



**Universitat**  
de les Illes Balears

## **TRABAJO FIN DE GRADO**

# **EMERGENCIA DEL COMPORTAMIENTO COLECTIVO EN PARTÍCULAS AUTOPROPULSADAS: EL MODELO DE VICSEK.**

**ANA MAYA SEVILLA**

**Grado de Física**

**Facultad de Ciencias**

**Año Académico 2022-23**



# EMERGENCIA DEL COMPORTAMIENTO COLECTIVO EN PARTÍCULAS AUTOPROPULSADAS: EL MODELO DE VICSEK.

**ANA MAYA SEVILLA**

**Trabajo de Fin de Grado**

**Facultad de Ciencias**

**Universidad de las Illes Balears**

**Año Académico 2022-23**

Palabras clave del trabajo:

Fenómenos críticos, Transición de fase, movimiento colectivo

*Nombre Tutor/Tutora del Trabajo Tomás M. Sintés Olives*

*Nombre Tutor/Tutora (si procede)*

Se autoriza la Universidad a incluir este trabajo en el Repositorio Institucional para su consulta en acceso abierto y difusión en línea, con fines exclusivamente académicos y de investigación

Autor		Tutor	
Sí	No	Sí	No
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



## Resum

En aquest treball estudiem l'emergència del comportament col·lectiu en un conjunt de partícules actives autopropulsades que es mouen i interaccionen entre si en funció de la seva densitat i la intensitat de ruidu intrínsec. Es caracteritzarà la transició entre la fase ordenada, en què tots els individus s'alineen, i la desordenada. S'analitzarà l'ordre de la transició i es determinaran els exponents crítics. Els resultats aquí obtinguts es compararan amb els de T. Vicsek et al. [Phys. Rev. Lett., 75 (6), 1226 (1995)], i s'estudiarà com varien amb l'abast de la interacció.

## Resumen

En este trabajo estudiamos la emergencia del comportamiento colectivo en un conjunto de partículas activas autopropulsadas que se mueven e interaccionan entre sí en función de su densidad y la intensidad de ruido intrínseco. Se caracterizará la transición entre la fase ordenada, en la que todos los individuos se alinean, y la desordenada. Se analizará el orden de la transición y se determinarán sus exponentes críticos. Los resultados aquí obtenidos se compararán con los de T. Vicsek et al. [Phys. Rev. Lett., 75 (6), 1226 (1995)], y se estudiará cómo dependen del alcance de la interacción.

## Abstract

In this work we study the emergence of collective behavior in a set of self-propelled active particles that move and interact with each other depending on their density and the intensity of intrinsic noise. The transition between the ordered phase, in which all the individuals align, and the disordered one will be characterized. The order of the transition is analyzed and its critical exponents are determined. The results obtained in this study will be compared with those of T. Vicsek et al. [Phys. Rev. Lett., 75 (6), 1226 (1995)], and it will be studied how the results depend on the range of the interaction.

# Índice

<b>1. Objetivo</b>	<b>7</b>
<b>2. Introducción</b>	<b>7</b>
<b>3. El modelo de Vicsek</b>	<b>9</b>
<b>4. Resultados y discusión</b>	<b>10</b>
4.1. Resultados para un radio de interacción $R = 1$ . . . . .	10
4.1.1. Obtención de $\eta_c$ . . . . .	12
4.1.2. Obtención de $\rho_c$ . . . . .	12
4.1.3. Obtención de los exponentes críticos . . . . .	13
4.2. Resultados para un radio de interacción $R = 2$ . . . . .	14
4.2.1. Obtención de $\eta_c$ . . . . .	15
4.2.2. Obtención de $\rho_c(\eta)$ . . . . .	15
4.2.3. Obtención de los exponentes críticos . . . . .	16
<b>5. Conclusiones</b>	<b>17</b>

# 1. Objetivo

En este trabajo se estudiará, mediante el desarrollo de modelos numéricos, la emergencia del comportamiento colectivo de un conjunto de partículas que se mueven e interaccionan entre sí, con la finalidad de entender y cuantificar la influencia de algunos parámetros sobre las propiedades globales del sistema. Estos modelos, aun siendo extraordinariamente sencillos, contienen los elementos básicos para reproducir el comportamiento de macroscópico de partículas activas autopropulsadas, sus diferentes estados y caracterizar la transición entre ellos. El objetivo principal de este trabajo consistirá en reproducir los resultados pioneros en este campo de T. Vicsek et al. [Phys. Rev. Lett., 75 (6), 1226 (1995)], a la vez que se analiza la variación de los resultados obtenidos para diferentes radios de interacción.

# 2. Introducción

El movimiento colectivo como el observado en bancos de peces, enjambres de insectos o bandadas de pájaros, en el que cientos de organismos se mueven conjuntamente sin la presencia de un líder, es uno de los ejemplos más espectaculares de organización a gran escala observado en la naturaleza.

Desde el punto de vista físico, ha habido un gran interés por determinar y entender los principios que gobiernan la emergencia de un orden colectivo en estos sistemas, en los que las interacciones entre individuos se presuponen de corto alcance. Desde el trabajo pionero de Vicsek et al. [1], se han propuesto diversos modelos para entender estos principios, pero ninguno de ellos ha sido determinante, en parte porque estos sistemas se hallan fuera de equilibrio, lo que hace que las técnicas y teoremas estadísticos, que funcionan bien para grandes sistemas en equilibrio, no funcionen para explicar la emergencia del comportamiento colectivo de partículas activas autopropulsadas[2].

Para modelizar este tipo de sistemas, la primera dificultad se halla en la fijación del tamaño del sistema. Si observamos la naturaleza, el tamaño de ésta es lo suficientemente grande como para que, a un número de partículas dado, la densidad del sistema sea cero (límite de dilución infinita). En estas circunstancias, no es esperable observar la emergencia de un comportamiento colectivo. Por otra parte, es deseable trabajar con un tamaño de sistema ( $L$ ) suficientemente grande para reducir los efectos de tamaño finito. Para sortear este problema se propuso introducir unas fuerzas de cohesión de largo alcance. Del mismo modo, para evitar que más de un individuo coincida en el mismo punto del espacio, se implementa una interacción repulsiva de corto alcance, ya sea con un potencial del tipo esfera dura (útil en simulaciones Monte-Carlo) o un potencial de Lennard-Jones truncado (en simulaciones de dinámica molecular). De esta manera se consigue que las partículas o individuos que conforman el sistema se encuentren a una distancia lo suficientemente cercana para que puedan interactuar entre sí, sin solaparse.

