca és	hi ha un centenar de persones que encaixen amb la descripció anterior. Pensa quants d'ells són estudiants de medicina o simplement estudiants.	probabilitat que li torni a sortir cara?
count	227	227	227	227	227	224	226	226	227	226	225	227
unique	215	8	211	3	4	5	5	4	3	3	2	3
top	16/05/2022 12:33:24	2n ESO	si	Na Ruth i en Tomeu tenen les mateixes probabil...	Ambdós tenen la mateixa probabilitat.	A l'hospital GRAN varen apuntar més dies on mé...	IGUAL que la probabilitat d'obtenir com a míni...	Més PETIT que el nombre de possibilitats al tr...	més PETITA que la probabilitat que la segona b...	IGUAL que la probabilitat que sigui negra	Hi ha més estudiants.	IGUAL que la probabilitat que surti creu
freq	4	69	6	152	167	101	110	111	147	115	121	152

En total, hi han 227 alumnes que sí han estudiat probabilitat i la resta, 95, no.

Annex C. Taula de doble entrada al tirar dos daus

Al tirar dos daus, tenim les següents possibilitats a la taula de doble entrada:

	(1 1)	(1 2)	(1 3)	(1 4)	(1 5)	(1 6)
	(2 1)	(2 2)	(2 3)	(2 4)	(2 5)	(2 6)
	(3 1)	(3 2)	(3 3)	(3 4)	(3 5)	(3 6)
	(4 1)	(4 2)	(4 3)	(4 4)	(4 5)	(4 6)
	(5 1)	(5 2)	(5 3)	(5 4)	(5 5)	(5 6)
	(6 1)	(6 2)	(6 3)	(6 4)	(6 5)	(6 6)

Annex D. Competència matemàtica i competències bàsiques en ciència i tecnologia

La següent taula mostra la competència matemàtica i competències bàsiques en ciència i tecnologia de l’educació secundària obligatòria. S’ha extret de l'assignatura del màster Didàctica Específica, Disseny i Desenvolupament Curricular a l’Àrea de Matemàtiques (10699).

IDENTIFICACIÓ I COMPRENSIÓ DEL PROBLEMA O REPTE	**Identificar questions o problemas de índole científica o tecnològica**	**CMCT 1.1**	**Demostra una curiositat sostinguda sobre un tema científic o tecnològic.**
		CMCT 1.2	**Identifica questions o problemes que poden ser resolts amb la ciència.**
		CMCT 1.3	**Identifica qüestions o problemes que requereixen el disseny o aplicació d'alguna tecnologia.**
		CMCT 1.4	**Identifica els principals elements de l'entorn natural, analitzant-ne les característiques més rellevants, la seva organització i interaccions.**
		CMCT 1.5	**Fa observacions dirigides a identificar les seves pròpies preguntes, incloent-hi cada vegada més complexes, sobre el món natural.**
	Identifica diferents fonts d'informació i inspiració necessàries per la comprensió i resolució del problema o repte	**CMCT 1.6**	**Identifica i selecciona les actlvitats, visites a empreses o institucions que poden ser una font d'informació i inspiració rellevant.**
		CMCT 1.7	**Identifica les característiques de les persones i/ o experts que poden ser una font d'informació rellevant.**
	Utilitzar models per	**CMCT 1.8**	**Determina quina és la variable dependent i la independent, si són continues o discretes.**

		predir el comportament d'un sistema	CMCT 1.9	Formula una hipòtesis pertinent sobre la relació entre la magnitud investigada i la variable independent, i la justifica en funció d'un model.
			CMCT 1.10	Relaciona un fenomen natural amb el model d'explicació que li correspon, identificar-ne els elements bàsics.
			CMCT 1.11	Prediu com es comportarà un fenomen si es modifiquen algunes de les condicions del context.
			CMCT 1.12	Formula alternatives " si....aleshores... " hipòtesis basades en les seves preguntes.
			CMCT 1.13	Prediu el comportament d'un sistema a partir d'un model d'ell mateix.
			CMCT 1.14	Analitza i comprèn l'enunciat dels problemes (dades, relacions entre les dades, context del problema).
		Modelar matemàticament el problema o repte	CMCT 1.15	Identifica les variables del problema i les seves interrelacions
			CMCT 1.16	Tradueix informació quantitativa o tècnica expressada amb paraules d'un text en forma visual (per exemple, una taula, gràfic, símbols,..).
			CMCT 1.17	Connecta conceptes matemàtics entre ells i a altres àrees i interessos personals.
			CMCT 1.18	Tradueix un problema a llenguatge matemàtic o a una representació matemàtica utilitzant variables, símbols, diagrames i models adequats.
		Interpretar textos orals i escrits on hi hagi gràfiques, taules, diagrames i altres símbols de notació	CMCT 1.19	Recull, organitza i interpreta la informació de diferents situacions i textos discontinus.
			CMCT 1.20	Llegeix taules, diagrames, gràfiques, fotografies, dibuixos, esquemes, croquis, organigrames ... i interpreta el seu contingut.
			CMCT 1.21	Analitza les dades d'una taula, construeix una gràfica i interpreta les dades.

