Universitat de les Illes Balears

TREBALL DE FI DE MÀSTER

FORA RECEPTES... MATEMÀTIQUES!

Vicente Rafael Navarro Planas

Màster Universitari de Formació del Professorat

(Especialitat/Itinerari de Matemàtiques)

Centre d'Estudis de Postgrau

Any Acadèmic 2021-22

FORA RECEPTES... MATEMÀTIQUES!

Vicente Rafael Navarro Planas

Treball de Fi de Màster

Centre d'Estudis de Postgrau

Universitat de les Illes Balears

Any Acadèmic 2021-22

Paraules clau del treball:

mostració, demostració, didàctica, fórmula, manipulatiu.

Nom Tutor/Tutora del Treball: Cristina Olivares García

Resum

En aquest treball es pretén descriure les demostracions i les mostracions com a potents eines per enfocar l'aprenentatge i l'ensenyament de les matemàtiques. A partir de la recerca en el currículum (de les Illes Balears i els d'altres països pioners) i en la literatura de didàctica de les matemàtiques existent i a partir de la consulta a persones expertes (com Anton Aubanell i Miquel Siquier), s'estudiarà com l'alumnat pot comprendre millor els principals conceptes matemàtics i tots els que es poden extreure a partir d'aquests.

Per mostrar de manera pràctica la utilitat d'aquestes estratègies anteriorment esmentades, també es desenvolupen quatre propostes didàctiques i manipulatives per aplicar a les aules d'educació secundària obligatòria, des de primer d'ESO. En aquestes propostes didàctiques es proporcionaran detalls sobre els continguts i el material, es descriurà el procés per dur-les a terme i, posteriorment, es reflexionarà sobre l'avaluació d'aquestes i l'atenció a la diversitat.

Paraules clau: demostració, mostració, didàctica, fórmula, manipulatiu.

Índex

1. Introducció

1.1. Justificació del títol

Per a moltes de persones el títol d'aquest treball podria parèixer certament excèntric o fins i tot podrien arribar a considerar-lo estrambòtic. No obstant això, per a l'autor d'aquest, i amb el consentiment i el suport de la tutora, el títol té un significat especial, que desprèn cert aroma a nostàlgia. I qui diu que no es pot transmetre amb les matemàtiques?

"Fora receptes!" acostumava a ser una de les frases que mai no faltava a les sessions de Miquel Siquier Capó, el meu professor de Matemàtiques des que vaig cursar 3r d'ESO fins a 2n de Batxillerat. Al començament em va costar un poc entendre què pretenia, però amb el transcurs dels anys ho vaig acabar entenent i, de fet, vaig agrair de per vida la seva metodologia i tot el coneixement que he pogut construir i seguesc construint a partir d'aquest, perquè mai no es deixa d'aprendre.

He afegit "matemàtiques" al títol per emfasitzar que no es tracta de cap recepta de Masterchef ni cap recepta d'arqueologia gastronòmica local de la meva padrina, tot i que som un gran amant de la cuina i de la gastronomia. Nogensmenys, podria comentar que el mètode "fora receptes" constitueix en si una recepta o un bon receptari: la metodologia de no fer matemàtiques perquè sí, sinó d'entendre-les, perquè a partir de la comprensió dels principals conceptes matemàtics és com realment s'aprèn matemàtiques.

Cal dir també que altre objectiu del meu professor també era despertar l'interès de l'alumnat i motivar-lo. Per això també acostumava a xerrar de "matemàgia" (IB3, 2019): quan havia de demostrar que allò era cert o per què havia de servir (l'aprenentatge significatiu).

1.2. Demostracions i mostracions

“Des dels antics geòmetres grecs, qui diu matemàtiques diu demostració. [...] Les demostracions són la cola que manté unides les matemàtiques”, declara amb contundència el filòsof, matemàtic i professor Carlos M. Casado-Madrid (2014).

Per poder rebatre el que diu Casado-Madrid o no, s’ha de poder entendre què és demostrar i demostració. Es poden trobar moltes definicions per descriure aquests termes. No obstant això, un dels motius principals que van contribuir a l’existència d’aquest treball va ser la lectura de l’article *“Razonamiento y justificación”*, publicat per la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES (2009). Per tant, essent fidel al document esmentat: “Una demostració matemàtica és una manera formal d’expressar tipus particulars de raonament i de justificació”. Llavors, demostrar implicaria raonar i justificar amb cert formalisme i/o rigor.

El professor Anton Aubanell, del Grup de Didàctica de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona, confirma que “perquè un trajecte deductiu es consideri una demostració requereix un precís encadenament lògic de les passes”. No obstant això, afegeix que “això no vol dir que no es puguin fer demostracions absolutament rigoroses a partir de l’experimentació” (Aubanell, 2017). Per tant, connecta el rigor amb l’experimentació en l’àmbit de les matemàtiques, ciència considerada formal.

En l’assignatura de Metodologia i Recursos va aparèixer la paraula “mostració”, la qual no s’ha pogut trobar en cap diccionari. No obstant això, la “mostració” també requereix cert raonament i justificació, però no amb el mateix nivell de formalisme o de rigor que la demostració. De fet, es podria arribar a dir que mostrar és una manera menys formal de demostrar.

També Anton Aubanell (2017) considera que es fa servir el terme “mostrar” en lloc de “demostrar” per referir-se a l’argumentació d’una propietat a través de l’ús intel·ligent del sentit comú, l’analogia, la intuïció... desenvolupant raonaments plausibles que l’alumne/a pugui entendre fàcilment encara que no es puguin considerar estrictament demostracions rigoroses. A més, també explica que les mostracions i les activitats per mostrar propietats ofereixen un raonament plausible (admissible) que, a nivell de l'ESO, moltes vegades no té altra alternativa que la simple memorització, ja que una demostració rigorosa requeriria tècniques matemàtiques avançades (Aubanell, 2017). Aleshores, es podria dir que una mostració és una manera menys rigorosa de demostrar, apta per a la comprensió de l'alumnat i per evitar la utilització de les "receptes" (matemàtiques).

En la realització d'aquest treball es va tenir l'enorme privilegi d'entrevistar per via telemàtica aquest gran referent en l'ensenyament de les matemàtiques: Anton Aubanell, qui després de dècades en la docència es va jubilar, però que mostra que segueix transmetent amb tanta o més passió que mai l'emoció que li produeixen les matemàtiques i tot el que les envolta.

Aubanell confessa que la paraula "mostració" va anar sortint per si sola, ja que, com a matemàtic, li molestava haver d'emprar el terme demostració per referir-se a activitats que no poden fer-se amb rigor o a aproximacions no rigoroses, en les quals realment s'està mostrant. Llavors, "de demostrar venia mostrar i de demostració venia mostració", que "s'aproxima més a la propietat pel cor que pel cap, tot i que també pel cap, perquè es posa en marxa la intuïció" (Entrevista a Anton Aubanell).

Com s'ha dit amb anterioritat, fruit d'aquest sentiment d'incomoditat com a matemàtic que s'estima el rigor va néixer la paraula mostració, la qual desconeix si també altres persones amb anterioritat l'han utilitzat, però sí que és conscient que va anar compartint aquest concepte amb les companyes i els companys, el públic, exalumnes seus de didàctica i sap que avui en dia l'empren freqüentment.

Aubanell també reconeix que es va inspirar en Pere Puig Adam, matemàtic i enginyer industrial amb gran vocació pedagògica, la qual en una Espanya molt grisa el va portar a ensenyar matemàtiques amb el material que ell i els seus alumnes elaboraven (Universitat de Barcelona, 2017). Anton, com a deixeble de

Puig Adam, va llegir aquest text en el llibre _La Matemática y su enseñanza actual_, que Pere va escriure poc abans que es morís:

“No sempre una demostració basada en la resolució a veritats anteriors, qualitat característica de les demostracions de l’escola grega, és la que tradueix les essències de la propietat demostrada, ni molt menys la més adequada des d’un punt de vista didàctic. Per als matemàtics orientals demostrar era reduït a l’evidència directa, el qual l’infant percep millor que un encadenament lògic, del qual no sol veure ni l’abast ni la necessitat”.

Aubanell destaca que Puig Adam no explicita el concepte de mostració, el qual s’ha introduït anteriorment, però el dona a entendre. De Guzmán també xerra del concepte de raonament plausible, que potser no és el raonament més purament deductiu, però sí d’alguna manera admissible, ja que apel·la a la intuïció i permet arribar a conclusions que no són demostracions des del punt de vista lògic, però que potser són més adients des del punt de vista pedagògic: “No sempre el camí que marca el rigor formal és el camí més productiu des del punt de vista didàctic” (Entrevista a Anton Aubanell).

Amb aquestes explicacions, el professor Aubanell classifica les demostracions i mostracions en tres categories:

1. Les demostracions que es poden fer amb tot tipus de formalisme i de rigor.
2. Les demostracions que és més aconsellable que es facin a través de la manipulació d’objectes, però que s’han de considerar demostracions com a tals, ja que són generalitzables, entre d’altres característiques.
3. Les mostracions que no tenen aquest formalisme matemàtic, però que aposten per la intuïció i per l’experiència (Entrevista a Anton Aubanell).

Hi hauria un quart lloc per a totes aquelles activitats amb presència de les matemàtiques, però que no es poden considerar mostracions tampoc. I després d’aquestes activitats amb presència matemàtica, ja es trobarien les receptes, les quals Miquel Siquier defineix com “tot allò que s’utilitza encara que no es tingui ni idea d’on surt, però com funciona...” (Entrevista a Miquel Siquier).

En aquest treball s’aprofundirà en les demostracions i en les mostracions. En primer lloc, amb una proposta d’objectius, que seran auditats al final d’aquest treball. Després, es plantejarà un estudi de l’art o de l’estat actual de la qüestió, amb l’objectiu de recollir la informació transcendental, fruit de la recerca. Posteriorment, es desenvoluparan diverses activitats didàctiques, basades en unes determinades orientacions generals i amb unes directrius a l’hora d’avaluar-les en el procés d’ensenyament-aprenentatge. Per acabar, es realitzarà una síntesi de les principals conclusions d’aquest treball i on es plasmi l’acompliment o no dels objectius plantejats.

2. Objectius del treball

Amb la realització d'aquest treball s'han proposat uns objectius principals, els quals es concreten a continuació:

1. Descriure les demostracions i sobretot les mostracions com a estratègies per a la millora de l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques, explicant quan poden ser útils les demostracions i quan les mostracions.

2. Examinar quin és el rol de les demostracions i les mostracions en el currículum vigent a les Illes Balears i en el nou currículum que es proposa amb la LOMLOE, així com en altres currículums pioners internacionals.

3. Desenvolupar diverses propostes didàctiques aptes i útils per a les aules d'educació secundària obligatòria.

4. Transmetre quin és el procés per dur a terme aquestes estratègies (les demostracions i les mostracions) dins l'aula.

3. Estat de la qüestió

3.1. El currículum, les demostracions i les mostracions

- **El currículum de les Illes Balears**

En cap dels tres currículums vigents de l'assignatura de Matemàtiques a l'ESO (*Matemàtiques*, *Matemàtiques orientades als ensenyaments acadèmics* i *Matemàtiques orientades als ensenyaments aplicats*) de la Conselleria d'Educació i Formació Professional (2015.) de la CAIB s'esmenten explícitament les paraules demostrar o demostració. No obstant això, de manera implícita es pot arribar a entendre de la finalitat de l'assignatura que la demostració forma part de "les característiques que els han estat assignades tradicionalment i que s'identifiquen amb la deducció, la precisió, el rigor i la seguretat, entre altres".

En canvi, en el currículum vigent de *Matemàtiques* a Batxillerat de la Conselleria d'Educació i Formació Professional (2015) de la CAIB s'esmenta diverses vegades les paraules demostració i demostrar. A més, els continguts del primer bloc ("Processos, mètodes i actituds en matemàtiques") incorporen tant a Matemàtiques I (el primer curs) com a Matemàtiques II (el segon curs) la "iniciació a la demostració en matemàtiques: mètodes, raonaments, llenguatges" i els "mètodes de mostració: reducció a l'absurd, mètode d'inducció, contraexemples, raonaments encadenats". En el currículum vigent de Matemàtiques aplicades a les ciències socials només s'esmenta la paraula demostrar com a subapartat del tercer criteri d'avaluació o estàndard d'aprenentatge avaluable del primer bloc (també "Processos, mètodes i actituds en matemàtiques"): "Empra les eines tecnològiques adequades al tipus de problema, situació a resoldre o propietat o teorema a demostrar".

En el nou currículum que es proposa amb la LOMLOE les competències específiques han estat agrupades al voltant de cinc blocs competencials: resolució de problemes, raonament i prova, connexions, comunicació i representació i destreses socioafectives. El bloc que està més connectat amb l'objecte d'estudi d'aquest treball és el de raonament i prova. Aquest bloc es relaciona amb dues competències específiques: la 3a i la 4a. D'aquestes dues, aquesta tercera competència específica s'enuncia així:

"3. Formular i comprovar conjectures senzilles o plantejar problemes de manera autònoma, reconeixent el valor del raonament i l'argumentació, per generar nou coneixement" (Conselleria d'Educació i de Formació Professional, 2022).

En aquesta tercera competència específica es concreta que "la formulació de conjectures, el plantejament de nous problemes i la seva comprovació o resolució es pot realitzar per mitjà de materials manipulatius, calculadores, programari, representacions i símbols, treballant de manera individual o col·lectiva i aplicant els raonaments inductiu i deductiu" (Conselleria d'Educació i de Formació Professional, 2022). Per tant, es pot entendre que tenen cabuda tant el formalisme de la demostració amb tot rigor com a la utilització de demostracions i mostracions amb material manipulatiu. A més, també es destaca la promoció de l'ús del raonament i la demostració com a aspectes fonamentals de les matemàtiques.

Les línies finals en l'explicació d'aquesta tercera competència específica del currículum de Matemàtiques resulten aclaridores per descriure com ha de ser el procés d'ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques: "Quan els alumnes plantegen nous problemes, millora el raonament i la reflexió al mateix temps que construeix el seu propi coneixement, la qual cosa es tradueix en un alt nivell de compromís i curiositat, així com d'entusiasme cap al procés d'aprenentatge de les matemàtiques" (Conselleria d'Educació i Formació Professional, 2022).

- **Altres currículums internacionals pioners: Singapur i Estònia**

L'Informe PISA, estudi dut a terme per l'OCDE, pretén avaluar els sistemes educatius de tot el món per mitjà d'unes proves en comprensió lectora, matemàtica i científica. D'aquesta manera, les autoritats educatives dels estats poden treure conclusions i millorar els programes d'educació.

El darrer Informe PISA data de l'any 2018. Quant a la comprensió matemàtica, Espanya ocupa la posició 34 d'aquest rànquing (Schleicher, 2019). El primer estat sencer (no dividit en territoris en aquesta classificació, com és el cas de la Xina) que hi apareix va ser Singapur. Curiosament, el primer estat europeu, que es troba justament per davall dels estats asiàtics és Estònia (en la vuitena posició).

Trobar Singapur en les primeres posicions del rànquing ja forma part de la tònica habitual dels darrers Informes PISA (OECD, 2022). Aquest estat asiàtic va realitzar durant les dècades dels 80 i dels 90 una gran inversió en educació després d'haver examinat altres models educatius internacionals. Així va néixer el mètode Singapur, que va permetre que la població analfabeta de Singapur adquirís les competències necessàries. Aprofitant el prestigi d'aquest mètode per aprendre i ensenyar Matemàtiques, diverses empreses s'han encarregat de comercialitzar-lo per tot el món. Les bases pedagògiques essencials del mètode s'extreuen del currículum de Matemàtiques de Singapur, les quals es troben en els estudis de Bruner, Skemp, Dienesi i Vygotsky sobre el desenvolupament i l'aprenentatge. Quant als principis fonamentals d'aquesta metodologia, es troben la visualització, la resolució de problemes, la matemàtica mental, el domini comprensiu i les estratègies (Método Singapur, 2011). El marc conceptual del mètode Singapur incorpora la metacognició (monitorització del pensament i autoregulació del propi aprenentatge) i sobretot els processos de raonament.

A Singapur hi ha cinc plans d'estudis al currículum de Matemàtiques de secundària amb l'objectiu d'atendre la diversitat de necessitats, interessos i capacitats de l'alumnat (Ministry of Education of Singapore, 2019). En tots aquests currículums s'esmenten les abstraccions, les quals fan que les matemàtiques siguin una eina potent per resoldre problemes. De fet, un dels quatre principals blocs de la matèria es diu "Abstraccions i Aplicacions". També hi ha un altre que es diu "Propietats i Relacions" i on es destaca la importància de "les propietats dels objectes matemàtics inherents a les seves definicions o derivats mitjançant argument lògic i prova rigorosa" (Ministry of Education of Singapore, 2019), ja que entendre les propietats i les relacions els permet obtenir una visió més profunda dels objectes matemàtics i utilitzar-los per modelar i resoldre problemes del món real.

Per acabar, el currículum de Singapur (Ministry of Education of Singapore, 2019) també posa especial èmfasi en el fet que l'aprenentatge de les matemàtiques crea oportunitats perquè els estudiants desenvolupin competències clau, essencials al segle XXI, com ara el raonament i el pensament crític.

Com s'ha explicat anteriorment, Estònia va ocupar la vuitena posició en el rànquing de la comprensió matemàtica de l'Informe Pisa 2018 (Schleicher, 2019).

