



**Universitat de les
Illes Balears**

Facultat de Ciències

Memòria del Treball de Fi de Grau

Bombeo cuántico

Óscar Pozo Ocaña

Grau de Física

Any acadèmic 2015-16

DNI de l'alumne: 43184790J

Treball tutelat per David Sánchez Martín
Departament de Física

S'autoritza la Universitat a incloure aquest treball en el Repositori Institucional per a la seva consulta en accés obert i difusió en línia, amb finalitats exclusivament acadèmiques i d'investigació	Autor		Tutor	
	Sí	No	Sí	No
	X		X	

Paraules clau del treball:
Túnel fotoassistido, Floquet, Nanoestructuras

Resumen

En este trabajo se ha estudiado el formalismo cuántico general de potenciales armónicos con el tiempo mediante la teoría de Floquet, y posteriormente se ha aplicado a dos casos concretos de barreras δ oscilantes empleando la matriz de scattering. El problema de una doble barrera oscilante es de especial interés en nanoelectrónica aplicada, y el formalismo desarrollado permite tratar el denominado efecto de bombeo de carga en conductores mesoscópicos modulados por este tipo de potenciales. Se han determinado las características más importantes del transporte electrónico tanto en el límite adiabático como en el no adiabático.

Resum

En aquest treball s'ha estudiat el formalisme quàntic general de potencials harmònics amb el temps utilitzant la teoria de Floquet, i posteriorment s'ha aplicat a dos casos concrets de barreres δ oscil·lants emprant la matriu de scattering. El problema d'una doble barrera oscil·lant és d'especial interès en nanoelectrònica aplicada, i el formalisme desenvolupat permet tractar el denominat efecte de bombeig de càrrega a conductors mesoscòpics modelats per aquest tipus de potencials. S'han determinat les característiques més importants del transport electrònic tant al límit adiabàtic com al no adiabàtic.

Abstract

In this work we study the general quantum formalism of harmonic potentials applied to two illustrative cases of harmonically oscillating δ -function barriers using the Floquet scattering matrix theory. This system is of considerable interest in nanoelectronics, and the discussed formalism allows us to investigate the quantum pumping effect in mesoscopic conductors driven by ac potentials. We determine the most important properties of electronic transport in the adiabatic and non-adiabatic limits.

Índice

Índice	4
1. Introducción.	5
2. Formalismo de Floquet.	8
2.1. Forma general de la función de onda.	8
2.2. Condición de normalización y ecuación de Schrödinger efectiva.	9
2.3. Corrientes de probabilidad.	9
2.4. Potencial de scattering. Coeficientes de transmisión y reflexión.	10
3. Potencial delta de Dirac estático.	12
4. Barrera oscilante en forma sinusoidal.	13
4.1. Resolución numérica.	14
4.2. Solución analítica en el límite de campos débiles.	16
5. Doble barrera oscilante en forma sinusoidal.	18
5.1. Resultados numéricos.	19
6. Bombeo cuántico.	20
6.1. Fenomenología.	21
6.2. Matriz de Floquet y corriente eléctrica.	23
6.3. Resultados numéricos.	25
6.4. Corriente media en el límite adiabático.	27
7. Conclusiones.	29
Referencias	30

1. Introducción.

La gran cantidad de aplicaciones tecnológicas que han aparecido a lo largo del siglo pasado han cambiado por completo nuestra forma de vida. La televisión, el teléfono móvil o los automóviles son tan solo algunos de los ejemplos. Su aparición no habría sido posible sin el avance en el conocimiento de las propiedades físicas de la materia en sus diferentes dimensiones. Sin embargo, el avance más importante, por lo que respecta a aplicaciones tecnológicas, ha sido el entendimiento de cómo se comportan los electrones en la materia, tanto a escala macroscópica como a nivel atómico. La mecánica cuántica ha tenido un papel fundamental para entender cómo se mueven estos portadores de carga en ambas escalas. Su desarrollo permitió la invención de dispositivos electrónicos tales como el transistor, elemento clave de toda la electrónica moderna.

El afán por crear dispositivos más y más pequeños en sectores como la informática o la electrónica ha hecho que la nanotecnología sea un área de gran interés en la investigación científica. Las nanoestructuras son sistemas en los cuales al menos una de las dimensiones es inferior a unos 100 nm. En estas escalas los efectos cuánticos entran en juego, dando lugar a propiedades físicas en los materiales que llegan a ser muy diferentes de las que tienen en escalas macroscópicas. Esto abre la puerta al diseño de dispositivos para mercados muy diversos, y actualmente ya hay materiales nanoestructurados presentes en nuestra vida diaria. Como ejemplo están los paneles solares, donde el uso de nanoestructuras permite minimizar el empleo de bloques de silicio.

Uno de los campos de investigación actual sobre nanoestructuras es el estudio de materiales mesoscópicos, cuya escala longitudinal, del orden de 10 nm, permite discutir razonablemente las propiedades físicas del material sin entrar en el comportamiento de los átomos individuales que lo forman. El avance en la tecnología ha permitido la creación de estructuras mesoscópicas en las cuales los átomos se depositan capa por capa y posteriormente se imprimen patrones en su superficie empleando técnicas litográficas. Esto permite confinar dimensionalmente el movimiento de los electrones a dos, una y cero dimensiones mediante su conexión a potenciales electrostáticos externos. En las dimensiones en las que se produce el confinamiento, los electrones tienen niveles de energía discretos, mientras que en las dimensiones en las que el movimiento es "libre" su espectro es continuo. Las estructuras mesoscópicas más conocidas son las que forman diodos túnel resonantes [1], superredes [2] y puntos cuánticos [3]. La característica más importante que comparten es que su interacción con campos externos dependientes armónicamente del tiempo da lugar al efecto túnel fotoasistido [4]. Los electrones que acceden a estas estructuras se encuentran con barreras túnel de amplitud oscilante en las que pueden ser reflejados o transmitidos de forma inelástica. Como el efecto túnel a través de capas muy finas es un proceso realmente rápido, estas estructuras pueden emplearse para crear dispositivos de alta frecuencia, tales como detectores de radiación que lleguen a trabajar en frecuencias de terahercios.

Los puntos cuánticos han sido el tipo de material mesoscópico en el que nos hemos centrado. Se trata de nanoestructuras capaces de restringir el movimiento de los electrones en las tres direcciones espaciales. En la figura 1 se puede observar su forma en la superficie de una heteroestructura mesoscópica. Por debajo de esta superficie, en la interfaz de la heteroestructura se encuentra un gas de electrones bidimensional. Tenemos dos reservorios de electrones unidos por un canal estrecho y justo encima suyo, en la superficie, se encuentran estampados dos terminales de puerta. La aplicación de potenciales electrostáticos a estos terminales permite mermar localmente el gas y formar el punto cuántico entre ellos. Los electrones que llegan al punto ven un potencial doble barrera, y entre estas barreras sus niveles de energía están cuantizados. En estos contactos se puede conectar un voltaje alterno para hacer oscilar la amplitud de las barreras y generar el efecto túnel fotoasistido. También tenemos una puerta electrostática conectada en el mismo plano que el canal para modular la posición de los niveles energéticos en el punto.

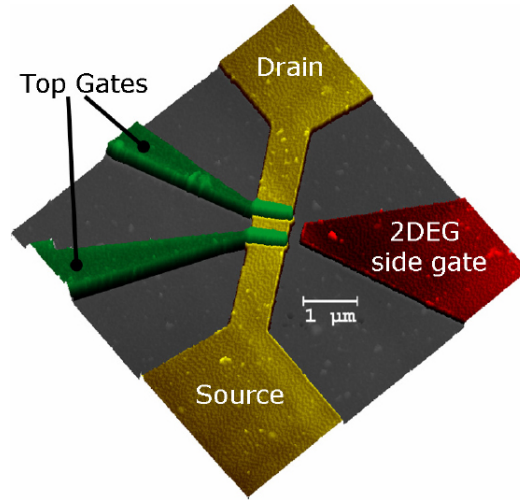


Figura 1: Punto cuántico en la superficie de una heteroestructura. En amarillo, reservorios de electrones (Source y Drain) conectados a través de un canal. En verde, terminales de contacto (Top Gates) para conectar el voltaje alterno y formar el punto cuántico en el segmento que los une. En rojo, contacto (2DEG side gate) para conectar un potencial electrostático que afecta a la posición de los niveles de energía dentro del punto cuántico. Imagen tomada de [5].

Al tratarse de estructuras tan pequeñas, los electrones interiores se repelen por el principio de exclusión de Pauli, y tiene un coste energético introducir electrones adicionales, por lo que los efectos de intercambio y correlación son muy intensos. Incluso cuando el punto cuántico no tiene simetría espacial, el espectro es completamente discreto y estas estructuras constituyen una especie de átomos artificiales con llenado por capas. La ventaja de los puntos cuánticos frente a los átomos naturales es que se pueden conectar más fácilmente al exterior, lo que permite su uso como dispositivos electrónicos. Entre sus aplicaciones potenciales podemos destacar la computación cuántica [6].

A lo largo de la segunda mitad del siglo pasado se han realizado toda una serie de estudios acerca del efecto túnel fotoasistido en estos materiales. El formalismo de Landauer-Büttiker y la teoría de Floquet han sido de los más empleados [7],[8]. La teoría de Floquet permite transformar un problema cuántico con dependencia temporal armónica en uno independiente del tiempo, y a cambio desdobra el espectro del electrón en cuasienergías equiespaciadas una cantidad $\hbar\omega$ (ver figura 2), donde ω es la frecuencia de oscilación del potencial. Por otro lado, con el formalismo de Landauer-Büttiker analizamos el transporte electrónico en estructuras mesoscópicas como un problema de scattering cuántico. Juntando ambas, se interpreta que un electrón interaccionando con un potencial de scattering oscilante puede pasar de su estado inicial a uno final con un nivel de cuasienergía diferente. Esto significa que en su interacción ha adquirido o perdido un número entero de cuantos de energía $\hbar\omega$, es decir, lo que tenemos es un proceso de absorción y emisión estimulada. Con su empleo se obtienen los estados asintóticos que transportan corriente cuando el electrón se encuentra lo suficientemente alejado del potencial, cosa que es de gran utilidad para analizar muchas de las propiedades del transporte electrónico.

De las diferentes posibilidades de transporte, la que se estudia en este trabajo es el bombeo cuántico en el caso unidimensional. El bombeo mediante potenciales oscilantes no es un fenómeno exclusivamente cuántico. Un ejemplo de bombeo clásico es el conocido tornillo de Arquímedes, que mediante la combinación de la acción gravitatoria con un movimiento angular consigue la elevación de agua, tierra y similares. La diferencia con el bombeo cuántico en materiales mesoscópicos es que éste último se debe a la interferencia de los diferentes caminos

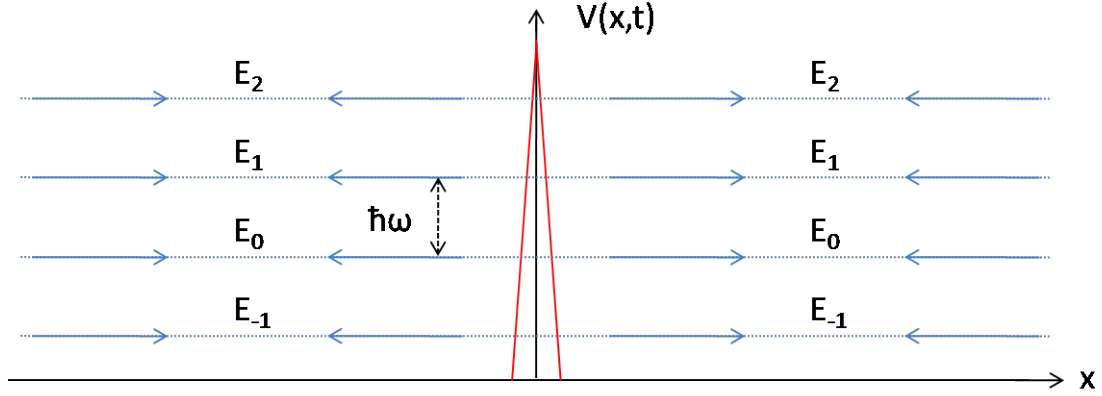


Figura 2: Niveles de cuasienergía en la teoría de Floquet para un potencial armónico en el tiempo. El caso representado se corresponde con una barrera delta de amplitud oscilante.

que puede tomar un electrón adquiriendo y perdiendo cuantos $\hbar\omega$ para pasar de un estado de entrada a un mismo estado final de salida [9]. Mediante este mecanismo se puede producir una corriente eléctrica finita entre los dos reservorios a pesar de haber una diferencia de potencial nula entre ellos. Para conseguirlo, el voltaje alterno aplicado en el punto cuántico ha de generar una asimetría direccional en el canal, de manera que la interferencia dé lugar a un flujo neto de electrones. Aparte de los puntos cuánticos, existen otros casos de interés en los cuales se puede estudiar esta fenomenología en una dimensión, como por ejemplo en los hilos cuánticos [10].