	identificant les relacions que mostrin	CMCT 1.22	Interpreta correctament indicacions referides als punts cardinals, a la ubicació d'objectes, a desplaçaments en espais coneguts i desconeguts i utilitza amb autonomia els punts cardinals per orientar-se en l'espai i en representacions gràfiques esquemàtiques de la mateixa.
PLANIFICACIÓ I REALITZACIÓ	Aplicar una estratègia per resoldre problemes	CMCT 2.1	Mantenir una actitud de recerca davant d'un problema assajant estratègies diverses.
		CMCT 2.2	Dissenya i realitza una estratègia de resolució del problema.
		CMCT 2.3	Mostra tolerància per l'ambigüitat, la perseverança i la capacitat de treballar amb problemes de final obert.
		CMCT 2.4	Té en compte que pot haver-hi més d'una manera racional d'interpretar un problema de base científica o tecnològica.
	Planificar col.laborativament els tipus d'investigacions ,inclòs el treball de camp i experiments.	CMCT 2.5	Planifica un procediment de mesura de les variables dependent i independent, utilitzant els instruments més adequats. Controla la resta de variables que influeixen en el fenomen.
		CMCT 2.6	Selecciona els equips i materials més adequats per realitzar la investigació i identifica possibles riscos.
	Prototipar un disseny tecnològic com a resposta a una idea, problema o repte	CMCT 2.7	Desenvolupa un pla que identifiqui etapes dels disseny i recursos clau.
		CMCT 2.8	Explora i prova una varietat de materials per a un ús eficaç i una producció mínima de residus.
		CMCT 2.9	Identifica i utilitza les eines, tecnologies i materials adequats per a la producció.
		CMCT 2.10	Construeix una primera versió del producte o un prototip, segons correspongui, fent canvis en les eines, materials i procediments segons sigui necessari.

			CMCT 2.11	Registra les diferents iteracions de prototipatge.
		Realitzar petites investigacions experimentals, utilitzant tant les habilitats cognitives superiors com les manuals i respectant les normes de seguretat habituals en els laboratoris quan sigui necessari	CMCT 2.12	Utilitza tècniques bàsiques de laboratori o de camp.
			CMCT 2.13	Respecta les normes de seguretat al laboratori o taller.
			CMCT 2.14	Fa una lectura precisa de la mesura que proporciona un instrument.
			CMCT 2.15	Realitza les mesures amb exactitud i precisió.
			CMCT 2.16	Utilitza les unitats del sistema internacional apropiades i realitza conversions unitaries correctament.
			CMCT 2.17	Trian un nivell de precisió adequat a la limitació de les mesures quan expressen una quantitat.
	TRACTAMENT I ANÀLISI DE LES DADES	Crear taules,diagrames, gràfiques,.. per sintetitzar les dades	CMCT 3.1	Construeix i utilitza una varietat de mètodes , incloent taules, gràfics i tecnologies digitals, segons correspongui, per presentar patrons o relacions en les dades.
		Analitzar i interpretar les dades	CMCT 3.2	Identifica patrons i connexions en les dades.
			CMCT 3.3	Compara les dades amb les prediccions i extreu conclusions.
			CMCT 3.4	Utilitza el llenguatge matemàtic per expressar les relacions trobades.
			CMCT 3.5	Utilitza la terminologia científica precisa, així com els codis i formes de representació simbòlica, amb correcció i precisió.
			CMCT 3.6	Elabora textos utilitzant una terminologia científica adequada en les seves justificacions.
			CMCT	Utilitza la comprensió científica per