Una forma de integrar ambas interacciones fue propuesta por Grégoire y Chaté[3] donde las partículas  $i$  y  $j$ , separadas una distancia  $r_{ij}$ , están sometidas a una fuerza de interacción dada por la expresión:

$$f_{ij} = \begin{cases} -\infty & \text{si } r_{ij} \leq r_c \\ \frac{1}{4} \frac{r_{ij} - r_e}{r_a - r_e} & \text{si } r_c < r_{ij} < r_a \\ 1 & \text{si } r_a < r_{ij} < r_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Esta fuerza es repulsiva hasta una distancia intermedia  $r_e$ , incluye una interacción de esfera dura para  $r < r_c$  y es atractiva hasta un valor  $r_o$ . Los valores orientativos de los parámetros escogidos en su trabajo fueron:  $r_c = 0,2$ ,  $r_e = 0,5$  y  $r_a = 0,8$ .

No obstante, podemos prescindir de todo tipo de interacción fijando una densidad  $\rho = N/L^2$  (en un sistema bidimensional), suficientemente grande, siendo  $L$  el tamaño del sistema y  $N$  el número de individuos. Se imponen condiciones de contorno periódicas y se puede hacer un análisis de los efectos de tamaño finito variando a la par los valores de  $L$  y de  $N$ . Esta fue la propuesta realizada por Vicsek[1] y es, sin duda, el modelo más sencillo posible en el que las partículas son consideradas ideales. En su modelo, en cada paso de tiempo, cada individuo se mueve de acuerdo con la orientación media de sus vecinos, a la que se añade una cierta perturbación o ruido. De este modo, cada partícula sigue a sus vecinos, pero esta partícula se puede 'equivocar' al evaluar la dirección del movimiento. Podemos diferenciar dos tipos de ruido: el extrínseco y el intrínseco. El extrínseco es debido a la incertidumbre asociada a la comunicación entre partículas, por ejemplo, en un entorno de visibilidad reducida. El ruido intrínseco está relacionado con la toma de decisiones de cada partícula. Un ejemplo podría ser que una partícula decidiera activamente no seguir a la perfección a sus vecinos. En el modelo de Vicsek [1] se utiliza una fuente de ruido intrínseco. En su trabajo se demuestra que, al disminuir la amplitud del ruido, todas las partículas del sistema están en una fase ordenada, donde todas se mueven en la misma dirección. En cambio, cuando la amplitud del ruido se incrementa, las partículas o individuos acaban moviéndose en direcciones aleatorias, estando entonces en una fase desordenada. Esto evidencia la existencia de un cambio de fase que, según los resultados obtenidos, se corresponde con una transición de fase continua: el parámetro de orden cambia continuamente, las fluctuaciones del parámetro de orden divergen en el punto de la transición y el parámetro de orden obedece a una ley de potencia en el entorno del punto de transición, al igual que sucede con la magnetización en el modelo de Ising. No obstante, el orden de la transición sigue siendo un tema de debate. En el modelo de Grégoire y Chaté[3], para densidades más altas, tanto para ruidos intrínsecos como extrínsecos, la transición de fase parece ser de primer orden. Además, en función de la intensidad de la fuerza de cohesión, pueden aparecer nuevas fases que se asemejan a distintos estados de la materia: sólido inmóvil, cristal en movimiento, gota de fluido, gota en movimiento [4].

Un avance importante en la investigación sobre el movimiento de bandadas de pájaros tuvo lugar recientemente gracias a una secuencia de experimentos realizados en Roma observando el movimiento de los estorninos y especialmente, las interacciones entre los vecinos dentro del grupo. Esta ambiciosa empresa, conocida como el proyecto *StarFlag*<sup>1</sup>, proporcionó nuevos hallazgos e ideas para su implementación en los modelos. Uno de los resultados más importantes fue que cada ave interactúa con un máximo de 6 o 7 vecinos, independientemente de la distancia mutua entre las aves. Los investigadores llamaron a este tipo de interacción *topológica* en contraposición a los modelos *métricos*, como el de Vicsek, en los que la interacción se limita a una determinada distancia espacial fijada previamente. Uno de los resultados más relevantes de los modelos topológicos fue que para un número de individuos pequeño ( $N \sim 40$ ) se obtenían resultados parecidos al modelo de Vicsek, pero el comportamiento del sistema cambiaba radicalmente al aumentar  $N$ : la curva descrita por el parámetro de orden deja de ser cóncava y se vuelve convexa [5]. Este resultado sugiere que el parámetro de orden debe presentar una discontinuidad en el límite  $N \rightarrow \infty$ , y que la transición debe ser de primer orden. Otros modelos más elaborados incorporan el campo de visión de las aves, dividido en tres áreas principales: la binocular, la monocular y la zona de visión nula. De este modo, los individuos interactúan con un número fijo de vecinos pero con un peso estadístico que está en función del rango visual en el que se encuentren. En este caso el resultado sugiere que la transición puede ser de primer orden si bien la variación del parámetro de orden es menos abrupta [5].

El propósito de este Trabajo de Fin de Grado es el de reproducir los resultados del trabajo de Vicsek[1] a la vez que se analiza cómo dependen los resultados obtenidos con el rango de interacción. En la sección 3 se describe la formulación básica del modelo de Vicsek y en la sección 4 se presentan y discuten los resultados.

