



**Universitat**  
de les Illes Balears

## **TRABAJO DE FIN DE GRADO**

# **LA RESOLUCIÓN DE LA PARADOJA DE BERTRAND**

**María Dolores Núñez Castell**

**Doble Grado de Economía y Turismo**

**Facultad de Les Illes Balears**

**Año Académico 22-23**

# LA RESOLUCIÓN DE LA PARADOJA DE BERTRAND

**María Dolores Núñez Castell**

**Trabajo de Fin de Grado de Economía**

**Facultad de**

**Universidad de las Illes Balears**

**Año Académico 2022-23**

Palabras clave del trabajo:

Paradoja de Bertrand, Equilibrio de Nash

*María Dolores Núñez Castell*

*Walter Ferrarese*

Se autoriza la Universidad a incluir este trabajo en el Repositorio Institucional para su consulta en acceso abierto y difusión en línea, con fines exclusivamente académicos y de investigación

Autor		Tutor	
Sí	No	Sí	No
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

# Resumen

El propósito de este trabajo es analizar el Modelo de Bertrand, saber en qué mercado competitivo se muestra, y las características que tiene éste. Para ello, primero se explica el mercado y algunos conceptos de la teoría de juegos, para que sea más fácil la comprensión del trabajo, ya que el modelo se analiza desde la perspectiva de un juego simultáneo donde la elección estratégica se basa en los precios.

La finalidad de este trabajo es solucionar el Modelo de Bertrand en la vida real. Para ello, se van a analizar las características principales que debe tener el modelo para que se cumpla. Una vez analizadas las características, se van a estudiar las formas de trasladar el modelo a la vida real.

# Abstract

The purpose of this project is to analyze the Bertrand Model, to know in which competitive market it is shown, and the features it has. To do this, first the market and some concepts of game theory are explained, to make it easier to understand the work, since the model is analyzed from the perspective of a simultaneous game where the strategic choice is based on prices.

The aim of this work is to solve the Bertrand Model in real life. In order to do so, the main features that the model must have in order to be fulfilled will be analyzed. Once the characteristics have been analyzed, ways of translating the model to real life will be studied.

# Índice

<b>Introducción.....</b>	<b>5</b>
<b>Teoría de Juegos y Mercado.....</b>	<b>6</b>
Introducción a la Teoría de Juegos.....	6
Introducción al Mercado.....	7
<b>El Modelo de Bertrand.....</b>	<b>8</b>
Introducción.....	8
El Modelo de Bertrand.....	9
El equilibrio de Nash.....	9
Características del Modelo.....	10
Funcionamiento del Modelo de Bertrand.....	11
<b>El Modelo de Bertrand en la vida real.....</b>	<b>13</b>
Problemas en el Modelo.....	13
Soluciones al Modelo.....	14
Diferenciación.....	14
Capacidad limitada.....	15
Interacción repetida.....	17
Costes no lineales.....	18
<b>Conclusión.....</b>	<b>20</b>
<b>Referencias.....</b>	<b>21</b>

# Introducción

En este trabajo se ha analizado el Modelo de Bertrand, haciendo en primer lugar una pequeña introducción sobre el mercado y la teoría de juegos, para que sea mucho más sencilla la lectura de éste.

Seguidamente, se ha profundizado en el Modelo de Bertrand, en el Equilibrio de Nash del modelo, en las suposiciones y en cómo se puede aplicar el modelo en la vida real.

Después, se ha analizado cada uno de estas suposiciones como se podían trasladar a la vida real. Se han estudiado varios autores, que han conseguido darle una solución más realista al modelo, como el Modelo de Edgeworth o el Modelo de Hotelling.

Se va a poder observar, que si se cumplen todas las suposiciones del modelo, el resultado es poco realista y no es aplicable a la vida real. Sin embargo, cuando alguna de estas suposiciones se quitan, se puede encontrar una solución que puede ser útil a la hora de tomar decisiones en una empresa.

Como estudiante de economía que soy, me ha parecido interesante realizar este trabajo, ya que las asignaturas como Juegos y Organización Industrial siempre me han gustado y me han parecido interesantes.

Me parece muy importante el estudio del mercado y de las estrategias que se pueden usar para una empresa. Con lo cual, me parece un trabajo muy útil para mi vida profesional.

Gracias a este trabajo, he podido recordar conceptos de gran utilidad que he estudiado durante la carrera y he podido mejorar mi comprensión sobre el Modelo de Bertrand.

# Teoría de Juegos y Mercado

## Introducción a la Teoría de Juegos

A la hora de tomar decisiones una empresa es importante que conozca el mercado en el que compete. Es por ello, que se va a hacer un pequeño resumen de algunos conceptos básicos de la teoría de juegos y de las características del mercado en el Modelo de Bertrand.

