Universitat de les Illes Balears

Títol: Proposta didàctica matemàtica-musical per a ESO

NOM AUTOR: Pau Bosch Servera

Memòria del Treball de Fi de Màster

Màster Universitari de Formació del professorat

(Especialitat/Itinerari de Matemàtiques)

de la

UNIVERSITAT DE LES ILLES BALEARS

Curs Acadèmic 2014/2015

Data: 23 de juliol de 2015 *Signatura de l'autor*

Nom Tutor del Treball Francesc Rosselló Llompart *Signatura Tutor*

Acceptat pel Director del Màster Universitari de Formació del Professorat *Signatura*

Contingut

1. Resum

Els continguts comuns entre assignatures és una forma de mostrar la interrelació de certs temes des de diversos punts de vista. Amb aquest pretext volem proposar unes activitats que relacionin les matemàtiques i la música. En aquestes activitats treballarem determinats aspectes matemàtics de les escales musicals occidentals. Podem treballar des de les fraccions, les proporcions, les mitjanes, les funcions exponencials i les seves representacions gràfiques, passant per potències d'exponent tant natural com racional, la manipulació algebraica... S'analitzarà l'escala que Pitàgores va elaborar dintre el cànon de la Grècia clàssica, els seus problemes i la seva evolució al llarg de la història fins arribar a l'escala temperada.

Amb aquestes propostes didàctiques volem refermar els coneixements musicals i matemàtics dels alumnes, com també presentar continguts matemàtics d'una forma més suggerent i entretinguda.

Paraules clau:

- Música; matemàtiques; Pitàgores; proporcions; mitjanes; exponencials.

2. Objectius del treball

Els objectius principals d'aquest treball final de màster són els següents:

- Estudiar la relació entre les matemàtiques i la música al llarg de la història.
- Analitzar les matemàtiques inherents a l'escala musical.
- Presentar propostes didàctiques per a l'estudi de les matemàtiques a través de la música.

3. Estat de la qüestió

3.1. Introducció

La definició de música ha anat variant al llarg de la història. En la cultura grega el terme música (*μουσική*) incloïa també la dansa i la poesia. El músic era freqüentment l'autor tant de la melodia com de la lletra i les coreografies. Després es va separar com un art independent. Una definició actual la podem trobar a la Viquipèdia, que ens indica*: "La música és l'art que es manifesta en l'organització dels sons i els silencis en el temps".* En canvi, segons el DIEC2, segona edició del *Diccionari de l'Institut d'Estudis Catalans*, la música és l'*"Art que s'expressa mitjançant la combinació de sons, d'acord amb les lleis de la melodia, l'harmonia i el ritme".* Les definicions anteriors relacionen art i harmonia. Si volem fer notòria la relació existent entre música i matemàtiques podem agafar la definició que Gottfried Whihelm von Leibniz en va fer:

"La música és el plaer que experimenta la ment humana en comptar sense adonar-se'n que s'està comptant".

Aquesta definició sintetitza perfectament la relació entre les dues disciplines. Altres exemples poden ser (Peralta, 1998):

- *"La música és un exercici d'aritmètica secreta, i qui s'entrega a ella ignora que utilitza nombres".* (Leibniz)
- *"La geometria és una música immòbil".* (Goethe)
- *"La música és un art terriblement euclidià".* (Alejo Carpentier)
- *"Potser sigui la música la matemàtica dels sentits, i la matemàtica la música de la raó".* (Puig Adam, 1960)

Durant més de vint-i-cinc segles, la relació entre les matemàtiques i la música ha estat molt estreta, tant és així que, sense cap explicació en clau numèrica, seria difícil entendre l'evolució històrica de la música. I és que les matemàtiques són a totes parts: l'escala pitagòrica, les obres de Bach, les sonates de Mozart o la Quinta Simfonia de Beethoven. Per exemple, el concepte de simetria va servir per crear una de les obres més conegudes del compositor austríac Mozart “*El mirall”*, en la qual el compositor va fer que dos violinistes tocassin a la vegada la mateixa partitura però en sentit invers.

3.2. Fraccions i música: L’escola pitagòrica

3.2.1. Els primers indicis de la relació

Les matemàtiques neixen de la necessitat de registrar el pas del temps, de fer càlculs per al comerç i de mesurar la terra. La música neix de la necessitat de protegir-se de certs fenòmens naturals, de fer fora els esperits malignes, d’atreure l’ajuda dels déus, d’honrar-los, com també de celebrar el canvi d’estacions. L'evolució de la música i les matemàtiques sempre s’ha anat construint segons les relacions existents entre elles en cada moment del seu desenvolupament.

És a Grècia on sorgeixen els fonaments de la base teòrica de la música occidental. La paraula música prové dels vocables grecs *musiké*, “de les muses”. Per altra banda, la paraula matemàtiques prové de *máthema*, que significa “allò que s’aprèn”. La música i les matemàtiques tenen molt en comú i, tot i no ser visibles a primera vista, existeixen diverses formes de relacionar ambdues disciplines.

3.2.2. L’escola pitagòrica

Pitàgores va néixer al segle VI aC a la localitat de Samos, va estudiar la naturalesa dels sons musicals influenciat pels seus coneixements de geometria, aritmètica i sobre els nombres naturals. Ell va fundar l'escola que duu el seu nom, allà es formà una comunitat dedicada a l’estudi de les matemàtiques, astronomia, música, fisiologia i medicina. Una de les idees de l'escola era que els nombres podien explicar els fenòmens de l’univers. Pensaven que es podia expressar la natura en termes matemàtics, com ara les proporcions i les raons.

Com que no s’ha conservat cap escrit original de Pitàgores, hi ha autors (Reyes, 2010) que defensen que molts del seus descobriments varen ser realitzar pels seus deixebles. També hi ha qui opina (Michaels, 1977) que l'escola pitagòrica només va fer un recull de coneixements que arribaren a Grècia des d'Egipte i Babilònia on les investigacions sobre el sistema musical estaven més avançades.

La versió més estesa del descobriment dels fonaments de la música conta (Boeci, s VI dC) que un dia Pitàgores va passar per davant d'una ferreria i va veure que hi havia cinc ferrers treballant el metall. Va sentir que les encluses de diferent mida produïen sonoritats diferents. Unes eren més agradables a l'oïda que d'altres. Primerament pensà que el so depenia de la força amb què copejava cadascun dels ferrers. Va fer que s'intercanviessin els martells, però el resultat va ser que el mateix martell seguia produint el so dissonant, la qual cosa li va fer concloure que la sonoritat no depenia de la força dels esclaus, sinó de les característiques de cada martell.

El que va fer a continuació va ser pesar els quatre martells que produïen un so més agradable entre ells i va descartar el que produïa un so més dissonant. Els quatre de so "agradable" pesaven 6,8,9 i 12 lliures respectivament. Tornam a trobar versions contradictòries sobre aquest fet. Algunes asseguren que va mesurar els pesos dels martells en lliures, altres que només va trobar la relació de pesos entre ells.

Després va seguint treballant amb la idea de relacionar proporcions, pesos i sonoritat. Va disposar quatre cordes d'igual longitud damunt una taula i va lligar pesos als extrems les cordes. Després va colpejar les cordes per parelles, ajustant els pesos penjats de les cordes, fins que quan colpejava les cordes aconseguia uns sons consonants o agradables per a la seva oïda. El resultat va ser que els quatre sons consonants tenien pesos proporcionals a 6, 8, 9 i 12.

Per descomptat, aquest so agradable és molt subjectiu, ja que sabem que hi ha obres musicals que a algunes persones els resulten espantoses i a altres belles. En tot cas, com que coneixia els pesos del martells, va constatar la següent relació geomètrica:

$$\frac{12}{9} = \frac{8}{6}$$

Aquesta relació va ser anomenada "proporció musical" posteriorment, ja que conté les relacions entre els sons harmònics. Per les seves investigacions, va utilitzar un instrument musical anomenat monocordi-diapasó, que estava format per diverses cordes una devora de l'altra de la mateixa longitud, cada una amb diferents pesos penjats dels seus extrems. En el següent dibuix podem veure el filòsof grec treballant amb el monocordi-diapasó.

Descobriment de les raons de consonància per Pitàgores.

Gaffurio. Theorica musicae, 1492

Una vegada va tenir aquestes proporcions entre pesos que produïen sons harmònics, les va traslladar a un instrument d'una sola corda anomenat monocordi (del llatí *mono* (una) i *cordum* (corda)). Aquest tenia la corda fixa de longitud 12. Polsant fraccions de la corda total i analitzant el seu so, va descobrir que aquests sons agradables es produïen quan la longitud de la corda era de 9, 8 i 6 respecte al total de 12.

És així com sorgeix el que coneixem com a so de tònica també anomenat fonamental, que no és més que la nota produïda quan colpejam la corda en tota la seva llargària. La construcció d'aquest mètode experimental queda reflectit amb el fragment de Teó d' Esmira (s II dC): "*uns obtenen les relacions numèriques dels sons consonants mitjançant peses, uns altres mitjançant longituds".*

Per als pitagòrics, els nombres naturals, i especialment els quatre primers, tenien un significat molt especial. A aquestes tres proporcions (1/2, 2/3 i 3/4) les van anomenar *diapason*, *diapente* i *diatessaron,* respectivament, encara que avui dia les coneixem com a octava, cinquena i quarta.

Així va ser com Pitàgores va crear la primera escala musical de la història de forma experimental amb aquests fets:

- El so produït en polsar una corda depèn de la longitud.
- Els sons produïts a mesura que la corda s'escurça són més aguts.
- Els sons agradables (harmònics) apareixen en polsar dues cordes amb unes raons senzilles entre les seves longituds.
- Els sons dissonants apareixen amb altres proporcions, i no són agradables a l'oïda.

Avui en dia se sap que els sons són simplement vibracions que es transmeten a través de l'aire a la nostra oïda. La nota que produeix una corda està donada per la velocitat amb què vibra o, dit d'una altra manera, la freqüència amb què la corda vibrant passa per la seva posició inicial, i que la freqüència és inversament proporcional a la longitud de la corda.