---

<sup>1</sup><https://cordis.europa.eu/project/id/12682>

### 3. El modelo de Vicsek

El modelo introducido por T. Vicsek et al. en 1995[1], describe un sistema formado por  $N$  partículas puntuales que se mueven sobre una superficie cuadrada de tamaño  $L \times L$  con condiciones de contorno periódicas. La densidad del sistema se define por  $\rho = N/L^2$ . Las partículas se desplazan de forma continua (off lattice) sobre esta superficie según las ecuaciones básicas de movimiento asumiendo que no actúa sobre ellas ninguna fuerza:

$$\vec{x}_i(t+1) = \vec{x}_i(t) + \vec{v}_i(t)\Delta t \quad (3.1)$$

donde la velocidad de cada partícula puede escribirse como:

$$\vec{v}_i(t) = v_0 e^{i\theta_i(t)} \quad (3.2)$$

y la dirección de movimiento viene dado por el ángulo  $\theta_i(t)$ . En el siguiente paso de tiempo, la nueva velocidad  $\vec{v}_i(t+1)$  conserva su módulo  $v_0$  mientras que la nueva dirección de movimiento se construye como:

$$\theta(t+1) = \langle \theta(t) \rangle_r + \Delta\theta \quad (3.3)$$

donde  $\langle \theta(t) \rangle_r$  es el promedio de la dirección de movimiento de todos las partículas (incluida la partícula  $i$ ) en un radio  $r$  alrededor de la partícula  $i$ . Esta dirección promedio se calcula como:

$$\langle \theta(t) \rangle_r = \arctan \left[ \frac{\langle \sin(\theta(t)) \rangle_r}{\langle \cos(\theta(t)) \rangle_r} \right] \quad (3.4)$$

En la ecuación (3.3) se incluye una perturbación (intrínseca),  $\Delta\theta$ , a la que se asigna un valor aleatorio distribuido uniformemente en el intervalo  $[-\eta/2, \eta/2]$ , siendo  $\eta$  la intensidad del ruido.

Esta formulación tiene las características siguientes:

- Los individuos son idénticos e ideales.
- Todos se mueven con una velocidad absoluta constante  $v_0$  y son capaces de cambiar su dirección de movimiento.
- Interactúan entre sí dentro de un rango específico  $r$ .
- Están sujetas a un ruido de amplitud variable.
- El momento lineal no se conserva.

De este manera, para un tamaño del sistema fijado  $L$ , los parámetros libres que quedan son: la densidad ( $\rho$ ), la intensidad del ruido ( $\eta$ ) y el módulo de la velocidad ( $v_0$ ). En el límite  $v_0 \rightarrow 0$  las partículas no se mueven y el modelo es análogo al modelo XY. En cambio, en el límite  $v_0 \rightarrow \infty$ , las partículas se mezclan completamente y se tiene un comportamiento análogo al de un ferromagneto. Según [1] el rango de velocidades que nos permiten representar bien este modelo es  $0,003 < v_0 < 0,3$ . El comportamiento del sistema para distintos valores de densidad e intensidad de ruido pueden verse en la figura 1.

Puede observarse que para densidades y ruidos bajos las partículas forman pequeños grupos coherentes moviéndose en direcciones aleatorias (Fig1b). Al incrementar el ruido tiende a desaparecer el orden en el sistema (Fig1c), y para ruidos bajos y densidades suficientemente grandes todas las partículas se alinean muy rápido y se mueven todas en la misma dirección tras muy pocos pasos de tiempo (Fig1d).

Para caracterizar el cambio de fase entre el movimiento ordenado y desordenado, debemos definir un parámetro que nos dé la medida el grado de orden del sistema. Cabe recordar que las transiciones de fase usualmente implican un cambio abrupto en las propiedades de simetría del sistema. Acorde a esto, el parámetro de orden se refiere al grado de simetría que caracteriza una fase. Típicamente, este valor es cero en la fase desordenada (todas las partículas se mueven de forma aleatoria) y diferente de cero en la fase ordenada (se empieza a

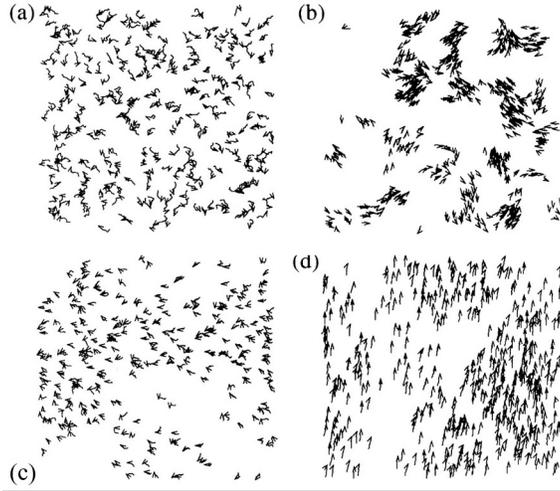


Figura 1: (a) Condición inicial,  $t = 0$  para  $L = 7$  y  $\eta = 2,0$ . (b) Resultado para  $L = 25, \eta = 0,1$ . (c)  $L = 7, \eta = 2,0$ . (d)  $L = 5, \eta = 0,1$ . En todos los casos el número de partículas es  $N = 300$ . Figura reproducida del artículo de Vicsek et al. [1].

observar cierto orden en el movimiento). En nuestro caso, para caracterizar la emergencia del movimiento colectivo se define el parámetro de orden ( $v_a$ ) como velocidad media normalizada:

$$v_a = \frac{1}{Nv_0} \left| \sum \vec{v}_i \right| \quad (3.5)$$

donde  $N$  es el número total de partículas del sistema y  $v_0$  es el módulo de la velocidad que tienen en común todas las partículas. Cuando el movimiento es desordenado, todas las velocidades de las partículas apuntan en direcciones aleatorias, lo que hace que el sumatorio sobre todas estas sea prácticamente cero,  $v_a \rightarrow 0$ . En cambio, cuando el movimiento es ordenado y todas las velocidades apuntan en la misma dirección, el sumatorio de las velocidades alcanza el valor de  $Nv_0$ , lo que implica que el parámetro de orden toma el valor  $v_a = 1$ . El orden de la transición puede determinarse observando cómo cambia el parámetro de orden. Si el cambio se hace de una manera discontinua, estaremos hablando de una transición de fase de primer orden. Un ejemplo de este tipo de transición es la congelación del agua: cuando el agua pasa de estado líquido a sólido aumenta drásticamente su volumen. En contraste, las transiciones de segundo orden son aquellas en las que el parámetro de orden cambia continuamente y suele estar acompañada de grandes fluctuaciones en algunas variables macroscópicas del sistema.