La teoría de juegos se divide en dos ramas; la teoría de juegos no cooperativos, donde se analiza principalmente al jugador individual; y la teoría de juegos cooperativos, donde supone una coalición de empresas.

En la teoría de juegos, hay dos supuestos básicos; el primero es que las empresas son racionales, es decir, buscan la maximización de los beneficios; y el segundo supuesto, es que las empresas aplican esta racionalidad a la hora de tomar las decisiones.

Cuando se habla de tomar decisiones o decidir estrategias, se refiere a las decisiones que tiene que tomar la empresa sobre las cantidades, variedades, calidades, y precios de los bienes y servicios.

Una vez que se ha elegido la estrategia, existen muchos resultados, pero hay un resultado que es de equilibrio, es decir, es una combinación de estrategias tal que ninguna empresa tiene incentivos de cambiar la estrategia, ya que ninguna de las otras empresas tampoco cambiará.

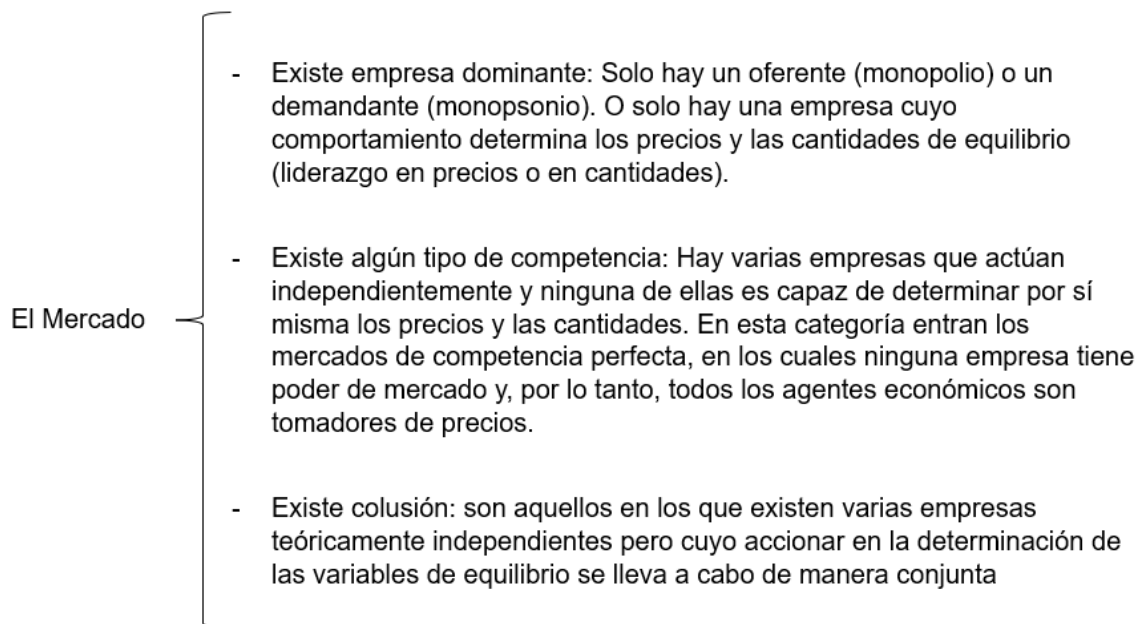
La interacción estratégica puede ser; secuencial, es decir, las empresas deciden una después de la otra; o simultánea, ambas empresas toman las decisiones al mismo tiempo. (Vela Meléndez et al. 2011)

# Introducción al Mercado

Una vez explicado algunos conceptos básicos sobre la teoría de juegos, se va a explicar algunos conceptos del mercado.

La definición técnica de mercado es “El mercado es un proceso que opera cuando hay personas que actúan como compradores y otras como vendedores de bienes y servicios, generando la acción del intercambio” (Quiroa, 2019).

Para realizar un estudio del mercado, es importante diferenciar la estructura de este, es decir, conocer a los componentes que componen el mercado. Bajo el punto de vista de la organización industrial, clasifica el mercado en tres categorías:



Fuente: Elaboración propia. (Coloma, 2002)

Vamos a profundizar un poco más en ellos:

- Competencia imperfecta: Esta es la más habitual. Esta competencia aparece cuando hay pérdida de eficiencia, ya que las empresas o los consumidores tienen mucha influencia a la hora de poner los precios de los bienes o servicios. Dentro de la competencia imperfecta hay algunos subgrupos:

- Monopolio: Consiste en un mercado con varios compradores pero solo un vendedor, el cual tiene el poder de negociación.
- Oligopolio: La principal característica de un mercado oligopólico es la existencia de pocas firmas. Existen barreras de entrada y de salida.
- Competencia perfecta: Consiste en un mercado en el cual hay un gran número de ofertantes y demandantes, pero ninguno de ellos tiene poder para influir en los precios. Los productos son bastante homogéneos y la información que reciben es perfecta. Los costos de transacción son reducidos y no existen barreras de entrada.
- Colusión: Es una situación donde una serie de empresas acuerdan no competir entre ellas y así poder incrementar los beneficios conjuntos. Debe existir un acuerdo escrito o verbal.