3.2.3. La sèrie 6,8,9,12

Les propietats de l'escala musical descoberta per Pitàgores han estat tractades per molt d'autors. Iàmblic de Calcis, biògraf de Pitàgores, que va viure entre els segles III i IV dC, descriu els descobriments de l'Escola pitagòrica fent ús de la sèrie numèrica 6,8,9,12. També Calcidi, filòsof neoplatònic del segle IV dC, explica detalladament les relacions entre quartes, quintes i octaves recorrent a la mateixa sèrie. Finalment, Boeci, en el seu Tractat sobre l'aritmètica, es refereix a la relació

$$\frac{6}{8} = \frac{9}{12}$$

com la que representa l'harmonia fonamental del món. La relació numèrica anterior equival a una relació algebraica. Si la simplificam, trobam:

$$\frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

que és el valor de la quarta perfecta. Per altra banda, efectuant els quocients entre els distints elements de la sèrie 6,8,9,12, és possible obtenir les relacions de proporció que caracteritzen els diferents intervals musicals:

$$\frac{6}{12} = \frac{1}{2} \qquad \boldsymbol{interval\ d'octava}$$

$$\frac{8}{12} = \frac{2}{3} \qquad \boldsymbol{interval\ de\ cinquena}$$

$$\frac{9}{12} = \frac{3}{4} \qquad \boldsymbol{interval\ de\ quarta}$$

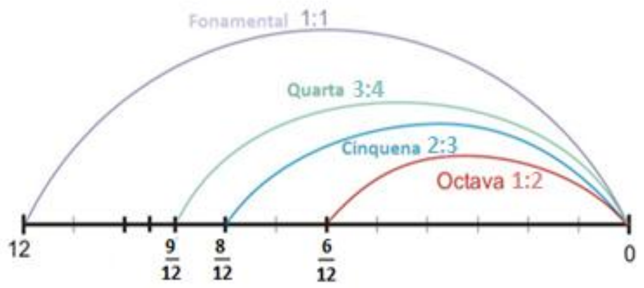
$$\frac{8}{9} \qquad \boldsymbol{interval\ de\ to}$$

Amb aquestes relacions podem operar de manera matemàtica. Per exemple, un interval d'octava està format per un interval de cinquena i un de quarta, en el sentit que si prenem un interval de quarta d'un interval de cinquena, obtenim un interval d'octava: si multiplicam les seves raons trobarem la de l'octava:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

Per tant, quan "sumam" intervals el que feim és multiplicar les seves raons, i en el cas contrari, quan "restam" intervals el que feim és dividir raons. De vegades i per abús del llenguatge, empram l'expressió "suma d'intervals" per calcular les proporcions d'una nova nota, però hem de tenir clar que matemàticament ens referim a un producte de raons de proporció.

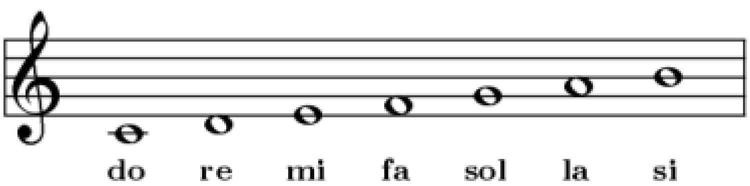
Així, doncs, la sèrie 6,8,9,12 permet exemplificar perfectament totes les relacions de proporció que vinculen les notes de l'escala musical. Una altra manera de visualitzar aquestes proporcions és damunt d'una corda de longitud 12. Si representam les raons respecte de la mida total de la corda veim que els sons harmònics (agradables a l'oïda) i al mateix temps les proporcions entre aquest.



En aquesta gràfica no hem representat l'interval de to a causa que no és consonant amb la resta, només hem representat els consonants respecte a l'estat fonamental. D'aquesta manera, per obtenir els sons bàsics de l'escala pitagòrica basta transportar damunt una corda la proporció corresponent a un interval determinat.

3.2.3. Tons i semitons

La teoria matemàtica de la música iniciada per Pitàgores i continuada pels pitagòrics va seguir avançant en el seu estudi, fonamentalment desenvolupada per dos deixebles de Pitàgores que van arribar a fundar escoles pròpies: Arquites de Tàrent i Aristògenes de Tars. Però va caldre esperar una mica més fins que Plató (427-347 aC) va posar nom a les notes de l'escala actual i va calcular les proporcions que hi havia entre elles. L'escala musical consta de set sons, Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si. Es va definir d'aquesta forma de set sons en base al fet que Pitàgores creia que cada una de les notes musicals estava relacionada amb cada un dels planetes del sistema solar.



Recordem que les proporcions trobades per Pitàgores han estat descobertes respecte d'una corda de longitud total de dotze unitats. Per tant aquestes proporcions que donen el valor de l'interval seran sempre menors que la unitat. A partir d'ara assignarem el valor del Do(3) com a 1 i el del Do(4) com a 2. D'aquesta manera ens serà més fàcil trobar els factors de proporcionalitat entre els sons de l'escala que sempre estaran entre un i dos. Per tant passarem de la fracció pitagòrica del so Fa (3/4) a la raó de proporció (4/3). Farem el mateix en els altres intervals pitagòrics, emprant a partir d'ara la inversa d'aquests com a raó de proporció. Una altra raó per fer-ho i que més endavant explicarem (apartat 3.3) amb tot detall és que la freqüència d'oscil·lació d'una corda depèn inversament de la longitud d'aquesta.

Per la construcció de l'escala Plató va calcular les proporcions dels tons i semitons de la següent manera:

1. Va dividir l'octava Do-Do en dues quartes justes i un to com indicam a continuació:

[Do,Fa]-[Fa,Sol]-[Sol,Do]

Cadascuna d'aquestes quartes justes està formada per dos tons i un semitò, per tant, són de la mateixa amplitud i una proporció de 4:3 respecte a l'octava. Així l'escala queda amb "distància" entre les notes d'aquesta manera T-T-S-T-T-T-S. Per exemple: de Do a Re tenim un to, de Re a Mi un to, de Mi a Fa un semitò...

2. Va dividir cadascuna d'aquestes quartes justes en tres subintervals. Els dos primers havien de correspondre a un to i el tercer a un semitò, per tant, havia de ser menor (encara que no necessàriament la meitat). Els semitons els va definir entre les notes [Mi-Fa] i [Si-Do]

3. Va assignar la raó 9/8 al interval d'un to.

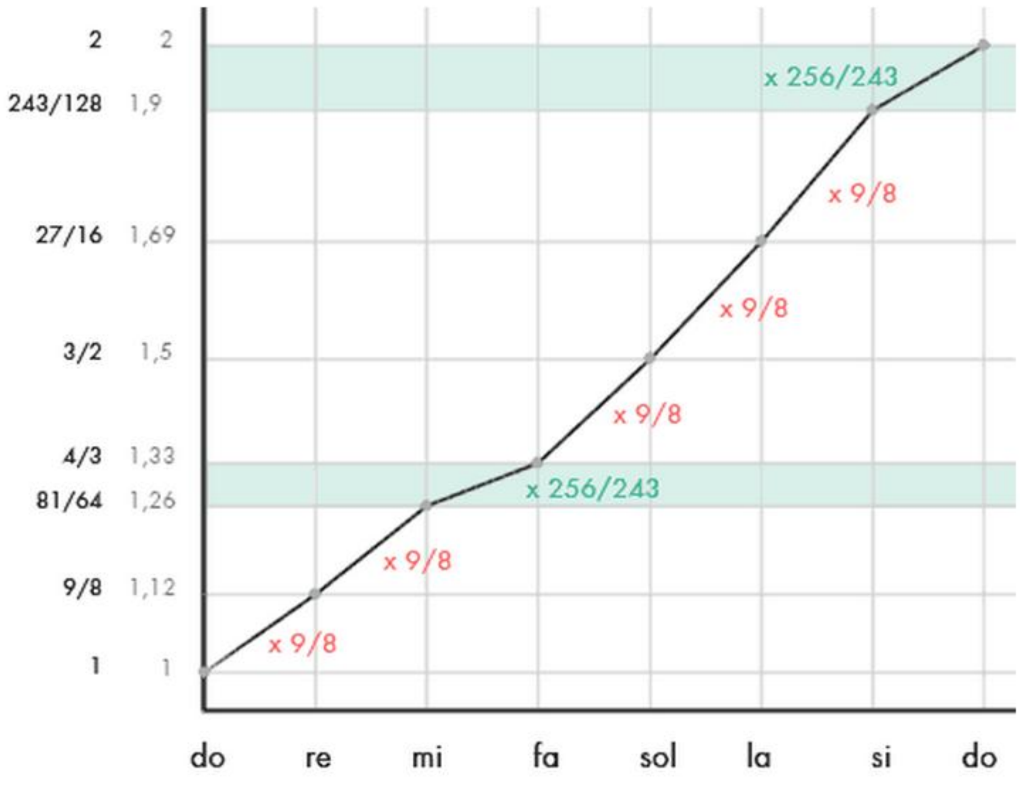
4. D'aquesta manera, si coneixem la proporció total 4/3, i sabem el valor de to (9/8) podem trobar el valor del semitò (S) amb una simple operació:

$$\frac{4}{3} = \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} \cdot S \quad \rightarrow \quad S = \frac{256}{243}$$

Si multiplicam les proporcions dels dos tons i el semitò (S) trobat obtindrem la proporció total de quarta. Per tant tenim definits els intervals de to i de semitò. L'escala musical construïda d'aquesta manera no es més que unes proporcions entre les set notes de l'escala. Podem agrupar les proporcions entre les diferents notes i el factors per passar d'una a la següent en una taula:

Nota	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
Proporció	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2
Factor	9/8	9/8	256/243	9/8	9/8	9/8	256/243	

On podem veure que per obtenir la proporció de cada nota basta multiplicar la proporció pel factor de la nota anterior. Existeixen cinc intervals de major mida i dos de menor mida. Una altra manera de veure aquestes diferents proporcions és representar gràficament les proporcions vs les notes.



Imatge extreta de Castro, Almudena. (2009)

En l'eix de les ordenades estan representades les proporcions, no lineals, i en l'eix de les abscisses estan representades les notes. La diferència de proporcions va en augment cada vegada que ens acostam a les notes més agudes, no obstant no ens adonam d'aquest fet debut a què la nostra percepció del so és logarítmica. Hem vist que s'ha definit el do(4) com a dues vegades el do(3). Si calculem la proporció del do(5) trobaríem que:

$$Do(5) = 2 \cdot Do(4) = 4 \cdot Do(3)$$

Per tant surten de forma natural les potències, i amb elles els logaritmes en l'escala musical, és per això, que és més convenient representar l'eix d'ordenades amb escala logarítmica. Així doncs, la percepció del so no és lineal. Les proporcions i les freqüències, com veurem més endavant, es descriuen perfectament amb una funció exponencial.

De la gràfica podem veure que la distància entre notes d'un to té la proporció de 9/8. En canvi la d'un semitò (Mi-Fa o Si-Do) és de 256/243. Amb aquesta construcció veiem que la definició de semitò no equival realment a la proporció de l'arrel quadrada d'un to (256/243 ≠ √9/8). Aquest problema és solucionarà amb l'escala temperada.

Aquesta escala pitagòrica-platònica d'afinació es va conèixer com l'Escala de Timeu, ja que va aparèixer publicada per primera vegada en el manual filosòfic titulat "Timeu", escrit per Plató. Va ser la divisió típica de l'escala durant tota l'Època Clàssica i l'Edat Mitjana, fins a l'arribada del Renaixement.