## 4. Resultados y discusión

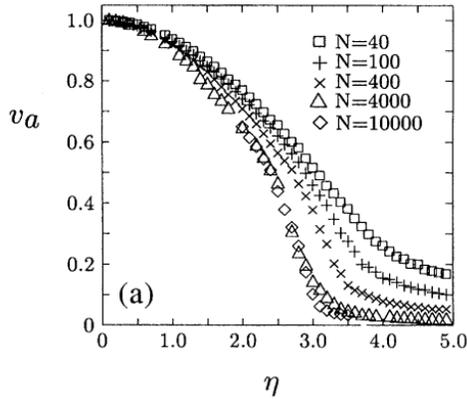
### 4.1. Resultados para un radio de interacción $R = 1$

Para simular numéricamente el modelo se han tomado los mismos valores que en el trabajo original de Vicsek et al. [1]. Se considera una superficie cuadrada de dimensión  $L \times L$  con condiciones de contorno periódicas. El valor del radio de interacción se ha fijado en  $R = 1$  y se ha tomado un paso de tiempo  $\Delta t = 1$ . Como condición inicial ( $t = 0$ ) se disponen  $N$  partículas distribuidas aleatoriamente con velocidad constante en módulo,  $v_0$ , y orientada aleatoriamente dentro del intervalo  $\theta_i \in [0, 2\pi]$ .

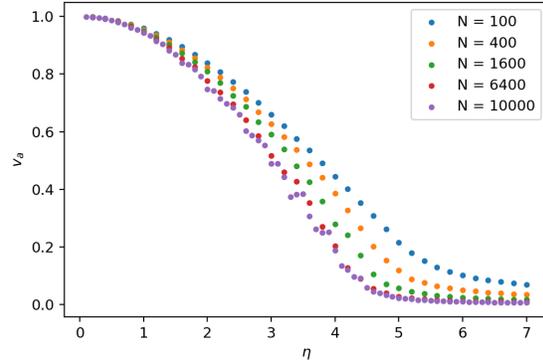
Se analiza el comportamiento del parámetro de orden en dos casos. En el primero de ellos se fija la densidad de individuos al valor  $\rho = 4$  siendo variable la amplitud del ruido. Los efectos de tamaño finito se analizan tomando distintos valores para el número de individuos y variando, de forma consistente, el tamaño del

sistema  $L$ . En la figura 2a se reproducen los resultados de Vicsek et al. [1] y en la figura 2b los resultados obtenidos en este trabajo.

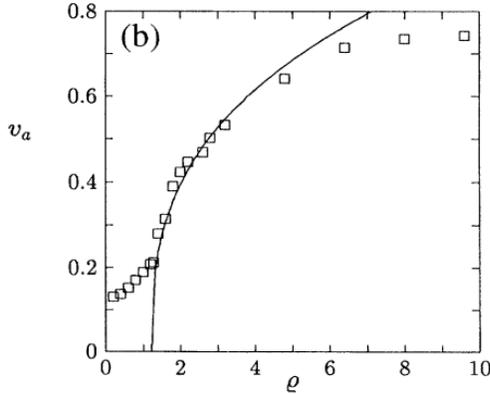
En el segundo caso, se fija la amplitud del ruido ( $\eta = 2$  en el trabajo de Vicsek et al. [1]) y el tamaño del sistema ( $L = 20$ ), y se investiga la evolución del parámetro de orden con la densidad de individuos. Los resultados del trabajo original (Fig.2c) se comparan con los obtenidos en este trabajo, en el que se han considerado, además, distintas amplitudes de la intensidad de ruido ( $\eta = 2; 3; 4$ ) (Fig.2d)



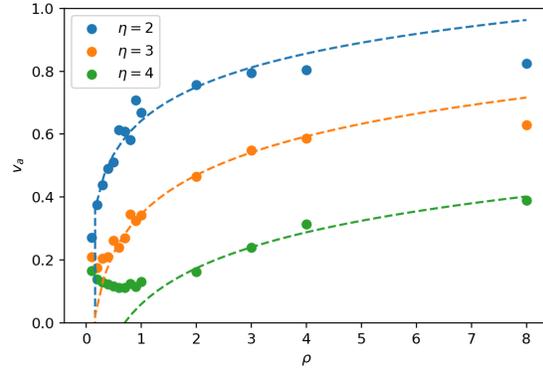
(a) Representación del parámetro de orden  $v_a$  en función de la intensidad del ruido  $\eta$  según [1].



(b) Resultados obtenidos en este trabajo al representar el parámetro de orden  $v_a$  en función de la intensidad del ruido  $\eta$  utilizando los mismos valores que [1].



(c) Representación del parámetro de orden  $v_a$  en función de la densidad  $\rho$  para un valor de la intensidad de ruido  $\eta = 2$ .



(d) Representación del parámetro de orden  $v_a$  en función de la densidad  $\rho$  para tres valores de la intensidad del ruido ( $\eta = 2, 3, 4$ ).

Figura 2: Comparación de los resultados obtenidos en este trabajo con los del trabajo original de Vicsek et al.[1]

Como podemos observar en las figuras 2a y 2b, el parámetro de orden sigue la tendencia que esperábamos. Para valores del ruido pequeño, todas las partículas se alinean con facilidad y esto se traduce en una magnitud del parámetro de orden  $v_a \rightarrow 1$ . En cambio, para valores del ruido altos, las partículas se desplazan en direcciones aleatorias y el parámetro de orden tiende a cero. No obstante, si miramos en detalle estas dos figuras, el valor crítico de la intensidad del ruido,  $\eta_c$  (valor en el que tiene lugar la transición de fase en un sistema de tamaño infinito ( $L \rightarrow \infty$ )) no coinciden entre sí, obteniéndose en este trabajo un valor ligeramente mayor. Como veremos más adelante, el origen de esta discrepancia puede atribuirse a diferencias en la parametrización de la intensidad del ruido o en el cálculo de la distancia entre individuos.

El comportamiento del parámetro de orden con la densidad reproduce el comportamiento esperado ( $\eta = 2$ ) y observamos como éste disminuye a medida que se incrementa la intensidad de ruido.