La República d'Estònia és un estat bàltic que va formar part de la URSS i actualment de la Unió Europea. La seva població no arriba al milió i mig d'habitants i s'ha convertit per dret propi en la "nova Finlàndia" (Sylvester & Jackson, 2021), ja que va ser l'estat d'Europa amb millors resultats segons PISA. L'èxit del model educatiu s'ha basat en l'aposta pionera per la tecnoeducació: la innovació, la robòtica i la realitat augmentada formen part del dia a dia a les aules de les escoles i els instituts estonians. De fet, des dels primers cursos els infants ja aprenen matemàtiques programant robots.

El currículum de Matemàtiques a Estònia corresponent a l'ESO seria el de l'Educació Bàsica, de 7 a 16 anys (Rodríguez-Bravo, 2015). Segons aquest currículum (Republic of Estonia, 2017), l'estudiant que finalitza els estudis d'Educació Bàsica ha de ser capaç de fer raonaments lògics, amb justificació i prova i d'analitzar i arribar a conclusions mitjançant un raonament basat en els fets disponibles, entre d'altres competències. També crida l'atenció que el nombre de sessions (o hores) setmanals de la matèria de Matemàtiques supera la desena, i fins i tot arriba a les 13 hores per setmana, en els nivells corresponents a l'etapa d'ESO (Republic of Estonia, 2017).

Per acabar aquest subapartat, i d'acord amb un seminari web que es va realitzar durant el context de la pandèmia, expertes en Didàctica de les Matemàtiques i altres docents d'Espanya i de diversos països d'Iberoamèrica van arribar a les següents reflexions generals: "Els currículums són vius, sempre són millorables i el professorat ha de reclamar que les autoritats educatives continuïn treballant per l'elaboració de millors currículums, acords amb interpretacions actualitzades dels processos d'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques" (Calvo-Pesce, C. et al., 2020). També varen assegurar que el professorat de matemàtiques sobretot es troba molt més encotillat pel pes de la tradició que pel propi currículum.

Per tant, d'aquestes reflexions es pot arribar a extreure que el currículum sí condiciona el model d'ensenyament, però sempre existeix un cert grau de llibertat, dins del currículum, per a la interpretació per part dels equips docents. Llavors, si les demostracions i les mostracions no s'esmenten de manera explícita en els currículums, però aquestes tenen una relació estreta amb les competències específiques i els sabers bàsics, poden formar de les situacions d'aprenentatge que el professorat (de manera conjunta amb el seu departament) pot preparar per millorar el procés d'ensenyament-aprenentatge.

3.2. En l'ensenyament de les matemàtiques fins l'actualitat

Una vegada revisats els currículums vigents a les Illes Balears i altres currículums internacionals pioners sobre les demostracions i les mostracions, s'ha realitzat una recerca sobre quin ha estat el paper que han tingut les demostracions i les mostracions en l'ensenyament de les matemàtiques fins l'actualitat.

Tornant als ensenyaments del professor Aubanell, a l'hora de tractar sobre les demostracions i les mostracions, Anton convida a fer una clara distinció entre rigor i formalisme, termes molt similars, però que convé no confondre'ls.

Per una banda, el rigor es podria entendre, segons Aubanell, com l'encadenament de raonaments lògics que ens porten a demostrar una propietat. Aquests encadenaments poden tenir o respondre diversos esquemes, més de tipus inductiu o de tipus deductiu (Entrevista a Anton Aubanell).

D'altra banda, tot i que Aubanell es declara adepte al rigor, així com es pot observar en el llibre *Útiles básicos de cálculo numérico* (Aubanell et al., 1993), ell considera que el formalisme a vegades té quelcom de llenguatge crític que alumnes que encara no estan iniciats en les matemàtiques ("la nostra ciència") els pot significar una barrera difícil de traspassar. Per tant, l'encert didàctic es trobaria en saber conjugar aquest rigor amb dosis baixes de formalisme. També destaca que l'ús de molt de formalisme no és cap garantia de rigor, tot i que aquest rigor de vegades es pot trobar en el plantejament profund d'una idea (Entrevista a Anton Aubanell).

Quant al nivell de rigor i el de formalisme, el professor Anton accentua que han de ser tan alts com es pugui, però atenent a tres condicionants:

1. **Els coneixements previs de l'alumnat.** El rigor exigit o el formalisme que expressa aquest rigor no poden superar els coneixements que l'alumne/a té.
2. **Els recursos didàctics i comunicatius**, tot allò que ajuda a la comunicació, que s'empren poden ajudar a assolir més nivell de rigor i formalisme.
3. **L'atenció a la diversitat.** S'ha de tenir en compte la diversitat de l'alumnat a l'aula i cal ser inclusius (Entrevista a Anton Aubanell).

El professor Aubanell ha tingut diverses persones que han estat referents per a ell en l'àmbit de la didàctica i la docència, com ara: Pere Puig Adam, Emma Castelnuovo, Maria Antònia Canals, Joan Casulleras, Miguel de Guzmán, George Pólya, Claudio Alsina, Nelsen...

A més de tot el que s'ha comentat de **Pere Puig Adam** en el primer apartat d'aquest treball, aquest gran precursor de la Matemàtica moderna amb vocació pedagògica va publicar el *Decàleg de la didàctica matemàtica mitjana* (Puig-Adam, 1955), en el qual va sintetitzar amb mestratge com havia de ser la didàctica de les matemàtiques segons des del seu punt de vista. Els ensenyaments d'aquest decàleg encara es troben molt vigents, Aubanell és un clar deixeble de l'escola de Puig Adam.

Emma Castelnuovo era més que una professora de guix i de pissarra de l'*Scuola Media Italiana* (corresponent a edats d'entre 11 i 13 anys). Ella sempre mostrava una postura viva, pragmàtica i propera per l'educació matemàtica.

Defensava que només amb experiències basades en la realitat concreta i literalment tangible es construeixen idees matemàtiques a qualsevol edat i a qualsevol nivell d'ensenyament. L'Emma va plasmar el seu saber (encara ben vigent) a la seva obra *Didatica della Matemática*, publicat el 1963 a Itàlia. Emma Castelnuovo va donar aquest discurs en la conferència per commemorar el centenari del naixement de Pere Puig Adam el maig de 2000:

"Tant la matemàtica euclidiana com la matemàtica dels conjunts es presenten com les teories perfectament estructurades des del punt de vista lògic. Però no és una redacció perfecta allò que contribueix a estimular l'interès dels alumnes, que no estan en condicions d'apreciar el valor d'una sistematització rígidament lògica. Per despertar el seu interès, per aconseguir que els alumnes hi participin, perquè l'ensenyament sigui viu, no és l'estadi final allò que ha de ser destacat, sinó les vies de la investigació, el camí de les idees.

[...]

I finalment – i aquest fet no ha de ser oblidat-, una construcció de la matemàtica que parteixi del que és concret i de la realitat, fa destacar clarament les qualitats com la fantasia, la intuïció, la voluntat dels nois immigrants que cada dia en nombre més gran, afortunadament, arribaran als nostres països" (Martín-Casalderrey, 2002).

Altra dona clau de l'ensenyament de les matemàtiques i de la seva renovació pedagògica va ser **Maria Antònia Canals**, qui va introduir, juntament amb les seves ties (FEEMCAT, 2016b), el mètode Montessori a Catalunya i qui malauradament va morir recentment (Diari ARA, 2022). Com Maria Montessori, Canals va defensar l'activitat manipulativa, com es pot veure en aquest vídeo del canal de YouTube de la *Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología* (FECYT ciencia, 2018), ja que aporta maduració del pensament, un contacte entre l'acció física i l'acció mental i això és el que produeix un nou concepte (Bramona & Cabacés, 2017).

Joan Casulleras va ser un gran mestre, seguidor de l'escola de Puig Adam i autor de nombroses obres, centrades en la Matemàtica Moderna i adaptades d'acord amb la seva experiència docent. Els textos d'aquestes obren deixen clar l'interès de Casulleras pels materials, la geometria i les demostracions minucioses (FEEMCAT, 2016b).

El professor **Miguel de Guzmán** va ser catedràtic a la Universitat Complutense, a Madrid, i un incansable investigador de les matemàtiques. Va plasmar en les seves obres els seus descobriments matemàtics, els ensenyaments i les idees que han permès inspirar tota una generació de docents (Estalmat, 2004). De Guzmán sempre va mostrar-se preocupat per l'educació matemàtica d'àmbit universitari, d'alumnat de Secundària i fins i tot d'un públic més general (Rubio-Segovia, 2004). Arran de la seva idea de cultivar el talent matemàtic precoç va néixer el projecte Estalmat.

George Pólya va ser un matemàtic hongarès que va exercir com a professor de matemàtiques a Suïssa i a Califòrnia (MMACA, 2008). La seva obra contempla múltiples estudis sobre la resolució de problemes matemàtics. En aquest sentit, un dels llibres principals és *How to solve it?* (traduït com *Com plantejar i resoldre problemes?*), en el qual descriu les quatre etapes necessàries per resoldre un problema: comprendre el problema, concebre un pla, executar el pla i examinar la solució obtinguda (De Jesús-May Cen, 2015). Per acabar, Pólya també va presentar l'any 1965 un aspecte de les matemàtiques diferent a la coneguda rigidesa de la disciplina matemàtica i dels seus procediments matemàtics: va fer que les matemàtiques es veiessin com un veritable procés d'invenció i inducció a partir de l'experimentació i el pensament instintiu fins arribar a la construcció d'analogies que feien possible la resolució del problema (De Jesús-May Cen, 2015).

El matemàtic català **Claudi Alsina** es defineix a la seva pròpia web com a "especialista en equacions funcionals, desigualtats, lògica borrosa, espais mètrics probabilístics, geometria de Gaudí, visualització de demostracions sense paraules, educació matemàtica i divulgació" (Alsina-Català, 2012). En aquesta web Alsina té un apartat denominat "Demostracions", dedicat especialment a les demostracions visuals: “imatges que permeten visualitzar teoremes matemàtics” (Alsina-Català, 2012). Cal destacar que les demostracions visuals (o sense paraules) que Alsina desenvolupa juntament amb **Roger B. Nelsen**, tot i la brevetat dels articles amb les demostracions, tenen un nivell de formalisme i de rigor elevats, difícilment intel·ligibles per a alumnes de l’ESO.

En canvi, **Roger B. Nelsen**, company d’Alsina i matemàtic estatunidenc, va publicar ja fa uns anys un llibre que s’ha fet força conegut: *Proof without words* (traduït com a *Demostracions sense paraules*), en el qual pretén demostrar “no en el sentit formal” (Nelsen, 1993) un ampli ventall de teoremes i problemes per mitjà de dibuixos i diagrames. Potser la totalitat d’imatges i esquemes no són intel·ligibles per a l’alumnat d’ESO, però aquest caràcter visual pot facilitar la seva comprensió i aprenentatge.

Miquel Siquier declarava que ell va decidir ser matemàtic per un professor que va tenir a 3r de BUP i COU, qui es deia **Alejandro Onsalo** i amb qui va aprendre a raonar les matemàtiques (Entrevista a Miquel Siquier).

L’any 1955 va arribar el matemàtic català **Alejandro Onsalo Orfila** a l’Institut Ramon Llull, on va gaudir del respecte i de l’admiració dels seus companys de docència i dels seus alumnes (sobretot de Batxillerat), que encara el consideren un model emblemàtic de professor competent i amb capacitat d’explicar les matemàtiques de manera entenedora (Alenyà, 2014). Sense cap mena de dubte, Onsalo formà escola, ja que molts d’alumnes seus es van convertir en notables matemàtics (dBalears, 2007), com el professor Siquier. Autoritats acadèmiques com Onsalo van contribuir notablement perquè Mallorca es convertís en una societat més culta. Per tots aquests motius, és considerat com un dels grans impulsors de les matemàtiques a les Illes Balears durant el segle XX.

Totes les matemàtiques i els matemàtics que s’han esmentat han deixat la seva llavor perquè la ciència que s’estimaven fos apta i més accessible per a la diversitat de l’alumnat. Algunes persones ho van fer amb més formalisme, altres amb menys, perquè consideraven que l’excés de formalisme no permetia la comprensió de l’alumnat en general.

Actualment es continuen fent estudis per esbrinar la conveniència o no d'utilitzar demostracions matemàtiques en l'àmbit didàctic. Un estudi prou interessant i potent va ser el que van realitzar Sánchez-Freire i Gil-Pascual (2014).

En primer lloc, varen recollir l'evolució de la perspectiva històrica d'aquesta temàtica. Posteriorment, aquests dos autors varen fer un estudi comparatiu entre dos grups de 3r d'ESO de característiques ben similars: en el grup experimental varen aplicar una metodologia fonamentada en els processos d'argumentació, raonament i de demostració, mentre que el grup de control seguia una metodologia més tradicional (basada en explicacions, realització d'exercicis i activitats TIC). El grup experimental va obtenir millors resultats acadèmics que el grup de control, més per la millora del segment d'alumnes amb més aptituds matemàtiques que per una millora general.

3.3. El camí cap a l'abstracció passa per l'emoció

Anteriorment s'ha analitzat quin paper atorga el currículum de les Illes Balears i d'altres països pioners a nivell mundial a les demostracions i les mostracions. També quin ha estat l'ús que s'ha anat fent d'aquestes demostracions i mostracions des del punt de vista d'experts/es en l'àmbit de la didàctica de les matemàtiques. No obstant això, no s'ha xerrat dels motius subjacents perquè es faci d'una manera o d'altra.

Per tractar aquests motius, raons o perquès subjacents convé entendre quins tipus de canvis succeeixen durant l'adolescència, l'etapa en la qual es troba l'alumnat a les aules d'ESO.

L'inici de l'adolescència ve marcat per la pubertat, la qual implica canvis hormonals i corporals coneguts. Aquest desenvolupament físic també es produeix al cervell, on se segueixen creant i destruint connexions cerebrals. Aquest desenvolupament cerebral és possible gràcies a dos factors claus: la poda sinàptica i la mielinització (Adrover, 2020).

Les funcions executives es localitzen a la zona del còrtex prefrontal del cervell. Aquestes funcions permeten la inhibició de conductes inapropiades, la planificació, la selecció d'accions, fer dues coses alhora o la presa de decisions, entre d'altres. Això no obstant, existeixen funcions executives que es desenvolupen o maduren abans (fredes) i altres funcions executives que maduren més tard (calentes).

Una de les funcions executives amb més longitud de desenvolupament, de les més calentes, és l'activitat abstracta, la qual acompanya el desenvolupament cognitiu de les persones des de l'ensenyament primari fins a l'etapa universitària (Flores-Lázaro et al., 2014).

L'activitat abstracta es connecta amb la capacitat d'abstracció, la qual és una de les capacitats més importants en el desenvolupament cognitiu, ja que permet als infants transitar des del processament sensorial-perceptual cap a l'abstracte (Flores-Lázaro et al., 2014).

D'aquesta manera, el formalisme del llenguatge matemàtic pot resultar molt abstracte per a la gran majoria d'adolescents, que encara es troben en el trànsit físic de desenvolupament cerebral de les seves funcions executives, sobretot de la funció relacionada amb l'abstracció, com s'ha esmentat.

Aquest fet dona sentit a les paraules d'Anton Aubanell quan responia com havia de ser la progressió en la introducció de les demostracions i les mostracions: "Ara bé, el que sí que ens ha de fer por és formalitzar prematurament, perquè això despenja un segment enorme d'alumnes. Això representa una barrera iniciàtica que costa molt que molts d'alumnes les passin" (Entrevista a Anton Aubanell). Llavors, Aubanell recomana que aquesta introducció en el llenguatge matemàtic sigui com una pluja fina que l'alumne/a pugui tolerar i perquè pogués arribar al Batxillerat, si l'havia de cursar, amb aquesta iniciació ja més treballada (Entrevista a Anton Aubanell).

Curiosament, *tekan education* (una empresa composta per un equip transversal i multidisciplinari i experta en la didàctica de les matemàtiques) també exposa en la seva web que "la demostració, més que ser un procés de deducció formal, avui dia està més relacionada amb conceptes com ara explicació, prova o argumentació, més assequibles per a estudiants de Secundària" (Tekman, 2021). De fet, disposen d'ONMAT, una plataforma digital perquè l'alumnat pugui desenvolupar les competències i subcompetències relacionades amb les demostracions matemàtiques per mitjà de jocs de demostració, d'activitats manipulatives, d'activitats d'investigació, d'estratègies de pensament, de rutines de pensament i del mètode PBL o d'Aprenentatge Basat en Problemes (Tekman, 2021).

En una entrevista concedida al mitjà Educación 3.0 (2019), Francisco Mora, docent i expert en neurociència, va subratllar que **"el cervell només aprèn amb emoció"**, que "no es tracta de fomentar les emocions a l'aula", sinó fent diferent i curiós tot allò que s'ensenya. La curiositat desperta i sosté l'atenció per escoltar i s'aprèn de forma automàtica. Llavors, l'excel·lència docent es trobaria en ser capaç de convertir qualsevol concepte, "fins i tot matemàtic", en quelcom sempre interessant (Educación 3.0, 2019).

A les paraules de Francisco Mora, el neuroeducador Jesús C. Guillén afegeix que **no es pot separar allò emocional del que és cognitiu,** perquè tot està impregnat d'emocions (Integratek, 2018). A més, Guillén assegura que l'alumnat aprèn millor quan se sent protagonista en el procés d'aprenentatge, i no un receptor passiu. Per això, la millora de l'aprenentatge passa per la motivació, tant de l'alumnat com del professorat, que han de convertir-se en estudiants que analitzen els seus propis mètodes (Integratek, 2018).