3.2.4. L'escala i les mitjanes

L'escola pitagòrica també va relacionar l'escala musical i les mitjanes. Va ser un altre filòsof grec, Arquites de Tàrent (s. V aC), qui va expressar-se en aquests termes:

"...a la música existeixen tres mitjanes: la primera és la mitjana aritmètica; la segona és la geomètrica; i la tercera és la mitjana subcontrària, anomenada harmònica..."

La **mitjana aritmètica** de n elements s'escriu matemàticament com:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$$

reemplaçant el valor del Do (3) i el Do (4) trobam que la mitjana és:

$$\bar{x} = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$$

Que és el valor de la proporció que havien trobat pel Sol (3/2). Per tant, la mitjana aritmètica determina la relació existent entre la nota Do i Sol. Com hem dit aquesta relació s'anomena interval de cinquena.

Una altra proporció citada per Arquites de Tàrent és **la mitjana harmònica**. Aquesta es sol emprar per mitjanar velocitats. Si tenim una quantitat finita de nombres, la mitjana harmònica és la recíproca de la mitjana aritmètica dels recíprocs d'aquests nombres. La podem escriure matemàticament de la següent manera:

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} = \frac{n}{\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)}$$

En el nostre cas, si tornam a incloure els valors de les proporcions dels dos Do de l'octava:

$$H = \frac{2}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$

que correspon la proporció que havíem trobat pel Fa (4/3). Per tant la mitjana harmònica defineix la relació entre el Do i Fa. Aquesta relació s'anomena interval de quarta justa.

La tercera **mitjana** que anomena Arquites és la g**eomètrica**, aquesta es pot definir matemàticament com:

$$\bar{y} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$$

Per el nostre cas, si tornam a incloure les proporcions del nostres Dos tenim que:

$$\bar{y} = \sqrt[2]{1 \cdot 2} = \sqrt{2}$$

Per tant la mitjana geomètrica dóna com a valor un nombre irracional. Aquest fet va suposar una gran sorpresa i malestar. Recordem que els nombres irracionals no entraven dedins els canons de bellesa i proporció grecs. Ells defensaven la proporcionalitat amb nombres enters. Aquests nombres que ells anomenaven incommensurables estaven prohibits, per tant varen decidir descartar aquest resultat. Com explicarem més endavant, el valor trobat de $\sqrt{2}$ dóna el valor de la nota Fa# en una escala cromàtica, construïda amb un temperament igual.

El motiu perquè Arquites anomena la mitjana harmònica i després la rebutja no està del tot clar. Recordem que no es disposa de documentació escrita per ell, només tenim relats fets pels seus deixebles. El que si sabem, és que trobà que la mitjana aritmètica, la geomètrica i l'harmònica estan en progressió geomètrica segons la fórmula:

$$\bar{y}^2 = \bar{x} \cdot H \quad \text{amb} \quad \bar{x} > \bar{y} > H$$

Recordem la llegenda del descobriment del nombre irracional √2 per part de Hipàs de Metapont (V aC). Ell el va descobrir en voler mesurar la diagonal d'un quadrat de costat 1. En trobar el resultat i no poder expressar-lo com un nombre natural o suma de fraccions, va decidir comunicar-ho a la gent de fora de la comunitat pitagòrica. Això no va agradar als seus companys, i van decidir tirar-lo a la mar, causant-li la mort, per preservar el secret dels nombres irracionals.

3.2.5. Problemes de l'escala pitagòrica

L'escala pitagòrica, en ser construïda a partir d'unes relacions senzilles entre la quarta, la quinta i l'octava, té alguns problemes de construcció. El problema principal és que les proporcions que defineixen els intervals no són constants. Si dividim les raons de dues notes consecutives veiem que:

	Proporció	**Raó**	
Tònica	1		**Do**
Segona	9/8	9/8=1,125	**Re**
Tercera	81/64	9/8=1,125	**Mi**
Quarta	4/3	256/243=**1,053**	**Fa**
Cinquena	3/2	9/8=1,125	**Sol**
Sexta	27/16	9/8=1,125	**La**
Sèptima	243/128	9/8=1,125	**Si**
Octava	2	256/243=**1,053**	**Do**

Podem veure que hi ha dues raons diferents: la de to 9/8 i la de semitò 256/243. La pregunta que ens fem és quina relació hi ha entre les dues raons. Per calcular-ho només hem de multiplicar la raó de dos semitons, si ho feim veiem que dos semitons fan gairebé un to $(256/243)^2=1{,}109$ però no és exactament el mateix.

Com que un to no és exactament dos semitons, hi havia llocs on els intervals eren més grans o més petits que en altres llocs. Això donava problemes per afinar instruments amb intervals fixos com el piano o la guitarra.

Aquests problemes de l'escala pitagòrica i d'altres creades en el segle XVII no són greus si s'utilitzen per executar obres amb temperaments de la Grècia antiga, basats en la quinta perfecta de raó 3/2, fins a obres de l'Edat mitjana.

Amb el pas del temps, la dificultat de les obres va anar augmentant, tant harmònicament com tonalment. Aquesta escala no podia satisfer les exigències d'afinació i és així com va introduir l'estàndard que utilitzam actualment anomenat escala temperada. Les notes que té són les mateixes, però la forma d'afinació és diferent. En l'escala temperada, la raó entre la freqüència d'una nota i l'anterior és sempre constant.

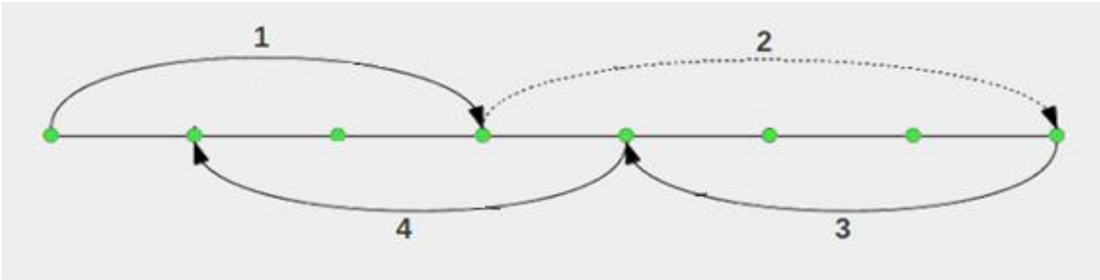
3.2.6. Construcció per cinquenes

Una de les frases més cèlebres atribuïda a Pitàgores és: "*Qualsevol interval pot expressar-se com una combinació d'un nombre major o menor de cinquenes justes*". El sistema pitagòric per calcular l'escala està basat en la concatenació de cinquenes (Zamacois, 1975). Per exemple si partim de la nota Do obtemin:

Do → Sol → Re → La → Mi → Si → Fa → Do

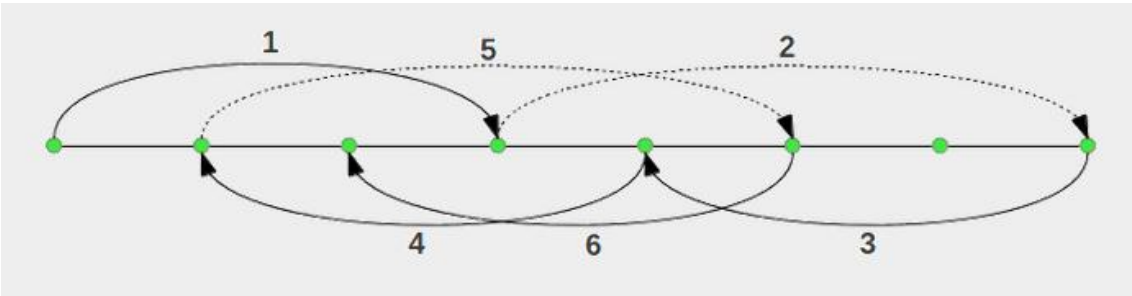
que són totes les notes de l'escala musical. Per aquest càlcul hem comprès 6 octaves consecutives. Aquest mateix càlcul es pot realitzar dintre de només una octava. Per fer-ho hem d'emprar una combinació de cinquenes i quartes. La distància de tots els intervals, incloent l'octava, pot obtenir-se fàcilment usant sis "salts" alternatius d'una quarta perfecta (un interval de quatre notes amb un quocient de 4/3, amb línia contínua als dibuixos que segueixen) o una cinquena perfecta (un interval de cinc notes amb un quocient de 3/2 amb línia discontínua), de forma ascendent o descendent segons convingui, depenent de la nota en la qual vulguem "aterrar".

Cada salt proporciona el quocient acumulat des de la nota inicial fins a la nota d'"aterratge" multiplicant o dividint pels factors corresponents. Per exemple si volem calcular la fracció de la nota Re, veiem que tenim un salt de quarta (4/3) i un de cinquena (3/2) ascendents i després dos de quarta descendents (4/3), per tant el nostre Re tindrà el següent valor:



$$Re = \frac{1 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}}{\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3}} = \frac{9}{8}$$

Anem a fer un altre exemple. Per calcular la nota Mi haurem de fer tres salts ascendents (1,2,5); un de quarta (línia contínua) i dos de cinquena (línia discontínua) i tres descendents (3,4,6) tots ells de quarta. Per tant, el valor que trobam serà:



$$Mi = \frac{1 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}}{\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3}} = \frac{81}{64}$$

Pitàgores i Aristògenes desenvoluparien el càlcul fins a la quantitat de 12 cinquenes justes ascendents – multiplicant la freqüència original per 3/2 dotze vegades –, la qual cosa equivalia a calcular set octaves consecutives sobre el mateix so original (és a dir, multiplicar la seva freqüència per 2 set vegades).

3.2.7. Coma pitagòrica

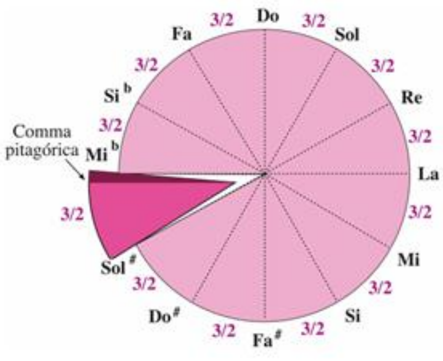
Històricament, els sistemes d'afinació es basen en els conceptes de cinquena, d'octava i en la seva relació. Entre dues notes de freqüències f1 i f2, hi ha un interval de cinquena si f2 = 3/2 · f1 i hi ha un interval d'octava si f2 = 2 · f1. Aquestes proporcions entre les notes donaran problemes a l'hora de construir l'escala. Si prenem una nota inicial i la continuam multiplicant per 3/2 mai obtindrem exactament una potència de 2 i, per tant, mai tornarem a sentir el so exacte a una altra octava del qual vàrem partir. La raó és purament aritmètica. Amb dotze cinquenes tenim 7 octaves de forma aproximada,

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 129{,}74 \quad i \quad 2^7 = 128$$

La diferència (és a dir, el quocient) entre aquests dos valors s'anomena **coma pitagòrica**. Es calcula dividint els dos intervals:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} : 2^7 = \frac{531441}{524288} = 1{,}013$$

Per petita que paregui, aquesta imprecisió ha estat un dels problemes que ha acompanyat els músics en els darrers vint segles. Es pot veure aquesta situació gràficament. Si representam les dotze cinquenes veiem que no aconseguirem tancar el cercle format per set octaves, el seu valor es un poc superior.