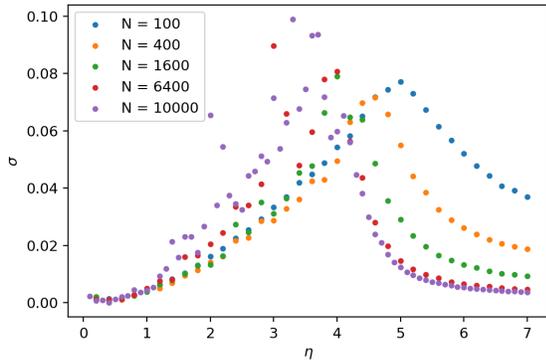
En el límite termodinámico, este modelo presenta una transición de fase cinética análoga a la transición de fase continua que se observa en los sistemas en equilibrio y el parámetro de orden obedece a una ley de potencia cerca del punto crítico:

$$v_a \sim [\eta_c(L) - \eta]^\beta, v_a \sim [\rho - \rho_c(\eta)]^\delta \quad (4.1)$$

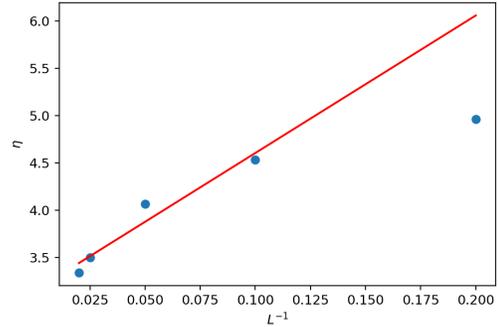
Donde  $\beta$  y  $\delta$  son los exponentes críticos y  $\eta_c(L)$  y  $\rho_c(\eta)$  son el ruido y la densidad críticos, respectivamente.

#### 4.1.1. Obtención de $\eta_c$

Para determinar la posición de la intensidad de ruido crítica ( $\eta_c(L)$ ) se han calculado las fluctuaciones del parámetro de orden (desviación estándar) para los distintos tamaños de sistema. Los resultados se representan en la figura 3a. El valor de  $\eta_c(L)$  se ha obtenido determinando la posición del máximo de cada curva. Para la obtención de este valor se ha realizado un ajuste parabólico ( $f(x, L) = ax^2 + bx + c$ ) alrededor del punto máximo, y se ha tomado para  $\eta_c(L)$  el valor  $-\frac{b}{2a}$ . Puede observarse como la posición del máximo se desplaza a valores más pequeños de la intensidad del ruido  $\eta$  a medida que se incrementa el tamaño del sistema. Para obtener el valor de  $\eta_c$  en el límite termodinámico ( $L \rightarrow \infty$ ), representamos  $\eta_c(L)$  en función de  $1/L$  y calculamos el punto de corte con el eje de ordenadas del ajuste lineal de estos puntos (figura 3b). El valor obtenido es:  $\eta_c = 3,15 \pm 0,15$ . Este resultado es ligeramente superior al obtenido en Vicsek et al. [1] ( $\eta_c = 2,9 \pm 0,05$ ).



(a) Representación de la desviación estándar del parámetro de orden para cada serie de datos en función de la intensidad del ruido.



(b) Representación de los máximos de la desviación estándar de cada serie de datos en función de la inversa de la longitud del sistema  $L^{-1}$

Figura 3: Obtención del exponente crítico  $\eta_c$

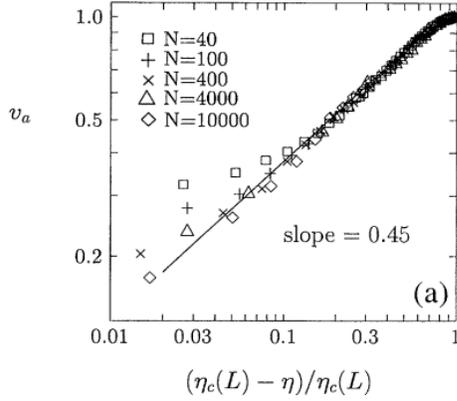
#### 4.1.2. Obtención de $\rho_c$

Para determinar la densidad crítica de nuestro sistema,  $\rho_c$ , analizamos la dependencia del parámetro de orden,  $v_a(\rho)$ , en función de la densidad (a una intensidad de ruido fija). Nuestros resultados muestran como el parámetro de orden decrece monótonicamente a medida que se reduce la densidad de individuos (véase figura 2d). Este resultado es esperable en tanto que, a menor número de individuos, y para valores de ruido

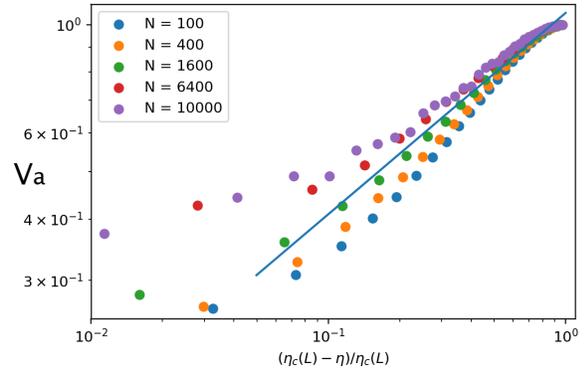
$\eta < \eta_c(L)$ , es probable que se formen grupos aislados de individuos que se desplazan en direcciones aleatorias, limitándose el orden a los individuos del propio grupo. Como consecuencia se obtiene un valor menor para el parámetro de orden. Por otra parte, para densidades suficientemente grandes, todos los individuos aparecen conectados entre sí (de manera similar a los sistemas percolantes), obteniéndose un valor máximo para  $v_a$  que dependerá de la intensidad del ruido. Para densidades suficientemente pequeñas, se obtienen valores del parámetro de orden  $v_a < 0,2$ . Nótese que en el caso límite  $N = 1$ ,  $v_a = 1$  independientemente del ruido (aunque en este caso carece de sentido hablar de movimiento colectivo). Para determinar el valor crítico de la densidad  $\rho_c(\eta)$ , ajustamos los datos de la simulación dentro de un intervalo de valores de densidad y calculamos el punto de corte con el eje de abscisas. Para ello se ha realizado un ajuste de tres parámetros del tipo:  $v_a = A + B\rho^C$ , siendo  $\rho_c(\eta) = (-\frac{A}{B})^{1/C}$ . En la figura 2d se muestran los ajustes para las series de datos correspondientes a  $\eta = 2, 3, 4$ .

Una vez hemos obtenidos los valores críticos de densidad y ruido:  $\eta_c(L)$  y  $\rho_c(\eta)$ , podemos proceder a determinar el valor de los exponentes críticos:  $\beta, \delta$  (eq. 4.1).