Uno de los límites de interés teórico y práctico en estas estructuras es el límite adiabático. Se trata del caso en el cual el periodo de oscilación del potencial es mucho mayor que el tiempo que tarda el electrón en atravesarlo. De esta forma, el electrón observa un potencial congelado, prácticamente invariante durante el tiempo en el que interactúa con él. Curiosamente, aunque parezca que el electrón debería interactuar elásticamente, son los canales inelásticos los que dan lugar a una corriente no nula en este límite. En este tipo de sistemas el análisis de las magnitudes características toma un papel fundamental, tanto para justificar el uso de formalismos físicos como para analizar límites concretos como el adiabático. Por ejemplo, para lograr el confinamiento de electrones y tratar así su movimiento en las dimensiones restringidas empleando la mecánica cuántica, la temperatura ha de ser lo suficientemente baja como para que no dominen los efectos clásicos.

A pesar de que los resultados teóricos muchas veces se anticipan a los experimentales, actualmente se cuenta con muchas comprobaciones de esta fenomenología. Entre ellas, destacamos la de Switkes et al. [11], lo primero que se realizó sobre el bombeo cuántico adiabático en puntos cuánticos. En su experimento se emplearon técnicas litográficas con haces de electrones en una heteroestructura de GaAs/AlGaAs para imprimir patrones laterales. En dicha estructura se definieron diferentes puntos cuánticos a partir de puertas electrostáticas estampadas en el semiconductor. En el experimento, los puntos cuánticos se conectaron a reservorios llenos de electrones en equilibrio térmico de forma similar a la mostrada en la figura 1, y al llegar éstos a la estructura estaban separados por una región en la cual se conectaron dos voltajes alternos a una misma frecuencia para generar el efecto túnel fotoasistido. El transporte neto de carga se observó al aplicar asimetría direccional entre los potenciales, realizándose las medidas a frecuencias del orden de $f = 10$ MHz, temperaturas de $T = 0.1$ K y amplitudes de potencial de $V_{ac} = 100$ mV. El resultado fue un bombeo de carga cuya amplitud dependía linealmente de la frecuencia de los potenciales oscilantes.

2. Formalismo de Floquet.

Es bien sabido que en el caso unidimensional la ecuación de Schrödinger viene dada por

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, t) \right] \Psi(x, t) \quad (1)$$

donde $V(x, t)$ es el potencial del sistema, $\Psi(x, t)$ la función de onda de la partícula en cuestión y m su masa. En heteroestructuras semiconductoras como las que se emplean para formar puntos cuánticos, los electrones obedecen la misma ecuación de Schrödinger reemplazando m por la masa efectiva de los electrones en el material (GaAs¹, InAs, etc. [12]). Si el potencial a estudiar es independiente del tiempo, la ecuación se puede resolver por separación de variables, definiendo $\Psi(x, t) = \Phi(x)\varphi(t)$. Este procedimiento nos divide el problema en una ecuación temporal

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -\frac{iE}{\hbar}\varphi(t) \quad (2)$$

donde E es la energía de la partícula, y una ecuación espacial independiente del tiempo

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} + V(x)\Phi(x) = E\Phi(x) \quad (3)$$

Pero en nuestro caso el potencial presenta una dependencia temporal armónica con periodo $\tau = 2\pi/\omega$, y por lo tanto el procedimiento anterior no nos sirve. En este caso, es el formalismo de Floquet el que nos permite llegar a otra ecuación con independencia temporal.

$$V(x, t + n\tau) = V(x, t) \quad \forall x, t, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4)$$

2.1. Forma general de la función de onda.

Demostraremos que cuando el potencial cumple con la relación de (4) podemos escribir la función de onda como $\Psi(x, t) = \phi(x, t)\exp(-iEt/\hbar)$, donde $\phi(x, t)$ comparte la periodicidad temporal del potencial. Para ello se emplea el operador de traslación temporal.

$$\hat{T}_\tau f(t) = f(t + \tau) \quad (5)$$

Debido a la periodicidad temporal del potencial, tenemos un hamiltoniano \hat{H} invariante por el operador \hat{T}_τ .

$$[\hat{T}_\tau, \hat{H}] = 0 \quad (6)$$

Por lo tanto, existe una base común que diagonaliza a la vez ambos operadores. Esto implica que los autovalores de \hat{T}_τ son de la forma

$$\hat{T}_\tau \Psi_\alpha(x, t) = e^{i\alpha\tau} \Psi_\alpha(x, t) \quad (7)$$

Proponiendo que $\Psi_\alpha(x, t) = e^{i\alpha t} \phi_\alpha(x, t)$ y aplicando el resultado anterior se obtiene

$$\phi_\alpha(x, t) = \phi_\alpha(x, t + \tau) \quad (8)$$

Para demostrar que $\alpha = -E/\hbar$ se recurre a la ecuación de Schrödinger. Si se sustituye en ella la forma propuesta de la función de onda, se llega a la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_\alpha(x, t) = (E + \hbar\alpha)\phi_\alpha(x, t) \quad \forall x, t \quad (9)$$

¹La masa efectiva para el GaAs es $m = 0.067m_e$, y es la que emplearemos en todos los cálculos de este trabajo.

Como $\phi_\alpha(x, t)$ cumple con la ecuación (8), tanto si es una función constante como si no, su derivada ha de anularse al menos para dos valores de t , que son el máximo y mínimo locales. Por lo tanto, si la ecuación se ha de cumplir para todo t , queda demostrado que $\alpha = -E/\hbar$. Además, al presentar $\phi(x, t)$ esta dependencia temporal, se puede reescribir tanto esta función como el potencial empleando el desarrollo en serie de Fourier.

$$\phi(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(x) e^{-in\omega t} \quad V(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n(x) e^{-in\omega t} \quad (10)$$

Finalmente, la forma general de la función de onda viene dada por

$$\Psi_E(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(x) e^{-i(E+n\hbar\omega)t/\hbar} \quad (11)$$

Con esto podemos observar una de las características más importantes del formalismo de Floquet. El potencial armónico desdobra la función de onda en un conjunto de infinitos canales con energías equiespaciadas una cantidad $\hbar\omega$, llamadas cuasienergías.

2.2. Condición de normalización y ecuación de Schrödinger efectiva.

La normalización de la función de onda lleva a una condición sobre las funciones $\phi_n(x)$ que aparecen en (10). Como en el desarrollo de Fourier estas funciones son ortogonales se tiene que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^*(x) \phi_n(x) dx = 1 \quad (12)$$

Para hallar la ecuación efectiva se introduce (11) en la ecuación de Schrödinger. Rápidamente se llega al resultado

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x, t) \right] \phi_n(x) = (E + n\hbar\omega) \phi_n(x) \quad \forall x, t, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (13)$$

que será la ecuación empleada en los casos de barreras oscilantes estudiados más adelante.

2.3. Corrientes de probabilidad.

En mecánica cuántica el módulo al cuadrado de la función de onda se interpreta como una densidad de probabilidad.

$$\rho(x, t) = |\Psi(x, t)|^2 = \Psi^*(x, t) \Psi(x, t) \quad (14)$$

A partir de la ecuación de Schrödinger se puede deducir una ecuación de continuidad para la conservación de la probabilidad.

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial j(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (15)$$

De aquí se halla que la corriente de probabilidad viene dada por la expresión

$$j(x, t) = -\frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right) = \frac{\hbar}{m} \text{Im} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \quad (16)$$

La corriente de probabilidad es de gran interés porque nos permitirá calcular la corriente eléctrica producida por el efecto túnel fotoasistido. Sustituyendo (11) en (14) y en (16) se obtienen la densidad y la corriente de probabilidad en la teoría de Floquet.

$$\rho(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \phi_n^*(x) \phi_{n'}(x) e^{i(n-n')\omega t} \quad (17)$$

$$j(x, t) = \frac{\hbar}{m} \text{Im} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \phi_n^*(x) \frac{d\phi_{n'}(x)}{dx} e^{i(n-n')\omega t} \right) \quad (18)$$

Pero el objetivo es llegar a un problema con independencia temporal, y esta corriente no cumple con ello. La corriente que nos es de interés es aquella promediada temporalmente en un periodo de oscilación del potencial armónico. Para hallar su expresión se ha de promediar la ecuación de continuidad (15).

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left(\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial j(x, t)}{\partial x} \right) dt = 0 \quad (19)$$

Como n y n' tan solo pueden tener valores enteros, $e^{i2\pi(n-n')} = 1$ para cualquier conjunto de valores de estas variables. Por lo tanto, se demuestra fácilmente que

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dt = 0 \quad (20)$$

Esto implica que el promedio temporal de la corriente de probabilidad también ha de ser nulo, por lo que la corriente de probabilidad promediada no ha de tener dependencia temporal. Se llega así a la expresión

$$j(x) = \frac{\hbar}{m} \text{Im} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n^*(x) \frac{d\phi_n(x)}{dx} \right) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} j_n(x) \quad (21)$$

para la corriente promediada, donde las $j_n(x)$ son las corrientes de probabilidad en los diferentes canales del espectro de Floquet. Además, la ecuación de continuidad nos garantiza la conservación de esta corriente en todo el espacio.

2.4. Potencial de scattering. Coeficientes de transmisión y reflexión.

El formalismo de Floquet desarrollado para potenciales armónicos con el tiempo se ha empleado para estudiar diferentes casos de potenciales de scattering en los cuales incide un electrón con energía E y masa efectiva m [7],[13],[14]. Todos ellos se caracterizan por estar localizados espacialmente, de manera que las partículas tan solo se ven influenciadas por el potencial cuando están lo suficientemente cerca de él.

Por lo general, la mayoría de los problemas de dispersión no pueden ser resueltos de forma exacta, o bien se trata de problemas con una gran complejidad matemática. Una buena alternativa es el formalismo de la matriz de scattering, que es el que se ha empleado en los sistemas estudiados. Su idea básica consiste en suponer que los estados inicial y final de las partículas son autoestados del hamiltoniano libre, sin interacción con ningún potencial. Se considera así que el estado inicial de las partículas incidentes viene dado por ondas viajeras del tipo $e^{i(px-Et)/\hbar}$, donde p es el momento de la partícula, que se corresponden con un estado del pasado remoto en el cual la partícula estaba lo suficientemente alejada del potencial como para no interactuar

con él. De forma análoga, los estados finales se identifican con ondas viajeras del mismo tipo en un futuro remoto en el que estuviesen lo suficientemente alejadas del potencial de scattering como para ser consideradas libres. De esta manera la dispersión queda completamente descrita por la evolución de los estados inicial y final en sus límites asintóticos. Matemáticamente, se imponen condiciones de contorno en $x = \pm\infty$ para la función de onda. Físicamente, la matriz de scattering permite centrarnos en estudiar los estados que transportan un flujo de corriente de probabilidad no nulo, y por lo tanto en las características de transporte electrónico.