També comparteix l'afirmació sobre la necessitat d'aprendre amb emocions David Bueno, biòleg, genetista i també especialista en neurociència. Bueno assegura que hi ha una part del nostre cervell que ja ve de sèrie i que altra part s'entrena i és aquí on l'educació té un rol fonamental. Per tant, **"aprendre és canviar el nostre cervell",** que "és molt dinàmic": " constantment [...] passant informació d'una banda a una altra, ja siguin coneixements, conceptes, però sobretot són actituds i aptituds" (BBVA, 2020). Per explicar això realitza un símil, juntament amb el públic, amb avions de paper, on vol mostrar que **l'educació ha de ser tan personalitzada com sigui possible** perquè tothom pugui treure'n el màxim profit (BBVA, 2020).

3.4. L’experimentació amb materials fomenta la inclusió

Per realitzar aquest trànsit o pelegrinatge cap a l’abstracció i passant per l’emoció (perquè en cas contrari no s’aprèn) en l’etapa adolescent, l’ús de demostracions i mostracions pot ser de gran ajuda. Anton Aubanell considera que hi ha cinc ingredients que creu que no poden faltar-hi en una bona demostració o mostració (Entrevista a Anton Aubanell):

1. **Natural i sense artificis.** No pot ser molt complexa, ja que l’artifici és una mala eina didàctica.

2. **Intuïtiva.** Si s’ha d’entrar pel cor, la part del cervell que s’empra és la intuïció. Per tant, benvinguts són els suports visuals i/o manipulatius, ja que a la intuïció també es pot arribar a través de tots els sentits.

3. **Apel·la al raonament plausible.** Llavors, a un raonament que potser no és rigorós, però sí creïble, ja que es basa en la intuïció.

4. **S’apropa tant com es pot al raonament lògic.** L’alumnat es pot apropar al formalisme matemàtic i, d’aquesta manera, s’obre la porta al que puguin aprendre en un futur.

5. **Convida a la reflexió sobre el procés fet.** Quan s’ha fet una demostració o una mostració, l’alumne/a ha de digerir-la i el/la docent ha de convidar-los a que posin paraules, a conceptuar i a explicar-ho verbalment, ja que és un germen de raonament. De fet, formalitzen amb paraules.

En el segon punt, Anton xerra del caràcter intuïtiu com a ingredient fonamental de la “recepta” o truc de “matemàgia” per fer bones demostracions o mostracions per a l’alumnat de l’ESO. A més, ell afegeix que també s’arriba a la intuïció a través dels sentits mitjançant la interacció amb suports visuals i/o manipulatius. Aquesta explicació està estretament lligada al que el professor Aubanell va escriure en un article per a un congrés iberoamericà d’educació matemàtica: “Les activitats d’experimentació amb materials tenen una importància clau per fer possible una aproximació més completa i motivadora al coneixement matemàtic” (Aubanell, 2017).

També en aquest article Aubanell xerra de com qualsevol material es pot convertir en un recurs didàctic: “[...] quan se submergeix en una activitat que el converteixi en un instrument concret d’educació matemàtica per treballar uns continguts específics amb uns alumnes determinats” (Aubanell, 2017). Llavors, ell estableix la següent equació o igualtat matemàtica amb els conceptes esmentats:

$$\text{Recurs} = \text{Material} + \text{Activitat}$$

Per acabar, també resulta ben interessant el cicle vital de qualsevol recurs didàctic, que neix, es desenvolupa, es reprodueix i mor (Aubanell, 2017).

Aquesta clara aposta d’Aubanell per l’experimentació casa amb un dels principis del Disseny Universal per a l’Aprenentatge (DUA), considerat com un marc inclusiu de referència. Aquesta pauta consisteix a “**proporcionar múltiples maneres per a l’acció i l’expressió** (com aprenem), proporcionant diverses opcions per a la interacció física (manipulació i l’experimentació), oferint diverses opcions per a l’expressió i la comunicació (i l’accessibilitat) i proporcionant diverses opcions per a les funcions executives”. D’aquesta manera, a partir de l’aplicació d’aquest principi amb les seves subpautes es dota l’alumnat de més estratègies per assolir els objectius (CAST, 2018).

4. Desenvolupament de la proposta didàctica

Partint de tot el que s'ha après en apartats anteriors, es proposen quatre activitats de creació pròpia. L'objectiu és poder dur-les a l'aula, experimentant, com fan el professor Aubanell, el mestre Miquel Siquier i altres referents de la didàctica de les matemàtiques que s'han estudiat.

Així, en primer lloc, s'ha plasmat una sèrie d'orientacions, basades en el mètode d'Aubanell. Posteriorment, es descriuen aquestes activitats desenvolupades, amb una clara influència autòctona, tant des del punt de vista cultural com gastronòmic, tot i que es fuig de les receptes... matemàtiques. Per acabar, s'ha reflexionat sobre l'avaluació del procés d'ensenyament-aprenentatge relatiu a aquestes activitats proposades i també s'ha fet especial esment a l'atenció a la diversitat.

4.1. Orientacions generals per a les activitats

Com a principals orientacions generals per realitzar aquestes activitats manipulatives s'han adoptat, principalment, els consells que Anton Aubanell va tenir el plaer donar-nos per via telemàtica (Entrevista a Anton Aubanell) i que poden resumir-se en aquestes 6 passes:

1. **Fer possible que l'alumne/a entengui el material que estem posant sobre la taula.** Sempre que hi hagi un material l'alumne/a ha de manipular-lo prèviament amb l'objectiu que es vacuni de la curiositat de tocar-lo i que entengui el problema i el tema que es plantegen. Fer-li entendre no implica que el/la docent s'hagi de precipitar en donar-li la resposta o el resultat al qual es vol arribar.

2. **Convidar l'alumne/a, davant del problema, a fer conjectures i hipòtesis.** Aquesta convidada a raonar representa que l'alumnat s'impliqui personalment en el que es vol fer.

3. **Experimentar donant el temps suficient perquè l'alumne/a pugui arribar a conclusions.** Cada persona és diversa i cada estudiant també ho és. Llavors, és transcendental que tingui temps suficient per poder fer proves, assajos, comprovacions... Hi haurà un moment en el qual aquella experiència el durà a fer una descoberta.

4. **Descobrir regularitats a partir de l'experiència.** Una vegada han experimentat suficientment i han pogut trobar regularitats en aquella experimentació, el/la docent ha de fer-se l'orni o desentendre's i convidar l'alumnat a que descrigui i posi paraules a aquestes idees que s'han anat descobrint.

5. **Compartir les paraules i socialitzar els conceptes.** Després d'haver experimentat i descobert les regularitats, els/les aprenents han de poder intercanviar i compartir aquestes idees que han descobert i a les que han anat posant paraules. Es pot acabar formalitzant aquest intercanvi amb la creació d'un teorema conjunt. No obstant això, sempre s'ha de preparar el camí cap a la demostració o la mostració amb material.

6. **Immergir aquestes activitats en una metodologia.** Si es fan unes quantes activitats aïllades amb material, aquestes quedaran en simples anècdotes. Resulta molt més interessant el fet que hi hagi una entitat darrere d'aquestes que formi una metodologia i en la qual es consideri tota la filosofia que les envolta.

Aquest protocol d'actuació no implica que s'hagi de complir passa per passa. Simplement es tracta d'una sèrie de recomanacions que poden augmentar les probabilitats d'èxit d'aquestes activitats amb material (recursos, d'acord amb l'equació que proposa Aubanell), ja siguin demostracions o mostracions, perquè, al cap i a la fi, el/la docent és qui ha de preparar el camí d'aquestes a l'alumnat.

4.2. Activitats proposades

4.2.1. Activitat 1: “El pi de Bellver”

L’emblemàtica primera estrofa, composta per cinc versos, del poema “El pi de Formentor” comença així (Ramis-Barceló, 2010):

“Mon cor estima un arbre! Més vell que l'olivera,
més poderós que el roure, més verd que el taronger,
conserva de ses fulles l'eterna primavera,
i lluita amb les tormentes que assalten la ribera,
com un gegant guerrer”.

Aquesta obra d’art poètica del mallorquí Miquel Costa i Llobera va servir d’inspiració per al títol d’aquesta activitat. En aquest cas, no és Formentor, sinó Bellver (a Palma), bosc que també és ple de pins i on es troba un dels monuments arquitectònics més rellevants de l’illa de Mallorca (juntament amb la Seu, la Llotja i el Palau de l’Almudaina): el Castell de Bellver.

Figura 1. Imatge panoràmica del Castell de Bellver, el bosc i la badia de Palma (Freepik, 2020).

Aquesta fortalesa d’estil gòtic es va començar a construir a començaments del segle XIV per ordre de Jaume II, rei de Mallorca (Museu d’Història de Mallorca, 2018). Destaca principalment per ser un dels pocs castells de planta circular d'Europa, característica geomètrica que ha motivat la realització d'aquesta activitat.

Continguts

Aquesta primera proposta didàctica podria desenvolupar-se a primer o a segon curs de l'ESO, perquè els continguts d'aquesta formen part del currículum compartit entre ambdós nivells. S'haurien d'incloure els continguts del primer bloc ("Processos, Mètodes i Actituds en Matemàtiques"), present en la totalitat del curs, als continguts extrets del tercer bloc ("Geometria") i que apareixen a continuació:

- Elements bàsics de la geometria del pla.
- Relacions i propietats de figures en el pla.
- Càlcul d'àrees i perímetres de figures planes. Càlcul d'àrees per descomposició en figures simples.
- Circumferència, cercle, arcs i sectors circulars.
- Raó entre longituds, àrees i volums de cossos semblants.
- Propietats, regularitats i relacions dels políedres. Càlcul de longituds, superfícies i volums del món físic.
- Ús d'eines informàtiques per estudiar formes, configuracions i relacions geomètriques.

La proposta al castell de Bellver també podria formar part d'alguna unitat didàctica de tercer d'ESO, tant per a l'alumnat que cursa les *Matemàtiques per als ensenyaments acadèmics* com per al de *Matemàtiques per als d'ensenyaments aplicats*, perquè els continguts d'aquesta formen part del currículum d'aquest nivell en ambdós casos currículums. S'haurien d'incloure els continguts del primer bloc: "Processos, Mètodes i Actituds en Matemàtiques"), present en la totalitat del curs , als continguts extrets del tercer bloc ("Geometria") i que apareixen a continuació:

- Geometria del pla.
- Mediatriu, bisectriu, angles. Relacions, perímetre i àrea. Propietats.

- Lloc geomètric.
- Ús d'eines tecnològiques per estudiar formes, configuracions i relacions geomètriques.

Material

Per dur a terme aquesta primera activitat serà necessari disposar de:

- Cinta mètrica
- Cronòmetre
- Full de camp elaborat

Descripció i explicació

Des del punt de vista formal es pot dir que la longitud de la circumferència (L) és:

$$L = 2.\pi.\mathrm{r}$$

Llavors, a qualsevol circumferència el diàmetre equival al doble del radi:

$$L = \pi.(2.r)$$

$$L = \pi.D$$

Per tant, es pot concloure que la raó que existeix entre la longitud de la circumferència i el seu diàmetre és el nombre pi:

$$\frac{L}{D} = \pi$$

El nombre pi de manera aproximada té el següent valor:

$$\pi \approx 3{,}14159265358979323846..$$

El castell de Bellver està ple de circumferències, ja sigui per les torres, les plantes de l'edifici principal i d'algunes cambres, etc.

En aquesta activitat, l'alumnat rebrà un full de camp, similar al document adjunt que apareix com a annex en l'activitat "Matemàtiques al castell de Bellver", proposada pel Centre d'Aprenentatge Cientificomatemàtic (CentMat, 2018). Es formaran equips de treball de 4 alumnes amb la dinàmica de les Illes Balears, consistent a que cada un/a ha de dir el nom de les 4 illes principals de les Balears: "Mallorca!", "Menorca!", "Eivissa!", "Formentera". I es torna a començar: "Mallorca!", "Menorca!", "Eivissa!", "Formentera". Així, es formaran equips de cada illa. Si el nombre d'alumnes és elevat, es poden fer més equips per illa.

En aquests grups de treball s'hauran de dividir les tasques: mesurar, apuntar les mesures, emprar la calculadora...

Per tant, en aquest exercici l'alumnat cada equip haurà de triar alguna circumferència segura i accessible (amb la supervisió del professorat) en la qual pugui mesurar la seva longitud i el diàmetre. Si acaben prest, poden triar diverses circumferències.

Com succeeix amb l'aproximació del nombre pi que proposa Barba-Muñoz (2018) amb GeoGebra És ben normal que en aquest procés la raó de la longitud de la circumferència entre el diàmetre no surti l'aproximació de 3'14, sinó un nombre al voltant de 3 i els equips d'alumnes es demanin: "Per què surt de vegades més petit?", "Per què de vegades més gran aquesta raó?".

Convé que després es realitzi una dinàmica formant tot l'alumnat un cercle (com les dels cercles restauratius), per acabar d'arrodonir l'activitat, i per posar en comú aquests resultats i poder compartir les reflexions sobre aquest procés, supervisats pel professorat, els/les quals actuaran de guia en aquest discurs "circular".

4.2.2. **Activitat 2:** ***"Ensaïmades everywhere!"***

A l'hora de menjar alguna cosa dolça a Mallorca, l'ensaïmada és la preferida per excel·lència, ja sigui amb crema, nata, amb cabell d'àngel, xocolata, de tallades (amb sobrassada i carabassat) o llisa (sense estar farcida). De fet, resulta estrany no trobar ensaïmada per acabar qualsevol dinar familiar o amb amistats a Mallorca.

Les dolces ensaïmades acostumen a dur-se en unes caixes de cartró, que generalment tenen forma de prismes octogonals, és a dir, la base és un octàgon (un polígon regular de 8 costats). Aquest fet va inspirar aquesta activitat.

Continguts

Aquesta segona proposta també podria dur-se a terme a primer o a segon curs de l'ESO, perquè els continguts d'aquesta formen part del currículum compartit entre ambdós nivells. S'haurien d'incloure els continguts del primer bloc: "Processos, Mètodes i Actituds en Matemàtiques"), present en la totalitat del curs, als continguts extrets del tercer bloc ("Geometria") i que apareixen a continuació:

- Elements bàsics de la geometria del pla. Relacions i propietats de figures en el pla.
- Figures planes elementals: triangle, quadrat, figures poligonals.
- Classificació de triangles i quadrilàters. Propietats i relacions.
- Càlcul d'àrees i perímetres de figures planes. Càlcul d'àrees per descomposició en figures simples.
- Circumferència, cercle, arcs i sectors circulars.
- Raó entre longituds, àrees i volums de cossos semblants.
- Propietats, regularitats i relacions dels políedres. Càlcul de longituds, superfícies i volums del món físic.
- Ús d'eines informàtiques per estudiar formes, configuracions i relacions geomètriques.

La segona proposta, amb cartró per a les ensaïmades, també podria formar part d'alguna unitat didàctica de tercer d'ESO, tant per a l'alumnat que cursa les *Matemàtiques per als ensenyaments acadèmics* com per al de *Matemàtiques per als d'ensenyaments aplicats*, perquè els continguts d'aquesta formen part del currículum d'aquest nivell en ambdós casos currículums. S'haurien d'incloure els continguts del primer bloc ("Processos, Mètodes i Actituds en Matemàtiques"), present en la totalitat del curs, als continguts extrets del tercer bloc ("Geometria") i que apareixen a continuació:

- Geometria del pla.
- Mediatriu, bisectriu, angles. Relacions, perímetre i àrea. Propietats.
- Lloc geomètric.
- Geometria de l'espai. àrees i volums. Plans de simetria en els políedres.
- Ús d'eines tecnològiques per estudiar formes, configuracions i relacions geomètriques.

Material

Per dur a terme aquesta segona activitat serà necessari disposar de:

- Caixa amb planta octogonal d'ensaïmada
- Base circular de cartró (d'ensaïmada)
- Regle de 50 centímetres o més
- Estris d'escriure: llapis, retoladors o bolígrafs de diversos colors

Descripció i explicació

Generalment, quan s'ha de calcular l'àrea de qualsevol polígon regular es dona la fórmula que apareix en la següent imatge:

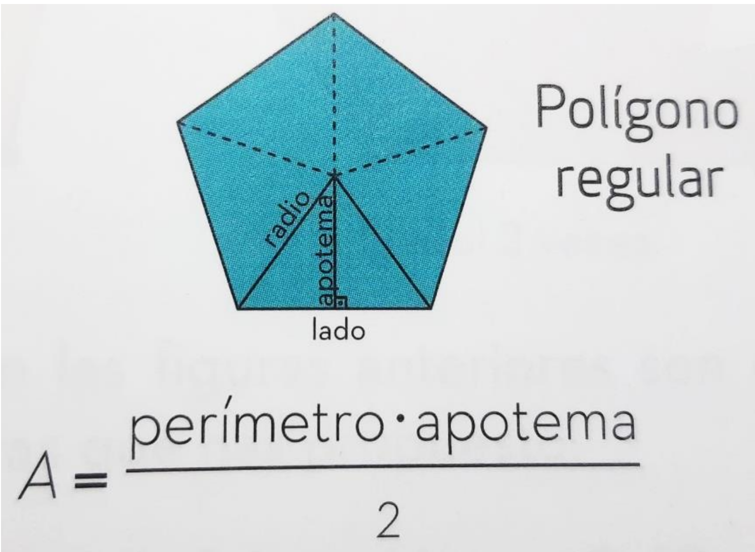


Figura 2. Fórmula per al càlcul de l'àrea de qualsevol polígon regular (Alcalde et al, 2019).

I per què succeeix això? Qualsevol polígon regular es pot inscriure dins de qualsevol circumferència, essent el radi (r) d'aquesta circumferència la distància des del centre d'aquesta i els vèrtexs del polígon. Per tant, es formarien tants de triangles isòsceles (o equilàters) com costats tingui aquest polígon, compartint tots el centre.