Imatge adaptada de Liern Carrion, V. & Queralt Llopis, T. (2008).

El problema creat per la coma és important, especialment si volem utilitzar notes alterades per sostinguts o bemoll. Un sostingut és una alteració musical que fa augmentar el so d'una mateixa nota un semitò. Per altra banda, un bemoll és una alteració musical que fa disminuir el so d'una mateixa nota un semitò. La coma pitagòrica produeix una petita diferència entre sons alterats de distintes notes.

3.3. Explicació física de l'experiment pitagòric

La teoria musical actual estableix relacions entre les freqüències per fixar les notes. Aquest concepte de freqüència no era conegut pels grecs. Pitàgores el que va fer és relacionar les longituds de les cordes sotmeses a tensions iguals i la nota emesa al vibrar. Amb un estudi físic podem veure la relació que hi ha.

Els instruments de corda emeten sons gràcies a les vibracions transversals d'una corda. La vibració d'una corda és una ona. Una corda vibrant produeix un so la freqüència d'oscil·lació del qual sempre és constant.

Si tenim una corda fixada en els seus dos extrems, quan produïm una pertorbació transversal damunt la corda, aquesta es propagarà per la corda fins a arribar a l'extrem i després es reflectirà, prosseguint la marxa en sentit contrari. La velocitat de propagació **c** ve donada en funció de la tensió de la corda **T** i de la densitat lineal **μ** de la corda per mitjà de la següent relació:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Si suposam que la longitud total de la corda és **L**, amb els extrems fixats, el moviment ondulatori sinusoïdal es propagarà fins a l'extrem, es reflectirà i naixeran ones estacionàries en les quals la distància entre cada node consecutiu val **L/2**. Un node és el punt de la corda que roman immòbil durant la vibració de la corda. Com que els extrems seran nodes, ja que estan fixats, les formes pròpies de vibracions d'una corda s'obtindran si la dividim en un nombre de parts iguals i posam els nodes en el punt de divisió.

Una vegada que es coneix la velocitat de propagació, es pot calcular la freqüència del so produït per la corda. La velocitat de propagació de l'ona **c** és igual a la longitud d'ona **λ** dividida pel període **τ**, o multiplicada per la freqüència **f**:

$$c = \frac{\lambda}{\tau} = \lambda f$$

Si la longitud de la corda és **L**, l'harmònic fonamental és el que es produeix per la vibració els nodes de la qual són els dos extrems de la corda, per la qual cosa **L** és la meitat de la longitud d'ona de l'harmònic fonamental. Si operam trobam:

$$f = \frac{c}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Si suposam una corda amb **n** nodes harmònics, resultarà que la seva freqüència harmònica és:

$$f_n = \frac{nc}{2L}$$

que ens donarà una freqüència en funció de la tensió **T** i la densitat **μ**:

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Aquesta fórmula va ser enunciada per Galileu en el segle XVII i descriu les propietats següents:

- La freqüència del mode fonamental és directament proporcional a l'arrel quadrada de la Tensió.
- Com més curta és la corda, més alta és la freqüència fonamental.
- Com més gran és la tensió, més alta és la freqüència fonamental.
- Com més lleugera és la corda, més alta és la freqüència fonamental.

Una vegada explicats els fenòmens físics que hi ha darrera de la vibració d'una corda és fàcil relacionar-ho amb la visió pitagòrica. Com hem vist, la freqüència és inversament proporcional a la longitud de la corda que la produeix, per tant tenim:

Nota	Longitud de la corda	Freqüència
Fonamental	L	f
Octava	1/2 L	2 f
Quarta	3/4 L	4/3 f
Cinquena	2/3 L	3/2 f

3.4. L'escala temperada

En el segle XVII Johann Sebastian Bach, en la seva obra "*El clavecí ben temperat"*, va modificar les escales musicals conegudes fins aquell dia. Des de llavors ençà, l'escala emprada a occident és l'escala temperada. Està basada en 12 semitons iguals i que només respecta la consonància amb una octava. Tots els altres intervals resulten lleugerament dissonants.

El temperament igual és el sistema d'afinació més comú en la música moderna occidental i divideix l'octava en dotze semitons iguals. Ara veurem les matemàtiques del sistema temperat. Per això intentarem esbrinar quant mesura l'interval d'un semitò en aquest sistema. Un interval és una proporció de freqüències, per la qual cosa la freqüència de cada nota de l'escala cromàtica s'obtindrà en multiplicar la nota anterior per la proporció (raó) corresponent a un semitò. Les dotze freqüències de l'escala temperada són:

do – do# - re – re# - mi – fa – fa# - sol – sol# - la – la# - si

Si volem saber, per exemple, quina és la freqüència de do#, multiplicarem la freqüència de do per "x". Per obtenir re, tornarem a multiplicar el resultat obtingut per x, (o la freqüència de do per x^2). Per tant, si volem completar una 8ª amb 12 intervals iguals, necessitem un semitò tal que en multiplicar-lo 12 vegades consecutives per la freqüència base, doni com a resultat una freqüència doble. Escrit en forma matemàtica:

$$x^{12} = 2 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt[12]{2} \approx 1{,}059$$

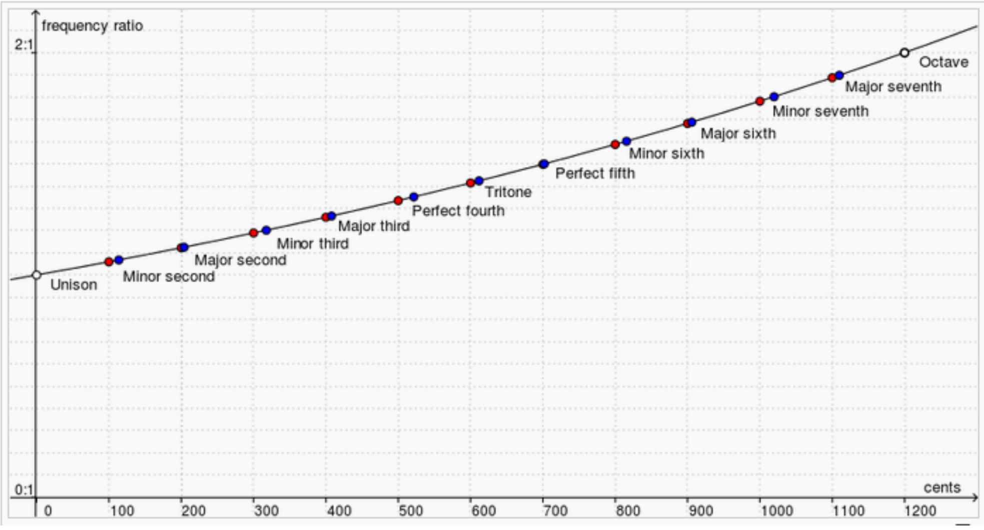
Aquesta és la relació de freqüències corresponent a un **semitò temperat**, que és diferent del semitò pitagòric: 256 / 243 ≈ 1,053.

Per trobar la proporció corresponent a qualsevol altre interval de l'escala temperada, tan sols haurem d'elevar $\sqrt[12]{2}$ al nombre de semitons que conté aquest interval. En la taula podeu veure una comparativa entre els intervals pitagòrics i els temperats.

Nota	**ST**	**Interval**	**Afinació pitagòrica**	**Afinació temperada**
Do	0	Uníson	1	1
Do#	1	Semitò	2187/2048=1,067	$\sqrt[12]{2} = 1{,}059$
Re	2	2ª Major	9/8=1,123	$\sqrt[12]{2^2} = 1{,}112$
Mib	3	3ª menor	32/27=1,185	$\sqrt[12]{2^3} = 1{,}189$
Mi	4	3ª Major	81/64=1,266	$\sqrt[12]{2^4} = 1{,}260$
Fa	5	4ª Justa	4/3=1,333	$\sqrt[12]{2^5} = 1{,}335$
Fa#	6	4ª Augmentada	729/512=1,520	$\sqrt[12]{2^6} = 1{,}414$
Sol	7	5ª Justa	3/2=1,5	$\sqrt[12]{2^7} = 1{,}499$
Sol#	8	5ª Augmentada	6561/4096=1,601	$\sqrt[12]{2^8} = 1{,}587$
La	9	6ª Major	27/16=1,687	$\sqrt[12]{2^9} = 1{,}682$
Sib	10	7ª menor	16/9=1,777	$\sqrt[12]{2^{10}} = 1{,}781$
Si	11	7ª Major	243/128=1,898	$\sqrt[12]{2^{11}} = 1{,}888$
Do	12	8ª Justa	2	2

Aquestes diferències es poden veure més clarament si representam gràficament la freqüència vs cents. El cent (K1200) és una unitat logarítmica emprada per mesurar intervals musicals. El temperament igual divideix la octava en 12 semitons iguals de 100 cents cada un, i per tant:

$$K1200 = \sqrt[1200]{2} \approx 1{,}00057$$



Viquipèdia. (2014)

Podem veure de color vermell l'escala temperada i en blau la pitagòrica. Les majors diferències de valor les trobam en les notes alterades (#).

Una altra manera de veure aquestes petites separacions entre les escales és calculant les freqüències d'oscil·lació. L'escala temperada pren com a base el La (3) natural de 440 Hz i a partir d'allà es van calculant les freqüències de les diferents notes multiplicant-les pel nombre de semitons temperats necessaris. Per exemple, si volem calcular la freqüència del Do (4) des del La (3) tenim 3 semitons:

$$f_{Do} = 440 \cdot 2^{3/12} \approx 523\ Hz$$

d'aquesta manera anirem emplenant tota la taula de freqüències. Per altra banda, l'escala pitagòrica es calcula a partir del Do(3) de 262 Hz temperat. A partir d'ell es va multiplicant cada nota per la proporció corresponent i s'aconsegueix les freqüències de tota l'escala. Per exemple, per calcular la freqüència del Fa (3) a partir del Do (3) tendrem:

$$f_{Fa} = 262 \cdot 4/3 \approx 349\ Hz$$

que amb el truncament decimal surt igual a la freqüència temperada. Si empleam la resta de la taula trobam:

Nota	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
Temperada	262	294	330	349	392	440	494	523
Pitagòrica	262	295	332	349	393	442	497	524

on podem veure aquestes petites diferències entre les freqüències dels valors pitagòrics i temperats.