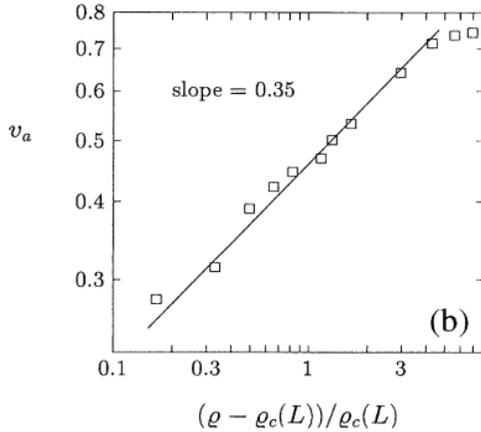
#### 4.1.3. Obtención de los exponentes críticos



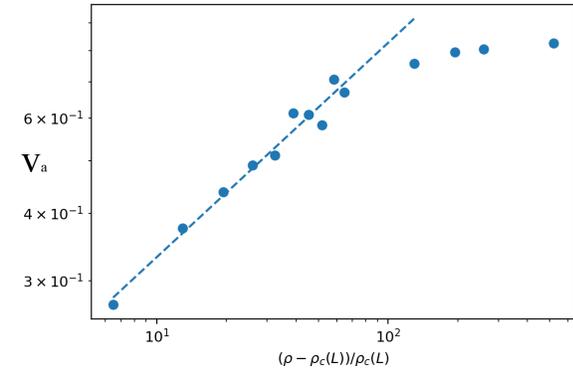
(a) Exponente crítico  $\beta$  obtenido en Vicsek et al. [1]:  $\beta = 0,45 \pm 0,07$



(b) Cálculo del exponente crítico obtenido a partir de los datos de nuestra simulación:  $\beta = 0,41 \pm 0,03$



(c) Cálculo del exponente crítico  $\delta$  obtenido en Vicsek et al. [1]:  $\delta = 0,35 \pm 0,06$



(d) Cálculo del exponente crítico  $\delta$  a partir de los datos de nuestra simulación:  $\delta = 0,39 \pm 0,02$

Figura 4: Comparativa entre el valor de los exponentes críticos obtenidos en este trabajo y los derivados de Vicsek et al. [1]

En la figura 4 representamos en escala  $\log - \log$  el parámetro de orden en función de la distancia al punto crítico. La pendiente del ajuste lineal de estos datos nos proporciona el valor del exponente crítico. Nuestros resultados se comparan razonablemente bien (dentro del intervalo de error) con los obtenidos por Vicsek et al. [1]. Adicionalmente se ha estudiado el comportamiento de  $\rho_c(\eta)$  para ruidos  $\eta = 3, 4$ . Los resultados se muestran en la figura 5. No se observan cambios significativos para  $\eta = 3$  y si un aumento del valor de  $\delta$  para  $\eta = 4$ . Se considera necesario disponer de mejores datos estadísticos.

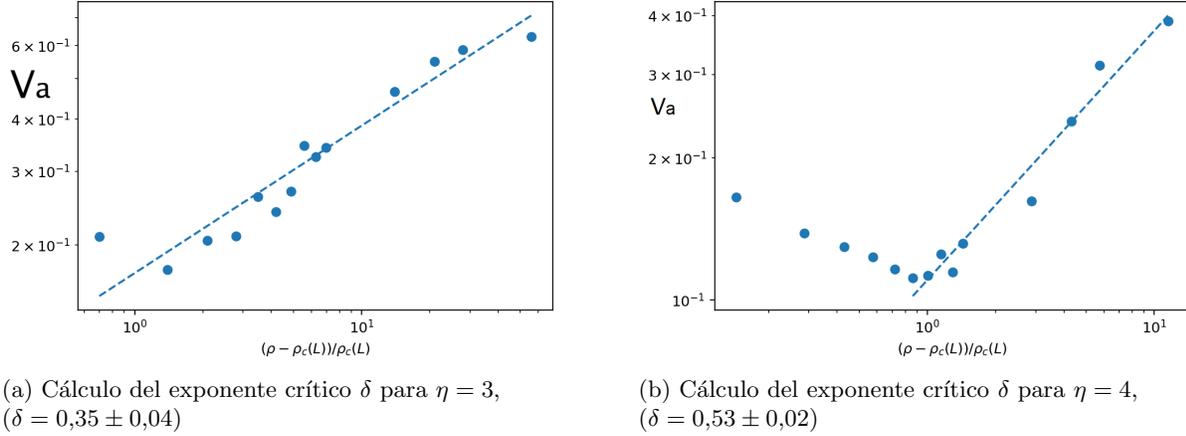


Figura 5: Cálculo del exponente crítico  $\delta$  para intensidades de ruido  $\eta = 3, 4$

## 4.2. Resultados para un radio de interacción $R = 2$

En esta sección se analiza la dependencia de los resultados obtenidos previamente con el radio de interacción. Se considera el caso  $R = 2$ .

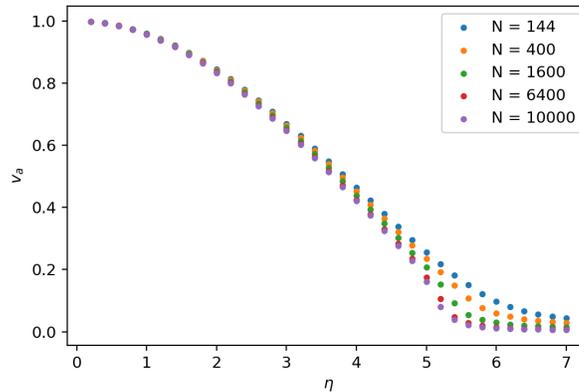


Figura 6: Representación del parámetro de orden  $v_a$  en función de la intensidad del ruido  $\eta$  para  $R = 2$ .