El concepte de perímetre (P) de qualsevol polígon regular és:

$$P = n.l$$

essent:

n = el nombre de costats del polígon regular

l = el valor de la longitud del costat del polígon

Considerant que la base de cada triangle isòsceles té la mateixa longitud que el costat del polígon (l) i l'altura d'aquest triangle és l'apotema del polígon (a), l'àrea de cada triangle isòsceles seria equivalent a:

$$AT = \frac{l.a}{2}$$

L'àrea del polígon equival a la suma de les àrees de tants de triangles com costats (n) té el polígon:

$$AP = n.AT$$

I substituint amb l'àrea del triangle:

$$AP = \frac{n.l.a}{2}$$

D'aquesta manera, l'àrea del polígon regular resulta:

$$AP = \frac{P.a}{2}$$

Per realitzar aquesta demostració s'ha de disposar de qualsevol motlle d'ensaïmada (si és de major grandària, millor). També pot estar un poc tacat del dinar o sopar del cap de setmana anterior (de fet, s'ha d'aprofitar el material disponible que es té per casa). Es pot observar que la base del motlle és un polígon regular de vuit costats: un octògon o octàgon.

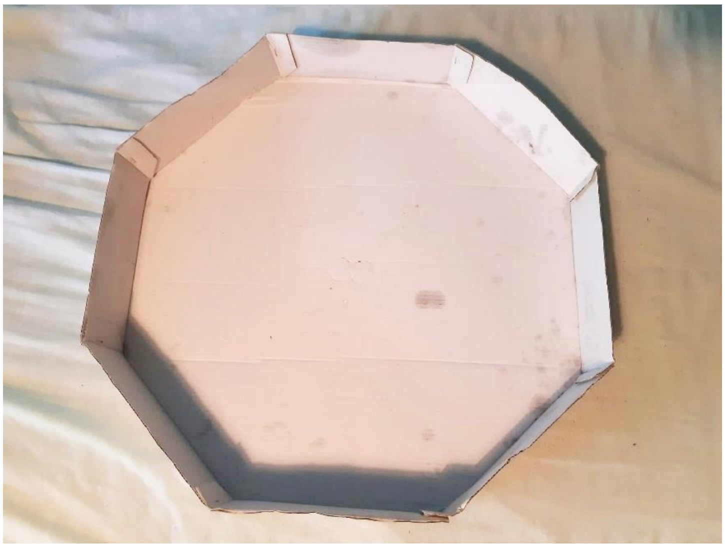


Figura 3. Caixa amb planta octogonal per portar ensaïmada.

Donant-li la volta a la caixa de base octogonal, s'ha de dividir el polígon en tants de triangles com costats té el polígon (8 en aquest cas):

Figura 4. Triangulació de l'octògon de la caixa per portar ensaïmades.

Es pot percebre que tots els triangles són iguals. “I per què és així?”, demanarà l’alumnat. Poden comprovar-ho mesurant-los. Llavors, es destaca un d’ells, assenyalant-hi els dos costats que el formen (a més del costat de l’octògon) i l’apotema:

Figura 5. Triangle destacat de la triangulació de l’octògon de la Caixa per portar ensaïmades.

En aquesta imatge es pot observar amb més *zoom*:

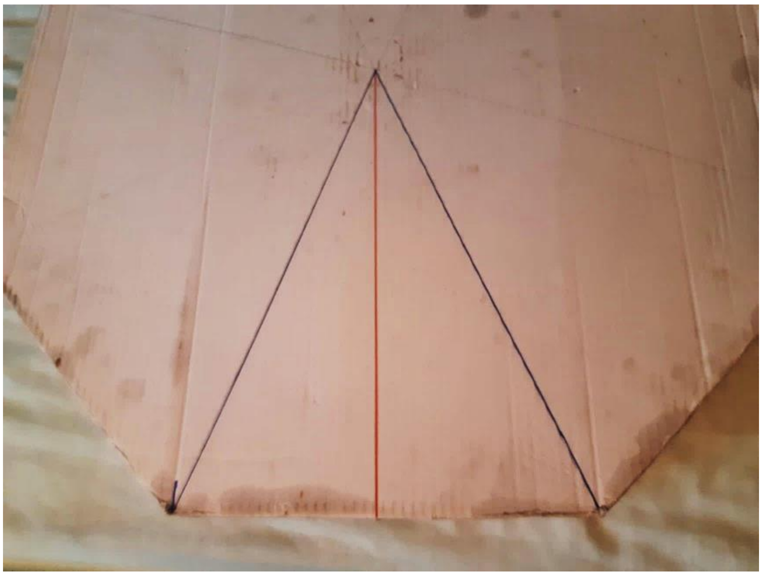


Figura 6. Zoom del triangle destacat de la triangulació de l’octògon de la caixa per portar ensaïmades.

Si es calcula l'àrea d'aquest triangle (que prèviament ja s'hauria demostrat amb altra demostració o mostració) amb la fórmula:

$$A = \frac{b.h}{2}$$

L'alumnat pot observar que la base és el costat de l'octògon i l'apotema és l'altura del triangle.

Llavors, si aquest procés es repetís vuit vegades, seria el producte de l'àrea d'aquest triangle pel nombre de costats (8 en aquest cas).

"Bonus track!"

Les caixes d'ensaïmades generalment acostumen a incloure un bocí de cartró amb forma de cercle.

Figura 7. Cartró circular per a les ensaïmades.

En aquest cas, es pretén demostrar la fórmula de l'àrea de cercle fent ús del procés anterior.

Anteriorment s'ha comentat que qualsevol polígon regular es pot inscriure en una circumferència, el radi de la qual és la distància entre el centre d'aquesta i qualsevol vèrtex del polígon.

Llavors, quants més costats té un polígon regular, més s'assembla a un cercle. Es podria arribar a dir que un cercle és un polígon regular d'infinits costats. Per tant, emprant la fórmula anteriorment demostrada:

$$A = \frac{P.a}{2}$$

El perímetre del cercle equivaldria a la longitud de la circumferència que l'envolta. Llavors:

$$P = 2.\pi.r$$

L'apotema d'aquest polígon regular d'infinits costats tindria igual valor que el radi:

$$a = r$$

Per tant, aplicant el valor del perímetre i de l'apotema en el cas del cercle:

$$A = \frac{2.\pi.r.r}{2}$$

L'anterior equació pot quedar de la següent manera:

$$A = \pi\,.r^2$$

Aquesta activitat s'hauria de realitzar en una sessió independent de l'anterior. Podria ser en la consecutiva. Així, l'alumnat ja hauria fet reflexions sobre l'anterior i podrien entendre-la millor.

Es podria començar l'activitat amb el generador de polígons regulars que proposar el professor Lenin Paulino (2018) a GeoGebra. En aquesta aplicació poden trastejar amb els diversos polígons regulars, des del triangle equilàter (n=3 costats) a l'icosàgon regular (n=20 costats).

Com diu Anton Aubanell, es pot preparar el camí cap a la descoberta, però ha de ser l'alumne qui l'ha de trobar de manera definitiva. Han d'arribar a veure que quants més costats té el polígon, més s'assembla al cercle.

Un pic s'arriba aquí, es pot plantejar com seria un polígon regular de molts (infinits) costats: "Un cercle!". En aquest moment es pot emprar d'ajuda el cartró circular de l'ensaïmada i aplicant la fórmula anteriorment demostrada o mostrada, la fórmula de l'àrea del cercle seria la que s'acostuma a conèixer, però no a entendre:

$$A = \pi . r^2$$

4.2.3. **Activitat 3:** ***"Show me the money!"***

Tom Cruise va fer viral aquesta frase a la pel·lícula *Jerry Maguire*, dirigida per Cameron Crowe (Morales, 2017). Des d'aquell moment, molta gent als mitjans de comunicació l'ha emprat, com David Broncano, el famós còmic i presentador de "La Resistencia".

En aquest cas, el títol d'aquesta activitat va arribar després d'haver-la pensat, amb l'objectiu de captar l'atenció de l'alumnat.

Continguts

Aquesta tercera proposta didàctica podria desenvolupar-se a primer o a segon curs de l'ESO, perquè els continguts d'aquesta formen part del currículum compartit entre ambdós nivells. S'haurien d'incloure els continguts del primer bloc ("Processos, Mètodes i Actituds en Matemàtiques"), present en la totalitat del curs, als continguts extrets del tercer bloc ("Estadística i Probabilitat") i que apareixen a continuació:

- Mesures de tendència central.
- Mesures de dispersió.

Aquesta proposta amb doblers de *Monopoly* també podria formar part d'alguna unitat didàctica de tercer d'ESO, tant per a l'alumnat que cursa les *Matemàtiques per als ensenyaments acadèmics* com per al de *Matemàtiques per als d'ensenyaments aplicats*, perquè els continguts d'aquesta formen part del currículum d'aquest nivell en ambdós casos currículums. S'haurien d'incloure els continguts del primer bloc ("Processos, Mètodes i Actituds en Matemàtiques"), present en la totalitat del curs, als continguts extrets del tercer bloc (“Geometria”) i que apareixen a continuació:

- Paràmetres de posició: mitjana, moda, mediana i quartils. Càlcul, interpretació i propietats.
- Paràmetres de dispersió: rang, recorregut interquartílic i desviació típica. Càlcul i interpretació.
- Interpretació conjunta de la mitjana i la desviació típica.

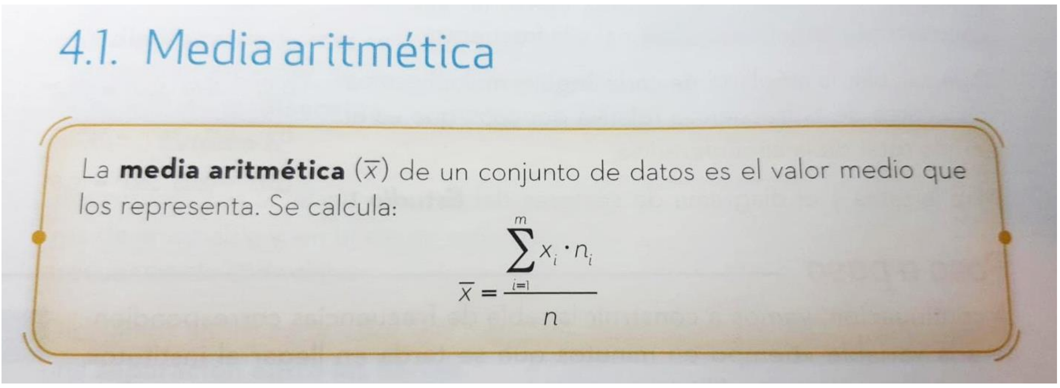
Material

Per dur a terme aquesta tercera activitat serà necessari disposar de:

- Bitllets de Monopoly o de qualsevol altre joc de taula
- Calculadora

Descripció i explicació

En la unitat didàctica d’Estadística és freqüent veure en els llibres de text de l’assignatura de Matemàtiques la fórmula de la mitjana aritmètica, considerada una mesura de posició:



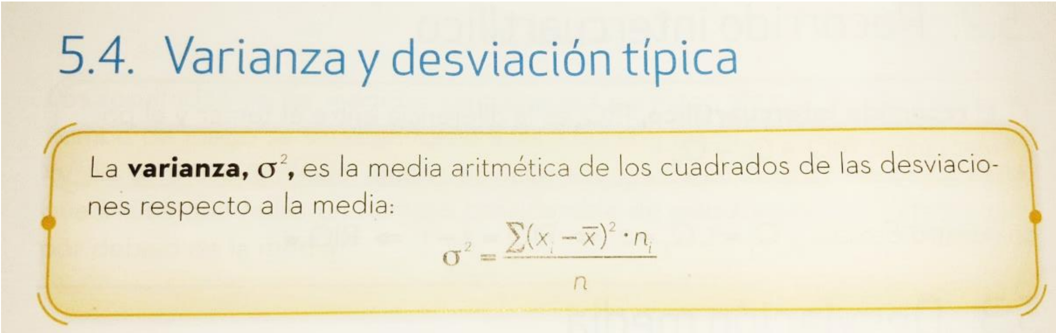
4.1. Media aritmética

La **media aritmética** ($\overline{x}$) de un conjunto de datos es el valor medio que los representa. Se calcula:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot n_i}{n}$$

Figura 8. Fórmula per calcular la mitjana aritmètica (Alcalde et al., 2019).

També s’acostuma a veure les mesures de dispersió, com ara: la variància i la desviació típica. L’alumnat aplica aquestes fórmules i dona el seu resultat, però molt sovint no les entén. Això és el que es pretén amb aquesta activitat, que l'alumnat pugui comprendre des de la intuïció aquests conceptes.

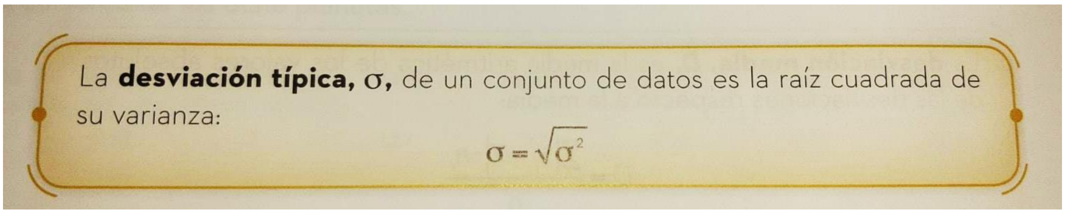


5.4. Varianza y desviación típica

La **varianza, σ^2,** es la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones respecto a la media:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2 \cdot n_i}{n}$$

Figura 9. Fórmula per calcular la variància (Alcalde et al., 2019).



La **desviación típica, σ,** de un conjunto de datos es la raíz cuadrada de su varianza:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Figura 10. Fórmula per calcular la desviació típica (Alcalde et al., 2019).

Per dur a terme aquesta activitat s'empra doblers d'algun joc de taula, com per exemple aquests bitllets del *Monopoly*:

Figura 11. Caramull de bitllets mesclats del joc Monopoly.

El/la professor/a s’encarrega de repartir bitllets a l’atzar alumne/a per alumne/a i cada alumne/a és responsable de comptar la totalitat d’aquests bitllets.

Una vegada s’hagi sumat tot, el/la professor/a ha de comprovar que aquesta quantitat encaixa amb la quantitat que havia repartit en un primer moment. Llavors, si es reparteix la mateixa quantitat de doblers a cada alumne/a, el que li toqui a cada un/a serà equivalent a la mitjana aritmètica. Tothom en tindrà la mateixa quantitat econòmica.

Figura 12. Columnes amb bitllets amb la mateixa quantitat, representant la mitjana aritmètica.

No obstant això, pot observar-se que la mitjana aritmètica no canvia sigui quin sigui el repartiment inicial de doblers. Aquí entren en joc les mesures de dispersió. Amb aquestes es pretén obtenir indicadors que permeten avaluar com de llunyà es troba aquest repartiment de doblers de la mitjana aritmètica. D’aquesta manera, si tothom en té la mateixa quantitat, com s’ha dit anteriorment, les mesures de dispersió (variància i desviació típica) seran nul·les.

Quant majors siguin aquestes dues mesures (variància i desviació típica), major serà la dispersió, és a dir, majors valors de dispersió indiquen que en general hi ha més diferència entre els doblers de l’alumnat i que més s’allunyen de tenir la mateixa quantitat entre ells/es.

En aquest exemple es podria veure que les mesures de dispersió són majors que en el cas anterior:

Figura 13. Columnes amb diverses quantitats econòmiques per representar mesures de dispersió majors a zero.

4.2.4. Activitat 4: “Fem castells d’arena!”

Generalment, les persones acostumen a tenir bons records associats a quan anaven a la platja d’infants a fer castells d’arena. Aquest fet nostàlgic ha inspirat la creació d’aquesta activitat.

Continguts

Aquesta quarta proposta didàctica podria desenvolupar-se a primer o a segon curs de l’ESO, perquè els continguts d’aquesta formen part del currículum compartit entre ambdós nivells. S’haurien d’incloure els continguts del primer bloc (“Processos, Mètodes i Actituds en Matemàtiques”), present en la totalitat del curs, als continguts extrets del tercer bloc (“Estadística i Probabilitat”) i que apareixen a continuació:

- Elements bàsics de la geometria del pla. Relacions i propietats de figures en el pla.
- Figures planes elementals: triangle, quadrat, figures poligonals.
- Classificació de triangles i quadrilàters. Propietats i relacions.

- Càlcul d'àrees i perímetres de figures planes. Càlcul d'àrees per descomposició en figures simples.
- Circumferència, cercle, arcs i sectors circulars.
- Raó entre longituds, àrees i volums de cossos semblants.
- Políedres i cossos de revolució. Elements característics, classificació. Àrees i volums.
- Propietats, regularitats i relacions dels políedres. Càlcul de longituds, superfícies i volums del món físic.
- Ús d'eines informàtiques per estudiar formes, configuracions i relacions geomètriques.

Aquesta proposta amb arena també podria formar part d'alguna unitat didàctica de tercer d'ESO, tant per a l'alumnat que cursa les *Matemàtiques per als ensenyaments acadèmics* com per al de *Matemàtiques per als d'ensenyaments aplicats*, perquè els continguts d'aquesta formen part del currículum d'aquest nivell en ambdós casos currículums. S'haurien d'incloure els continguts del primer bloc ("Processos, Mètodes i Actituds en Matemàtiques"), present en la totalitat del curs, als continguts extrets del tercer bloc ("Geometria") i que apareixen a continuació:

- Geometria del pla.
- Mediatriu, bisectriu, angles. Relacions, perímetre i àrea. Propietats.
- Geometria de l'espai. àrees i volums. Plans de simetria en els políedres.
- Ús d'eines tecnològiques per estudiar formes, configuracions i relacions geomètriques.