3.5. Propostes prèvies de l'ús de la música com a eina per l'ensenyament de les matemàtiques

Per a la realització d'aquest Treball de fi de màster, hem volgut consultar primerament quines propostes didàctiques musicals-matemàtiques s'havien realitzat.

En el treball de fi de màster "*Matemàtiques i música. El taller pitagòric*", (Cartró Giner, S. 2012) s'hi analitzen les relacions de l'escola pitagòrica amb les proporcions, fins a l'escala temperada. També s'hi desenvolupen la relació de l'harmonia i la divisibilitat, com també els ritmes i els nombres. Finalment s'hi tracten la notació musical i el nombre d'or Φ. La documentació d'aquest treball de fi de màster és exhaustiva. A l'hora de proposar activitats es limita a donar possibles idees, però no les desenvolupa.

Un altre treball que ha servit per fer la recerca pedagògica és "*Musica y matemáticas*" (Blázquez, R., 2012). En ell es tracten els fonaments matemàtics de la música de l'escola pitagòrica, de les esferes de Kepler i del monocordi. Es fa un repàs de les diferents escales musicals. També s'hi parla de la geometria en la música i la sèrie de Fibonacci. Les propostes didàctiques realitzades per l'autora d'aquest treball de grau són diverses, de bona qualitat, ben estudiades i per nivell de primària fins ESO. Les propostes més interessants són:

- *Fraccions i ritme musical.* El seu objectiu és entendre que la duració de les notes musicals no són més que relacions entre fraccions.
- *Mínim comú múltiple.* El seu objectiu és ensenyar la divisibilitat, múltiples i divisors mitjançant diferents ritmes d'una cançó.
- *Valors de cada nota.* Enfocat a donar a conèixer el sistema d'afinació pitagòric a través de la utilització de regles de tres en situacions de proporcionalitat.
- *La successió de Fibonacci.* En ella mostra situacions on apareixen la successió de Fibonacci i el nombre auri amb l'objectiu d'estudiar el nombre i aprofundir en el coneixement damunt ell.

En la revista *Suma+* apareixen diversos articles on es proposen activitats per realitzar a classe explicant conceptes matemàtics a través de la música. Per exemple (Gell-mann, M., & Borr, E., 2011), aprofita el disseny de jocs per assolir el domini de les fraccions mitjançant l'ús de fitxes de dòmino relacionades amb la duració de les notes musicals. Altres propostes aprofiten els diversos tipus de compassos musicals per estudiar les fraccions dels nombres enters. Totes aquestes activitats estan enfocades a primària. En l'article "*Sonidos, fracciones, medias, potencias y funciones exponenciales*" (Beato Sirvent, J., 2003), s'hi estudien les relacions dels diferents sons i els nombres. L'escala pitagòrica serveix per estudiar les proporcions. L'afinació dels diferents sons és la base per l'estudi de l'escala temperada i les propietats de les potències. Totes les propostes que apareixen en aquest article són molt encertades, documentades i ben estructurades. Es poden fer servir per a un 2n o un 3r d'ESO. Aprofitarem aquesta proposta com a punt de partida de l'estudi de les proporcions en l'escala pitagòrica, però nosaltres la completarem afegint elements manipulables com és la fabricació del monocordi. Una proposta per l'estudi de les funcions periòdiques i les transformades de Fourier (Pol, J. L., 2007) es pot presentar mitjançant les ones produïdes pels instruments musicals. Aquesta estaria enfocada a un nivell universitari, explicant la relació entre el domini temporal i freqüencial.

Un altre recurs per l'aula (Liern Carrión, V.,1994) tracta de mostrar el vessant matemàtic de la música relacionant música amb vectors, distància entre sons amb logaritmes, i música amb funcions. La utilització de vectors serveix per caracteritzar el to, la intensitat i timbre d'un so. D'aquesta manera els alumnes poden veure en l'ús de les matemàtiques un instrument de llenguatge capaç de "traduir" una partitura. Una de les conclusions més interessants d'aquest treball és la capacitat de treball que tenen els alumnes davant d'una proposta motivadora, la qual cosa fa notòria la importància de la tria acurada de les activitats proposades.

Un recurs que és molt utilitzat és la pel·lícula de Walt Disney "Donald en el País de las Matemáticas"; en ella el personatge de dibuixos fa un breu però molt interessant recull de situacions on podem veure aquesta relació de la música i les matemàtiques. La proposta pedagògica "*Pequeño divertimento músico-matemático*" (Muñoz Santonja, J., 1994) ha aprofitat aquesta pel·lícula per mostrar de forma amena conceptes matemàtics, personatges matemàtics o inclús teoremes.

4. Desenvolupament de la proposta

4.1. Introducció

En aquest punt es presenten unes propostes tenint en compte el currículum de la matèria de música, així enfocarem els continguts des de diferents punts de vista. Tot seguit presentarem, a grans trets, les característiques comunes que fan que aquests recursos serveixin i siguin eficaços i també veurem quins criteris hem seguit per triar-los.

4.2. Criteris de selecció

La tria de les propostes didàctiques ha seguit uns certs criteris amb la finalitat que despertin l'interès dels alumnes i que aquests vegin la utilitat de les matemàtiques. Els criteris seguits són els següents:

Interdisciplinaris: els continguts seran comuns a dues assignatures, la qual cosa farà que l'alumne pugui veure el mateix concepte des de diferents punts de vista.

El **currículum:** a l'hora de triar el material ens hem fixat en els continguts del currículum que volem treballar de les dues assignatures. En tenir propostes que seran compartides amb l'assignatura de música també haurem de consultar el seu currículum per saber quins continguts han donat i en quin moment. Les activitats proposades necessiten uns coneixements musicals que s'adquireixen a 5è o 6è de primària. Com que propostes estan dirigides a cursos de 1r, 2n i 3r d'ESO, els coneixements musicals estaran totalment assolits per tant el currículum de l'assignatura de matemàtiques serà el que cobrarà major importància.

El grup classe:

Per a la consecució de les activitats proposades utilitzarem l'aprenentatge cooperatiu, potenciant les cinc característiques d'aquest tipus d'aprenentatges (Johnson, et al. 1999):

- Interdependència positiva: a través d'unes activitats clares perquè tot l'alumnat pugui finalitzar l'activitat i un objectiu grupal.
- Responsabilitat individual i grupal: el grup ha d'assumir la responsabilitat d'aconseguir els objectius, per això s'utilitzarà una avaluació grupal i no individual de manera que tots els integrants siguin responsables de l'avaluació.
- Interacció estimuladora: els canvis en l'avaluació implicaran a tots els integrants del grup a buscar l'èxit dels altres, compartint recursos, ajudant-se…
- Pràctiques interpersonals i grupals: els alumnes hauran d'aprendre estratègies interpersonals per treballar amb la resta de membres del grup, a través d'intercanvis d'opinions en la cerca de la resposta més adequada.
- Integració grupal: les diferents activitats proposades permeten als integrants del grup analitzar en quina mesura estan aconseguint les seves metes i mantenint relacions de treball eficaços.

Per aconseguir aquestes característiques durem a terme tres accions:

-La primera acció serà la realització d'agrupaments heterogenis quant habilitat cap a la matèria, establint tres nivells (nivell 1- habilitat baixa, nivell 2- habilitat mitjana, nivell 3- habilitat alta), i actitud cap a la matèria segons recomanen Johnson, Johnson i Scott (1978).

- La segona acció serà la modificació dels criteris d'avaluació, assignant una qualificació grupal que serà la mateixa per a tots els membres del grup.

- La tercera, i última acció, fa referència a la grandària dels grups que se cercarà que no sigui superior a quatre, seguint les recomanacions de Serrano i González-Herrero (2008).

La **temporalització:** la duració de cada proposta ha estat fixada entre una i dues sessions. L'activitat del monocordi requereix una sessió només per la construcció de l'instrument. Si el centre no disposa de taller, el professor convé que dugui fet un monocordi com a mostra per realitzar l'activitat.

4.3. Contribució a les competències bàsiques

Recordem que una de les definicions de competència es l'habilitat per afrontar amb èxit demandes complexes en contexts particulars. En la LOMCE (Llei orgànica 8/2013, de 9 de desembre) tenim la llista de les 7 competències bàsiques (competències clau) que s'han d'assolir en finalitzar el procés d'escolarització. Anem a analitzar-les per les nostres propostes:

• **Competència lingüística**: els alumnes han d'emplenar la fitxa de cada activitat. Han d'escriure les seves conclusions i resumir l'activitat realitzada, la qual cosa fomenta la seva comunicació. També han de parlar en el grup, expressant les seves opinions, dubtes i raonaments, la qual cosa afavoreix i reforça la seva competència lingüística.

• **Competència matemàtica i competència bàsica en ciència i tecnologia**: afavorim la modelització, el raonament, l'argumentació, la representació així com també la resolució de problemes. La competència en ciència i tecnologia en aquest cas no la tractarem.

• **Competència digital:** No la tractarem en les activitats proposades.

• **Aprendre a aprendre:** Fomentarem la reflexió sobre el que s'està fent per autoregular l'aprenentatge de l'alumnat. També la desenvoluparem mitjançant l'aprenentatge conscient.

• **Competències socials i cíviques:** Un dels recursos que permet aportar diversitat en la forma de treballar en l'aula és l'agrupament dels estudiants. Les activitats proposades han estat dissenyades per a treballar en petits grups. És important que els alumnes aprenguin i es socialitzin. Com que el temps de les activitats és curt i els materials poden ser escassos recomanam que els grups siguin de 3 o 4 persones.

• **Sentit d'iniciativa i esperit emprenedor:** No la tractarem en les activitats proposades.

• **Consciència i expressions culturals:** Fomentarem l'estudi de les expressions culturals, en concret l'apreciació i la valoració de la música mitjançant l'estudi de l'origen de l'escala musical occidental.

Activitat 1A. El monocordi

Per la construcció d'aquesta activitat hem agafat un treball semblant (Liern Carrion, V. & Queralt Llopis, T. 2008) com a punt de partida. En ell proposaven la construcció del monocordi amb una sola corda i després realitzaven un estudi de la relació entre les longituds de la corda i el so que emeten en vibrar. El que hem fet és completar el treball amb l'estudi de les consonàncies per parelles de cordes com també amb les preguntes d'anàlisi.

Tot seguit donam un resum de la fitxa de l'activitat.