Como ya se comentó al final de la sección 2.1, en el formalismo de Floquet la función de onda se desdobra en un conjunto de infinitos canales. Resolvemos la ecuación efectiva (13) en los límites asintóticos anteriormente citados

$$\phi_n(x) = \begin{cases} A_n e^{ik_n x} + B_n e^{-ik_n x} & x \rightarrow -\infty \\ F_n e^{ik_n x} + G_n e^{-ik_n x} & x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (22)$$

$$k_n \equiv \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E + n\hbar\omega)} \equiv \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E_n} \quad (23)$$

La matriz de scattering de Floquet, que no es más que la matriz que relaciona los estados salientes $\{B_n, F_n\}$ con los incidentes $\{A_n, G_n\}$, se definirá en la sección 6.2. En esta sección nos centraremos en las corrientes de probabilidad incidente, transmitida y reflejada, que se pueden obtener una vez sean hallados los coeficientes A_n , B_n , F_n y G_n empleando (21).

$$j_n = \begin{cases} \frac{\hbar}{m}(|A_n|^2 - |B_n|^2)\text{Re}(k_n) & x \rightarrow -\infty \\ \frac{\hbar}{m}(|F_n|^2 - |G_n|^2)\text{Re}(k_n) & x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (24)$$

Es importante distinguir si la partícula incide por la izquierda o por la derecha. En el primer caso se tiene que $A_n = \delta_{n,0}$ y que $G_n = 0$, y se identifican ²

$$j_n^{in} \equiv \frac{\hbar}{m}\delta_{n,0}\text{Re}(k_n) \quad j_n^{tr} \equiv \frac{\hbar}{m}\text{Re}(k_n)|F_n|^2 \quad j_n^{re} \equiv \frac{\hbar}{m}\text{Re}(k_n)|B_n|^2 \quad (25)$$

Los coeficientes de transmisión y reflexión vienen dados por los cocientes entre las respectivas corrientes con la incidente.

$$T_n = \frac{\text{Re}(k_n)}{k_0}|F_n|^2 \quad R_n = \frac{\text{Re}(k_n)}{k_0}|B_n|^2 \quad (26)$$

$$T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n \quad R = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \quad (27)$$

Y con la condición de conservación de la corriente de probabilidad queda garantizado que

$$T + R = 1 \quad (28)$$

Por último, se debe notar en (25) que los estados con $E_n < 0$ tienen asociada una corriente nula. Estos canales se corresponden con estados evanescentes, que no contribuyen a las corrientes de transmisión y reflexión de forma directa, pero que veremos que sí influyen en el valor de las amplitudes de probabilidad de los estados que transportan corriente.

²Debido a que en el formalismo de la matriz de scattering la función de onda no es normalizable, hay cierta libertad para escoger el valor de A_0 o G_0 , ya que en los coeficientes de transmisión y reflexión estas amplitudes se simplifican. Se escoge el valor de la unidad por simplicidad matemática.

3. Potencial delta de Dirac estático.

Los potenciales armónicos estudiados están formados por barreras³ de amplitud oscilante. Por ello, conviene tener claras las propiedades más importantes del potencial estático $V(x) = \alpha\delta(x)$ en el formalismo de la matriz de scattering antes de tratar los problemas temporales [15].

Debido a la localización de los potenciales delta, se puede considerar que las soluciones asintóticas de (22) son válidas para $x < 0$ y $x > 0$, respectivamente. Al ser un potencial estático no tenemos más que el canal $n = 0$ y se puede resolver por separación de variables tal y como se indicó al comienzo de la sección 2. Conociendo los coeficientes A_0 y G_0 por el sentido de incidencia de la partícula, el resto de coeficientes se determinan con las condiciones de contorno en $x = 0$. La primera es la condición de continuidad de la función de onda.

$$\phi(0^-) = \phi(0^+) \quad (29)$$

Considerando un electrón que incide por la izquierda se tiene

$$A_0 + B_0 = F_0 \quad (30)$$

La segunda condición implica la derivada de la función de onda, y para potenciales delta se deduce a partir de la parte espacial de la ecuación de Schrödinger.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} dx + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} V(x)\phi(x) dx = E \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \phi(x) dx \quad (31)$$

En el límite en el que $\epsilon \rightarrow 0$, nos queda la condición

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{x=0^+} - \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{x=0^-} = \frac{2m}{\hbar^2} \alpha \phi(0) \quad (32)$$

que en nuestro caso da lugar a la ecuación

$$ik(F_0 + B_0 - A_0) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2} F_0 \quad (33)$$

donde $k \equiv k_0$. Combinando las dos ecuaciones se llega a los siguientes coeficientes de transmisión y reflexión.

$$T = \frac{1}{1 + \beta^2} \quad R = \frac{\beta^2}{1 + \beta^2} \quad \beta \equiv \frac{m\alpha}{\hbar^2 k} \quad (34)$$

Con esto ya se tienen las conclusiones más importantes del potencial estático. Lo primero es ver que el potencial dispersa elásticamente, sin variar la energía de la partícula incidente. En el caso de amplitud oscilante también hay dispersión inelástica debido a la posibilidad de absorber o emitir cuantos de energía $\hbar\omega$. Por otra parte, a medida que aumenta la energía de la partícula el parámetro k tiene a infinito. Tenemos entonces que la transmisión tiende a la unidad y la reflexión a la nulidad, ya que a altas energías la partícula no se ve influenciada por el potencial. Se trata de una característica que también observaremos en los potenciales oscilantes posteriores. También es importante notar que tenemos un potencial completamente simétrico, ya que si la partícula incide por la derecha en vez de por la izquierda obtenemos los mismos resultados para T y R . Para terminar, las características de localización del potencial son las mismas para el caso de amplitud oscilante, con lo cual se emplean las mismas condiciones de contorno para hallar los coeficientes B_n y F_n en estos problemas. Las condiciones se aplican también sobre la función de onda general y se deben cumplir para todo x , t .

³Cada vez que hablemos de barreras de potencial en este trabajo, nos estaremos refiriendo a barreras delta.

4. Barrera oscilante en forma sinusoidal.

Con el objetivo de caracterizar los fundamentos del transporte fotoasistido, en esta sección se estudia el potencial de la forma $V(x, t) = V_{ac}\delta(x)\text{sen}(\omega t)$ (ver figura 2). La delta de Dirac nos divide el espacio en dos regiones en las cuales se resuelve la ecuación efectiva (13) empleando el formalismo de la matriz de scattering tal y como se indica en la sección 2.4.

$$\begin{cases} \phi_n^I(x) = A_n e^{ik_n x} + B_n e^{-ik_n x} & \text{si } x < 0 \\ \phi_n^{II}(x) = F_n e^{ik_n x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (35)$$

Se considera un electrón que incide por la izquierda en el potencial armónico, de manera que $A_n = \delta_{n,0}$. Para hallar los coeficientes B_n y F_n se emplean las mismas condiciones de contorno que en la sección 3 para $x = 0$, pero ahora considerando las condiciones generales para todo tiempo t . La condición de continuidad de la función de onda

$$\Psi(0^-, t) = \Psi(0^+, t) \quad (36)$$

da como resultado la ecuación

$$A_n + B_n = F_n \quad (37)$$

La condición sobre la derivada de la función de onda viene dada por

$$\left. \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0^+} - \left. \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0^-} = \frac{2mV_{ac}}{\hbar^2} \Psi(x, 0) \quad (38)$$

Empleando la relación

$$\text{sen}(\omega t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{-in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F_{n+1} - F_{n-1}}{2i} e^{-in\omega t} \quad (39)$$

llegamos a una segunda relación para los coeficientes.

$$ik_n[F_n + B_n - A_n] = \frac{q}{2i}(F_{n+1} - F_{n-1}) \quad (40)$$

donde se ha definido el parámetro q como

$$q \equiv \frac{2mV_{ac}}{\hbar^2} \quad (41)$$

Nótese que V_{ac} tiene unidades de (energía) \times (longitud), por lo que las dimensiones de q son (longitud) $^{-1}$, igual que k_n . Combinando los resultados de (37) y (40) llegamos a un sistema matricial tridiagonal infinito.

$$A_n = F_n + \frac{q}{4k_n}(F_{n+1} - F_{n-1}) \quad (42)$$

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ A_1 \\ A_0 \\ A_{-1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \ddots & 1 & \frac{-q}{4k_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q}{4k_0} & 1 & \frac{-q}{4k_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{q}{4k_{-1}} & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ F_1 \\ F_0 \\ F_{-1} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (43)$$

Este sistema se ha resuelto de dos formas distintas. Por una parte se ha realizado una resolución numérica empleando algoritmos iterativos, y por otra de forma analítica considerando el límite en el cual la amplitud del potencial es relativamente débil.

4.1. Resolución numérica.

En la ecuación matricial (43) se puede observar que, a medida que el parámetro q decrece o k_n aumenta, el acoplamiento entre canales disminuye con el aumento de su valor absoluto de n . Entonces, es razonable asumir que la probabilidad de absorber o emitir n cuantos $\hbar\omega$ tiende a anularse a medida que n crece, ya que

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{q}{4k_n} \right) = 0 \quad (44)$$

y de manera análoga podemos asumir que la influencia de los estados evanescentes también tiende a anularse. En este hecho se basa el método de resolución numérica empleado. Se considera una matriz $(2N + 1) \times (2N + 1)$ para el problema matricial, donde $N = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{pmatrix} A_N \\ A_{N-1} \\ \vdots \\ A_{-N+1} \\ A_{-N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-q}{4k_N} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{q}{4k_{N-1}} & 1 & \frac{-q}{4k_{N-1}} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \frac{q}{4k_{-N+1}} & 1 & \frac{-q}{4k_{-N+1}} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{q}{4k_{-N}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_N \\ F_{N-1} \\ \vdots \\ F_{-N+1} \\ F_{-N} \end{pmatrix} \quad (45)$$

Siguiendo el argumento anterior, a medida que aumenta el valor de N la contribución de los nuevos canales a los principales⁴ es cada vez más insignificante, igual que su contribución, ya sea directa o indirecta, a la transmisión y reflexión totales. Por lo tanto, a medida que N aumenta la solución obtenida se acerca cada vez más a la exacta. Al tener una matriz tridiagonal finita con esta metodología, se pueden emplear toda clase de algoritmos numéricos que traten con números complejos para resolverla. En nuestro caso hemos escogido el algoritmo de Thomas [16], ya que con él se obtiene una solución con un orden de N operaciones frente al orden N^3 que requiere la eliminación gaussiana.

Con el objetivo de evitar problemas numéricos, conviene escoger un sistema de unidades adecuado. Para que los parámetros q y k_n permanezcan en un orden cercano a la unidad, en los casos estudiados de una única barrera oscilante se ha empleado como unidad de energía $\hbar\omega$, de masa m y de longitud $\sqrt{\hbar/m\omega}$ en las resoluciones numéricas. De esta manera los parámetros anteriores se pueden reescribir como

$$q = 2V_{ac} \quad k_n = \sqrt{2(E + n)} \quad (46)$$

El incremento del valor de N implica un aumento considerable de la cantidad de cálculos numéricos que se han de realizar para determinar las corrientes de probabilidad. Por lo tanto, conviene determinar un tamaño óptimo de la matriz. Para conseguirlo, se puede incrementar el valor de N de forma iterativa y comparar el resultado de los diferentes canales de transmisión y reflexión con los de la iteración anterior hasta que la diferencia sea menor a una precisión deseada. Por ejemplo, si se realiza un barrido de las energías para el electrón incidente, se compara la diferencia entre las curvas $T_n(E)$ y $R_n(E)$ en iteraciones sucesivas hasta obtener un resultado con un error inferior al deseado. A modo de ejemplo, se ha estudiado el caso $q = 3$

⁴Nos referiremos a los canales con $n = 0, \pm 1$ como canales principales.