		3.7	identificar relacions i treure conclusions.
		CMCT 3.8	Compara dades amb prediccions i desenvolupa explicacions per als resultats.
AVALUAR	Testear el prototip o producte	CMCT 4.1	Prova la primera versió del producte o el prototip.
		CMCT 4.2	Recopila comentaris i inspiració entre iguals i/o usuaris i/o experts sobre el producte o prototip.
		CMCT 4.3	Fa canvis, resol problemes i tornar a provar una nova versió del producte o prototip.
	Avaluar el procés d'investigació realizat	CMCT 4.4	Avalua si les seves investigacions van ser proves justes.
		CMCT 4.5	Identifica possibles fonts d'error.
		CMCT 4.6	Suggereix millores en els seus mètodes d'investigació.
		CMCT 4.7	Identifica algunes de les implicacions socials, ètiques i ambientals dels resultats de les investigacions pròpies i d'altres.
		CMCT 4.8	Demostra una comprensió i apreciació de les proves.
COMUNICAR I COMPARTIR	Comunicar i compartir el protopip definitiu i tot el procés de disseny, avaluació i impacte	CMCT 5.1	Decideix sobre com i amb qui compartir el seu producte.
		CMCT 5.2	Mostra el seu producte i descriu el seu procés, utilitzant la terminologia adequada i proporcionant raons per a la seva solució i modificacions seleccionades.
		CMCT 5.3	Explica com contribueix el seu producte a la persona, la família, la comunitat i / o el medi ambient.
		CMCT 5.4	Reflexiona sobre el seu pensament i processos de disseny, i avalua la seva capacitat de treballar eficaçment tant individual com de forma col·laborativa en un grup, incloent la seva capacitat de compartir i mantenir un espai de treball cooperatiu

				eficient.
			CMCT 5.5	**Identifica nous problemes de disseny.**

Taula 2: competència matemàtica i competències bàsiques en ciència i tecnologia

Annex E. Full KPSI

El full KPSI és molt important a l'hora de conèixer el nivell dels alumnes i els seus punts forts i febles en una unitat didàctica. A continuació es presenta el full per la unitat didàctica de probabilitat.

FULL KPSI				
Què sé de...?	**Grau de coneixement** **1 = No ho conec** **2 = Em sona, però sé molt poc d'això** **3 = Sé un poc d'això** **4 = Sé molt bé què és això. Ho podria explicar a un amic**			
	1	2	3	4
Experiments aleatoris.				
Operacions amb conjunts.				
Freqüències absolutes i relatives.				
Mostra i població.				
Diagrama d'arbres.				
La regla de Laplace.				
La probabilitat condicional.				
Freqüència relativa d'un esdeveniment i la seva aproximació a la probabilitat mitjançant la simulació o l'experimentació.				

Annex F. Rúbrica 1

Criteri	Molt bé	Bé	Regular	Malament
He resolt el problema emprant el que hem treballat a classe.	He utilitzat la Regla de Laplace i he assignat les probabilitats als esdeveniments correctament. Utilitzant la probabilitat condicionada.	He sabut assignar les probabilitats, però no està justificat, o bé, està justificat però hi ha errades de càlcul.	He utiltizat la Regla de Laplace i la probabilitat condicionada, però no està ben justificat i no està ben calculat.	No he sabut assignar probabilitats.
He entès i fet totes les fases del problema.	He duit a terme correctament totes les fases.	He fet correctament totes les fases però algunes no les entenc del tot.	He fet la meitat de les fases bé.	No he sabut fer cap fase del problema.
He emprat el llenguatge adequat a la solució.	El llenguatge és correcte i adequat.	El llenguatge és correcte i adequat, llevat d'una o dues paraules.	El llenguatge és correcte i adequat de vegades.	El llenguatge és incorrecte.
A la feina en parelles he participat activament.	Escolt al meu company activament i sóc crític i constructiu.	Escolt als companys però no aport tant com ells.	No escolt gaire als companys i vaig un poc al meu aire.	No faig bona feina en grup.

Annex G. Rúbrica 2

Criteri	Puntuació professor/a	Comentaris professor/a	Comentaris company/a	Autoavaluació
S'ha presentat el problema per escrit.				

Ha entès i fet totes les fases del problema.				
He emprat el llenguatge adequat a la solució i amb llenguatge matemàtic.				
Ha fet la mostració correctament.				