Abans de començar

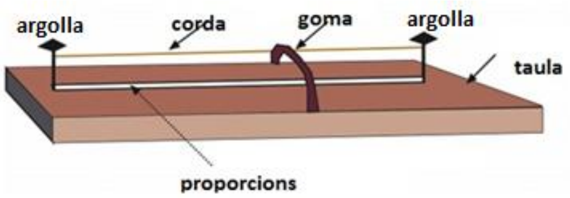
L'instrument utilitzat per Pitàgores per l'estudi de l'escala musical va ser el monocordi. Aquest consta d'una corda d'una longitud determinada proporcional a 12, situada damunt una taula. Els seus extrems estan amarrats amb una clavilla. La corda està tensada. També disposa d'un pont mòbil entre la taula i la corda, per obtenir proporcions de 9, 8 i 6 respecte a 12, mantenint la tensió dels dos trossos de corda.

En polsar la corda obtindrem el que Pitàgores va anomenar com so primari o to fonamental. Si movem el pont a les posicions 9, 8 i 6 i polsam la corda obtindrem el so de quarta, cinquena i octava, respectivament. Els sons produïts en altres posicions del pont mòbil no resultaven tan agradables.

Construcció d'un monocordi

Anem a construir un monocordi per poder visualitzar correctament la relació entre les proporcions i les notes. Necessitarem:

- una taula de fusta d'uns 40 cm
- dues argolles
- una corda de guitarra prima
- una goma elàstica (es pot fer sense)



Passa a passa

- Clava les argolles a una distància de 36 cm.
- Marca una línia recta entre les dues argolles.
- Has de dividir els 36 cm de la recta en 12 parts iguals. Com ho faries?

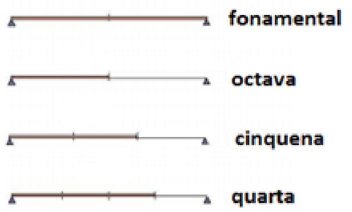
- Marca les proporcions ½ (6 parts), 2/3 (8 parts) i ¾ (9 parts) damunt la recta agafant com origen un dels costats.
- Col·loca la corda al voltant de les argolles de manera que quedi ben tensa. Si no pots, demana ajuda al professor.
- Introdueix la goma elàstica entre la taula i la corda. Si no tens una goma, hauràs de prémer amb una mà la corda i amb l'altra mà polsar la corda.

Desenvolupament de l'activitat

- Lleva la goma i polsa la corda del monocordi. El so que escoltes és l'anomenat fonamental.
- Ara col·loca un dit de la mà a la meitat de longitud de la corda, o la goma si disposes d'ella. A continuació polsa un dels trossos simètrics que has format. Escolta el so. Aquest so és una octava més alt que el de l'estat fonamental.
- Col·loca el dit o la goma a 2/3 de la longitud de la corda (8 parts). Polsa la part de la corda més llarga i escolta el so. Aquest és el so d'una cinquena respecte al so fonamental.
- Finalment col·loca el dit o la goma a ¾ de la longitud total (9 parts). Polsa la part de la corda més llarga i escolta el so. Aquest és el so d'una quarta respecte del so fonamental.

Analitza

- 1. Escriu les fraccions necessàries respecte a la longitud de la corda per aconseguir els sons següents:



- 2. Ara escriu aquestes fraccions en forma decimal.

- Ara intercanvia el monocordi amb el d'un altre grup que tengui la corda de diferent gruixa. Torna a reproduir els sons que has trobat abans. Sonen igual? Quin creus que és el motiu?

- Enumera dos factors que influeixin en el so de la corda.

Consonàncies

En aquesta segona part volem reproduir el que Pitàgores va anomenar sons agradables a l'oïda. Per això necessitam dos monocordis que estiguin "afinats" en la mateixa nota fonamental. Per fer ho, agafarem dos monocordis que estiguin fets amb la corda de la mateixa gruixa i que el seu estat fonamental soni el més parescut possible. Hem d'aconseguir que la corda estigui a una tensió el més semblant possible. Es podria dur un afinador portàtil de guitarra per estar totalment segurs que sigui el mateix so, però a causa de la construcció casolana del nostre monocordi no fa falta, ja que es desafina ràpidament.

Activitat 1B. Consonàncies

Situam per parelles els monocordis afinats amb el mateix so fonamental. En el primer sempre polsam l'estat fonamental, i el segon anam polsant primer l'estat fonamental i després les dotze parts en les quals hem dividit la longitud de la corda una rere l'altre. Cada part ens donarà una longitud de corda diferent i per tant una nota diferent.

Estam intentant identificar les parelles de son més agradables. Com que és molt subbjectiu, el millor que podem fer és una taula amb valoració de cada membre del grup.

Fracció corda respecte a 12	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Alumne 1											
Alumne 2											
Alumne 3											
Alumne 4											

- Analitzant les respostes del grup, quines fraccions de la corda sonen més agradables juntament amb la de l'estat fonamental? (escriviu una creu en la taula)

- Quines fraccions resulten menys agradables a l'oïda?

- Ara intercanvia els dos monocordis amb altres dos emparellats per la seva sonoritat i repeteix l'experiència. Sortiran les mateixes fraccions? Quins creus que són els factors que influeixen en la sonoritat d'una nota?

Problemes trobats

Hem cregut que el més interessant per veure el funcionament del monocordi era construir-ne un nosaltres mateixos. En fer-ho ens hem trobat amb uns problemes que no esperaven que a continuació explicarem.

Per fixar la corda a la taula hem elegit unes argolles, perquè hem pensat que així serà més fàcil donar tensió a la corda només cargolant més o menys l'argolla a la fusta. El problema que ens hem trobat és que quan donàvem tensió la corda de vegades es situava a l'extrem inferior de l'argolla i no quedava distància suficient per poder pinçar la corda. Una solució seria posar un claviller de guitarra, però aquests són més cars i requeririen anar a una tenda especialitzada. La solució que hem trobat és anar amb molta cura a l'hora de fer el nus de la corda a l'argolla i mirar de deixar-lo en la part alta de l'argolla, així quan li donem voltes per agafar tensió aquest ens quedarà en una posició mitjana i tendrem distància suficient per poder pinçar correctament la corda.

Vàrem realitzar primerament l'activitat amb un fil de pescar que teníem per casa pensant que podríem obtenir el mateix resultat. El problema va ser que el fil de pescar té poca flexibilitat i ens va ser molt difícil realitzar els nusos necessaris per ancorar-lo a l'argolla, per això vàrem emprar una corda de guitarra. La corda de guitarra elegida és la més prima de totes (Sol 3) per ser la més manejable.

La goma elàstica serveix per anar variant la llargària de la corda, i així podem obtenir diferents sons. També es pot fer sense la goma, prement amb els dits la corda en la posició de la corda que volem, per tant no faria falta estrictament.

Hem resumit en una taula els punts més importants en els quals ens hem basat per realitzar aquesta activitat:

Construcció d'un monocordi	
Nivell	1r ESO (possibilitat d'augmentar el nivell fins 2n d'ESO)
Continguts	• Reconeixement i ús de la fracció com a partició i relació entre les parts en contextos reals. • Comparació de fraccions senzilles: ordenació i situació sobre la recta numèrica. • Comparació i ordenació d'unitats i quantitats d'una mateixa magnitud.
Objectius	• Comprendre el significat de les fraccions. • Comparar fraccions amb la unitat.
Requisits	• Nombres enters. • Fraccions.
Situació temporal	• Pot realitzar-se al primer trimestre una vegada realitzat el tema de nombres i fraccions. • Les qualitats del sons i la discriminació auditiva es realitza a 5è de primària a l'assignatura d' Educació artística.
Criteris d'avaluació	• 1.Càlcul de les fraccions d'un nombre. • 2.Relacions entre fraccions i decimals.
Mètode avaluació	• Avaluació de fitxa.
Competències	• Competència matemàtica i tecnològica. • Competència lingüística. • Competències socials i cíviques. • Competència expressions culturals.
Metodologia	• Activitat guiada. Experimentació en taller. Fitxa per reflexió.
Temps estimat	• Una sessió. Dues si s'ha de construir el monocordi.
Atenció a la diversitat	• Les preguntes passa a passa de l'activitat ajudaran a aquells alumnes amb més necessitats per poder seguir el ritme de l'activitat. La formació dels grups tendrà en compte els alumnes amb més dificultats formant l' integració

Material necessari	• Una taula de fusta d'uns 40 cm. • Dues argolles, una corda de guitarra prima. • Una goma elàstica (opcional).

Mètode d'avaluació

Els alumnes han d'emplenar la fitxa a mesura que realitzen l'activitat. Aquesta s'avaluarà grupalment, obtenint tots els membres del grup la mateixa qualificació. Ens fixarem sobretot en les preguntes de contingut matemàtic que les hem enumerat amb un nombre. Aquestes fan referència a un criteri d'avaluació segons la taula i tindran un 60% del valor de la nota:

Pregunta	Criteris d'avaluació
1	1
2	2

La resta de preguntes tendran la mateixa puntuació i seran el 40% de la nota total. La construcció del monocordi no s'avaluaria.

Activitat 2. L’escala i les mitjanes

Consideram important que els alumnes vegin la relació que hi ha entre la construcció de l’escala pitagòrica els sons harmònics i les mitjanes. Hem trobat poques propostes didàctiques de qualitat. Prendrem com a punt de partida una de la revista suma (Beato Sirvent, J. 2003) en què relacionaven els “sons agradables” pitagòrics i les mitjanes. El que farem nosaltres és ampliar-la i treballar també les simetries de l’escala.

Abans de començar

La mitjana aritmètica serveix per dividir un interval (a, b) en dues parts iguals. La fórmula per calcular-la és:

$$\bar{x} = \frac{a+b}{2}$$

- 1.Troba la mitjana aritmètica d’un interval (5, 10).

La mitjana harmònica divideix a un interval en dos subintervals de longituds diferents, de manera que sempre el de longitud menor és el que conté a l'extrem menor. La seva fórmula és:

$$H = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

- 2.Troba la mitjana harmònica d’un interval (5, 10).

- 3.La mitjana harmònica també es pot escriure d’aquesta manera. Comprova que són iguals les expressions.

$$H = \frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b}$$

L'escala

Les notes de l'escala musical són: Do – Re – Mi – Fa – Sol – La – Si – Do. Els pitagòrics van calcular les proporcions de les notes de l'escala musical a partir d'aquestes mitjanes.

- Dona el valor d'1 a la nota Do greu i el valor de 2 a la nota Do agut de l'escala musical. Ara calcula les mitjanes amb els nous valors dels extrems:

Mitjana aritmètica	**Mitjana harmònica**
x=(a+c)/2	H=2ac/(a+c)
x=	H=

La mitjana aritmètica dona el valor de la proporció de la nota Sol i la mitjana harmònica el valor de la nota Fa.

Una octava musical es pot dividir en la "suma" d'una quarta i una cinquena. Aquesta "suma" musical matemàticament ho representam com un producte de proporcions o raons.