Material

Per dur a terme aquesta quarta activitat serà necessari disposar de:

- Set de motlles amb forma de políedres i cossos de revolució (de plàstic transparent)
- Arena de colors
- Safata per no embrutar

Descripció i explicació

En aquesta activitat l'alumnat farà castells d'arena amb motlles de cossos per aprendre les relacions que existeixen entre diversos cossos volumètrics.

El docent ha de presentar el material, un set geomètric de cossos amb volum, com el que s'adjunta en la següent imatge:

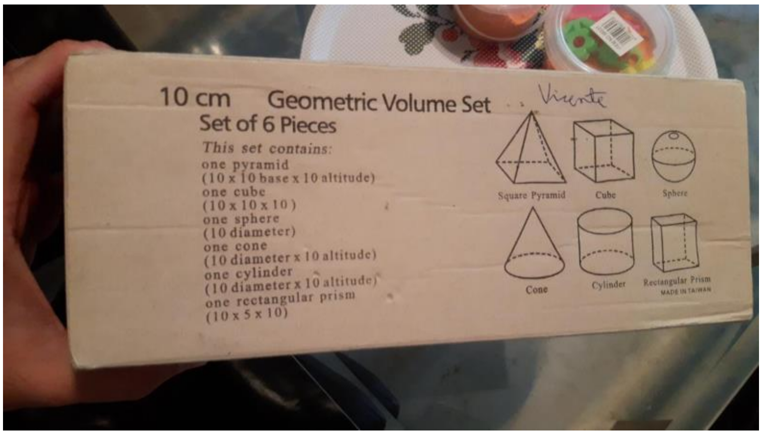


Figura 14. Set de cossos amb volum per desenvolupar l'activitat.

Aquests cossos s'ompliran amb arena de colors (taronja en aquest cas):

Figura 15. Set d'arena de colors.

Llavors, ja s'han presentat els materials per realitzar aquesta activitat. Només falta la safata per no embrutar, si es compta amb ella, o amb algun material que protegeixi el mobiliari.

Figura 16. Materials per dur a terme l’activitat.

L’alumnat ha de poder jugar amb l’arena i poder intercanviar l’arena d’un cos a l’altre, sobretot entre aquells cossos que tenen la mateixa base: un cercle amb la mateixa àrea, en el cas del cilindre i del con, i un quadrat amb la mateixa àrea també, en el cas de la piràmide i del prisma.

Jugant amb l’arena, es poden adonar que es pot ficar molta més d’arena al con que al cilindre, però... “quantes vegades poden omplir el con per omplir del tot el cilindre?” Si no tenen suficient arena, una manera és que puguin buidar l’arena que pot cabre en el con dins del cilindre i a partir de la relació entre l’altura que s’ha omplert i la total del cilindre es pot arribar a intuir la resposta a la pregunta, que és 3.

Figura 17. Procés d’omplir el con d’arena i de comparar-lo amb el volum del cilindre.

Figura 18. Mesura de l’altura del cilindre quan s’omple aquest amb l’arena del con.

Aquest procés també es pot fer amb la piràmide (no d’Egipte) i el prisma. El resultat serà el mateix que en el cas anterior amb el con i el cilindre.

Figura 19. Procés d’omplir el con d’arena i de comparar-lo amb el volum del cilindre.

Figura 20. Mesura de l’altura del cilindre quan s’omple aquest amb l’arena del con.

4.3. Avaluació del procés d'ensenyament-aprenentatge

Probablement el concepte d'avaluació sigui un dels que es poden trobar més definicions en l'àmbit de l'educació. No obstant això, una de les visions més integradores quant a l'avaluació és la de Neus Sanmartí, l'experta en Ciències de l'Educació de la UAB, qui xerra de les funcions pedagògiques de l'avaluació (Fundació Bofill, 2015):

- La **funció reguladora.** L'avaluació és un mitjà per regular els aprenentatges, és a dir, per identificar i descobrir els encerts, les dificultats i els errors i trobar camins per superar-los. Comporta avaluar el procés d'ensenyament que les/els docents dissenyen per promoure la regulació entre iguals i l'autoregulació, tant formativa com formadora. Per això, l'avaluació augmenta la motivació i l'autoestima de l'alumnat, ja que l'ajuda a entendre millor les pròpies dificultats i a trobar camins per millorar.

  D'aquesta manera, el principal objectiu consisteix a promoure que la persona aprenent s'impliqui en el seu procés d'aprenentatge i ajudar-la a ser més autònoma, aspecte essencial per desenvolupar qualsevol competència.

- La **funció diagnòstica i d'avaluació inicial.** L'avaluació també serveix per conèixer experiències personals, actituds i representacions prèvies, maneres d'actuar, coneixements assimilats, etc. Permet valorar la situació de l'estudiant i la del grup abans que comencin el procés d'ensenyament-aprenentatge. D'aquesta manera, tant el professorat com les/els estudiants prenen consciència del punt de partida i el procés es pot adaptar a les necessitats diagnosticades.

Les activitats desenvolupades i que formen part de la proposta didàctica estan especialment enfocades en dues funcions pedagògiques: tant reguladora dels aprenentatges com diagnòstica i d'avaluació inicial. Així, es plantegen diverses eines per potenciar aquestes funcions pedagògiques, com ara:

- El **diari d'aula,** un instrument que permet l'autoavaluació-regulació. L'alumnat pot expressar el que creu que ha après en aquestes activitats i també les seves dificultats. El professorat ha d'analitzar el que diu l'alumnat per identificar si reconeix l'objectiu del treball realitzat i quins són els obstacles o entrebancs que ha de superar. Aquesta tasca d'identificació d'obstacles i errors i de trobada de camins per superar-los requereix temps per a l'autoreflexió, essencial perquè realment existeixi aprenentatge i que l'alumnat pugui corregir les seves dificultats.

- La **carpeta d'aprenentatge,** un altre instrument que facilita a l'alumne/a fer evident el que ha après i com ho ha après al llarg d'un període de temps determinat (ja sigui una setmana, un trimestre, una unitat didàctica, un curs...) per mitjà del recull raonat d'evidències, així com d'una reflexió final sobre el que ha après.

  El contingut d'aquesta carpeta o quadern d'aprenentatge podria incloure el que s'ha après amb les activitats proposades com qualsevol altra producció realitzada, ja sigui individualment o en petit grup, acompanyada d'una reflexió personal que ajudi l'alumne/a a autoregular-se com, per exemple, "què no sabia" , "què he après" i "quines dificultats he tingut" al llarg del procés d'aprenentatge. Poden formar part d'aquesta carpeta o quadern d'aprenentatge tant les activitats resoltes i els productes finals com tot allò que formi part del procés d'elaboració i reflexió: un full amb anotacions, un esquema, un dibuix, un mapa conceptual, una prova revisada, una imatge…

- L'**informe personal** o **KPSI** (*Knowledge and Prior Study Inventory*), altra eina d'avaluació. Aquesta es tracta de qüestionaris que serveixen per recollir els coneixements previs i la reflexió posterior sobre el que fa falta aprendre per contestar les qüestions. D'aquesta manera, aquests informes personals (KPSI) permeten que l'alumnat autoreguli el seu aprenentatge i que sigui conscient del que aprèn a partir de comparar el seu nivell de partida i la seva evolució posterior pel que fa als seus coneixements, habilitats, actituds o competències referents a allò que ha d'aprendre.

Amb les activitats plantejades es podrien emprar al començament dels mòduls o unitats didàctiques per tal d'evidenciar els coneixements previs, el nivell d'habilitat en relació amb el que s'ha d'aprendre i en acabar l'activitat, per reflexionar i adonar-se dels aprenentatges adquirits al llarg del procés seguit.

- La **rúbrica,** altra eina que fomenta l'avaluació formadora. També es tracta d'un instrument idoni per concretar els criteris d'avaluació en relació amb tasques complexes (competencials), com són aquestes activitats plantejades.

  Si es realitzés una rúbrica per avaluar aquestes propostes didàctiques, convé que apareguin els criteris de realització (aspectes a avaluar) i els criteris d'avaluació de resultats (o de qualitat graduats: novell, aprenent, avançat o expert).

Tornant altra vegada a les finalitats i funcions de l'avaluació, cal no oblidar la funció social que aquesta compleix. Com exposa Neus Sanmartí, l'avaluació és un "mitjà per comprovar què s'ha après i quantificar els resultats d'un procés d'ensenyament-aprenentatge per tal d'orientar l'alumnat en els seus estudis futurs, i al professorat i a les persones que gestionen el sistema educatiu en els canvis a introduir, per acreditar aprenentatges, o per classificar o seleccionar l'alumnat" (Sanmartí, 2010).

Llavors, l'avaluació de les activitats hauria de considerar tant les finalitats formativa i formadora així com la qualificadora i/o acreditativa. Per tant, ha quedat bastant clar que avaluar aniria molt més enllà que qualificar, tot i que aquesta qualificació formaria part del procés d'avaluació.

Per dur a terme l'avaluació d'aquestes activitats es realitzarien rúbriques basades en els criteris d'avaluació i/o estàndards d'aprenentatge que s'assenyalen al currículum.

4.4. Atenció a la diversitat

Les quatre activitats desenvolupades poden emmarcar-se dins el **Disseny Universal per a l'Aprenentatge (DUA)**, un model que facilita el marc inclusiu de referència per crear contextos d'aprenentatge (Morey, 2020). Aquest disseny es basa en tres principis (CAST, 2018), cadascun dels quals conté tres pautes:

- **Proporcionar múltiples maneres de representació** (què aprenem), proporcionant diverses opcions per a la percepció, oferint diverses opcions de diferents llenguatges (com les expressions matemàtiques i els símbols) i proporcionant opcions per a la comprensió. Així, l'alumnat estaria més informat i disposaria de més recursos.
- **Proporcionar múltiples maneres per a l'acció i l'expressió** (com aprenem), proporcionant diverses opcions per a la interacció física (manipulació i l'experimentació), oferint diverses opcions per a l'expressió i la comunicació (i l'accessibilitat) i proporcionant diverses opcions per a les funcions executives. D'aquesta manera, l'alumnat compta amb més estratègies per assolir els objectius.
- **Proporcionar múltiples maneres de comprometre's** (per què aprenem), proporcionant oportunitats per generar l'interès (i fomentant la motivació per l'aprenentatge), donant opcions per mantenir l'esforç i la persistència i donant opcions d'autoregulació. Oferint aquestes estratègies es fomenta que l'alumnat se senti més motivat i amb més iniciativa.

Aquestes proposta d'activitats didàctiques es revisarien amb el "Llistat de verificació i de tasques matemàtiques competencials i inclusives" que varen presentar De la Iglesia-Mayol B. & Barceló-López, C. (2022) en les recents JAEM20 (Jornades per a l'Aprenentatge i l'Educació Matemàtica), a València.

5. Conclusions

La realització d'aquest treball ha permès conèixer de ben a prop conceptes, perspectives, visions i coneixements que desconeixia abans. Per tant, l'avaluació pedagògica que puc fer deixa sensacions ben positives. Sense més dilacions, aquest treball no pot finalitzar sense fer una síntesi dels aprenentatges i conclusions.

En primer lloc, les mostracions són eines potents que disposen els/les docents per apropar les matemàtiques a l'alumnat de l'ESO. Aquestes mostracions perfectament poden conviure amb les demostracions més formals, sempre considerant el nivell de formalisme adequat per a la diversitat de l'alumnat que es tingui a l'aula.

Pareix haver-hi consens en l'àmbit de persones expertes en la didàctica de les matemàtiques que la millor manera d'introduir les demostracions matemàtiques és amb mostracions. Poc a poc el professorat pot anar pujant el nivell de formalisme, però sense perdre el rigor, que es basa en entendre les matemàtiques des del cor (com diria Aubanell), des del sentiment. A més, l'experimentació amb material manipulatiu, com pot ser el cas amb les demostracions menys formals i amb les mostracions, fomenta la inclusió, tot un repte en el sistema educatiu.

S'han desenvolupat quatre activitats com a proposta didàctica que poden resultar la base d'una metodologia basada en demostracions i mostracions. El contingut de tres d'aquestes activitats és del bloc de "Geometria", un bloc amb continguts més tangibles i que s'allunyen de l'abstracció, que encara està desenvolupant el cervell de l'alumnat. No obstant això, també s'ha proposat una activitat amb presència de les matemàtiques com la de *"Show me the money!"*, del bloc d'Estadística i Probabilitat, que, d'acord amb el que diu Anton Aubanell, acostuma a ser el bloc al qual se li dona menys importància quant a la comprensió dels conceptes matemàtics i tots els que s'extreuen a partir d'aquests.

També s'ha reflexionar sobre el procés d'avaluació i l'atenció a la diversitat relatiu a les activitats proposades. Llavors, el tercer objectiu s'ha pogut assolir, tot i que quedaria pendent dur-les a la pràctica: acabar de desenvolupar-les per a una classe determinada, emmarcant-les dins la programació d'unitats didàctiques i adequant l'avaluació a la diversitat de l'alumnat.

Quant als altres objectius, s'ha realitzat una recerca ben intensa dels currículums, tant de les Illes Balears, com d'altres països pioners, com Estònia i Singapur, referents educatius a nivell mundial. Amb aquesta recerca s'ha pogut entendre millor que el currículum condiciona l'ensenyament, però també la interpretació del professorat d'aquest document té un paper essencial.

Llavors, s'han complert els quatre objectius que s'havien plantejat al començament d'aquest treball, ja que també s'han descrit les demostracions i les mostracions, posant especial èmfasi en el mètode d'Aubanell i en els d'altres referents en l'ensenyament de les matemàtiques: autors i autores del segle passat en alguns casos, però que les seves idees sobre les matemàtiques continuen ben vigents avui en dia.

Aquest treball podria continuar amb un major desenvolupament de les propostes didàctiques plantejades, duent-les a terme i podent polir aspectes d'aquestes. També es podria ampliar la recerca a l'estudi dels currículums a Espanya: Catalunya, Navarra... poden ser molt bons exemples per ampliar aquesta mirada curricular. Per acabar, aquest treball podria donar peu a una tesi doctoral, que de ben segur ampliaria els camins de recerca que s'han començat amb aquest treball, perquè amb la investigació se sap on se comença, però no se sap de vegades on s'acaba. El que sí que està clar és que els ensenyaments formaran part de la meva pràctica docent, en la qual segur que podré veure més enllà en molts d'aspectes que ara mateix desconec i que tenc molta curiositat per descobrir-los, com qualsevol alumne/a en una activitat d'experimentació "aubanelliana".

Els reptes en l'educació es troben en el mateix camí que els de l'actual societat. De fet, aquest treball posa especial èmfasi en el raonament i en el pensament crític. Així, les demostracions i les mostracions són activitats amb les quals l'alumnat en l'etapa adolescent pot iniciar-se en aquest esperit crític per les matemàtiques aplicades a la vida, una eina fonamental per desenvolupar-se com a persona adulta i per constituir una ciutadania més competent a l'hora de prendre decisions. Aquest repte és majúscul, però és una de les principals raons, o segurament la principal, per la qual molts/es de docents estam en l'educació, per ajudar a construir una societat i un món millor.

Per acabar amb aquest treball, i recordant les aportacions de l'entrevista amb Anton Aubanell, les respostes de Miquel Siquier i tota la recerca realitzada durant l'elaboració d'aquest treball, s'ha arribat a la conclusió que la metodologia per fer demostracions i mostracions no implica que hagi de ser estricta, sinó que hi ha recomanacions i consells i el/la docent que les posi en pràctica ha de ser molt flexible, en funció de la diversitat de l'alumnat, els coneixements previs d'aquests/es i els recursos didàctics i comunicatius disponibles a l'aula. Llavors, també s'ha assolit el quart objectiu del treball.

I com a qualsevol bona recepta, hi ha un ingredient bàsic que no es pot comprar: la passió, l'amor, l'emoció. Ja ho deia Maria Antònia Canals (FECYT ciencia, 2018), que per millorar la tasca docent i el sistema educatiu fa falta estimar molt l'alumnat. Aubanell és un autèntic convençut d'això. Per aquesta raó segueix ensenyant i aprenent, com sempre, tot i que es troba jubilat. Miquel Siquier és un altre Aubanell en aquest sentit. No hi ha dia en el qual no tingui una curolla matemàtica, astronòmica, científica... per investigar i comunicar.

El llegat que ens deixa aquesta generació d'il·lustres docents té un valor incalculable, com el poema amb el que em va obsequiar Aubanell (Entrevista a Anton Aubanell):

"Si vols ser feliç ensenyant, no et planyis mai del passat, comença sempre la classe pensant que tot és possible, intenta que cada concepte tingui sentit i emoció, procura que cada moment porti quelcom especial, complau-te amb allò que ensenyes i valora el que l'alumne fa, sigui poc o molt, creu que tothom pot aprendre i deixa que la bella matemàtica faci encara més que tu, ensenya-la bé i la matemàtica captivarà els alumnes..."

6. Bibliografia, fonts i referències bibliogràfiques

Adrover, D. (2020). *TEMA 1.1: «CARACTERÍSTICAS FÍSICAS DEL ADOLESCENTE»* [Diapositives]. Aula Digital. Universitat de les Illes Balears. Recuperat de https://alu.uib.cat

Alcalde-Aparicio, J. A., Amelivia-Andérica, A., González-Santana, J. & Jiménez-Herranz, S. (2019). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas, 3o ESO*. McGraw-Hill Education.