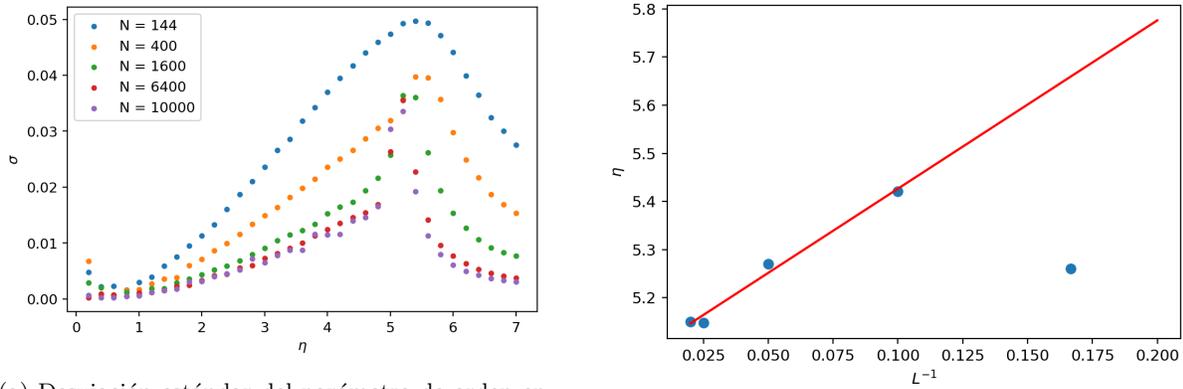
En la figura 6 se representa el parámetro de orden en función de la intensidad de ruido  $\eta$ . Como en el caso  $R = 1$ , la densidad de individuos se mantiene constante en  $\rho = N/L^2 = 4$  y se han considerado diversos tamaños de sistema. En comparación con los resultados para  $R = 1$  (figura 2b), se observa que

el punto de la transición de fase aparece para valores mayores del ruido. Este resultado es esperable por cuanto al incrementar el radio de interacción es mucho más fácil que las partículas se alineen y se requiere de intensidades del ruido mayores para producir desorden en el sistema. Gracias a la presencia de un mayor número de partículas en interacción, se observa una mejoría en los datos estadísticos.

En las siguientes secciones se obtienen los valores de densidad y ruido críticos así como sus exponentes.

#### 4.2.1. Obtención de $\eta_c$

Siguiendo el procedimiento explicado en la sección 4.1.1, en la figura 7 representamos la desviación estándar del parámetro de orden en función de la intensidad del ruido (Fig7a) y analizamos el comportamiento de  $\eta_c(L)$  en el límite  $L \rightarrow \infty$  (Fig7b). Se obtiene un valor de  $\eta_c = 5,08 \pm 0,02$ . Como anticipábamos, este valor es considerablemente mayor que el obtenido en el caso  $R = 1$  ( $\eta_c = 3,15 \pm 0,15$ ).



(a) Desviación estándar del parámetro de orden en función de la intensidad del ruido para distintos tamaños del sistema.

(b) Valores máximos de la desviación estándar del parámetro de orden en función de  $L^{-1}$ .

Figura 7: Análisis de los valores de  $\eta_c(L)$  para un radio de interacción  $R = 2$

#### 4.2.2. Obtención de $\rho_c(\eta)$

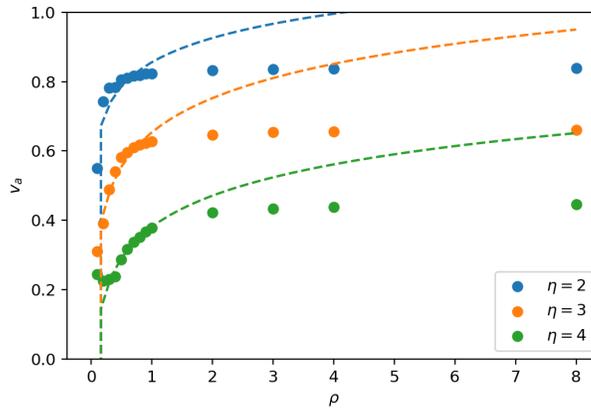
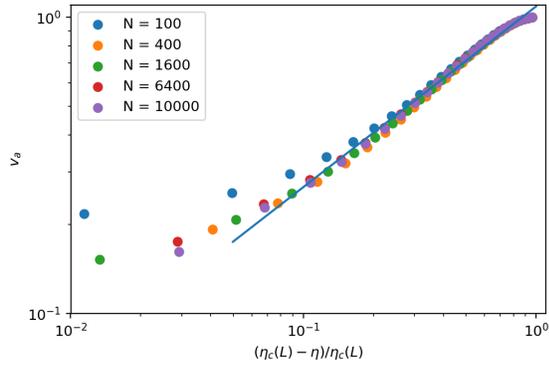


Figura 8: Representación del parámetro de orden  $v_a$  en función de la densidad  $\rho$

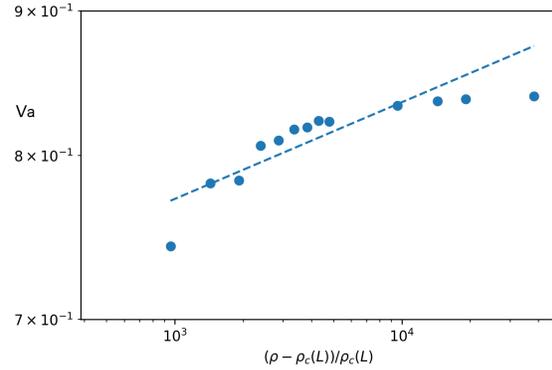
De manera análoga a lo explicado en la sección 4.1.2, se obtiene el valor crítico de la densidad en función de la intensidad de ruido,  $\rho_c(\eta)$ . Al igual que en el caso  $R = 1$  se han considerado tres intensidades de ruido diferentes ( $\eta = 2, 3, 4$ ). Los resultados se muestran en la figura 8. A diferencia del caso  $R = 1$  se observa una escasa variabilidad en el valor obtenido para  $\rho_c$ .

### 4.2.3. Obtención de los exponentes críticos

Con los valores  $\eta_c(L)$  y  $\rho_c(\eta)$  obtenidos previamente, determinamos el valor de los exponentes críticos:  $\beta$ ,  $\delta$ , al igual que en la sección 4.1.3. Los resultados se muestran en las figuras 9 y 10.