- Comprova que multiplicant la raó de quarta i la de cinquena que has trobat obtindrem la raó d'octava del Do agut.

Aquestes raons o proporcions que hem d'emprar per passar d'una nota o una altra no són les mateixes per totes les notes. Recordem que l'escala musical està formada per tons i semitons. Tenim 5 tons i dos semitons repartits de la següent manera:

- Do - Re → To
- Re - Mi → To
- Mi - Fa → Semitò
- Fa - Sol → To

- Sol - La → To
- La - Si → To
- Si - Do → Semitò

Els pitagòrics van calcular la raó de to com 9/8. La raó de semitò la van calcular a partir de la de to i la raó de quarta (mitjana harmònica). Una quarta justa està formada per dos tons i un semitò. Coneixem la proporció total 4/3, i sabem el valor de to (9/8) podem trobar el valor del semitò (S) amb una simple operació:

$$\frac{4}{3} = \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} \cdot S$$

- 4.Troba el valor del semitò aïllant la S de l'equació anterior.

Ara ja tenim tots el elements necessaris per calcular les proporcions de l'escala pitagòrica.

- 5.Emplena les caselles de la proporció del Fa i del Sol amb les mitjanes que has trobat abans.
- 6.Calcula les proporcions de la resta de notes de l'escala. Per fer-ho multiplica la proporció per la nota anterior segons marca les fletxes.

Nota	**Do**	**Re**	**Mi**	**Fa**	**Sol**	**La**	**Si**	**Do**
Proporció	1							2
Raó	9/8	9/8	256/243	9/8	9/8	9/8	256/243	

La simetria de l'escala

L'escala musical és simètrica respecte a l'octava. Anam a comprovar-ho, calculant la proporció de Do agut a partir del Do greu. Això ho feim multiplicant el Do greu per la raó de quarta i per la raó de cinquena com hem fet abans. Aquesta operació es pot fer a l'inrevés calculant el valor de Do greu a partir del Do agut.

- Calcula la proporció del Do greu a partir del Do agut emprant les proporcions de quarta i cinquena. Quina operació matemàtica has emprat?

La simetria de la escala la podem veure gràficament.

- Dibuixa una línia amb un bolígraf blau de la nota Do greu fins a la nota Fa. Després una de la nota Do aguda fins a la nota Sol. Aquests dos intervals són de quarta.
- Dibuixa una línia amb un bolígraf negre de la nota Do greu fins a la nota Sol. Després una de la nota Do aguda fins a la nota Fa. Aquests dos intervals són de cinquena.

Do Re Mi Fa Sol La Si Do

També podem veure aquesta simetria matemàticament. L'octava compleix la següent relació de mitjanes en un interval (a,c):

$$\frac{a}{mitjana\ harmònica} = \frac{mitjana\ aritmètica}{c}$$

que si substituïm :

$$\frac{a}{\left(\frac{2 \cdot a \cdot c}{a + c}\right)} = \frac{\left(\frac{a + c}{2}\right)}{c}$$

Aquesta fórmula és valida per qualsevol interval (a, c).

- 7.Comprova que es compleix amb els nostres valors d'a=1 i c=2.

Hem resumit en una taula els punts més importants en els quals ens hem basat per realitzar aquesta activitat:

L'escala i les mitjanes	
Nivell	2n ESO
Continguts	• Càlcul, estimació de la mitjana aritmètica i la geomètrica. • Resolució de problemes amb fraccions. • Simetries.
Objectius	• Comprendre el significat de les mitjanes. • Saber multiplicar funcions. • Identificar simetries a l'espai.
Requisits	• Operacions amb fraccions.
Situació temporal	• Una vegada finalitzat el bloc de nombres del currículum. • L'escala musical, els tons i semitons formen part del currículum de primària a l'assignatura d' Educació artística.
Criteris d'avaluació	• 1.Identificar relacions de proporcionalitat numèrica i geomètrica i utilitzar-les per resoldre problemes. • 2.Interpretar relacions senzilles en taules. • 3.Manipulació algebraica. • 4.Resolució equacions 1r grau.
Mètode avaluació	• Avaluació de fitxa.
Competències	• Competència matemàtica. • Competència lingüística. • Competències socials i cíviques. • Competència expressions culturals.
Metodologia	• Activitat guiada. Fitxa per a emplenar.
Temps estimat	• Una sessió.
Atenció a la diversitat	• Les preguntes guiades de l'activitat ajudaran a aquells alumnes amb més necessitats per poder seguir el ritme de l'activitat. La formació dels grups tendrà en compte els alumnes amb més dificultats

	formant l' integració.
Material necessari	• Full de l'activitat • Bolígrafs blau i negre

Mètode d'avaluació

Els alumnes han d'emplenar la fitxa a mesura que realitzen l'activitat. Aquesta s'avaluarà grupalment, obtenint tots els membres del grup la mateixa qualificació. Ens fixarem sobretot en les preguntes de contingut matemàtic que les hem enumerat amb un nombre. Aquestes fan referència a un criteri d'avaluació segons la taula i tindran un 70% del valor de la nota:

Pregunta	**Criteris d'avaluació**
1	3
2	3
3	3
4	4
5	1
6	1,2
7	1,3

La resta de preguntes tendran la mateixa puntuació i seran el 30% de la nota total.

Activitat 3. L'escala temperada

L'estudi de l'escala temperada és una oportunitat bona per l'estudi de les potències, radicals i les series. Per la construcció d'aquesta activitat hem trobat molts de treballs explicant el funcionament de l'escala, l'origen com també els motius de la creació. Ens ha costat una altra vegada trobar una proposta didàctica completa més enllà d'alguns suggeriments d'activitats. L' article de la revista Suma (Beato Sirvent, J. 2003) pel seu caràcter didàctic ens torna a servir com a punt de partida per aquesta activitat. Nosaltres aprofitarem per treballar progressions geomètriques, gràfiques i freqüències.

Abans de començar

L'escala que empram actualment anomenada escala temperada la va inventar Johann Sebastian Bach en el segle XVII. Aquesta té com a particularitat que sempre té la mateixa "distància" entre els dotze semitons de l'escala, per tant la raó per passar d'una nota a una altra és constant, a diferència de la proposada per Pitàgores que la raó no era constant.

Progressió geomètrica

Fixem el Do (3) com a 1 i el Do (4) com a 2. Per calcular el valor de cada semitò hem de trobar primer el valor de la raó pel la qual multiplicarem cada vegada per anar d'un semitò a un altre.

- Completa la següent taula amb les proporcions:

Nota	**Do**	**Do#**	**Re**	**Mib**	**Mi**	**Fa**	**Fa#**	**Sol**	**Sol#**	**La**	**Sib**	**Si**	**Do**
Proporció	1	$\sqrt[12]{2}$	$\sqrt[12]{2^2}$	$\sqrt[12]{2^3}$									2

Per passar d'una nota a una altra hem de multiplicar pel factor de proporció (r). Aquest tipus de sèries es denominen progressions geomètriques. Anem a calcular el factor de proporció. El podem calcular dividint dos termes consecutius de la progressió, en el nostre cas:

$$1, \sqrt[12]{2}, \quad \sqrt[12]{2^2}, \quad \sqrt[12]{2^3}, \ldots$$

Recorda les propietats del radicals:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

- Divideix el segon terme entre el primer:

- Divideix el tercer terme entre el segon:

- Divideix el quart terme entre el tercer:

- 1.Quin es el factor de proporció (r) de la progressió geomètrica?

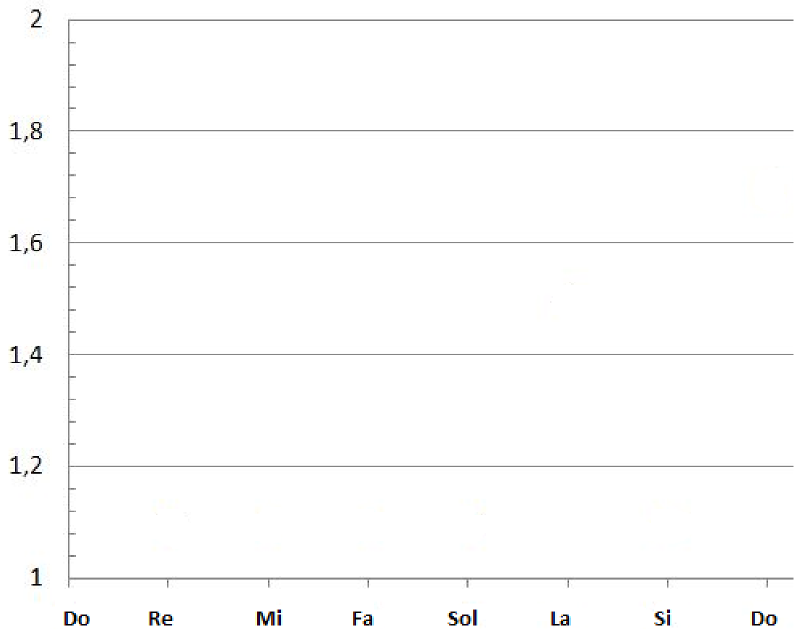
- 2.Quina és la raó que empram per passar d’una nota a una altra? Escriu-la en forma de radical i també aproximada amb quatre xifres decimals.

L’escala pitagòrica va ser construïda a partir de les mitjanes aritmètica i harmònica. La raó de semitò i la to no estaven en proporció.

- 3.Emplena la següent taula:

Nota	**Do**	**Re**	**Mi**	**Fa**	**Sol**	**La**	**Si**	**Do**
Proporció temperada	1							2
Proporció Pitagòrica	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2

- 3.Representa gràficament conjuntament les proporcions de la sèrie Pitagòrica (en color blau) i de la sèrie temperada (en color negre).

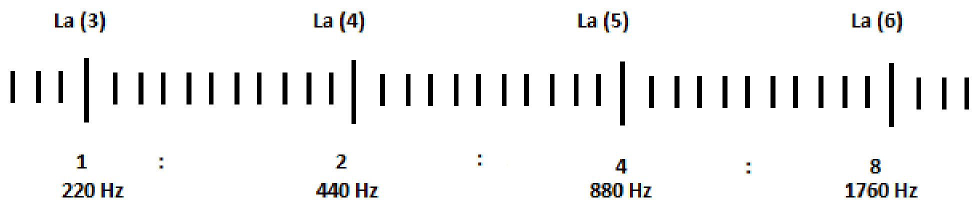


- En quines notes hi ha més diferencia entre els valors pitagòrics i els temperats? Per què creu que passa això?

Freqüències

La freqüència de vibració d'una nota ve determinada per la tensió de la corda en els seus extrems, el tipus de corda i la longitud de la mateixa. La unitat de freqüència és l'Hertz, representat amb el símbol Hz. Aquest compta el nombre de vegades que vibra una cosa per segon. Per conveni es va triar la freqüència del La 4 com 440 Hz.