## El Modelo de Bertrand

En el apartado anterior se han explicado algunos conceptos referentes a la teoría de juegos y el mercado, para que así sea más fácil la comprensión del trabajo sobre el Modelo de Bertrand.

### Introducción

Los mercados oligopólicos quizás son los más comunes en la vida real. Cuando el número de participantes en un mercado es reducido, unos pocos pueden influir en variables claves como el precio, la calidad del producto, las estrategias de los competidores e incluso en la estructura del mercado. (Tarziján et al. 24)

En el mercado oligopolio no existe un solo modelo estándar, ya que influyen diversos factores como las reglas del juego y la información de la que disponen los jugadores. Esto no es una desventaja, ya que cada modelo es apropiado para cada tipo de escenario. (Vela Meléndez, 2011)

Los tres modelos de oligopolio más conocidos son los de Cournot, Stackelberg y Bertrand. Tanto el modelo de Cournot y Bertrand plantean una interacción simultánea, sin embargo, en el modelo de Stackelberg la interacción es secuencial. (Tarziján et al. 205)



Asimismo, la gran diferencia entre los modelos de Cournot y Bertrand es que el modelo de Cournot supone que la variable de decisión de las firmas es la cantidad, mientras que en el modelo de Bertrand supone que la variable son los precios. Ambos tipos de decisiones son frecuentes en la vida real, aunque las decisiones de precio se asocian más con el corto plazo, y las de cantidades o capacidades, con el largo plazo. (Tarziján et al. 212)

## El Modelo de Bertrand

Joseph Louis Bertrand, matemático y economista francés, en 1883 planteó lo que se conoce como Paradoja de Bertrand, en la se describe una situación donde dos empresas alcanzan un equilibrios (Equilibrio de Nash), en el que cobran, por un producto idéntico, el mismo precio, que a la vez es igual a los costes marginales, con lo cual, ambas empresas no obtienen beneficios.

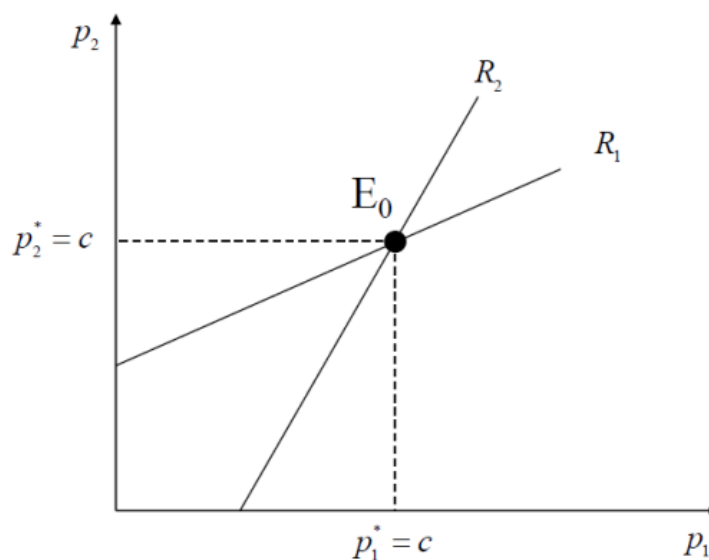
En el Modelo de Bertrand hay un duopolio, por lo que se encuentra en un caso de competencia imperfecta. Sin embargo, el precio se termina ajustando al coste marginal, haciendo así que genere una situación de competencia perfecta. (Software DELSOL)

## El equilibrio de Nash

El Equilibrio de Nash juego un rol muy importante en el Modelo de Bertrand, ya que este equilibrio explica una situación en la que cada uno de los participantes plantea estrategias en función de lo que hagan los competidores, con el fin de maximizar sus ganancias individuales.

Este equilibrio aparece cuando las dos empresas establecen el mismo precio de mercado para sus productos, siendo el coste marginal igual a los dos precios, es decir, cuando  $P_1 = P_2 = Cm$ . El equilibrio de Nash aparece cuando las funciones de reacción de las dos empresas se cortan, como se puede observar en el gráfico 1.

**Gráfico 1:** Equilibrio de Nash en el Modelo de Bertrand.



Fuente: Modelos de Oligopolio, Vela Meléndez, 2012

El único equilibrio de Nash es cuando  $P_1 = P_2 = Cm$ , ya que ninguna de las empresas tiene incentivos de desviarse, aún siendo los beneficios 0. Pues si una empresa aumenta el precio, la otra empresa tendría una mayor demanda, con lo cual sus ventas tienden a cero y sus beneficios pertenecen en cero. Por otro lado, si la empresa decide disminuir el precio, incrementa su demanda, pero el beneficio se reduciría, puesto que el precio es menor al costo marginal (que este es igual al costo medio).