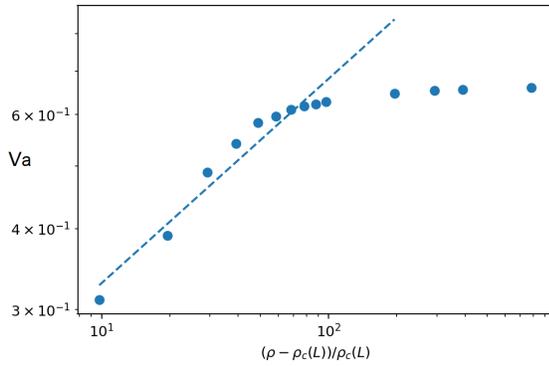
(a) Cálculo del exponente crítico  $\beta$  a partir de los datos de nuestra simulación. ( $\beta = 0,61 \pm 0,01$ ).



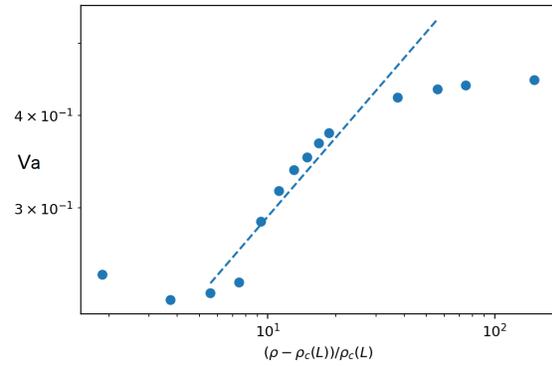
(b) Cálculo del exponente crítico  $\delta(\eta = 2)$  ( $\delta = 0,34 \pm 0,01$ )

Figura 9: Exponentes críticos  $\beta$  y  $\delta(\eta = 2)$  para un radio de interacción  $R = 2$

El exponente crítico  $\delta$  para los casos  $\eta = 3, 4$ , se muestran en la figura 10.



(a) Cálculo del exponente crítico  $\delta$  para  $\eta = 3$  ( $\delta = 0,32 \pm 0,03$ )



(b) Cálculo del exponente crítico  $\delta$  para  $\eta = 4$ . ( $\delta = 0,36 \pm 0,04$ )

Figura 10: Exponente crítico  $\delta$  para un radio de interacción  $R = 2$  en los casos  $\eta = 3, 4$

En la tabla 1 se resumen los valores obtenidos para los exponentes críticos:

R	$\beta$	$\delta(\eta = 2)$	$\delta(\eta = 3)$	$\delta(\eta = 4)$
1	$0,41 \pm 0,03$	$0,39 \pm 0,02$	$0,35 \pm 0,04$	$0,53 \pm 0,02$
2	$0,61 \pm 0,01$	$0,34 \pm 0,01$	$0,32 \pm 0,03$	$0,36 \pm 0,04$

Cuadro 1: Resumen de los exponentes críticos obtenidos

## 5. Conclusiones

En este trabajo se ha analizado la emergencia del comportamiento colectivo en un conjunto de partículas activas que se mueven e interaccionan entre sí, y cómo depende de la densidad, la intensidad de ruido intrínseco y de su radio de interacción. Se ha caracterizado la transición entre la fase ordenada, en la que todos los individuos se alinean, y la desordenada, y se han determinado los exponentes críticos, con el objetivo de reproducir los resultados de Vicsek et al.[1]. En este modelo no se implementan fuerzas de cohesión a larga distancia y las partículas son consideradas ideales. En estas condiciones, y para valores moderados de la densidad, se obtiene una transición de fase continua. Los resultados obtenidos reproducen correctamente los resultados de Vicsek et al.[1], si bien el punto de transición se obtiene para valores mayores del ruido. En el límite termodinámico, el valor crítico de la intensidad de ruido obtenido es de  $\eta_c = 3,15 \pm 0,15$  frente a  $\eta_c = 2,9 \pm 0,05$  en [1]. Esta diferencia pensamos que puede ser debida a diferencias en la parametrización del modelo, ya sea en el módulo de la velocidad, el computo de la distancia de interacción o intensidad de ruido. Para los exponentes críticos se obtiene valores consistentes con los hallados en el trabajo original de Vicsek et al.[1] (en paréntesis):  $\beta = 0,41 \pm 0,03$  ( $0,45 \pm 0,07$ ) y  $\delta(\eta = 2) = 0,39 \pm 0,02$  ( $0,35 \pm 0,06$ ). Es interesante destacar como el parámetro de orden  $v_a$  depende de la densidad de individuos a una intensidad de ruido constante  $\eta < \eta_c(L)$ . Por encima de una densidad umbral  $v_a$  obtiene su valor máximo y se reduce, monotónicamente, a medida que se reduce la densidad. Esto es debido a la formación de grupos independientes de individuos que se mueven coherentemente dentro del grupo, pero no los grupos entre sí. En estas circunstancias sería interesante estudiar la distribución de tamaños de estos grupos. Finalmente, observamos como al incrementar el radio de interacción, el punto de la transición se desplaza a valores de ruido mayores:  $\eta_c = 5,08 \pm 0,02$ . Un mayor número de individuos en interacción requiere de un ruido más intenso para producir desorden en el sistema. Se observa una variación notable del exponente crítico  $\beta$  al variar el radio de interacción:  $\beta(R = 1) = 0,41 \pm 0,03$  frente a  $\beta(R = 2) = 0,61 \pm 0,01$ .

## Referencias

- [1] Tamás Vicsek et al. «Novel Type of Phase Transition in a System of Self-Driven Particles». En: *Phys. Rev. Lett.* 75 (6 ago. de 1995), págs. 1226-1229. DOI: [10.1103/PhysRevLett.75.1226](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.1226). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.1226>.
- [2] Tamás Vicsek y Anna Zafeiris. «Collective motion». En: *Physics Reports* 517.3 (2012). Collective motion, págs. 71-140. ISSN: 0370-1573. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2012.03.004>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157312000968>.
- [3] Guillaume Grégoire y Hugues Chaté. «Onset of Collective and Cohesive Motion». En: *Phys. Rev. Lett.* 92 (2 ene. de 2004), pág. 025702. DOI: [10.1103/PhysRevLett.92.025702](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.025702). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.92.025702>.
- [4] Guillaume Grégoire, Hugues Chaté y Yuhai Tu. «Moving and staying together without a leader». En: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 181.3-4 (2003), págs. 157-170.
- [5] H Christodoulidi et al. «Phase transitions in models of bird flocking». En: *Chaos, Information Processing And Paradoxical Games: The Legacy Of John S Nicolis*. World Scientific, 2015, págs. 383-398.