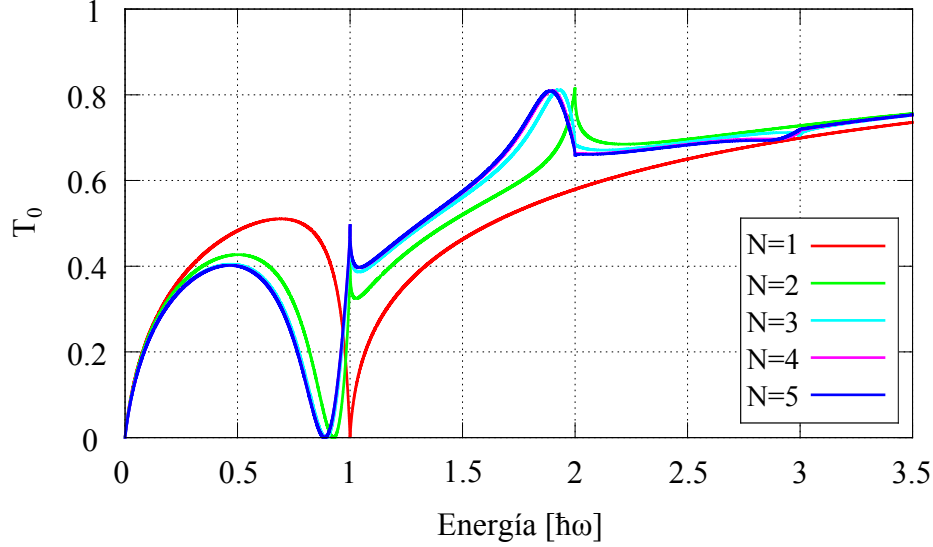


Figura 3: Convergencia del método numérico iterativo para la transmisión T_0 en el caso $q = 3$.

haciendo un barrido energético para demostrar la convergencia del método iterativo. Exigiendo un error inferior a 10^{-3} , se ha obtenido como valor óptimo $N = 5$ (ver Fig. 3). Por lo tanto, se concluye que un valor de N pequeño es en general suficiente para determinar las propiedades de transporte con una precisión bastante buena. Todos los resultados numéricos de este trabajo se han obtenido con una precisión mínima de 10^{-3} .

La figura 4 muestra ejemplos de los principales canales de transmisión y reflexión para diferentes valores de q . Se pueden observar picos de resonancia, cambios bruscos en las probabilidades de transmisión y reflexión, cuando la energía toma valores enteros. Esto se debe a que cuando se alcanza el valor de energía $E = n\hbar\omega$, el estado con E_{-n} pasa de ser evanescente a propagante. El nuevo canal se abre de forma discontinua y se lleva bruscamente parte de la probabilidad de transmisión y reflexión que anteriormente estaba repartida por el resto de canales propagantes. También podemos observar en el caso $q = 4$ cómo la probabilidad de reflexión elástica es igual a la unidad cerca de $E = \hbar\omega/2$. Tanto para este valor como para $E = 0$ se puede comprobar fácilmente en la figura 4 la conservación de la corriente de probabilidad indicada por la ecuación (28). En todos los resultados numéricos, tanto de este potencial como de la doble barrera oscilante, se ha comprobado el cumplimiento de esta conservación. Otra característica interesante es la simetría entre los canales $n = \pm 1$, en los que se observa como la forma de los coeficientes es idéntica salvo por un desplazamiento energético $\hbar\omega$. Se trata de una simetría que se extiende a los canales $\pm n$ y que se discutirá más adelante.

Para valores de $q < 1$ los coeficientes anteriores tienden rápidamente a sus valores asintóticos salvo en las cercanías de la apertura del canal $n = 1$. Se trata del caso en el cual las amplitudes de la barrera son muy pequeñas, de manera que el efecto de los canales superiores pierde importancia, y se estudiará en la siguiente sección. En cambio, para valores de $q > 4$ estas amplitudes son muy grandes y a bajas energías tenemos una atenuación de los coeficientes que impide apreciar cambios de curvatura en las aperturas de nuevos canales. Los canales $n = \pm 2$ y superiores no se han añadido por presentar valores mucho más pequeños que los de los canales principales. Por otro lado, la extensión del barrido energético mostrado se debe a que fuera de este intervalo los coeficientes tienden a sus valores asintóticos, que son la unidad para T_0 y la nulidad para el resto, sin presentar cambios bruscos de comportamiento.

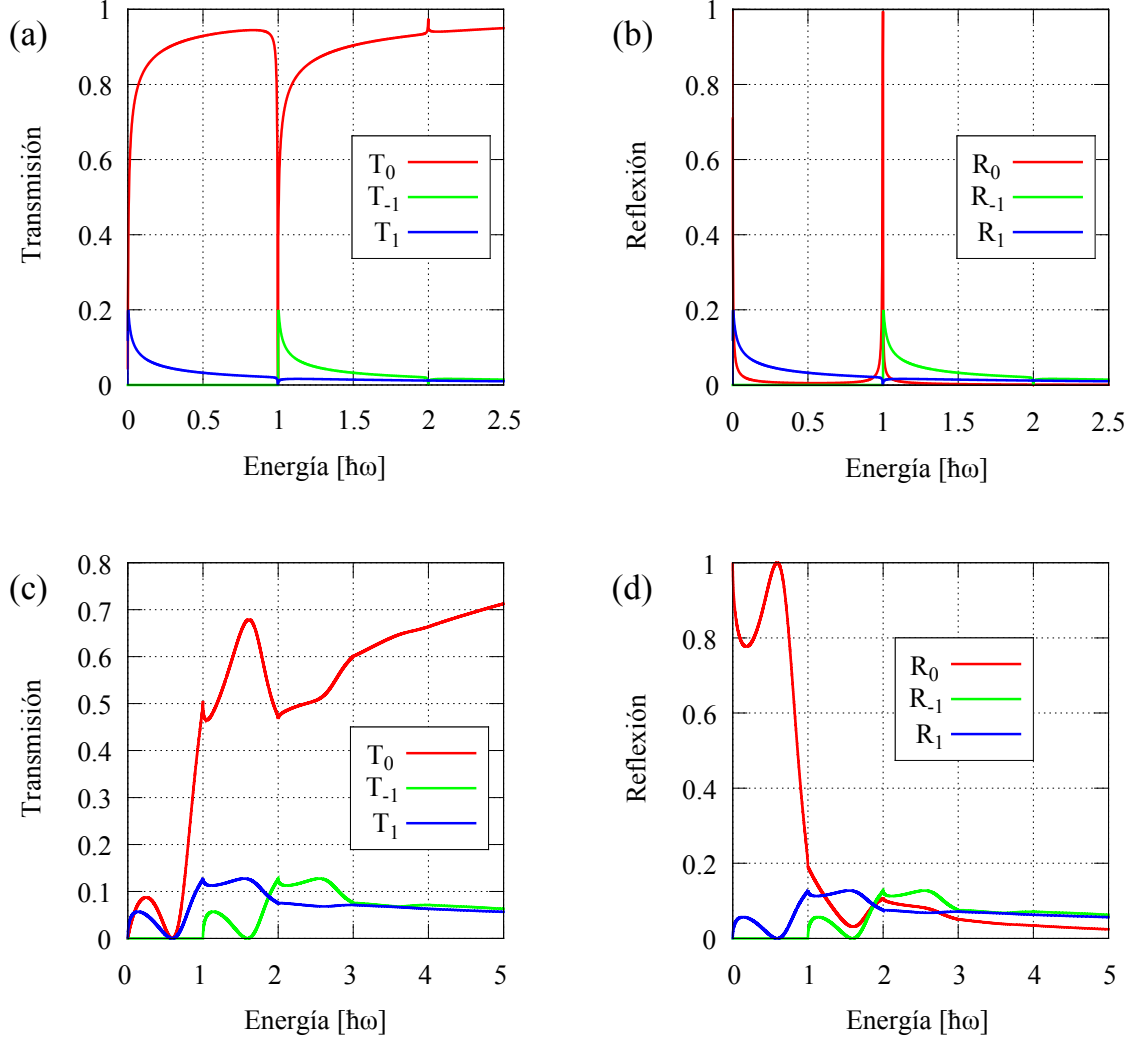


Figura 4: Principales canales de transmisión (a), (c) y de reflexión (b), (d) para $q = 1$ y $q = 4$, respectivamente.

4.2. Solución analítica en el límite de campos débiles.

En este límite podemos hallar una expresión analítica de los coeficientes de transmisión y reflexión sin tener que emplear algoritmos de resolución numérica. Siguiendo el argumento del principio la sección 4.1, si se estudia el límite de campo débil en el cual $q \ll k_n$ ⁵, tan solo es necesario considerar la absorción o emisión de un cuanto $\hbar\omega$, ya que la contribución de los demás canales es despreciable. El problema se reduce así a un sistema de tres ecuaciones

$$0 = F_1 - \frac{q}{4k_1}F_0 \quad 1 = F_0 + \frac{q}{4k_0}(F_1 - F_{-1}) \quad 0 = F_{-1} + \frac{q}{4k_{-1}}F_0 \quad (47)$$

que puede resolverse por sustitución. Desarrollando en serie de Taylor y quedándonos hasta orden $\left(\frac{q}{k}\right)^2$ se obtienen los siguientes coeficientes de transmisión.

$$T_0 = 1 - \frac{q^2}{8k_0k_1} \left[1 + \frac{k_1}{|k_{-1}|^2} \text{Re}(k_{-1}) \right] \quad (48)$$

⁵Es decir, se trata del límite en el cual la amplitud V_{ac} es pequeña.