## Características del Modelo

Para que se cumpla el Modelo de Bertrand, se deben cumplir los siguientes puntos:

- Existen dos empresas que actúan en el mismo mercado.
- Ambas empresas deben establecer el mismo precio del producto.
- Los productos deben ser homogéneos.
- La demanda es lineal y está satisfecha por las dos empresas:

$$D_1(P_1, P_2) = \begin{cases} d(p_1), & \text{Si } P_1 < P_2 \\ \frac{d(p_1)}{2}, & \text{Si } P_1 = P_2 \\ 0, & \text{Si } P_1 > P_2 \end{cases}$$

- La empresa que ofrezca el precio más bajo tendrá más demanda.
- Cada empresa decide el precio que debe de poner simultáneamente.
- No hay restricción de capacidad (capacidad ilimitada).
- Hay información perfecta

La actuación de las empresas es muy importante para estructurar el modelo, ya que se encargan de fijar el precio de mercado. (Software DELSOL)

## Funcionamiento del Modelo de Bertrand

Supongamos que existen dos empresas, la empresa 1 y la empresa 2, las cuales producen un bien idéntico y siendo la estructura de costes igual para ambas empresas,  $C^i(q_i) = cq_i$ , para  $i = 1, 2$ .

La función de demanda queda así:  $Q=D(P)$

$$D_1(P_1, P_2) = \begin{cases} d(p_1), & \text{Si } P_1 < P_2 \\ \frac{d(p_1)}{2}, & \text{Si } P_1 = P_2 \\ 0, & \text{Si } P_1 > P_2 \end{cases}$$

En el primer caso, sucede que si el precio de la empresa 1 es menor que el precio de la empresa 2, entonces la empresa 1 tiene toda la demanda del mercado.

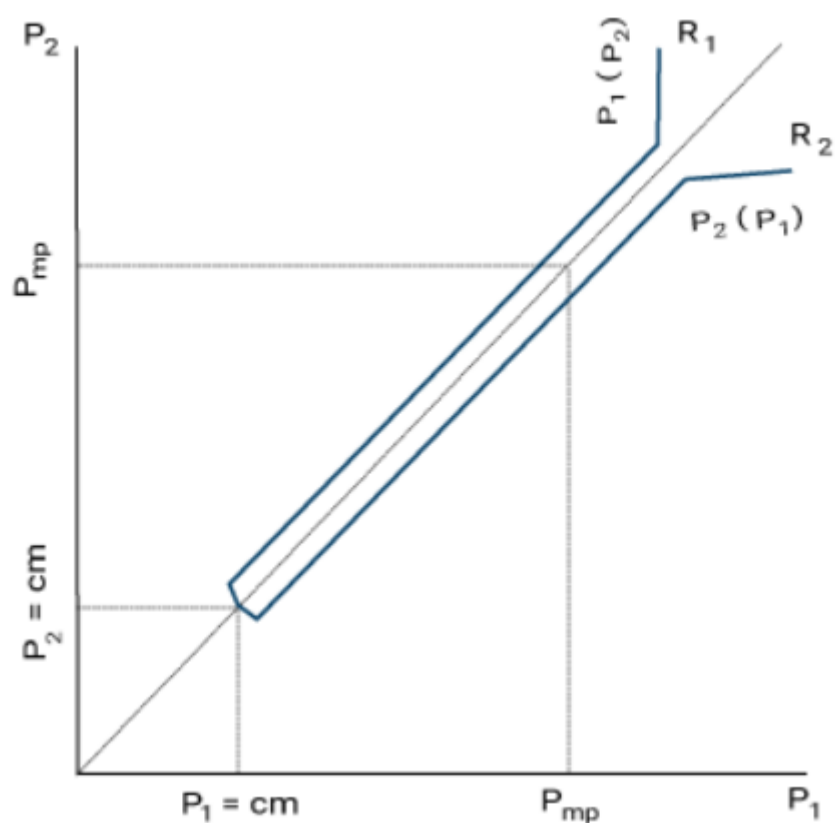
En el segundo caso, se observa que si la empresa 1 es igual al precio de la empresa 2, entonces cada empresa obtiene el 50% del mercado.

Y por último, en el caso 3, tenemos que si el precio de la empresa 1 es mayor que el precio de la empresa 2, entonces la empresa 1 no tendrá demanda del mercado.

La función de beneficios queda de la siguiente manera:

$$\pi^1(p_1, p_2) = (p_1 - c)q_1(p_1, p_2)$$

**Gráfico 2:** Representación de las funciones de reacción



Fuente: Modelo de Bertrand, Fortún, 2019

Si la empresa 2 pone un precio mayor que el precio monopolístico (PM), la empresa 1 reacciona colocando el precio monopolístico.