La freqüència d'una nota una octava més aguda és exactament el doble que aquesta. Com hem pogut comprovar segueixen una relació 2:1. Per tant es pot calcular la freqüència del La 3 dividint per la del La 4. De la mateixa manera es pot calcular la de La 5 i La 6 com es veu a la següent gràfica.



Fixa't que les divisions no tenen el mateix valor entre cada octava, però les representam de la mateixa mida. Aquest tipus de representacions les anomenam NO lineals. En aquest cas concret, com que la distància sobre el paper indica el quocient entre els nombres, es tracta d'una escala logarítmica.

Ara podem fer servir aquest factor per calcular la freqüència de qualsevol nota a partir de la freqüència del La 3 (440 Hz) i el factor de proporció.

- 4.Troba el valor de la freqüència de les següents notes:

  A#4 = $440 \cdot r$ =

  B4= $440 \cdot r^2$ =

  C4= $440 \cdot r^3$ =

  G#3=$440 \cdot r^{-1}$=

  G3=$440 \cdot r^{-2}$=

- 5.Escriu el terme general de la progressió en funció de la freqüència del La 4 i r.

6.Completa la taula amb les freqüències següents:

Nota	Do3	Do#	Re	Re#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La4	La#	Si	Do4
Freq										440			

Resum

- En quants de semitons iguals divideix l'escala temperada?

- Quina és la raó de proporció entre les notes de l'escala? És sempre la mateixa?

- Quina magnitud mesura l'Hertz?

- Quin tipus de progressió representa la successió de les freqüències de les notes de l'escala temperada?

Hem resumit en una taula els punts més importants en els quals ens hem basat per realitzar aquesta activitat:

L’escala temperada	
Nivell	3r ESO
Continguts	• Operacions amb fraccions, decimals, radicals. • Aproximacions i truncaments. • Potències. • Progressions geomètriques. • Elaboració de gràfics.
Objectius	• Comprendre el significat d’una sèrie. • Trobar raons de progressions geomètriques. • Saber construir taules a partir d’enunciats.
Requisits	• Operacions amb radicals. • Progressions geomètriques.
Situació temporal	• Una vegada finalitzat el bloc de nombres de progressions. • L’escala musical forma part del currículum de primària a l’assignatura d’ Educació artística.
Criteris d’avaluació	• 1.Identificar progressions geomètriques. • 2.Interpretar relacions senzilles en taules. • 3.Anàlisi qualitatiu de gràfics. • 4.Manipulació algebraica.
Mètode avaluació	• Avaluació de fitxa.
Competències	• Competència matemàtica. • Competència lingüística. • Competències socials i cíviques. • Competència expressions culturals.
Metodologia	• Activitat guiada. Fitxa per emplenar.
Temps estimat	• Una sessió i mitja.
Atenció a la diversitat	• Les preguntes guiades de l’activitat ajudaran a aquells alumnes amb més necessitats per poder seguir el ritme de l’activitat. Com que la fitxa té certa dificultat, el professor feria una explicació personalitzada a l’alumnat que ho necessiti.

Material necessari	• Full de l’activitat • Bolígraf

Mètode d’avaluació

Els alumnes han d’emplenar la fitxa a mesura que realitzen l’activitat. Aquesta s’avaluarà grupalment, obtenint tots els membres del grup la mateixa qualificació. Ens fixarem sobretot en les preguntes de contingut matemàtic que les hem enumerat amb un nombre. Aquestes fan referència a un criteri d’avaluació segons la taula i tindran un 70% del valor de la nota:

Pregunta	**Criteris d’avaluació**
1	1
2	1,2
3	3
4	4
5	1,4
6	1,2,4

La resta de preguntes tendran la mateixa puntuació i seran el 30% de la nota total.

5. Conclusions

El procés d'ensenyament-aprenentatge segueix fent-se d'una manera totalment fragmentada. Els alumnes no són capaços de relacionar continguts de diferents assignatures i no arriben a assimilar bé certs conceptes. L'assignatura de matemàtiques té molts de conceptes abstractes difícils d'entendre per l'alumnat, per això és important sempre cercar situacions, problemes on es vegi la utilitat diària de les matemàtiques. Si s'analitza el currículum de matemàtiques d'un curs de l'ESO, es poden trobar molts de continguts comuns entre assignatures que són propicis per plantejar activitats interdisciplinàries.

El treball realitzat ha servit per adonar-nos que és possible proposar activitats amb continguts que englobin diverses assignatures, en el nostre cas, matemàtiques i música. En l'assignatura de música es poden trobar moltes situacions on es posa de manifest la relació que hi entre la música i les matemàtiques, per tant propicia la creació propostes didàctiques interdisciplinàries. En aquest treball hem fet una proposta per als tres primers cursos d'ESO, però es podrien intentar preparar per altres tots els nivells d'ensenyament.

Les propostes han de fer pensar, reflexionar i treballar l'alumne. Sempre que es pugui s'ha de triar materials manipulables, ajuda a visualitzar els conceptes a treballar. S'ha de complementar amb una fitxa perquè es faci un treball de reflexió o un possible treball d'ampliació, així l'alumne esdevé protagonista del seu propi ensenyament. Les propostes han d'estar ben tutoritzades passa a passa perquè tot l'alumnat sigui capaç de seguir la classe, adaptades en dificultat pels distints ritmes d'aprenentatge.

6. Referències

- Blázquez, R. (2012). *Música y matemáticas*. (Trabajo fin de grado en maestro de educación primaria). Universidad de Salamanca.
- Beato Sirvent, J. (2003). Sonidos, fracciones, medias, potencias y funciones exponenciales. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (44), 39-44.
- Cartró Giner, S. (2012). *Matemàtiques i música. El taller pitagòric.* (Treball de fi de màster). Universitat Politècnica de Catalunya.
- Castro, Almudena. (2009*). Música y matemáticas. La afinación pitagórica. El origen de la escala heptatónica.* Recuperat de http://www.enchufa2.es/archives/musica-y-matematicas-la-afinacion-pitagorica-el-origen-de-la-escala-heptatonica.html.
- Gell-mann, M., & Borr, E. (2011). Música y matemáticas en educación primaria*. Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas,* (44), 107-112.
- Johnson, D.W., Johnson, R. T. & Holubec, E. J. (1999). *El aprendizaje cooperativo en el aula*. ed. Paidós Ibérica S.A.
- Johnson, D.W., Johnson, R. T. & Scott, L. (1978). The effects of cooperative and individualiced instructions on student attitudes and archivement. *Journal of Social Psychology,* (104), 207-216.
- Liern Carrión, V. (1994). La Música y sus materiales: una ayuda para las clases de Matemáticas. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas,* (14), 60-64.
- Liern Carrion, V. & Queralt Llopis, T. (2008). *Música y matemáticas. La armonía de los números.* Madrid: Federación Española de Profesores de Matemáticas.
- Peralta, J. (1998). Las matemáticas en el arte, la música y la literatura. *Tendencias Pegagógicas*, Nº Extraordinario, Vol. II, 235-244.
- Pol, J. L. (2007). Joyas matemáticas de una caja de música. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas,* (55), 49-57.
- Puig Adam, P. (1960). *Las matemáticas y su enseñanza actual*. Madrid: Ministerio de Educación Nacional.

- Muñoz Santonja, J. (1994). Pequeño divertimento músico-matemático. *Números*, (25), 39-44.
- Reyes, M. G. (2010). Consideraciones sobre la autenticidad de la obra de Pitágoras. *Astrolabio: Colombia, (9), 26-47*.
- Serrano, J. M., González-Herrero, M. E. & Pons, R. M. (2008). *Aprendizaje cooperativo en matemáticas: diseño de actividades en educación infantil, primaria y secundaria.* Universidad de Murcia. Servicio de publicaciones de la Universidad de Murcia.
- Vikipèdia. (2014) *Cents*. Recuperat de http://es.wikipedia.org/wiki/Cent. (Darrera consulta 09/06/2015).
- Zamacois, J. (1975). *Teoría de la música.* Libro 11. Barcelona: Labor.

7. Bibliografia

- Arbonés, J. & Milrud, P. (2011). *La armonía es numérica. Música y matemáticas*. España: RBA.
- Amster, P. (2010).¡*Matemáticas, maestro¡ Un concierto para números y orquesta.* España: Siglo XXI.
- Arbonés, J. & Milrud, P. (2011). *La armonía es numérica. Música y matemáticas*. España: RBA.
- Barberá Saiz, J. (2013). *Sistema de afinación musical de proporciones áureas* (Tesis doctoral). Universitat Politècnica de València.
- Durán, R. G. & Mesz, B (2010). *¿Por qué usamos 12 notas? De Pitágoras* a Bach, (17), 11–16.
- ESPANYA. Currículum de Matemàtiques. Annex 73/2008, de 27 de juny. Butlletí Oficial de les illes Balears, 2 de juliol de 2008, núm. 92.
- ESPANYA. Llei Orgànica 8/2013, de 9 de desembre. Ley orgánica para la mejora de la calidad educativa. *Boletin Oficial Del Estado, 295.*
- Falcón, J. M. A., & Ila, S. (1991). Matemáticas y música: el matrimonio secreto. *Números*, (21), 33-44.
- Feng, J. Q. (2012). Music in Terms of Science. *arXiv preprint arXiv:1209.3767*.

- Liern, V. (2009). Las matemáticas de los músicos. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (60), 123-129.
- Lluis-Puebla, E. (1998). ¿Matemáticas en la Música?. *Miscelania Matemática*, (27), 15-27.
- López Cuesta, P., & Gustems Carnicer, J. (2007). Reflexiones y dificultades interdisciplinares: una experiencia conjunta de matemáticas y música. *Uno: Revista de Didáctica de Las Matematicas*, (44), 110-116.
- Pol, J. L. (2011). Matemáticas alla romantica*. Cultura*, (7),1.
- Pastor Martín, A. (2008). Matemáticas en la música. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, (59)*, 17-21.
- Peralta, J. (1995). *Principios didácticos e históricos para la enseñanza de las Matemáticas*. Madrid: Editores Huerga y Fierro.
- Pérez de la Cruz, C. (2013). *Educación, música y matemática*: *Un triángulo afinado en armonía.* (Trabajo Fin de Grado). Universidad de Valladolid.
- Pitágoras, (s.f.) En wikipedia. Recuperado el 9 de Mayo de 2015 http://es.wikipedia.org/wiki/Pit%C3%A1goras.
- Servais, W. (1980). Humanizar la enseñanza de la Matemática. *Revista de Bachillerato (MEC).* Cuaderno monográfico, (5), 3-22.
- Tomasini, M. C. (2007). El fundamento matemático de la escala musical y sus raíces pitagóricas. *Ciencia & tecnologia: Universidad de Palermo, (6), 15-28.*