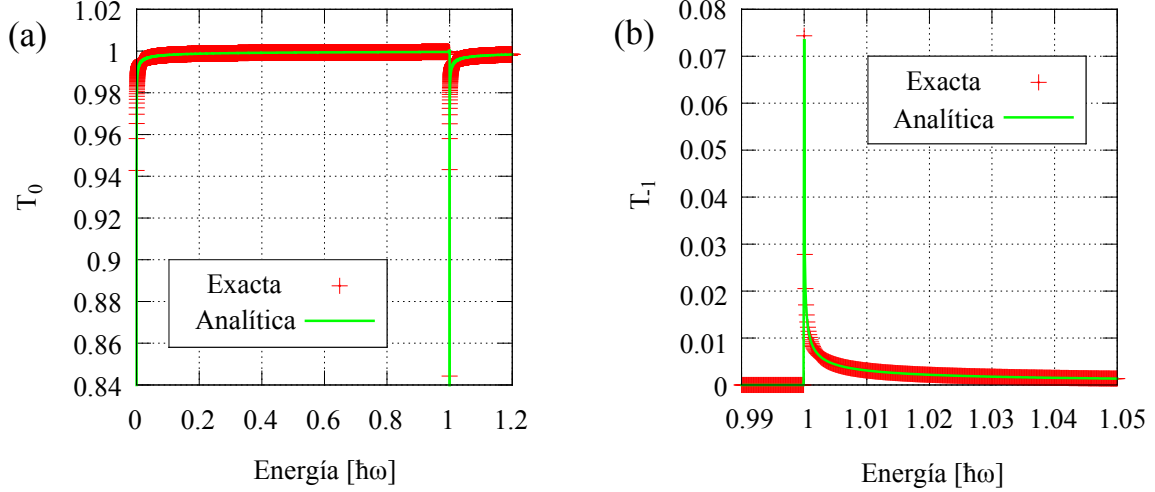


Figura 5: Comparativa de las transmisiones analítica y numérica para los canales $n = 0$ (a) y $n = -1$ (b) en el límite de campos débiles.

$$T_1 = \frac{q^2}{16k_0k_1} \quad (49)$$

$$T_{-1} = \frac{q^2 \operatorname{Re}(k_{-1})}{16k_0|k_{-1}|^2} \quad (50)$$

donde recordamos que $q = \frac{2mV_{ac}}{\hbar^2}$ y $k_n = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E + n\hbar\omega)}$. Para los coeficientes de reflexión se tiene que $R_0 = 0$ y que $R_{\pm 1} = T_{\pm 1}$ desarrollando hasta el mismo orden. Para comprobar la validez de estas expresiones, se han comparado en el caso $q = 0.1$ con los resultados del algoritmo de resolución numérica. En la figura 5 se halla la probabilidad de transmisión en los canales $n = 0, -1$ calculada de ambas maneras. Las expresiones obtenidas (48)–(50) presentan variables k_n en sus denominadores, lo que implica divergencias en aquellas energías tales que $k_n = 0$. Esto se debe a que cerca de estas energías la condición de campo débil deja de cumplirse. Fuera de este punto singular, la solución analítica da el comportamiento correcto y nos asegura que para cualquier amplitud no nula del potencial oscilante tendremos estos picos de resonancia, más estrechos cuanto menor sea q . Por otra parte, en las expresiones obtenidas vemos cómo se alcanzan los límites asintóticos esperados para altas energías. Sumando los tres coeficientes de transmisión y reflexión se obtiene la unidad, lo que prueba la consistencia de estas expresiones con la conservación de la corriente en este límite. Además, en las ecuaciones (49) y (50) se puede observar una de las características mencionadas en la sección 4.1 para los canales $n = \pm 1$. Ambas expresiones son idénticas salvo por un corrimiento de energía

$$T_1(E - \hbar\omega) = T_{-1}(E) \quad (51)$$

ya que, por definición, tenemos que $T_n(E) = 0$ si $E < 0$. La igualdad se obtiene fácilmente viendo que el corrimiento da lugar a los cambios $k_0 \rightarrow k_{-1}$ y $k_1 \rightarrow k_0$. Se puede aplicar el mismo razonamiento para los coeficientes de reflexión.

El caso de una barrera delta oscilante nos ha permitido analizar las características fundamentales del transporte fotoasistido, pero para observar efectos de bombeo es necesario considerar potenciales que rompan la simetría direccional. Por eso, nuestro siguiente objetivo será investigar las propiedades de transmisión de una doble barrera de amplitudes oscilantes.

5. Doble barrera oscilante en forma sinusoidal.

En esta sección se estudia una doble barrera oscilante en el caso monocromático, es decir, con periodos de oscilación idénticos en ambas barreras (ver figura 6). El potencial viene dado por

$$V(x, t) = V_1 \text{sen}(\omega t) \delta(x + a) + V_2 \text{sen}(\omega t + \theta) \delta(x - a) \quad (52)$$

donde $2a$ es la distancia entre las barreras, θ el desfase temporal, y hemos permitido que las amplitudes de potencial sean diferentes, $V_1 \neq V_2$. Se ha escogido el caso monocromático porque es el más sencillo de analizar con la teoría de Floquet. El procedimiento para hallar las amplitudes de probabilidad de la función de onda en las diferentes regiones espaciales es completamente análogo al caso de una única barrera oscilante. Ahora se considera que pueden llegar electrones tanto por la izquierda como por la derecha, ya que resultará de utilidad cuando se estudie el efecto de bombeo de carga más adelante.

$$\begin{cases} \phi_n^I(x) = A_n e^{ik_n x} + B_n e^{-ik_n x} & \text{si } x < -a \\ \phi_n^{II}(x) = C_n e^{ik_n x} + D_n e^{-ik_n x} & \text{si } -a < x < a \\ \phi_n^{III}(x) = F_n e^{ik_n x} + G_n e^{-ik_n x} & \text{si } x > a \end{cases} \quad (53)$$

Aplicando las mismas condiciones que en la sección 4 para la función de onda y su derivada, ahora en $x = \pm a$, se obtienen cuatro ecuaciones que conducen a un nuevo problema matricial. Los parámetros q_1 y q_2 que aparecen en ellas se definen de manera análoga a (41). Debido a la extensión de las expresiones finales, tan solo quedarán indicadas estas ecuaciones iniciales.

$$A_n e^{-ik_n a} + B_n e^{ik_n a} = C_n e^{-ik_n a} + D_n e^{ik_n a} \quad (54)$$

$$C_n e^{ik_n a} + D_n e^{-ik_n a} = F_n e^{ik_n a} + G_n e^{-ik_n a} \quad (55)$$

$$\frac{2k_n}{q_1} [(A_n - C_n) e^{-ik_n a} - (B_n - D_n) e^{ik_n a}] = A_{n+1} e^{-ik_{n+1} a} + B_{n+1} e^{ik_{n+1} a} - A_{n-1} e^{-ik_{n-1} a} - B_{n-1} e^{ik_{n-1} a} \quad (56)$$

$$\frac{2k_n}{q_2} [(C_n - F_n) e^{ik_n a} - (D_n - G_n) e^{-ik_n a}] = (F_{n+1} e^{ik_{n+1} a} + G_{n+1} e^{-ik_{n+1} a}) e^{i\theta} - (F_{n-1} e^{ik_{n-1} a} + G_{n-1} e^{-ik_{n-1} a}) e^{-i\theta} \quad (57)$$

Mediante sustitución se llega a un problema matricial que involucra los vectores formados por las amplitudes de probabilidad A_n , G_n y B_n o F_n .

$$\vec{A} = \mathbf{X}\vec{F} + \mathbf{Y}\vec{G} \quad (58)$$

En este caso \mathbf{X} e \mathbf{Y} son matrices pentadiagonales. Conocidos los vectores incidentes \vec{A} y \vec{G} , se llega al problema matricial

$$\vec{A}^* = \mathbf{X}\vec{F} \quad \vec{A}^* \equiv \vec{A} - \mathbf{Y}\vec{G} \quad (59)$$

La resolución de este sistema puede realizarse numéricamente empleando la misma metodología que en la sección 4.1, pero el algoritmo de Thomas no sirve para matrices pentadiagonales. En

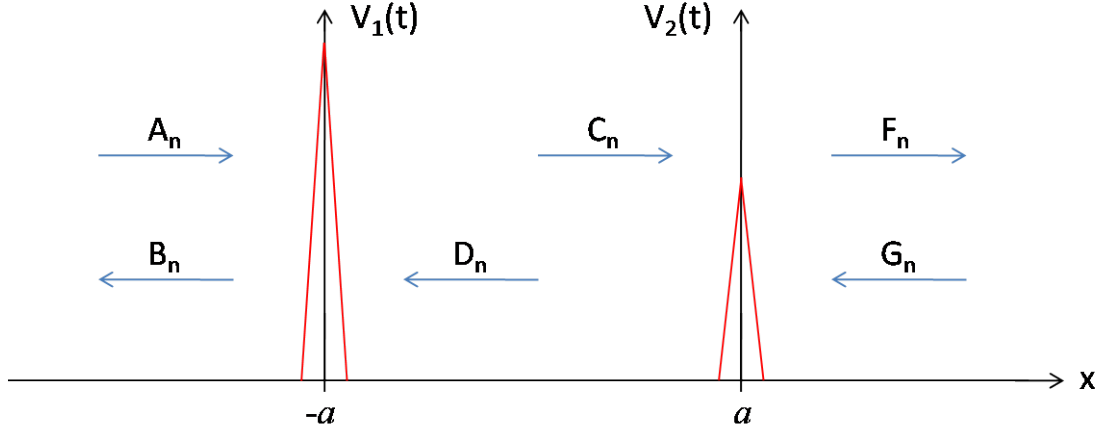


Figura 6: Estados propagantes en un potencial de dos barreras delta oscilantes.

este caso se ha empleado un algoritmo de resolución por gaussianas [17]. Para los coeficientes de transmisión y reflexión hay que distinguir si la partícula incide por la izquierda o por la derecha. En el primer caso tenemos las expresiones ya vistas en (26), y en el segundo tenemos

$$T_n = \frac{\text{Re}(k_n)}{k_0} |B_n|^2 \quad R_n = \frac{\text{Re}(k_n)}{k_0} |F_n|^2 \quad (60)$$

5.1. Resultados numéricos.

El potencial doble barrera oscilante es una buena modelización de puntos cuánticos en los cuales se consigue una corriente directa sin aplicar una diferencia de potencial entre los reservorios a los que se conectan. Los parámetros característicos de estos sistemas se encuentran a continuación [18]:

$$\begin{aligned} E_F &\sim 10 \text{ meV} & \hbar\omega &\sim 0.1 - 10 \text{ meV} & V_i &\sim 100 \text{ meV} \cdot \text{nm} \\ a &\sim 10 \text{ nm} & T &\sim 0.1 - 1 \text{ K} \end{aligned}$$

Nuestro objetivo es dar valores realistas a los resultados que obtengamos. Por ello, y para evitar problemas numéricos, el sistema de unidades escogido en nuestro caso ha sido 1 meV para la energía, 1 nm para la longitud y la masa efectiva del electrón para la masa. Para todos los potenciales doble barrera oscilante tratados en el trabajo se ha considerado una semidistancia entre barreras de $a = 10 \text{ nm}$. En la figura 7 se hallan las probabilidades de transmisión y reflexión de los canales principales para un electrón que incide desde la izquierda en la doble barrera. En esta ocasión también se han añadido los canales $n = \pm 2$ con la finalidad de mostrar sus órdenes de magnitud y que presentan un comportamiento similar al de los canales inferiores. Se puede observar, igual que en el caso de una única barrera oscilante, la aparición de cambios bruscos en los coeficientes con la apertura de nuevos canales cuando $E = n\hbar\omega$, siendo $n \in \mathbb{Z}$. En cambio, en este caso ya no se observa la equivalencia entre los canales $\pm n$ con un desplazamiento energético. La introducción de una nueva barrera oscilante ha roto esta simetría. Las transmisiones y reflexiones para un electrón que incida por la derecha son diferentes debido a que el caso estudiado tiene asimetría direccional, a pesar de que su forma es similar en el caso estudiado. Este hecho se estudia en más detalle en la sección 6.1 para el límite adiabático, pero uno ya puede esperar a partir de aquí la presencia de corrientes de bombeo en el sistema.