Si la empresa 2 pone un precio menor o igual al costo marginal y, por ende, el precio monopolístico, la empresa 1 tendrá precio de equilibrio.

Y si la empresa 2 pone un precio menor que el precio monopolístico (PM), la empresa 1 pondrá un precio igual al costo marginal.

El equilibrio de Nash, se establece cuando:

$$\pi^1(p_1^*, p_2^*) \geq \pi^1(p_1, p_2^*)$$

(para ambas empresas simultáneamente)

## El Modelo de Bertrand en la vida real

### Problemas en el Modelo

El Modelo de Bertrand no se puede aplicar a la vida real, ya que las empresas siempre ponen un precio superior al coste marginal. Además de esta razón, hay otras características propias del modelo que en la vida real no ocurren:

- Diferenciación: Los bienes o servicios, al final, se acaban diferenciando de los de sus competidores, así pues, los consumidores dejan de ver ambos productos iguales.
- Capacidad limitada: No todas las empresas pueden satisfacer toda la demanda que tiene su producto, ya que en la vida pueden existir limitaciones en la producción, como por ejemplo, no tener los suficientes recursos para afrontar toda la demanda.
- Interacciones repetidas: una de las dos empresas eleva ligeramente el precio del producto, y así seguirá vendiendo la misma cantidad de producto, recibiendo más beneficio. Esto hace que la otra empresa también elevará su precio. Con lo cual, esto hará que se rompa el equilibrio entre  $P_1$ ,  $P_2$  y  $C_m$
- Costes no lineales: El modelo asume que los costes son lineales, pero en el que caso en que los costes sean convexos, este modelo ya no sirve.

(Software DELSOL)

# Soluciones al Modelo

## Diferenciación

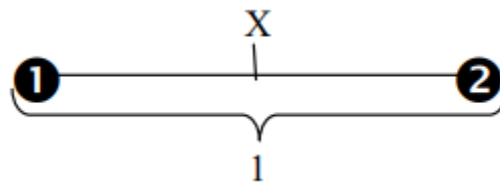
Un supuesto importante en el análisis de Bertrand es que los bienes de las empresas son perfectamente sustitutos, por lo que no pueden poner un precio superior a su coste marginal, ya que como se ha explicado anteriormente, si ambas empresas ponen el precio igual al coste marginal, ninguna de ellas tendría incentivos para cambiar el precio. Con lo cual, una manera de solucionar esta paradoja es la diferenciación del producto.

Por ejemplo, la empresa A y la empresa B ofrecen el mismo producto, pero una está situada en el centro de la ciudad y la otra a las afueras. En este caso, la diferenciación del producto es la distancia.

Por ejemplo, el modelo de “la ciudad lineal” de Hotelling (1929), es un modelo en el cual dos empresas ofrecen un producto homogéneo a un conjunto de consumidores distribuidos uniformemente a lo largo de una calle.

Considere que ambas empresas están por una distancia lineal de longitud 1, la empresa 1 está ubicada en  $x = 0$  y la empresa 2 en  $x = 1$ . El costo unitario para cada empresa es  $c$ . Los consumidores tienen un coste de transporte  $t$ .

**Gráfico 3:** Representación del Modelo de Hotelling



Fuente: La Paradoja de Bertrand (Gil Malca, 2009)

Por lo que, el consumidor que vive en X, tiene un coste  $tx$  por ir a la empresa 1; y  $t(1 - x)$  por ir a la empresa 2.

La diferenciación en este caso es la distancia, ya que, por ejemplo, si la empresa A, pone su precio igual al coste marginal y la empresa B, pone un precio un poco mayor, esto no significa que la empresa B vaya a perder toda la demanda, si no que dependerá cuál es el coste  $t$  del consumidor, ya que, por lo menos, mantendría a todos los consumidores que estuvieran situados cerca de ella.

Por lo tanto, en este caso,  $p_1 = p_2 = c$  no es un sistema de equilibrio, ya que las empresas no fijarían su precio al nivel del coste marginal. (González González, 2016)

## Capacidad limitada

En 1987, el economista inglés, Edgeworth, propuso un modelo para solucionar la paradoja de Bertrand introduciendo restricciones en la capacidad, haciendo que la empresa no pueda vender más de lo que son capaces de producir. A día de hoy es conocido como Modelo Bertrand-Edgeworth.