Alenyà, M. (2014). *Alexandre Onsalo Orfila (Barcelona, 26 de juliol de 1922 – Palma, 20 de març de 2007).* MIQUELCINEMA: EL BLOC DE MIQUEL ALENYÀ. Recuperat de http://miquelcinema.blogspot.com/2014/05/alejandro-onsalo-orfila-barcelona-1922.html

Alsina-Català, C. (2012). *Claudi Alsina*. Claudi Alsina. Recuperat de http://claudialsina.com/ca/

Aubanell, A., Benseny, A. & Delshams, A. (1993). *Útiles básicos de cálculo numérico*. Labor.

Aubanell, A. (2017). ACTIVIDADES DE EXPERIMENTACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA. VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 22–30.

Barba-Muñoz, J. P. (2018). *Aproximación del número PI*. GeoGebra. Recuperat de https://www.geogebra.org/m/FXm9VRbe

BBVA (2020). *David Bueno, biólogo genetista*. Recuperat de https://www.bbva.es/finanzas-vistazo/aprendemos-juntos/david-bueno.html

Bramona, J. & Cabacés, R. (2017). *Maria Antònia Canals: «A l'escola i a la feina, tothom hauria de ser feliç»*. Revista Barcelona Metropolis. Recuperat de https://www.barcelona.cat/metropolis/ca/continguts/lescola-i-la-feina-tothom-hauria-de-ser-felic

Calvo-Pesce, C., Navarro-Moncho, M. T. & Toscano-Grimaldi, J. C. (2020). Las matemáticas no están confinadas al papel. *Revista SUMA*, *94*. Recuperat de https://revistasuma.fespm.es/revistas-revistas/revista-94-julio-2020.html

CAST (2020). *UDL: The UDL Guidelines*. Recuperat de https://udlguidelines.cast.org/

CentMat (2018). *Matemàtiques al castell de Bellver - SBM-XEIX*. Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX. Recuperat de https://xeix.org/Centre-Aprenentatge-Cientificomatematic/oferta-educativa/itineraris/article/matematiques-al-castell-de-bellver

Conselleria d'Educació i Formació Professional (2015). *Currículums educació CAIB-ESO*. CAIB. Recuperat de http://www.caib.es/sites/curriculums/ca/eso/

Conselleria d'Educació i Formació Professional (2015). *Currículums educació CAIB-Batxillerat*. CAIB. Recuperat de https://intranet.caib.es/sites/curriculums/ca/batxillerat/

Conselleria d'Educació i Formació Professional (2022). *LOMLOE Currículums educació CAIB-ESO LOMLOE*. CAIB. Recuperat de https://intranet.caib.es/sites/lomloe/ca/eso/

dBalears (2007). Alejandro Onsalo. *dBalears*. Recuperat de https://www.dbalears.cat/opinio/opinio/2007/03/24/144915/alejandro-onsalo.html

De Jesús-May Cen, I. (2015). *George Polya (1965). Cómo plantear y resolver problemas [título original: How To Solve It?]. México: Trillas. 215 pp.* Sistema de Información Científica Redalyc. Recuperat de https://www.redalyc.org/journal/4576/457644946012/html/

De la Iglesia-Mayol B. & Barceló-López, C. (2022). *MATEMÁTICAS INCLUSIVAS*. 20 JAEM. Recuperat de https://padlet.com/RECURSOSCV/647vhiodmcprz48

Diari ARA (2022). *Mor Maria Antònia Canals, referent en l'ensenyament de les matemàtiques*. Recuperat de https://www.ara.cat/societat/mor-maria-antonia-canals-referent-l-ensenyament-matematiques_1_4356464.html

Educación 3.0 (2019). *Francisco Mora: «El cerebro sólo aprende si hay emoción»*. Recuperat de https://www.educaciontrespuntocero.com/entrevistas/francisco-mora-el-cerebro-solo-aprende-si-hay-emocion/

Estalmat (2004). *Miguel de Guzmán Ozámiz*. Estalmat. Estímulo del Talento Matemático. Recuperat de https://www.estalmat.org/miguel-de-guzman/

FECYT ciencia (2018). *Maria Antònia Canals, pedagoga de las matemáticas* [Vídeo]. YouTube. Recuperat de https://www.youtube.com/watch?v=duDBqF2tYaI

FEEMCAT (2016a). *Canals i Tolosa, Mª Antònia - Matemàtiques a Catalunya*. Congrés Català d'Educació Matemàtica. Recuperat de https://sites.google.com/site/matematiquesacatalunya/home/mantonia-canals

FEEMCAT (2016b). *Casulleras i Regàs, Joan - Matemàtiques a Catalunya*. Congrés Català d'Educació Matemàtica. Recuperat de https://sites.google.com/site/matematiquesacatalunya/home/joan-casulleras

Fernández, R. (2014). *"Carta a un professor novell", per Anton Aubanell*. FEEMCAT. Recuperat de https://feemcat.org/anton-aubanell/

Flores-Lázaro, J. C., Castillo-Preciado, R. E. & Jiménez-Miramonte, N. A. (2014). Desarrollo de funciones ejecutivas, de la niñez a la juventud. *Anales de Psicología*, *30*(2), 463–473. Recuperat de https://doi.org/10.6018/analesps.30.2.155471

Freepik (2020). *El Castillo de Bellver: un lugar de cuento y mágicos atardeceres*. Ars Magna Hotel. Recuperat de https://arsmagnahotel.com/2020/11/07/el-castillo-de-bellver-un-lugar-de-cuento-y-magicos-atardeceres/

Fundació Bofill (2015). *Avaluar per aprendre, Neus Sanmartí* [Vídeo]. YouTube. Recuperat de https://www.youtube.com/watch?v=v16EoFjeqN0

Integratek (2018). *Jesús C. Guillén: «No podemos separar lo emocional de lo cognitivo»*. Recuperat de https://integratek.es/blog/2018/10/25/no-podemos-separar-lo-emocional-de-lo-cognitivo-jesus-guillen/

Ibañes, Marcelino (2001). *Un ejemplo de demostración en geometría como medio de descubrimiento.* SUMA, 37, pp. 95-98. Recuperat de https://revistasuma.fespm.es/revistas-revistas/revista-37.html

IB3 (2019). *La Gran Vida, Cap: 20191226120401*. Recuperat de https://ib3.org/lagranvida?pl=1&cont=dc9e4574-d52b-4313-9c5f-1d9598168984

Madrid-Casado, C. M. (2022, 6 de gener). *¿Qué métodos de demostración matemática son válidos? El País*. Recuperat de https://elpais.com/ciencia/cafe-y-teoremas/2022-01-06/que-metodos-de-demostracion-matematica-son-validos.html

Martín-Casalderrey, F. (2002). *Recesiones: En esta sección faltaba Emma Castelnuovo.* SUMA, 41, pp. 133-136. Recuperat de https://revistasuma.fespm.es/revistas-revistas/revista-41.html

Método Singapur (2011). *Matemáticas Método Singapur en España (Sitio Oficial)*. Matemáticas Método Singapur. Recuperat de https://www.metodosingapur.com

Ministry of Education of Singapore (2019). *Courses and subjects for secondary schools*. Recuperat de https://www.moe.gov.sg/secondary/courses

MMACA (2008). *Sala George Pólya*. Museu de Matemàtiques de Catalunya. Recuperat de https://mmaca.cat/sala-george-polya/

Morales, M. F. (2017). *El director de "Jerry Maguire" reveló el secreto detrás de su frase más famosa*. Upsocl. Recuperat de http://www.upsocl.com/muvi/el-director-de-jerry-maguire-revelo-el-secreto-detras-de-su-frase-mas-famosa/

Morey, M. (2020). Disseny Universal per a l'Aprenentatge (Part 4) [Diapositives]. Recuperat de https://ad.uib.es/estudis2021/pluginfile.php/510711/mod_resource/content/4/Sessió%20dia%2017_12_20_grupS.pdf

Museu d'Història de la Ciutat (2018). *Castell de Bellver - Edifici*. Castell de Bellver. Museu d'Història de la Ciutat. Recuperat de https://castelldebellver.palma.cat/portal/PALMA/castelldebellver/contenedor1.jsp?seccion=s_ldes_d10_v2.jsp&codbusqueda=2371&language=ca&codResi=1&codMenu=2249

Nelsen, R. B. (1993). *Proofs Without Words*. Mathematical Association of America.

OECD (2022). *Publications - PISA*. Recuperat de https://www.oecd.org/pisa/publications/

Paulino, L. (2021). *Generador de Polígonos Regulares*. GeoGebra. Recuperat de https://www.geogebra.org/m/MZhSUH94

Puig-Adam, P. (1955). *Decàleg de la didàctica de la matemàtica mitjana.* Centre de Recursos per a l'Aprenentatge i la Investigació - CRAI UB. Recuperat de https://crai.ub.edu/ca/coneix-el-crai/biblioteques/biblioteca-matematiques/matematics-catalans-pere-puig-adam/decaleg-per-a-la-didactica

Ramis-Barceló, R. (2010). *La tradición clásica y bíblica en "El Pi de Formentor" de Miquel Costa i Llobera**. Espéculo. Revista de estudios literarios. Universidad Complutense de Madrid. Recuperat de https://webs.ucm.es/info/especulo/numero44/piformen.html

Republic of Estonia (2017). *National curricula 2014*. Estonian Ministry of Education and Research. Recuperat de https://www.hm.ee/en/national-curricula-2014

Rodríguez-Bravo, M. F. (2015). CARACTERÍSTICAS DEL SISTEMA EDUCATIVO ESTONIO/ ESTONIAN EDUCATION SYSTEM FEATURES. *Revista "Avances en supervisión educativa", 24*, 1–10.

Rubio-Segovia, B. (2004). *Biografía: Miguel de Guzmán Ozámiz (1936–2004)*. Universidad Complutense de Madrid. Recuperat de https://blogs.mat.ucm.es/catedramdeguzman/biografia/

Sánchez-Freire, E. & Gil-Pascual, J. A. (2014). Las demostraciones en la didáctica de las Matemáticas. Una experiencia con alumnos de 3º ESO. *NÚMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *86, 79-94*. Recuperat de http://www.sinewton.org/numeros

Sanmartí, N. (2010). *AVALUAR PER APRENDRE*. Generalitat de Catalunya. Departament d'Educació. Direcció General d'Educació Bàsica i el Batxillerat. Recuperat de https://xtec.gencat.cat/web/.content/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/0024/fc53024f-626e-423b-877a-932148c56075/avaluar_per_aprendre.pdf

Schleicher, A. (2019). *PISA 2018: Insights and Interpretations*. OECD. Recuperat de https://www.oecd.org/pisa/publications/pisa-2018-results.htm

Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES (2009). *Razonamiento y demostración*. CREAMAT CESIRE. Recuperat de https://issuu.com/creamat/docs/2_razonamiento_y_demostracion

Sylvester, R. & Jackson, T. (2021). *Así se ha convertido Estonia en la nueva Finlandia*. XLSemanal. Recuperat de https://www.abc.es/xlsemanal/a-fondo/educacion-estonia-mejor-sistema-educativo-informe-pisa.html

Tekman (2021). *Cómo aplicar técnicas y juegos de demostración matemática con tus alumnos de Secundaria*. Tekman education. Recuperat de https://www.tekmaneducation.com/blog/tecnicas-juegos-demostracion-matematica-secundaria/

Universitat de Barcelona (2017). *Matemàtics catalans: Pere Puig Adam (1900–1960)*. Centre de Recursos per a l'Aprenentatge i la Investigació - CRAI UB. Recuperat de https://crai.ub.edu/ca/coneix-el-crai/biblioteques/biblioteca-matematiques/exposicio-virtual-matematics-catalans-pere-puig-adam

7. Annexos

7.1. Entrevista a Anton Aubanell

1. **A quin nivell de rigor creus que pot arribar en les demostracions matemàtiques en l'etapa d'ESO? Fins quin punt se pot arribar a perdre aquesta rigorositat?**

Jo en primer lloc et convidava a definir rigor. Què podem entendre per rigor? **Potser el rigor el podríem entendre**, m'ho plantejava jo mateix, com **l'encadenament de raonaments lògics que ens porten a demostrar una propietat**, no? Un encadenament que pot tenir o respondre diversos esquemes, sigui un esquema més deductiu, sigui un esquema més inductiu. Rigor pot ser això.

Ara bé, jo volia proposar-te altra distinció. No confondre rigor amb formalisme. A vegades es confon el rigor amb les pissarres plenes de "números". A mi confesso que m'agrada el formalisme. Jo he escrit juntament amb dos autors més un llibre de càlcul numèric per als alumnes de la facultat i, que, de fet, s'estudiava i que els meus enginyers de mines d'Astúries ens van dir que era massa complicat. Per tant, no és que em faci por el rigor, al contrari. Segur que el formalisme i el rigor són un patrimoni de la matemàtica. Però, penso, que **el formalisme a vegades té "algo" de llenguatge crític, que alumnes que encara no estan iniciats amb la nostra ciència els hi pot significar una barrera difícil de traspassar.** Per tant, **hauríem d'intentar conjugar aquest rigor amb dosis baixes de formalisme, que això és interessant.** Per altra part, també a vegades penso que l'ús del formalisme no assegura el rigor.

Jo recordo un professor que fa uns 30 anys el vaig conèixer a un institut. Era un home gran, molt gran i deia: "Jo... demostrar el sinus i el cosinus de la suma de dos angles no és difícil, perquè jo faig servir la fórmula d'Euler (e elevat...) i a partir d'aquí surt tot". Però això: molt formalisme, sí, però no era rigorós, perquè primer havia de demostrar que allò es complia. No sé si m'explico. Per tant, alerta, me pot enamorar el rigor, però alerta no confonguem rigor amb formalisme. I a vegades el rigor pot estar en el plantejament profund d'una idea.

Tu preguntes sobre el nivell, no sé, el nivell de rigor, igual que el nivell de formalisme, hauria de ser tan alt com puguem, atenent, però, a tres coses:

1. **Al coneixement previ dels alumnes**, és a dir, si el rigor que exigim o el formalisme que expressi aquest rigor, donat el cas, supera els coneixements que l'alumne té. Podem ser perfectes i sortir de la classe dient: "Avui he fet una gran classe". I això t'ho dic perquè a mi em va passar el primer any. Recordo sortir de classe pensant això i sentir uns alumnes que deien: "Avui l'Anton Déu n'hi do!". No comuniques la idea. Hi ha molts de "profes" de facultat que van així.

2. Un altre element que també ajuda és que hem de tenir el màxim rigor i formalisme que puguem assolir segons els coneixements previs, però també segons els recursos didàctics que emprem. El nostre recurs comunicatiu, tot allò que ajuda a la comunicació, ens pot permetre assolir més nivell que una simple pissarra que honestament potser tampoc no et permet assolir aquest nivell.

3. **L'atenció a la diversitat.** Tenim alumnes molt diversos i cal ser inclusius.

Jo, per exemple, tornant a allò de la longitud de la circumferència. Hi ha una mostració que és fer que els alumnes vagin mesurant diversos objectes cilíndrics amb un fil i amb una cinta mètrica i que divideixin pel diàmetre i s'ho van passant i van fent mesures inclús donant quatre voltes a l'objecte amb el fil i després poder treure el fil, fer-ho més exacte, però llavors, quan ho fan, veuen que tots més o menys s'acosten fent la mitjana a un número al voltant de 3: 3'2, 3'1, que és l'entorn de pi. Això és magnífic!

Jo record que m'explicava un company que un alumne molt bo que ja sabia clarament que la longitud d'una circumferència era pi pel diàmetre, que li va dir: "Jorge, això és meravellós". I és que hem perdut la curiositat de meravellar-nos quan tanquem la idea en una fórmula i ell li va dir: “Ostres! Així sempre totes les figures rodones són així”. “Home, aquesta és la fórmula que tu ja saps”. I l’alumne va respondre: “Sí, però ara la sento”.

Clar, una fórmula no és res més que una caixeta que tanca una idea, no? I aquesta caixeta hem de ser capaços d’obrir-la sovint i dir: “Aquesta és la fórmula que tanca aquesta idea!”. M’explico, no? Una cosa és saber la fórmula i l’altra és entendre la idea. **El rigor no està en saber la fórmula, sinó en entendre la idea, jo ho entenc així.**

Clar, tu em pots dir: “Es poden fer demostracions a nivell d’ESO?”

Jo, per exemple, demostracions rigoroses que es poden fer amb tot rigor, per exemple: que les mediatrius es troben en un punt, això és pot demostrar fàcilment, o que les bisectrius es troben en un punt o altres demostracions geomètriques en el cas de les medianes és diferent, amb les altures, és un tema una mica diferent. Es pot demostrar també que (a+b) al quadrat és el quadrat de... També es pot demostrar, però també es pot mostrar. Sempre hi ha un determinat nivell que depèn de tres coses: del coneixement dels alumnes, dels recursos que estem disposats a posar en marxa per arribar a aquella demostració i de l’atenció a la diversitat. Moltes vegades és bo abans de fer una demostració fer una mostració.