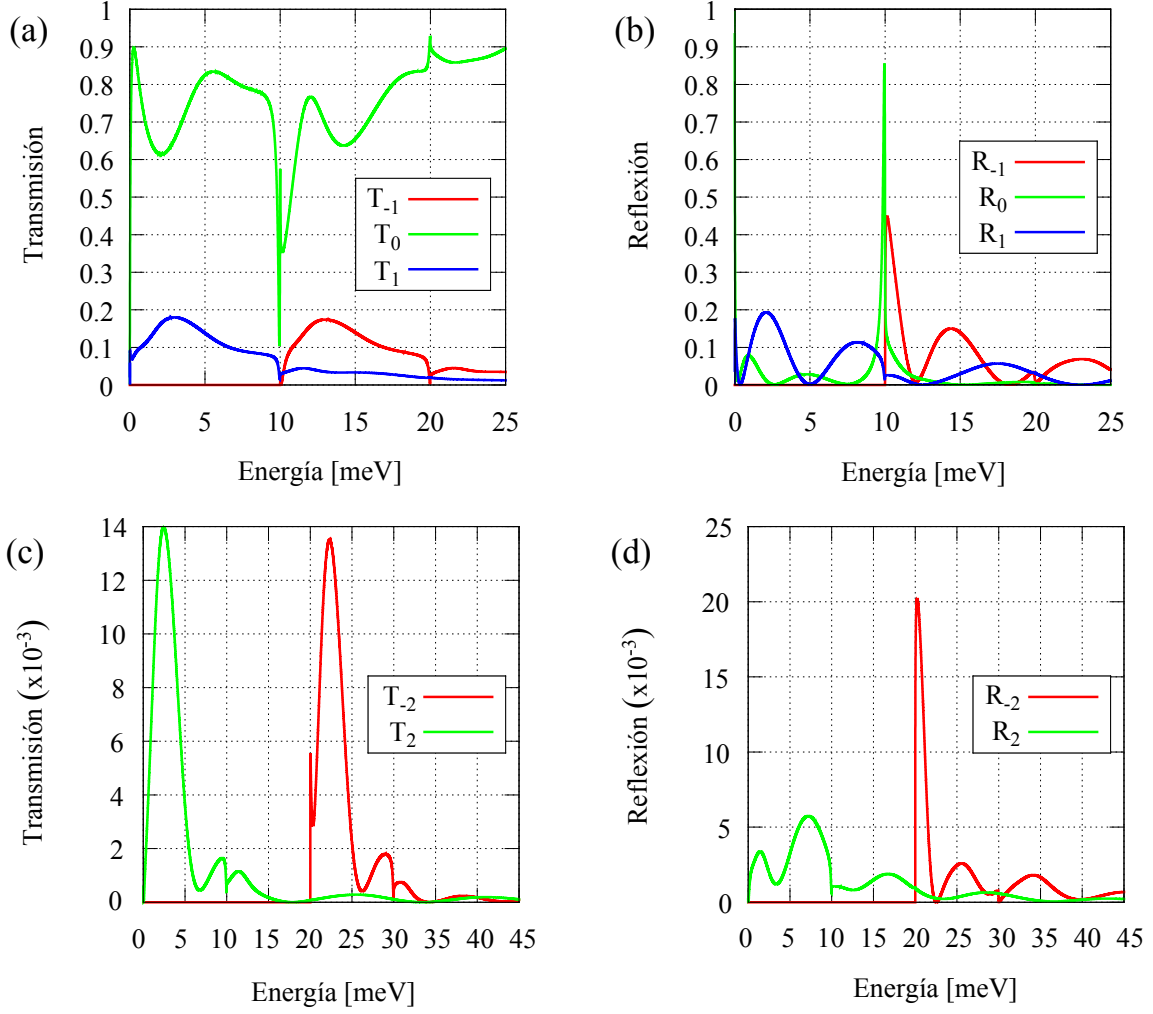


Figura 7: Canales de transmisión (a), (c) y reflexión (b), (d) para un electrón incidiendo por la izquierda en un potencial doble barrera con $V_1 = 170.48$ meV·nm, $V_2 = 227.31$ eV·nm, $\theta = \pi/2$ y $\hbar\omega = 10$ meV.

6. Bombeo cuántico.

Consideramos un punto cuántico como el descrito en la introducción en el cual el movimiento de los electrones se puede describir unidimensionalmente, y que está conectado mediante dos barreras túnel a reservorios externos llenos de electrones. Los electrones que llegan a la estructura están separados por una región en la cual aplicamos un voltaje externo, que identificaremos con los casos anteriormente estudiados de barreras de potencial. A diferencia de los casos de un potencial delta estático o oscilante⁶, es con una doble barrera oscilante con la que se puede conseguir el bombeo cuántico. Por supuesto, para poder emplear los potenciales anteriores se han despreciado los efectos de espín y las interacciones electrón-electrón. Esta aproximación es válida cuando el punto está en presencia de un campo Zeeman intenso que polarice completamente los electrones y cuando el punto es lo suficientemente grande como para que las propiedades de apantallamiento debiliten los efectos de carga.

⁶En estos casos no se forma un punto cuántico, sino una simple unión túnel entre dos reservorios electrónicos.

6.1. Fenomenología.

Consideremos primero un potencial delta estático, para el cual se ha visto que tan solo hay dispersión elástica y que se trata de un potencial simétrico. Un electrón que incida por la izquierda tiene la misma probabilidad de ser transmitido o reflejado que uno que lo haga por la derecha. Si tenemos electrones en ambos reservorios llegando al potencial delta, estadísticamente saldrán los mismos en una dirección que en otra, y con la misma energía con la que entraron. Por lo tanto, este potencial no puede generar un bombeo de carga. El potencial delta oscilante permite al electrón tener una dispersión inelástica, pero mantiene la simetría direccional del caso estático y en promedio tampoco genera un bombeo de carga.

El potencial doble delta oscilante cuenta con varios parámetros que nos permiten romper esta simetría. Resulta intuitivo que si la amplitud es mayor en una barrera que en la otra, un electrón tiene mayor probabilidad de ser transmitido en un sentido que en el otro. Lo mismo sucede si consideramos que hay un desfase temporal entre las oscilaciones de ambas barreras, aunque estas tengan la misma amplitud. Por eso consideramos anteriormente este tipo de potencial de una forma tan genérica. La clave se encuentra en que, dado un estado inicial, hay diferentes procesos que pueden darnos lugar a un mismo estado final. Por ejemplo, un electrón puede interactuar con el potencial de scattering y salir con la misma energía si no ha absorbido ni emitido cuantos $\hbar\omega$ en ninguna barrera, si ha absorbido uno en la primera y lo ha emitido en la segunda, etc. Según la mecánica cuántica las amplitudes de probabilidad de cada proceso interfieren, y esto puede dar lugar a la asimetría direccional que buscamos.

Para visualizar este fenómeno de una manera sencilla, consideremos el caso de una doble barrera oscilante con una misma amplitud V pero con un desfase temporal θ y una separación $2a$. Lo haremos en el límite adiabático $E \gg \hbar\omega$, en el que ya se ha demostrado que tan solo es necesario considerar la contribución de los canales principales (secciones 4.1 y 4.2). Si se estudian las diferentes posibilidades que tiene el electrón de ser transmitido con una energía $E - \hbar\omega$ a primer orden, las únicas dos opciones que existen son que se emita un cuanto $\hbar\omega$ en una de las barreras y que en la otra se produzca una dispersión elástica. Se pueden considerar procesos de orden superior que involucren reflexiones internas, pero son mucho menos probables y los procesos a primer orden dominan sobre estos. Sean A_j las amplitudes de probabilidad para cada uno de estos procesos, donde $j = 1, 2$ nos indica que la emisión se ha producido en la primera o en la segunda barrera. El formalismo cuántico nos dice que la probabilidad de transmisión en este canal viene dada por

$$T_{-1} = |A_1 + A_2|^2 \quad (61)$$

Cada amplitud es a su vez el producto de dos amplitudes. Por un lado tenemos la de la partícula libre $A_f(E_n) = e^{i2k_n a}$, y por otro lado la de perder un cuanto $\hbar\omega$ por parte del potencial. Esta última es proporcional al coeficiente V_j del desarrollo de Fourier de $V_j(t)$, y denotamos la proporcionalidad mediante $A_{V,j} = \alpha V_j e^{-i\theta_j}$, donde θ_j es el desfase temporal de cada barrera. Consideramos, igual que en la sección 5, que $\theta_i = \theta\delta_{i,2}$. Por lo tanto [9]:

$$T_{-1} = |A_f(E_0)A_{V,2} + A_{V,1}A_f(E_{-1})|^2 = |\alpha|^2 V^2 |e^{i2k_0 a} e^{-i\theta} + e^{i2k_{-1} a}|^2 \quad (62)$$

En el límite adiabático podemos expandir $k_{-1} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - \hbar\omega)}$ a primer orden.

$$k_{-1} = k_0 - \sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} \quad (63)$$

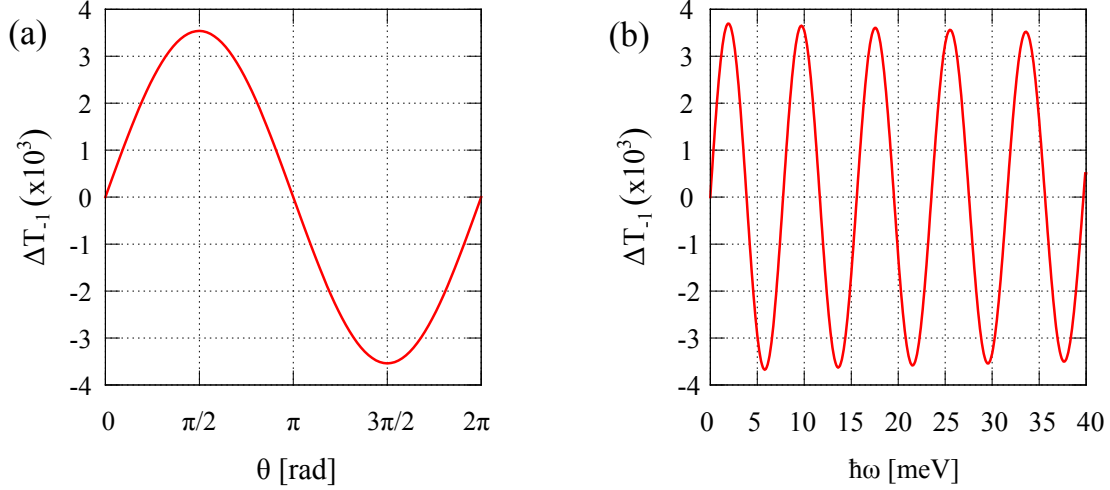


Figura 8: Transmisión neta en función del desfase (a) y del cuanto $\hbar\omega$ (b) para un electrón con $E = 300$ meV emitiendo un cuanto de energía al incidir sobre un potencial doble barrera oscilante con $V_1 = V_2 = 170.48$ meV·nm, $\hbar\omega = 10$ meV en (a) y $\theta = \pi/2$ en (b).

Identificando la velocidad semiclásica del electrón, v , tenemos que

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} \quad (64)$$

$$k_{-1} = k_0 - \frac{\omega}{v} \quad (65)$$

Por lo tanto, si el electrón incide por la izquierda, el coeficiente de transmisión queda como

$$T_{-1}^{\rightarrow} = 2|\alpha|^2 V^2 \left[1 + \cos\left(\theta - \frac{2a\omega}{v}\right) \right] \quad (66)$$

Realizando el mismo procedimiento considerando que el electrón incide por la derecha, se obtiene

$$T_{-1}^{\leftarrow} = 2|\alpha|^2 V^2 \left[1 + \cos\left(\theta + \frac{2a\omega}{v}\right) \right] \quad (67)$$

ya que la velocidad de grupo tiene signo opuesto. Entonces, un desfase θ no nulo entre la oscilación de las dos barreras puede dar lugar a una asimetría direccional y a que la transmisión incidiendo por un lado no sea igual a la transmisión incidiendo por el otro. La diferencia entre ambas determina en qué sentido se tiene transmisión neta de electrones emitiendo un cuanto de energía $\hbar\omega$.

$$\Delta T_{-1} \equiv T_{-1}^{\rightarrow} - T_{-1}^{\leftarrow} = 4|\alpha|^2 V^2 \text{sen}(\theta) \text{sen}\left(\frac{2a\omega}{v}\right) \quad (68)$$

Para comprobar este resultado se ha realizado el cálculo numérico para el potencial doble barrera oscilante de la sección 5 en un caso que se corresponde con el límite adiabático. Las transmisiones obtenidas se encuentran en la figura 8, donde observamos que el cálculo numérico reproduce el comportamiento sinusoidal descrito por la ecuación (68). Es importante notar que, además de en $\theta = 0$, la transmisión neta también se anula en $\theta = \pi$. A pesar de que aparentemente el potencial tiene una asimetría direccional, para este desfase se pierde a causa del formalismo en el cual estamos estudiando el problema. Como determinamos las corrientes de probabilidad promediando sobre un ciclo de oscilación del potencial, el resultado es independiente del instante

inicial de dicho ciclo. Por ello, en el caso de una única barrera oscilante (sección 4) se obtienen las mismas transmisiones y reflexiones considerando un potencial $V(x, t) = V_{ac}\delta(x)\text{sen}(\omega t + \theta)$. Considerando esta característica para el potencial doble barrera oscilante en el caso $V_1 = V_2 = V$, podemos imaginar para $\theta = \pi$ un electrón que incide sobre la barrera de la izquierda

$$V(x, t) = V(\delta(x + a) - \delta(x - a))\text{sen}(\omega t) \quad (69)$$

Podemos considerar el mismo potencial para uno que incida por la derecha, pero debido a que el resultado es independiente del instante inicial del ciclo, podemos tratar el caso

$$V(x, t) = V(\delta(x - a) - \delta(x + a))\text{sen}(\omega t) \quad (70)$$

Empleando la inversión $x \rightarrow -x$ en todo el sistema, se comprueba fácilmente que ambos casos son el mismo y que por lo tanto la diferencia entre transmisiones y reflexiones será nula. Para $\theta \neq 0, \pi$ no se obtiene esta equivalencia al aplicar ambas simetrías, lo que da lugar a una transmisión neta no nula.