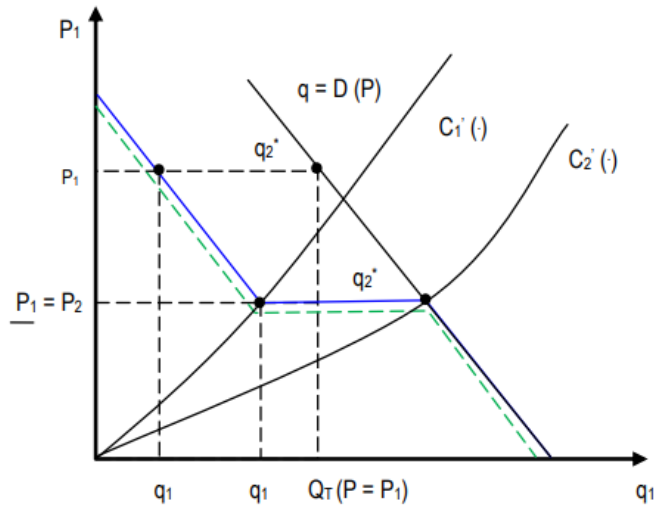
Se supone que la función de costes de las dos empresas muestran rendimientos decrecientes a escala.  $C_i(q_i)$  es creciente y convexa. A un precio  $p$ , una empresa no desea abastecer más que su oferta competitiva,  $S_i(P)$ , la cual se obtiene de la igualdad entre el precio y el coste marginal:

$$P = C_i'(S_i(P))$$

Ahora se supone que la empresa 2 pone el precio más bajo posible,  $p$ , y que  $S_2(P) < D(P)$  (Donde  $D(P)$  es la demanda total del mercado). No todos los consumidores que quieren comprar los productos de la empresa 2 pueden hacerlo. A causa del racionamiento, la empresa 1 se encuentra con una demanda residual.

Con una regla de racionamiento eficiente tenemos:

Para un  $C_1(.) = C_2(.)$  y  $CF=0$ . Si la empresa 2 cobra  $p_2^*$  y  $q_2^*$  la demanda residual de la empresa 1 es:



Fuente: González González, 2016

Si:

$$p_1 > p_2, D_1^R(p_1) = D(p_1) - q_2^*$$

$$p_1 = p_2, D_1^R(p_1) = D(p_1) - q_2$$

$$p_1 < p_2, D_1^R(p_1) = D(p_1)$$

La línea punteada de color verde representa la demanda residual de la empresa 1 a causa del racionamiento eficiente.

Ahora con restricción de capacidad ¿ $p_1 = p_2 = c$  será un equilibrio de Nash?

No, podemos comprobar que  $\frac{\delta \pi_1}{\delta p_1} > 0$  si  $p_1 = p'$  (precio de competencia).



Si:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= p_1 q_1 - c(q_1) \\ &= p_1 [D(p_1) - q^*] - c(D(p_1) - q^*) \\ \frac{\delta \pi_1}{\delta P_1} &= D(p_1) - q^* + P_1 \frac{\delta D(P_1)}{\delta P_1} - \frac{\delta c}{\delta q_1} \cdot \frac{\delta D(P_1)}{\delta P_1} \\ \frac{\delta \pi_1}{\delta P_1} &= D(P_1) - q^* = 2q^* - q^* \\ \frac{\delta \pi_1}{\delta P_1} &= q^* > 0\end{aligned}$$

Por lo tanto, en este caso a la empresa 1 le conviene poner un  $P_1 > c$  (Gil Malca, 2009)

Por lo tanto, como se ha podido observar, la empresa 2 no puede abastecer toda la demanda del mercado, y por ello, algunos consumidores deben acudir a la empresa 1, haciendo que la demanda de esta sea mayor que 0 y pudiendo vender a un precio mayor que el del coste marginal, obteniendo beneficios.

Así pues, como la empresa 2 no puede abarcar toda la demanda del mercado, la oferta se desplaza hacia la izquierda y por consiguiente aumentan los precios. Por lo tanto,  $p_1 = p_2 = c$  no es una solución de equilibrio. (González González, 2016)

## Interacción repetida

El modelo de Bertrand supone que las empresas sólo toman la decisión de fijar los precios una única vez.

Se supone que las empresas A y B han fijado el mismo precio pero por encima del coste marginal. La empresa A decide bajar el precio, para así quedarse con toda la demanda del mercado. Si se introduce una dimensión temporal, la empresa B tiene capacidad de reacción y disminuye el precio y así no perder parte de la demanda. (González González, 2016)