2. **Empres una paraula que no apareix al DIEC, “mostració”, per xerrar de demostracions menys rigoroses amb material manipulatiu sobretot. En qui et vas fixar per treure aquesta paraula? La vas inventar? Com va ser aquest procés?**

Veig que t’ho has estudiat bé, eh? Jo la veritat és que... la paraula va anar sortint per si sola, perquè a mi me molestava una mica com a matemàtic. Jo, segur que a tu també et passa, aprecies el rigor. Llavors, determinades coses que potser no poden fer-se amb rigor, però que es pot fer una aproximació no rigorosa, jo no els volia dir “demostració”, perquè no ho era. No era un encadenament lògic. Saps el que vull dir? Llavòrens, a partir d’aquí vèiem que el que fèiem era mostrar, en comptes de demostrar. **Ens aproximàvem més a la propietat més pel cor que pel cap, tot i que també pel cap, perquè poses en marxa la intuïció, etc.** I, per tant, no es desprecia el camí, no? Però quan no podies fer una demostració, no podies tampoc dir que el que feies ho era, si no ho era. M'explico? Llavors, era necessari buscar una altra paraula. Llavors, vaig pensar sense massa consciència que el que fèiem era mostrar. Llavors, **de demostrar venia mostrar i de demostració venia mostració.** I així va néixer la paraula mostració. Potser altres persones l'han utilitzat, però això no ho sé, però ho vaig anar fent. Llavors, ho vaig anar compartint, compartit amb els companys, públics, exalumnes de didàctica i ara sé que ho utilitzen.

Molt bé, aquest és l'origen. La inspiració potser està en Puig Adam, una frase que a mi em va cridar l'atenció i que si vols te l'envio. Diu en un llibre que es diu *La matemàtica en su enseñanza actual*, escrit el 1980, poc abans que es morís, diu així, ja que va morir relativament jove:

"No siempre una demostración basada en la reducción a verdades anteriores, cualidad característica de las demostraciones de la escuela griega, es la que traduce las esencias de la propiedad demostrada, ni mucho menos la más adecuada desde un punto de vista didáctico. Para los matemáticos orientales demostrar era reducido a la evidencia directa, lo cual percibe el niño mejor que un encadenamiento lógico, el cual no suele ver ni el alcance ni la necesidad".

Què et sembla? Que no és guapo això? Això Puig Adam ho diu i naturalment no parla de mostracions i a vegades jo crec que parla d'una cosa que es diu, i també em sona de Miguel De Guzmán, raonament plausible, o sigui, que pot ser no és el raonament més purament deductiu, però sí és plausible. M'explico? És a dir, que d'alguna manera és admissible, és **un raonament que apel·la a la intuïció i que permet, doncs, arribar a conclusions encara que no sigui una demostració des d'un punt de vista lògic,** és a dir, **no sempre el camí que marca el rigor formal és el camí més productiu des del punt de vista didàctic.** M'explico, no? Encara que ens podria entusiasmar, però no ho és.

Tens una aportació que hem de valorar molt, quan els enginyers vos apunteu a la docència matemàtica, que porteu molts de temes de tipus pràctic, que la formació dels matemàtics estrictament queda molt més reduïda. Jo crec en els equips multidisciplinars en els escoles, perquè funcionen molt bé. Aquí podeu fer aportacions molt interessants. Per un costat, com a enginyer has viscut les matemàtiques més formals, però en canvi també veus la importància de la pràctica i de l'aplicabilitat, etc. Això és bàsic!

3. Quins ingredients fonamentals ha de tenir una mostració, segons el seu parer? Es pot fer una demostració sense material manipulatiu?

La veritat és que... i he anat pensant, però... i m'has obligat a escriure-ho i això és important. No ho havia fet, d'escriure-ho, ho havia dit a algunes conferències i així, però jo n'hi faria 5:

1. Ha de ser natural, és a dir, si la mostració que hem de fer és molt complexa, amb molta artificiositat, no funciona. L'artifici sempre és una mala eina didàctica. Per tant, ha de ser natural, assenyada. No ha de ser molt complicada. Hi ha mostracions que a vegades dius que per entendre aquesta mostració hauríem de fer una demostració. Llavors, que sigui natural, sense artificiositat.

2. Una altra qualitat és que ha de ser intuïtiva, és a dir, si nosaltres diem que ha d'entrar pel cor, quina part del cervell feim servir? **La intuïció.** Per tant, pot haver-hi un suport visual, pot haver-hi una mostració gràfica... Però també hi pot haver suport manipulatiu, però sempre apostant per la intuïció. A la intuïció també s'hi arriba a través de tots els sentits: el tacte, la vista, etc.

3. Una altra és que ha d'apel·lar al que diríem raonament plausible. Aquí recullo les veus de Puig Adam i de Miguel De Guzmán, que, per cert, eren grans matemàtics i defensaven aquest tipus de raonament. Vaig conèixer a De Guzmán treballant amb equacions diferencials com a catedràtic de la Complutense de Madrid. Puig Adam va ser el primer professor de

Matemàtiques a la primera Escola d'Enginyers Aeronàutics que hi va haver a Espanya, parlem dels anys 50. Doncs, ha d'apel·lar al raonament plausible, un raonament que pot ser no és rigorós, però és creïble, m'explico? Es basa en la intuïció.

4. Una altra és que **s'ha d'apropar tant com puguem al raonament lògic**, és a dir, si podem apropar-nos al raonament lògic, el que després faran en un futur, millor. Vaig a posar dos exemples:

- Primer exemple: l'àrea d'un cercle és pi-erra2. Tu pots fer amb quesitos. Potser m'ho has vist fer en algun vídeo. Fer-ho amb quesitos això i fer que l'àrea és la suma dels quesitos i dius: "Bueno, és la suma d'àrees de triangles. Fas un "quesito" i triangle. Cada "quesito" té una base i una altura, que és el radi. Llavors, si fas la suma d'àrees de triangles, és una meitat de la base per l'altura i una meitat de la longitud de la base del "quesito" pel radi. Si vas sumant, treus com a factor comú una meitat de r i queda la suma de les bases. La suma de les bases és la longitud, no? Per tant, queda una meitat de r per tota la longitud, que és 2-pi-erra. Una meitat de r per 2pierra dona pi pi-erra-dos. A que és maco?
  I això és molt antic. Això és del 1300. Hi ha un que ho demostra o que ho mostra així. I tu em diràs: això és una mostració. Per ara sí, però tu pots transformar-ho en una demostració només passant el sumatori de "quesitos" a una integral, és a dir, passant el límit quan estam treballant amb quesitos d'arc diferencial (d'arc dx). Per tant, estàs molt proper a la demostració, és a dir, que tu quan fas aquesta mostració a nanos de 2n d'ESO, tu estàs pensant i els hi fas, no com t'ho he fet a tu, que t'ho he fet com si fos una animalada, si no que li dediques mitja hora, vas aprofundint, etc.

  Doncs, després me preguntes sobre les condicions d'una mostració. Quan fas això ben fet, t'estàs acostant a la demostració i, per tant, estàs pensant: "Vosaltres un dia potser a la carrera això ho fareu com que el sumatori serà una integral". Per tant, estàs deixant portes obertes i això és important.

5. **Una altra condició és que s'ha de convidar a la reflexió sobre el procés fet**, és a dir, que l'alumnat quan acabem, i això a mi em va costar molts d'anys, crec. Quan acabes de fer una mostració, no pots passar a la següent. Això s'ha de diggerir: "Què hem fet? Com ho hem fet?" i has de convidar a que els alumnes posin paraules, és a dir, **conceptua**. Per tant, posar paraules, conceptuar. Jo crec que això és molt important i fins i tot deixar coses escrites, fotografies, etc.

   Tinc un molt bon amic, un professor molt bo, que dedica la seva vida segurament a la matemàtica i va ser alumne meu a la facultat i és un gran matemàtica. Ara està a l'Institut Español d'Alucemas i ell els hi fa fotos quan fan mostracions i els hi posa l'examen, en un examen clàssic, i els diu "escenarios": "Què estàvem fent aquí? Explica-ho". Agafa un examen tradicional i nosaltres el que no podem fer és xerrar un idioma a classe i altre el dia de la mostració. Si fem mostracions, per què no també demanar-les a l'examen? Llavors, ell els faria una foto del que estava fent amb els "quesitos", els hi posaria a ell i deia: "Què estàvem fent aquí?". **Les mostracions també conviden al raonament i conviden a passar-ho a una explicació verbal, que ja és un germen de raonament. De fet, és formalitzar-ho amb paraules.**

   Els estàs conduint cap al raonament. La mostració convida, t'aproxima al raonament. Això és molt interessant. La frontera no està tan ben definida entre demostració i mostració, és un procés.

   Per què distingíem entre el rigor i el formalisme? Quan anem de la demostració rigorosa i formal i treim formalisme, vol dir que anem deixant la idea més sense l'embolcall formal, que a vegades tanca la idea. Segur que quan vas fer càlcul diferencial a 1r de carrera, et van definir que el diferencial d'una funció era una aplicació lineal d'un espai tangent a un espai tangent, que era una cosa que sortia al final d'una fórmula... Quan tu caus en aquell formalisme, t'oblides de lo bonic que és. Perquè realment més endavant, quan parles de, per exemple, diferencials de funcions de R^2 amb R.

4. Quines demostracions més formals creus que és més probable que l'alumnat pugui entendre a l'ESO? I quines mostracions consideres que són adequades? Em pots posar alguns exemples?

En primer lloc, cal diferenciar l'existència de tres categories:

1. Demostracions que es poden fer de tipus formal
2. Demostracions que és més aconsellables fer-les a través de la manipulació d'objectes, però que s'han de considerar demostracions, perquè són generalitzables, etc.
3. Mostracions que no tenen el rigor, que aposten més per la intuïció i per l'experiència.

La primera categoria està formada per les demostracions formals. Algunes d'aquestes demostracions formals que poden arribar a entendre són la de la suma d'angles d'un triangle (180º) i d'un quadrilàter (360º), que existeixen infinits "números" primers. També altra que a vegades he ensenyat és la demostració d'arrel de 2 per reducció a l'absurd, demostrar les identitats notables, com ara $(a+b)^2$ i $(a+b)^3$, el teorema de l'altura i el catet per semblança de triangles (mètode deductiu), les fórmules de trigonometria...

Cal dir també que tota demostració formal i amb rigorositat ha de tenir aquestes tres parts: hipòtesi (de què es parteix), tesi (on es vol arribar, què es vol demostrar) i demostració (el camí per anar de la hipòtesis a la tesi).

En segon lloc, també es poden fer demostracions amb material manipulable (sense formalisme) com el teorema de Pitàgores, $(a+b)^2$ amb una cartolina, $(a+b)^3$, que apareix a la llicència d'estudis de l'ARC (Aplicació de Recursos del currículum), el teorema de Dandelin (amb les esferes i les còniques amb fil), la suma d'angles del triangle, l'àrea d'un dodecàgon ($3.r^2$), es pot fer amb peces (a una xerrada a Mallorca), el teorema de Viviani...

Una tercera categoria estaria formada per les mostracions en les quals es poden descobrir i provar les propietats matemàtiques, com amb el teorema de Pitàgores (amb una balança i tres làmines de fusta o d'altre material), el volum d'un con, d'un prisma...

Després d'aquestes tres categories, ja arribaria la recepta. Per tant, aquesta tercera categoria és el pas anterior a la recepta.

5. Has tingut algunes persones referents en l'àmbit de la didàctica de les matemàtiques?

Quant a persones referents en l'àmbit de la didàctica i la docència de les matemàtiques, he de destacar Puig-Adam, que va ser molt innovador en una Espanya molt trista. De fet, va ser catedràtic en la primera facultat d'Enginyers Aeronàutics, a San Isidro, Madrid.

L'Emma Castelnuovo, la Maria Antònia Canals (que malauradament va morir recentment), el professor Joan Casulleres (Escola del Parc de Ciutadella), Miguel de Guzmán, catedràtic de la ..., George Polia (gran expert en problemes de Matemàtica discreta), Claudi Alcina (demostrar sense paraules), Nelsen.

Charming proofs equations...

6. **Quins blocs de l'assignatura de Matemàtiques consideres que són més adequats per poder fer demostracions? I per fer-ne mostracions?**

Jo diria que hi ha exemples pràcticament a tots els blocs. Potser el bloc en el qual hi ha menys demostracions i menys mostracions és en el bloc d'estadística, potser perquè és més complicat, perquè potser necessita un cert nivell. Potser geometria és el bloc en el que hi ha més. Anys enrere t'hagués dit que àlgebra, però ara d'àlgebra també n'hi ha moltes.

És veritat que estadística que es dona molt com a recepta i a vegades afecta la falta de temps, que com generalment es dona al final...

Aquí apareixen dues categories més. Estam parlant de: demostracions i mostracions, però també pot haver-hi activitats que posin de manifest la presència de la matemàtica. Per exemple: fotografia matemàtica, videomat, matemàtica que està present en el nostre entorn i encara hi ha activitats que mostren l'aplicació de la matemàtica. **No és el mateix la presència que l'aplicació.**

Per exemple: una activitat molt maca i ara per això faig aquesta distinció. Tu agafes una classe de 30 alumnes i els dones un dau, un dau equilibrat de sis cares o suposadament equilibrat. Quan us ho digui, tirareu tots el dau i els que els toqui un 6 que s'asseguin. Sembla fàcil, no? Quant de temps tardarem en que quedi una sola persona? Però de mitjana? És interessant... El primer que els ha de convidar és a que facin les seves conjectures. Molts diuen 6-7 tirades. M'explico, no? És sorprenent! Perquè si tu fas un model, de fet, es fa un model que segueix una exponencial decreixent i potser entre 19 i 21. Poden ser 17-18 i també poden ser 23. M'explico? És molt guapa l'activitat. I això es pot fer en estadística. Em diràs ara: "Quina tonteria!". Quan tu fas aquest "role-play" a casa, pots dir: "Vosaltres ja no sou persones, sou àtoms, isòtops, i quan us toca un 6, us descomposeu". La probabilitat que actua per descomposar, quan en quedin la meitat, el nombre de tirades que s'hagin fet és el que es diu en els isòtops el període de semidesintegració i, per tant, el que estam fent és un model de desintegració reductiu, que es mira des d'un punt de vista continu... si hi ha infinits alumnes o àtoms. A que és maco? Ho pots lligar amb la prova del carboni-14, que poca broma amb els *"role-plays"* quan són potents i quan se veu aquesta aplicació. No és ni una demostració ni una mostració, però sí que és una aproximació com a aplicació a la prova del carboni-14 de la desintegració reductiva i STEM a més.

7. **Creus que s'han d'anar introduint les demostracions i mostracions de manera progressiva? O hi ha algun curs en el qual convé ja introduir un cert grau de rigorositat?**

Mira, no ens hauria de fer mai por presentar idees o mostrar o demostrar propietats, si els recursos que empren ens ho permeten, si feim un “role-play” potent que permet que l’alumne ho entengui, si això no té com a conseqüència despenjar els alumnes. Per tant, mai ens hauria de fer por si els recursos didàctics ens ho permeten treballar idees avançades, quan abans millor, **si és còmode per a tots els alumnes.** Ara bé, **el que sí que ens ha de fer por és formalitzar prematurament, perquè això despenja un segment enorme d’alumnes.** Això representa una barrera iniciàtica que costa molt que molts d’alumnes les passin i això és molt, molt interessant. I molt bé el comentari que has fet, jo aquí subratllava: “El rigor no està tant en la formalització com amb les idees”.

Per tant, cal introduir petites demostracions, en la mesura que aquestes condicions ens ho permetin, que siguin petites deduccions, potser alguna inducció, potser anar introduint algun element de lògica. Per exemple: la diferència entre una “i” i una “o” en una proposició, la negació, el contrarecíproc, algun element de lògica... Escolta, si trobo els carrers mullats... Si els carrers no estan mullats, serà que no plou. Alguns elements de simbolisme formal, en algun moment donat introduir alguna cosa del conjunt buit, la unió de conjunts, la intersecció de conjunts o els quantificadors tant existencials com universals (per exemple: l’”existeix” i el “para todo”). “A ratos” recordo que **algunes vegades havíem fet propostes en el departament de tenir una política d’introducció progressiva de llenguatge per tal que quan arribessin a Batxillerat això ho tinguessin ja més treballat.**

Molt a poc a poc ha de ser aquesta progressió en la introducció del llenguatge matemàtic, com una pluja fina. A vegades a les matemàtiques també els passa, com en els idiomes, jo que som un patata per parlar idiomes... Me trobo que els que parlen anglès, parlen anglès amb una facilitat i quasi no ho valoren. El meu fill és metge a la Vall d’Hebron. I jo quan estudiava li vaig dir: “No m’importa si aprens moltes matemàtiques o poques, però t’asseguro que aprendràs anglès”. Jo li vaig posar dues coses: l’anglès i la programació, algun programa informàtic. I ell ja no valora l’anglès, però per mi és molt difícil. En canvi, passa al revés en matemàtiques. Jo no valoro la dificultat del llenguatge matemàtic. En canvi, a un alumne li pot resultar molt difícil entrar-hi.

Per fer una petita demostració, si l'alumne està en condicions d'assumir-la i els recursos didàctics ens ho permeten, mai és massa tard per fer mostracions, és a dir, es poden fer mostracions a la universitat. Per exemple: diagrames de Voronoi fets amb "lacasitos", que potser els has vist, perquè és molt curiós. Doncs, això es pot fer a la universitat. I la definició formal d'allò no és pas trivial. Els diagrames de Voronoi són diagrames de proximitat. Tu tens un conjunt de nodes, per exemple, un conjunt d'hospitals. A tot Mallorca poses un mapa de Mallorca i poses els hospitals. Llavors, distribueixes la illa en zones d'influència de cada hospital, considerant únicament la mètrica, la distància. Per tant, cada punt aniria a l'hospital que té més a prop. I amb "lacasitos" agafes un plat amb aigua i "lacasitos" de diferents colors i els poses dins de l'aigua i deixes que es desfacin. Els colors es van trobant i van formant les zones d'influència i durant dos o tres minuts després ja es dilueixen, però veus que es troben en les mediatrius. Si tens dos punts i aquests dos punts es van eixamplant, eixamplant i eixamplant, es troben en la mediatriu del segment que els uneix.