Este desarrollo teórico puede realizarse de manera análoga para el resto de canales principales, obteniéndose resultados similares. Por lo tanto, queda demostrado que imponiendo asimetría direccional en el potencial doble barrera se puede conseguir un flujo neto de electrones a través de canal del punto cuántico. Además, ha quedado demostrado el carácter exclusivamente cuántico de este fenómeno de transporte electrónico, ya que el origen es debido a la interferencia ondulatoria entre amplitudes electrónicas de scattering.

6.2. Matriz de Floquet y corriente eléctrica.

Nuestro objetivo ahora es calcular la corriente eléctrica neta de bombeo. Consideraremos un sistema mesoscópico genérico acoplado a reservorios fermiónicos. Cada reservorio tiene un potencial químico E_{Fi} y está a una temperatura T_i . La distribución de Fermi-Dirac nos determina, de manera estadística, la cantidad de electrones que se encuentran con una energía E en cada reservorio. Estamos interesados en el caso isoelectrónico ($E_{Fi} = E_F$) e isotérmico ($T_i = T$):

$$f_0(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right)} \quad (71)$$

En el formalismo de scattering se asume que los electrones que llegan a los reservorios se thermalizan al instante. Independientemente de la energía con la que lleguen, ésta se reajusta mediante su interacción con el resto de electrones o con la red de manera que la condición de equilibrio térmico se satisface. Sin embargo, su comportamiento dentro del conductor mesoscópico es puramente cuántico [18]. Debemos tener en cuenta que se trata de dos sistemas conectados pero de escalas completamente diferentes.

A partir de los coeficientes B_n y F_n hallados para este potencial en la sección 5, se puede construir la matriz de scattering de Floquet, \hat{S}_F . Continuaremos con la notación empleada en esta sección para las amplitudes. El elemento de matriz $S_{F,\beta\alpha}(E_n, E)$ se define como la amplitud de probabilidad que tiene un electrón de salir con energía E_n por el contacto β al incidir con energía E por el contacto α , donde $\alpha, \beta = 1, 2$. Identificaremos la incidencia por la izquierda con el valor 1, y por la derecha con el valor 2.

$$\begin{pmatrix} \vec{B} \\ \vec{F} \end{pmatrix} = \hat{S}_F \begin{pmatrix} \vec{A} \\ \vec{G} \end{pmatrix} \quad (72)$$

También se puede definir la submatriz $\hat{S}_F^{(p)}$ como aquella en la que solo se encuentran los estados propagantes. Por la conservación de la corriente se tiene que

$$\hat{S}_F^{(p)\dagger} \hat{S}_F^{(p)} = \hat{S}_F^{(p)} \hat{S}_F^{(p)\dagger} = \mathbb{I} \quad (73)$$

De igual manera, al considerar flujos incidentes de la forma $\delta_{n,0}$, la conservación de la corriente implica otra condición para la matriz \hat{S}_F . Si el electrón incide por el contacto β , entonces

$$\sum_{\alpha=1}^2 \sum_{E_n > 0} |S_{F,\alpha\beta}(E_n, E)|^2 = 1 \quad (74)$$

que simplemente es una reescritura de la condición (28). De (73) también se deriva una condición análoga

$$\sum_{\beta=1}^2 \sum_{E_n > 0} |S_{F,\alpha\beta}(E, E_n)|^2 = 1 \quad (75)$$

que resulta de utilidad a pesar de que su interpretación es menos intuitiva. Entendiendo que al incidir un electrón en el potencial, éste tendrá una cierta probabilidad de ser transmitido o reflejado absorbiendo o emitiendo cuantos de energía, y que la suma de las probabilidades de cada proceso ha de ser equivalente a la unidad por la conservación de la corriente, la condición (75) expresa el mismo razonamiento pero en sentido inverso.

Empleando la matriz de Floquet se puede calcular la corriente neta producida por el bombeo cuántico. Conociendo la cantidad de electrones con energía E que entran por cada lado del potencial, $f_\alpha^{(in)}(E)$, la distribución de partículas que sale por cada contacto con energía E viene dada por

$$f_\alpha^{(out)}(E) = \sum_{\beta=1}^2 \sum_{E_n > 0} |S_{F,\alpha\beta}(E, E_n)|^2 f_\beta^{(in)}(E_n) \quad (76)$$

ya que todos los electrones que inciden con energía $E_n > 0$ pueden absorber o emitir los cuantos $\hbar\omega$ necesarios para salir con energía E , ya sea transmitidos o reflejados. Este último sumatorio se ha de leer como la suma sobre todos los n tales que $E_n > 0$. Integrando para todo el rango de energías obtenemos el flujo de electrones que sale por el contacto α , e integrando la diferencia entre las distribuciones saliente y entrante se obtiene el flujo neto de electrones [19].

$$I_\alpha = \frac{e}{h} \int_0^\infty dE \left(f_\alpha^{(out)}(E) - f_\alpha^{(in)}(E) \right) \quad (77)$$

donde I_α es la corriente promediada en un ciclo, la constante h viene de la cancelación en 1D entre la densidad de estados y la velocidad electrónica, y la constante e se ha incorporado para expresar el flujo de electrones en términos de una corriente de carga. Introduciendo (76) en (77) se obtiene

$$I_\alpha = \frac{e}{h} \int_0^\infty dE \left[\sum_{\beta=1}^2 \sum_{E_n > 0} |S_{F,\alpha\beta}(E, E_n)|^2 f_\beta^{(in)}(E_n) - f_\alpha^{(in)}(E) \right] \quad (78)$$

Para obtener una expresión con la que poder trabajar, realizamos los cambios $E \rightarrow E - n\hbar\omega$ y $n \rightarrow -n$ en el primer término. No cambian ni los límites de integración ni el sumatorio, ya que $S_{F,\beta\alpha}(E_n, E)$ tan solo contribuye si $E > 0$ y $E_n > 0$. De hecho, la suma sobre $E_n > 0$ tan solo pretende reflejar que $|S_{F,\beta\alpha}(E_n, E)|^2 = 0$ para estados evanescentes. Con ello se llega a

$$I_\alpha = \frac{e}{h} \int_0^\infty dE \left[\sum_{\beta=1}^2 \sum_{E_n > 0} |S_{F,\alpha\beta}(E_n, E)|^2 f_\beta^{(in)}(E) - f_\alpha^{(in)}(E) \right] \quad (79)$$

Para obtener una primera expresión final, introducimos la condición (75) multiplicando a $f_\alpha^{(in)}$, y volvemos a realizar, ahora en este término, los cambios de variable anteriores. De esta forma llegamos a la expresión

$$I_\alpha = \frac{e}{h} \int_0^\infty dE \sum_{\beta=1}^2 \sum_{E_n > 0} |S_{F,\alpha\beta}(E_n, E)|^2 \left(f_\beta^{(in)}(E) - f_\alpha^{(in)}(E_n) \right) \quad (80)$$

que, en el caso en el cual ambos reservorios tengan el mismo potencial químico y temperatura, equivale finalmente a

$$I_\alpha = \frac{e}{h} \int_0^\infty dE \sum_{\beta=1}^2 \sum_{E_n > 0} |S_{F,\alpha\beta}(E_n, E)|^2 \left(f_0(E) - f_0(E_n) \right) \quad (81)$$

Esta ecuación nos muestra que sólo los electrones con una energía relativamente cercana al nivel de Fermi contribuyen a la corriente. Este rango de energías se reduce a medida que $E_F \gg \hbar\omega$, es decir, en el límite adiabático en el cual $f_0(E_n) \simeq f_0(E)$. Esto se debe a que la diferencia entre las distribuciones de Fermi $f_0(E)$ y $f_0(E_n)$ es no nula únicamente cuando $E \in (E_F - k_B T, E_F + k_B T)$, ya que fuera de este intervalo las distribuciones alcanzan prácticamente sus valores asintóticos. Por otra parte, podemos obtener otra expresión final para la corriente si en la ecuación (79) aplicamos la condición (74).

$$I_\alpha = \frac{e}{h} \int_0^\infty dE \sum_{E_n > 0} \left[|S_{F,\alpha\beta}(E_n, E)|^2 f_\beta^{(in)}(E) - |S_{F,\beta\alpha}(E_n, E)|^2 f_\alpha^{(in)}(E) \right] \quad (82)$$

Esta última expresión nos dice que la corriente media considerada se debe exclusivamente a las transmisiones de electrones, que las reflexiones no contribuyen. Si se vuelve a considerar que ambos reservorios tienen el mismo potencial químico y están a la misma temperatura, llegamos finalmente a la ecuación

$$I_\alpha = \frac{e}{h} \int_0^\infty dE \sum_{E_n > 0} f_0(E) \left[|S_{F,\alpha\beta}(E_n, E)|^2 - |S_{F,\beta\alpha}(E_n, E)|^2 \right] \quad (83)$$

En todas estas expresiones de la corriente se ha escogido el sentido positivo yendo de los reservorios al punto cuántico. En los resultados numéricos posteriores se ha calculado la corriente $I_{DC} \equiv I_2$.