Introduciendo una dimensión temporal al modelo, se entraría en una guerra de precios, la cual, se podría solucionar si ambas empresas muestran un comportamiento colusivo, así éstas llegan a un acuerdo, el precio será:

$$P_1 = P_2 = P^M$$

Y las cantidades óptimas y los beneficios, serán:

$$q_1 = q_2 = \frac{q^M}{2}$$

$$\pi_1 = \pi_2 = \frac{\pi^M}{2}$$

Y si hubiese guerra de precios llegarían al siguiente equilibrio:

$$p_1 = p_2 = c$$

Entonces los beneficios serían:

$$\pi_1 = \pi_2 = 0$$

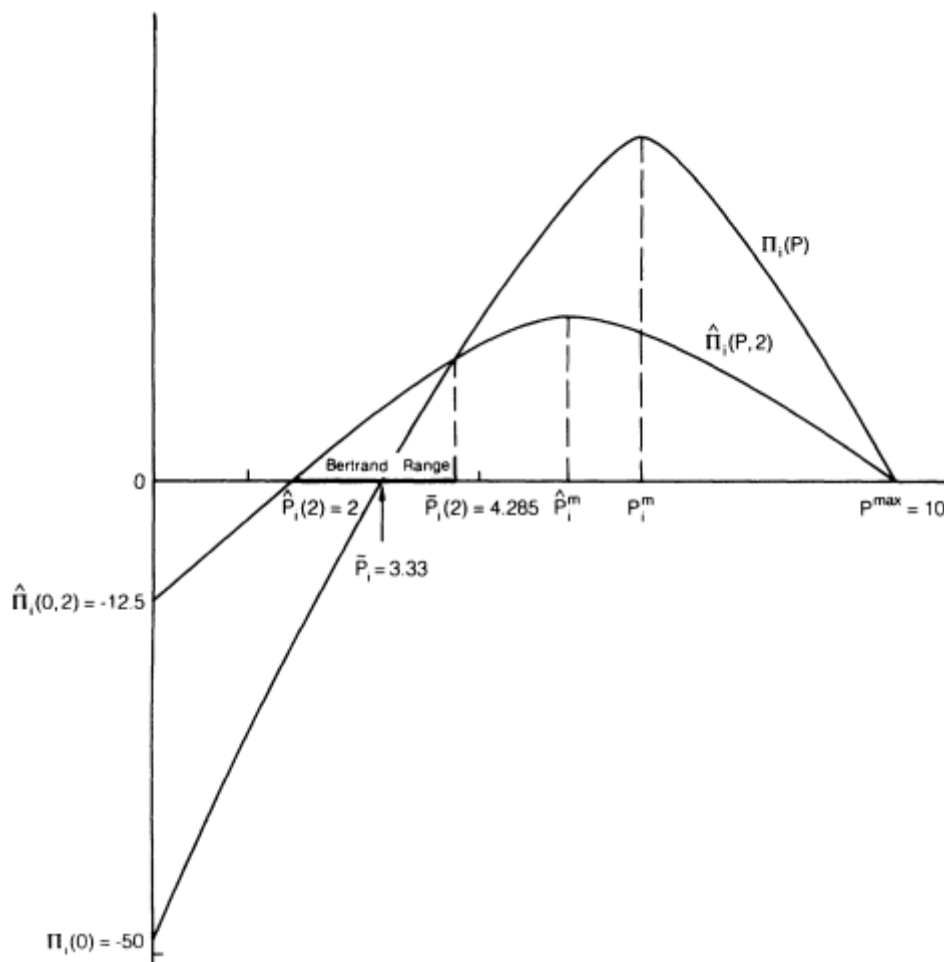
(Gil Malca, 2009)

## Costes no lineales

Como se ha ido diciendo a lo largo del trabajo, con dos empresas idénticas, costes marginales constantes y productos homogéneos, el único equilibrio de Nash en precios, es el equilibrio de Bertrand, es decir  $p_1 = p_2 = c$ .

Pero, ¿qué pasa si los costes son convexos?

**Gráfico 4:** Ejemplo del Modelo de Bertrand con costes convexos



Fuente: Ghosh Dastidar ,28

En el gráfico se muestra que las funciones de coste de ambas empresas son convexas.

Anteriormente, se ha mencionado que cuando el precio que ponen las empresas no es igual al coste marginal, hay incentivos por ambas empresas a bajar el precio, para así ganar toda la demanda del mercado. Pues bien, esta estrategia, puede salir bien si los costes son lineales.

En este caso, los costes son convexas, por lo tanto, ninguna de las dos empresas tendrá incentivos de bajar los precios, ya que esto supondría un beneficio menor, como se puede ver en el gráfico.

# Conclusión

El modelo de Bertrand llega a la conclusión de que el equilibrio de Nash es  $p_1 = p_2 = c$  cuando dos empresas compiten en un mismo mercado, con un producto homogéneo y no hay restricciones de capacidad. Con lo cual, ninguna de las empresas obtienen beneficios, ya que el precio que ponen es igual al coste marginal.

Este equilibrio sucede porque ninguna de las dos empresas tiene incentivos a cambiar el precio, pues una de las dos, aumenta el precio, pierde la demanda, ya que los consumidores optarán por comprar en la otra empresa a un precio más bajo. Y por otro lado, si una de las dos empresas decide bajar el precio, no obtendrá pérdidas, ya que el precio estará por debajo del coste, con lo cual, no le saldrá rentable.