En Miquel Siquier va fer una magnífica activitat tirant caramels i la distància a cada caramel. Té molta imaginació perquè sap Matemàtiques i s'estima les Matemàtiques. Dona-li molts de records! L'*"apreci"* cap a ell és mutu.

8. Consideres que hi ha algun tipus de guió a l'hora de demostrar i mostrar per a un professor novell (com a la carta que vas escriure), qui s'està iniciant en l'apassionat món de l'ensenyament de les matemàtiques? Quins consells em podries donar?

Gràcies per haver llegit la carta que vaig escriure. *Merci*. És una emoció. La vaig fer de tot cor.

Mira, a dos nivells. Primer, consells per portar a terme mostracions o per fer servir activitats manipulatives i per fer servir material manipulatiu, consells que són com un protocol d’actuació, per dir-ho així, que no sempre faràs totes els passos, però que poden ser orientatius. Jo els he resumit en 6 passes:

1. Fer que l’alumne entengui el material que estem posant sobre la taula. Sempre davant d’un material l’alumne ha de manipular-lo prèviament perquè l’entengui, perquè es vacuni de la curiositat de tocar-lo i també que entengui el problema que estem plantejant, el tema que estem plantejant. M’explico, no? Que ho entengui i això no vol dir que ja li donem la solució, que li donem el resultat del que volem arribar. No ens precipitem a donar-li. Com diu en Polia: “No descobrim del tot la totalitat del nostre secret”. Primer, que entengui el problema, que entengui si fem servir algun material, el material.
2. **Davant del problema que faci conjectures, convidar-lo a fer hipòtesis:** “Això anirà per aquí, anirà per allà, més o menys tancades, més o menys obertes...”, però que d’alguna manera representa una implicació personal amb el que anem a fer, això és molt important.

3. **Experimentar, donar temps perquè experimenti i pugui arribar a conclusions,** però experimentant, **donant temps,** això és clau, el temps. I cada alumne té de temps una quantitat diferent, però perquè vagi experimentant. I hi haurà un moment en què aquella experiència li farà fer una descoberta.

4. **Descobrir regularitats a partir de l’experiència.** Una vegada han descobert regularitats el profe ha de fer-se una mica “tonto”: “Si has descobert això, explica-m’ho!” Convidant a que posi paraules a les idees, aquest dibuix i el procés o el producte, no? I si potser les dues coses, no? Que vagi posant paraules, inclús pot fer jocs, que és compartir els conceptes a base de paraules. Explica-li, fes un dibuix. Heu sigut periodistes esportius que acabeu de veure un partit Barça-Mallorca i us trobeu a la sala de premsa: “Com el descriviu amb paraules? Com el descriviu amb un dibuix, amb una fotografia, com a reporters gràfics, com a reporters que fan la crònica? Llavòrens, compartim aquestes paraules i

és possible que acabem posant, creant junts un teorema, que serà el nostre teorema. Per exemple: després d'experimentar amb el teorema de Viviani, que ells han anat agafant diversos punts, han agafat amb una fotocòpia que tots tenen el mateix triangle equilàter i han agafat diversos punts i han buscat les tres perpendiculars a cada costat i han buscat la suma de les distàncies i veuen que tot els hi dona igual: "Profe! Quin triangles més virguer!" Li dius: "Ara fes fe-ne un tu. Inventa un triangle i mira si tots els punts et dona igual". Aquest és el procés de la descoberta. Això és igual i al final van socialitzant i després algun pensa que és l'altura. Fem un teorema, el teorema dels de 4t C. "Va!" Un: "Jo posaré la primera paraula o les tres primeres". Tu, posa la següent, per files: "Equilàter!, "Escollim" "un". Cadascú diu una paraula. "Un", "punt", "en", "el seu" "interior" i "mesurem" "les". Llavors hi ha un que et diu: "els costats" i tots: "No, no, no!" Abans has d'haver socialitzat molt el concepte. Han d'haver parlat molt els periodistes sobre el partit. Potser podem formalitzar o demostrar: "Sigui P un punt dins un triangle ABC, siguin x, y i z les distàncies als costats dins un triangle equilàter...", formalitzar i demostrar, si cal. Però una demostració és tan important, que sempre li hem de preparar el camí i això és preparar el camí perquè la demostració vagi bé. Entens el que vull dir? És molt important i llavors, si tu prepares el camí, aquella demostració és molt gran. Però vés preparant el camí. Això són consells o protocols per fer mostracions i demostracions amb materials.

Com és possible, per exemple, que tinguem joves que creguin que les matemàtiques no són per a ells? Això una societat no s'ho pot permetre. És un fracàs. "Algo" hem fet malament. Hi ha una cosa que... aquests passos ajuden molt a fer aquests processos que ajuden demostracions i mostracions i a vegades no se segueixen tots, però es poden tenir en compte i és important, però deixa'm subratllar una cosa, que crec que tu en algun moment ho estaves insinuant.

No n’hi ha prou amb tenir 20-30 activitats amb material. Això pot ser 200 anècdotes, el més interessant és immergir-les totes o les que siguin en una metodologia que doni entitat. 200 propostes són una anècdota, però 20 propostes immergides en una metodologia, com ara lo que dèiem dels consells. Tot això, la filosofia aquesta que els envolta, això ja és molt més. És una metodologia.

Després em demanaves consells i donar consells a una persona que s’inicia és una manera de perviure i és un goig. Per això aquella carta la vaig fer amb tot cor. El currículum ja el tens fet. Ho fas de tot cor, que un li agradaria haver donat i que jo els primers anys no coneixia i que de mica en mica vaig anar aconseguint moltes vegades amb suor, amb alguna llàgrima i amb molt d’esforç i dius: “Si això ho hagués après abans...” L’experiència no es pot substituir, però sí que ens podem donar consells els uns als altres. Apart dels de la carta, jo ja ho dic allà: coneix la matèria, estima la matèria, entusiasma’t amb la matèria. És que l’entusiasme no es pot tindre. A vegades surts de casa amb un problema amb els nanos, un problema del que sigui i arribes a l’institut aclaparat, però intenta entusiasmar-te. Permetre’m que t’ho digui: “Fes teatre”, els 5 primers minuts faràs teatre, la resta hauràs entrat al personatge i ja te sentiràs, ja seràs tu. M’explico el que vull dir?

Però no facis que els alumnes arrastrin els problemes que a vegades tinguis i que tots tenim. Intenta mirar endavant i no et cremis, distancia’t, has de ser respectuós, interessat per l’alumne, has de mostrar interès per l’alumne, jo intentava aprendre’m el primer dia els seus noms, canvia molt si t’aprens el seu nom, quan te’ls creuis pels passadís: “Adéu, Maria! Adéu, Vicenç! Adéu, Josep!”. T’ho agraeixen moltíssim i els alumnes saben com agrair-t’ho i també saben com no agrair-t’ho, és a dir, si tu ho fas, el dia que tu diguis: “Si us plau, calleu!” Aquell dia callen. Jo recordaré sempre un alumne que una vegada, Bueno, era un alumne que no era gaire bo, una vegada va sortir: “Anton, no te esfuerces, que nosotros pasamos de esto!" Venga, sal de classe". "No me expluses, pero pasa, tío!". I jo a partir d'aquell dia, vaig reaccionar com vaig poder, el vaig deixar de saludar pel passadís. A classe era correcte sempre, però no me'l mirava, que les mirades que fas poden ser molt atentes, molt agradables. Jo sempre els alumnes me'ls miro bé. I pel passadís el vaig deixar de saludar. Abans de 10 dies, potser 2 setmanes, me va venir a veure: "Anton, per què no em saludes? Perdó!" T'asseguro que aquest nano no hagués demanat perdó a cap professor. No era un alumne fàcil, m'explico? A partir d'aquell dia el vaig saludar i el vaig tornar a mirar i ell, creu-me que no va tornar a fer res d'aquest tipus, al contrari, t'ajudava. Amb els alumnes sigues respectuós, interessat per ells, però guarda distàncies, és a dir, guarda distàncies, perquè si no, te cremaràs i els alumnes també han de ser ells. Tu en el fons ets el professor. No deixis de ser mai el "profe". Això és molt important. I això també farà que no et cremis i aquell alumne que un dia te respon malament. "Bueno", si pots fer com això que t'he explicat, si pots arribar a construir, construeix. Si no, no et sentis agredit, perquè si et sents agredit personalment, reaccionaràs malament, i així no arribes enlloc. Jo he vist situacions de professors cridant l'alumne a ells i ells a l'alumne. I una vegada arribat aquí, ja no... Comprens?

Has de ser molt, molt pacient i no perdre la racionalitat, guardar distàncies, treballar amb el temps, aconsellar que l'alumne surti, però te dic una cosa, si tu ets respectuós amb l'alumne, el saludes pel seu nom, petits detalls d'aquests... No sé avui, jo no sé quin sant és avui, però si algun alumne es diu Lluís: "Avui era el teu sant, no?" Ja canvia la cosa. Si tu cultives això, te respectaran i sobretot no mostris debilitat en el sentit de dir: "Va, calleu!", no. Si dius "calleu", amb cara de seriós. Em comprens, no? Tot és una qüestió d'equilibri, no ho facis el primer dia, perquè els professors que volen ser molt rigorosos el primer dia acaben que no aguanten la classe, és a dir, però tampoc mostris que ets molt dèbil... i sobretot molt serè.

Jo recordo un alumne que es deia Benjamín, que el van expulsar del centre, tenia problemes amb un professor en concret i el van expulsar, el seu pare el va treure de casa i tenia una situació molt complicada. Ell dormia a una plaça que hi ha a Blanes, que és un poble petit. I llavors aquest mateix professor va expulsar a la seva germana de classe, la germana se'n va anar amb ell i ell va anar volent matar el professor. Jo ho he viscut això. I érem dos profes de Matemàtiques tots dos que el coneixíem anant a darrere seu i ell anava obrint porta a porta: "¿Dónde está Bernat?" M'explico, no? I nosaltres: "Benjamín, va!" Benji, venga, tómatelo bien, que te destrozarás la vida, tómatelo bien!". En Bernat estava sota la taula del cap d'estudis i vam aguantar així fins que van arribar els mossos d'esquadra. El més greu va ser que després va agredir a un mosso d'esquadra i va acabar en judicis, però vull dir... la vida no és fàcil, però també té unes satisfaccions, jo sempre recordaré el cas d'una noia que es deia Yolanda. Li van detectar un càncer a la seva mare, el pare se'n va anar de casa i va fugir, no anava bé, com pots veure... La noia va quedar amb la seva mare, l'única que tenia al seu món. I quan es va morir la mare, va quedar sota la custòdia d'uns oncles. Vivia en el mateix pis que els oncles i on tenia dos cosins que venien a l'institut i anaven tots tres a l'institut, però el professor d'Educació Física va començar a notar que els cosins sempre venien amb bambes d'últim model i ella venia amb unes sabatetes de ballet que li havia comprat la mare i tot això... el tutor va començar a estirar del fil i ella dormia en un sofà, els oncles es volien quedar un pis que li va deixar la mare. Ja tenien preparat per anar al notari. Jo era el coordinador d'aquell curs i el tutor ens ho va comentar a la directiva. El coordinador pedagògic va parlar amb l'assistenta social i l'assistenta social amb el jutjat, el jutge va fer les seves investigacions i tot va arribar a departament de protecció de la infància i de la joventut. Ens van dir que aquesta nina anirà traguent coses del pis i la deixen a l'institut i un dia va venir un cotxe i se'n va emportar la Yolanda amb les seves coses. Nosaltres no vam saber mai més on va anar a parar la Yolanda. M'explico, no? Per què? Perquè no ho diuen, per protegir-la. Va anar als serveis del departament de benestar social o com es digués. Anys després aquesta noia va aparèixer a l'institut i ja era una dona gran i era infermera a l'hospital més gran de Girona. No sé, dius, val la pena, no? Que et trobes amb situacions difícils, sí, però jo encara ara m'emociono quan ho explico això, quan la vaig veure a l'institut. La recordo ja gran. Qui és aquesta noia? La Yolanda. Vull dir, distancia't i pensa que has de fer una funció important, eh? Però que hi ha moments dolents, sí, però que n'hi haurà de molt bons, sí, i que val la pena.

Jo contestant a aquesta pregunta voldria acabar amb un poema, que vaig elaborar una vegada inspirat en una traducció que va fer Maragall d'un poema d'en Goethe: "Si vols ser feliç a la vida". I en Margall té una traducció a català molt maca. Per tant, l'estructura és d'en Goethe i la idea fonamental és d'en Maragall i jo ho vaig substituir per idees didàctiques i ho vaig fer de tot cor preparant una conferència sobre continguts, recursos i emocions i xerrava sobre les emocions:

"Si vols ser feliç ensenyant, no et planyis mai del passat, comença sempre la classe pensant que tot és possible, intenta que cada concepte tengui sentit i emoció, procura que cada moment porti quelcom especial, complau-te amb allò que ensenyes i valora el que l'alumne fa, sigui poc o molt, creu que tothom pot aprendre i deixa que la bella matemàtica faci encara més que tu, ensenya-la bé i la matemàtica captivarà els alumnes..."

9. **Has trobat a faltar alguna pregunta? T'agradaria poder afegir alguna cosa més?**

7.2. Entrevista a Miquel Siquier

1. **Què entens per "matemàgia"? On vas escoltar o llegir aquesta paraula per primera vegada?**

   Per a mi és com durant anys ho vaig utilitzar (no sé si ho havia llegit abans o és paraula meva) quan volia que raonessin i veiés l'alumne/a d'on surten les coses. Si alguna cosa els hi queda, és el pensament crític i analític en pensar en demostracions.

2. **Com podries definir les receptes matemàtiques?**

   Les receptes poden ser útils a la universitat, quan s'ha aprés d'on surten, consider que absurdes a l'ESO i al Batxillerat. Per desgràcia encara s'ensenyen moltes receptes i l'alumnat se les agafa com si haguessin de memoritzar-les, estudiant-les poc temps abans de l'examen. I ja els va bé així.

   Per tant, recepta matemàtica és allò que s'utilitza encara que tinguis ni idea d'on surt, però com funciona...

3. **A quin nivell de rigor o formalisme matemàtic creus que pot arribar en les demostracions matemàtiques en l'etapa d'ESO? Fins quin punt se pot arribar a perdre aquesta rigorositat o formalisme?**

   En arribar a tercer-quart s'haurien de demostrar expressions que ja duen temps utilitzant, com el teorema de Pitàgores o l'equació de segon grau. També hi inclouria deduir les fórmules de les progressions, encara que malauradament aquest tema cada pic s'ensenya menys.

4. **Anton Aubanell introdueix el concepte "mostració" per xerrar d'aquelles demostracions amb material manipulable, és a dir, demostracions amb menys formalisme matemàtic. Quina ha estat la**

teva experiència amb aquest tipus de mostracions? Quines has dut a terme al llarg de la teva experiència?

Jo sempre he fet demostració i després, com a complement, mostració. Alguns exemples són: el teorema de Pitàgores a l'ESO, els teoremes de Bolzano, Rolle, Lagrange al Batxillerat i el de Taylor a la ja extinta COU.

5. **Quines demostracions més formals creus que és més probable que l'alumnat pugui entendre a l'ESO? I quines mostracions consideres que són adequades? Em pots posar alguns exemples?**

   Les demostracions per a les fórmules de les progressions, les equacions de segon grau i l'aplicació de fórmules d'àrees i volums sense fórmules.

6. **Has tingut algunes persones referents en l'àmbit de la didàctica de les matemàtiques?**

   No, però som matemàtic per un professor que vaig tenir a 3r de BUP i COU, qui es deia ALEJANDRO ONSALO ORFILA.

   A tots els meus alumnes, cada any, el mencionava perquè, encara que fa molts anys que morí, d'aquesta forma li reconeixia que amb ell vaig aprendre a raonar les matemàtiques.

7. **Quins blocs de l'assignatura de Matemàtiques consideres que són més adequats per poder fer demostracions? I per fer-ne mostracions?**

   En un batxillerat tecnològic l'alumnat ha d'aprendre a demostrar els teoremes. Per tant, s'han d'ensenyar. En un batxillerat científic basten les mostracions d'aquests teoremes.

8. **Creus que s'han d'anar introduint les demostracions i mostracions de manera progressiva? O hi ha algun curs en el qual convé ja introduir un cert grau de rigorositat?**

   A 3r d'ESO ja han de començar a tenir certa rigorositat els que fan les Matemàtiques acadèmiques.

9. **Consideres que hi ha algun tipus de guió a l'hora de demostrar i mostrar per a un professor novell, qui s'està iniciant en l'apassionant món de l'ensenyament de les matemàtiques? Quins consells em podries donar?**

   Un professor novell ha de partir de la base que davant d'ell no té alumnes curts, o sigui, que són molt capaços. Per tant, consider que el docent ha de provar rigorositat.

   El problema és que rep alumnes amb un determinat model d'aprenentatge marcat pel departament, que pot haver decidit que no hi hagi ni demostracions ni mostracions. Des del meu punt de vista, això hauria de ser inconcebible a Batxillerat (tecnològic o científic), però així és.

   Crec que s'ha de pujar el nivell quant a la preparació de l'alumnat per als estudis universitaris.

10. **Has trobat a faltar alguna pregunta? T'agradaria poder afegir alguna cosa més?**

    Donen per llargues converses aquestes preguntes i he intentat ser sincer amb el que pens. Potser que altres docents no estiguin d'acord, però aquesta és la meva experiència després d'anys de docència.