Esta solución, en la vida real, no funciona, pues ninguna empresa está dispuesta a vender un bien al mismo precio de coste.

Lo que se ha analizado en el trabajo, ha sido como llevar este modelo a la vida real. Pues se ha llegado a resolver el modelo de distintas formas quitando una de las suposiciones que tenía el modelo.

En el caso del Modelo de Hotelling, se ha quitado el supuesto de que los bienes son homogéneos, haciendo así que estos sean productos diferenciados. Por otro lado, en el Modelo de Edgeworth, se ha quitado el supuesto de que las empresas puedan producir con capacidad ilimitada. Seguidamente, se ha resuelto el modelo, haciendo que en éste haya interacciones temporales. Y por último, se ha analizado y resuelto el modelo, con precios convexos y no lineales.

# Referencias

BERTRAND, J. (1883). "Théorie Mathématique de la Richesse Social", *Journal des Savants* 68, pp. 499-508.

Coloma, Germán. "Apuntes de organización industrial." *UCEMA*, Julio 2002, <https://ucema.edu.ar/publicaciones/download/documentos/221.pdf>. Accessed 17 May 2023.

Crespo, Daniel. "Dinámica en el modelo de Hotelling con costes cuadráticos." *Universidad Zaragoza*, 2014, <https://zaguan.unizar.es/record/17136/files/TAZ-TFG-2014-2317.pdf>. Accessed 18 May 2023.

Fabián Salazar, Miguel. "Teorías del oligopolio. Análisis estático y dinámico. Teoría de los juegos." *Miguel Fabián Salazar*, 28 Septiembre 2022, <https://fabiansalazar.es/oposicion/temasenpdf/3A-16.pdf>. Accessed 17 May 2023.

Fortún, Manuel. "Modelo de Bertrand - Qué es, definición y concepto | 2023." *Economipedia*, 15 September 2019, <https://economipedia.com/definiciones/modelo-de-bertrand.html>. Accessed 18 May 2023.

Ghosh Dastidar, Krishnendu. "On the existence of pure strategy Bertrand equilibrium." *Economic Theory*, vol. 5, no. 1, 1995, pp. 13-32. *Economic Theory*.

Gil Malca, César. "La Paradoja de Bertrand." *Blog PUCP*, Abril 2009, <http://blog.pucp.edu.pe/blog/wp-content/uploads/sites/317/2012/07/20101029-La-Paradoja-de-Bertrand.pdf>. Accessed 18 May 2023.

González González, Cristina. "La modelización de la conducta empresarial a partir de la teoría de juegos." *Universidad de León*, Ana Pardo Fanjul, 2016, [https://buleria.unileon.es/bitstream/handle/10612/5534/71457634S\\_GADE\\_JULIO16.PDF.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://buleria.unileon.es/bitstream/handle/10612/5534/71457634S_GADE_JULIO16.PDF.pdf?sequence=1&isAllowed=y). Accessed 18 May 2023.

Quiroa, Myriam. "Mercado - Qué es, definición y concepto | 2023." *Economipedia*, 4 November 2019, <https://economipedia.com/definiciones/mercado.html>. Accessed 17 May 2023.

Maskin, Erik. "Equilibrio de Nash y diseño de Mecanismos." *Aportes*, vol. XIV, no. 40, 2009, pp. 119-123. *redalay*, <https://www.redalyc.org/pdf/376/37621050008.pdf>.

Rosales, Mairene I. "Modelo de Bertrand: Definición, Qué es y Ejemplos | 2023." *Economía360*, <https://www.economia360.org/modelo-de-bertrand/>. Accessed 18 May 2023.

Software DELSOL. "Paradoja de Bertrand ¿Qué es?" *Software DELSOL*, <https://www.sdelisol.com/glosario/paradoja-de-bertrand/>. Accessed 18 May 2023.

Tarziján, Jorge, et al. *ORGANIZACION INDUSTRIAL PARA LA ESTRATEGIA EMPRESARIAL*. PEARSON EDUCACION, 2006.

Vela Meléndez, Lindon. "MODELOS DE OLIGOPOLIO." *UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO LAMBAYEQUE – PERÚ MODELOS DE OLIGOPOLIO.*, 2012, <https://web.ua.es/es/giecryal/documentos/modelos-oligopolio.pdf>. Accessed 18 May 2023.

Vela Meléndez, Lindon. "TEORIA DE JUEGOS Y MODELOS DE OLIGOPOLIO1." *UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO LAMBAYEQUE - PERU TEORIA DE JUEGOS Y MODELOS DE OLIGOPOLIO*, Alex F. Chapoñan Coronado, Grecia C. Alexis I., Díaz Acha, Inga Juarez, Ernesto Loayza Mori y Cesar A. Sales Campos, 2011, <https://web.ua.es/es/giecryal/documentos/teoria-juegos.pdf>. Accessed 17 May 2023.