6.3. Resultados numéricos.

Para realizar los cálculos numéricos hemos considerado que ambos reservorios se hallan a la misma temperatura y que tienen el mismo nivel de Fermi. A partir de la resolución numérica del potencial doble barrera oscilante (sección 5.1) y de las expresiones 81 y 83 se ha determinado la corriente neta en el contacto 2 en función de los parámetros del potencial y de los reservorios. Los resultados obtenidos se encuentran en la figura 9. En la figura 9(a) podemos observar la corriente neta en función del desfase entre las barreras para diferentes valores de sus amplitudes en el caso $V_1 = V_2 \equiv V$. Tal y como argumentamos en la sección 6.1, la corriente alcanza sus valores extremos para $\theta = \pi/2, 3\pi/2$, en los cuales la asimetría direccional es máxima, y se anula para $\theta = 0, \pi$, donde la asimetría se rompe. También vemos cómo a medida que aumenta la amplitud del voltaje aplicado conseguimos una mayor magnitud de corriente eléctrica. En la figura 9(b) se representa la corriente en función de la temperatura de los reservorios. Como es habitual en el transporte electrónico, con el aumento de la temperatura tenemos una disminución de la

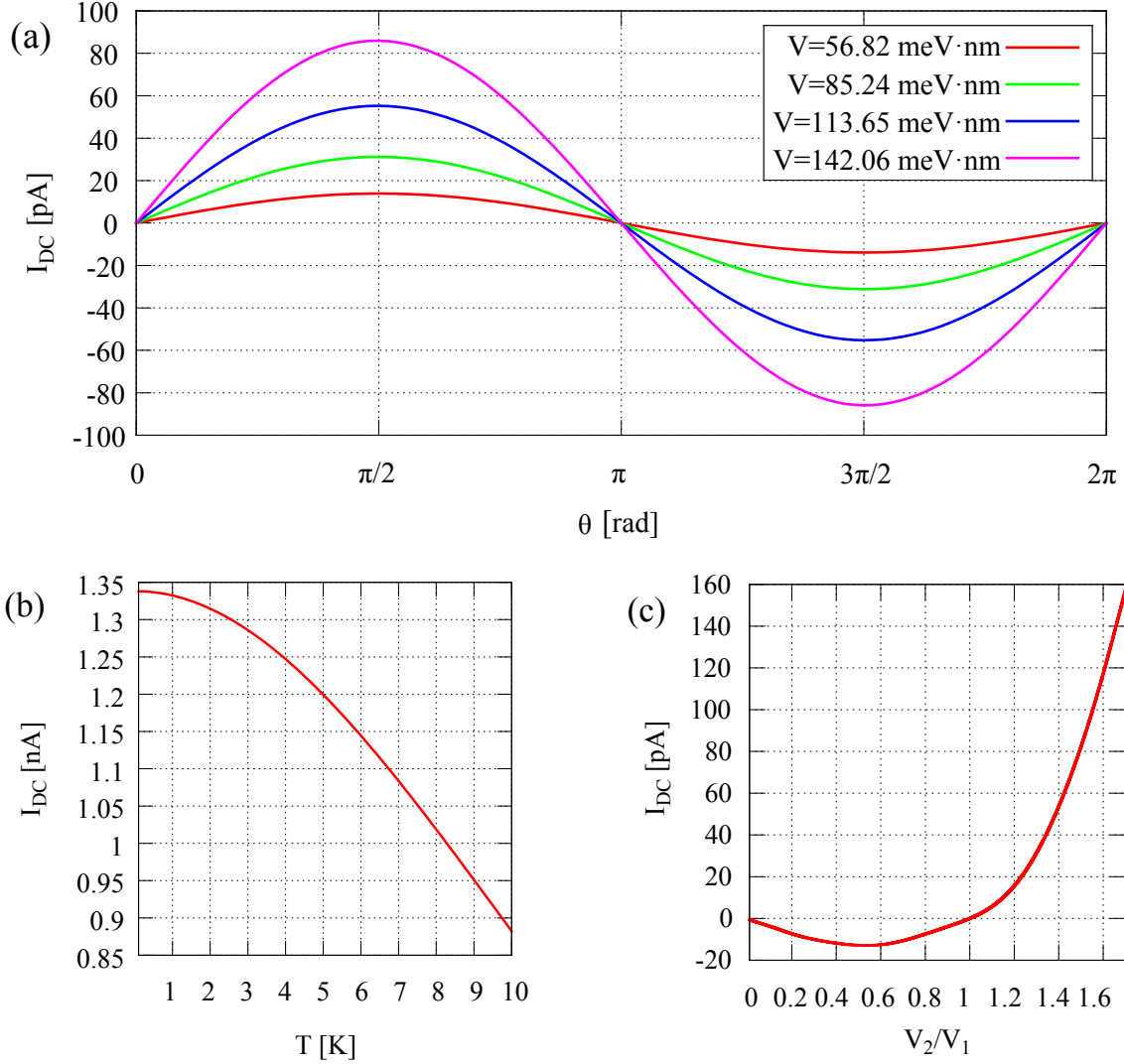


Figura 9: Corriente eléctrica en función del desfase temporal (a), de la temperatura (b) y de la amplitud relativa V_2/V_1 (c). En (a): $V_1 = V_2 \equiv V$, $\hbar\omega = 1$ meV, $E_F = 70$ meV, $T = 1$ K. En (b): $V_1 = 113.65$ meV·nm, $V_2 = 170.48$ meV·nm, $\theta = \pi/2$, $\hbar\omega = 10$ meV, $E_F = 30$ meV. En (c): $V_1 = 170.48$ meV·nm, $\theta = 0$, $\hbar\omega = 10$ meV, $E_F = 20$ meV, $T = 0.1$ K.

corriente eléctrica obtenida. En la figura 9(c) podemos observar la corriente eléctrica obtenida con un desfase nulo entre ambas barreras variando la amplitud de una forma relativa a la otra. Como cabe esperar, cuando la amplitud es la misma ($V_2/V_1 = 1$) tenemos simetría direccional en el punto cuántico y la corriente es nula. Para amplitudes relativas inferiores la corriente es negativa, alcanza un mínimo y acaba anulándose, ya que en el caso $V_2/V_1 = 0$ tan solo tenemos una barrera oscilante y no se produce bombeo de carga. Para amplitudes relativas superiores a la unidad la corriente cambia de signo, ya que la asimetría del sistema se invierte. Lo que se pretende aquí es demostrar numéricamente que también se puede conseguir una asimetría con desfase nulo aplicando diferentes amplitudes a las barreras. Por otra parte, la dependencia de la corriente eléctrica con el nivel de Fermi ha sido analizada en el siguiente apartado ya que se alcanza fácilmente el límite adiabático. Fuera de esta propiedad, destacamos el hecho de que preparando los reservorios de electrones a un nivel de Fermi concreto, podemos regular para un potencial externo dado el sentido de la corriente eléctrica y su magnitud dentro de un rango de intensidades (ver figura 10(c)).

6.4. Corriente media en el límite adiabático.

Se puede obtener una expresión sencilla para la corriente media en el límite adiabático partiendo de la ecuación (81). En ella podemos expandir la función $f_0(E_n)$ para $E_F \gg \hbar\omega$ y $k_B T \gg \hbar\omega$, teniendo en cuenta que en el caso adiabático $\hbar\omega$ es la escala de energía más pequeña de nuestro problema. La expansión a primer orden da lugar a

$$f_0(E_n) = f_0(E) + n\hbar\omega \frac{\partial f_0}{\partial E} \quad (84)$$

Introduciendo esta expansión en (81) se obtiene

$$I_\alpha^{ad} = \frac{e\omega}{2\pi} \int_0^\infty dE \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) \sum_{\beta=1}^2 \sum_{E_n > 0} n |S_{F,\alpha\beta}(E_n, E)|^2 \quad (85)$$

Esta expresión es la que se ha empleado para comparar las corrientes eléctricas en los límites adiabático y no adiabático. Para comprobar su validez se han comparado los resultados numéricos de esta expresión con los obtenidos por (83) en diferentes casos que se corresponden con el

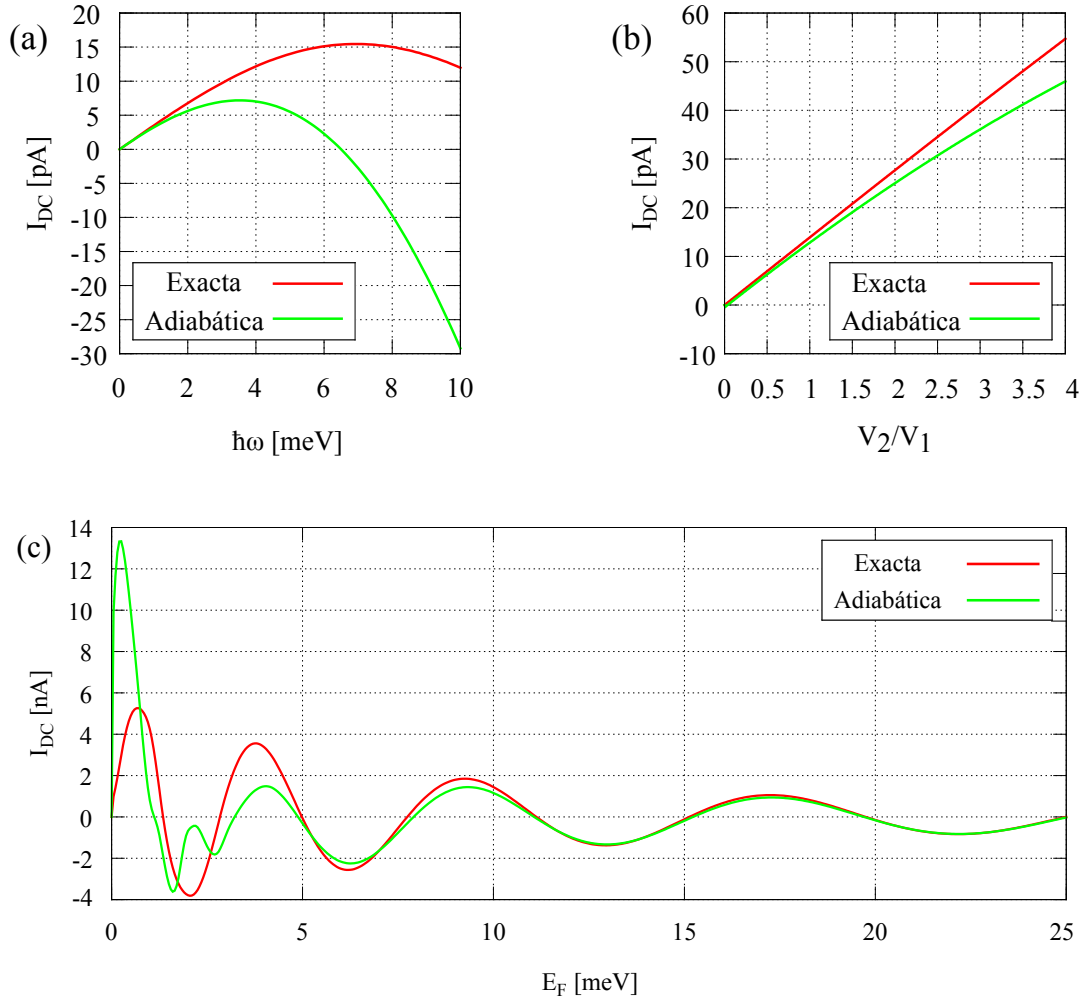


Figura 10: Comparativa de las expresiones (83) y (85) para la corriente eléctrica en función de $\hbar\omega$ (a), de la relación de amplitudes V_2/V_1 (b) y del nivel de Fermi E_F (c). En (a): $V_1 = V_2 = 28.41$ meV·nm, $E_F = 70$ meV. En (b): $V_1 = 56.83$ meV·nm, $\hbar\omega = 1$ meV, $E_F = 70$ meV. En (c): $V_1 = V_2 = 113.65$ meV·nm, $\hbar\omega = 1$ meV. Parámetros: $\theta = \pi/2$, $T = 1$ K.

límite adiabático. En la figura 10(a) podemos observar como ambas expresiones tienden a dar el mismo valor de la corriente eléctrica a medida que $\hbar\omega$ tiende a cero. Además, vemos que en esta región la evolución de la corriente con la frecuencia es lineal, uno de los resultados obtenidos en el experimento de Switkes et al. [11]. En la figura 10(b) observamos una tendencia similar con el decrecimiento de V_2 respecto V_1 . Con la disminución de las amplitudes tenemos factores q más pequeños y por lo tanto una menor contribución de los canales superiores. Al no ser $n\hbar\omega$ tan pequeño en comparación con E_F en este caso, se alcanza el límite adiabático cuando tan solo contribuyen a la corriente los canales principales. Por último, en la figura 10(c) observamos cómo a medida que el nivel de Fermi crece también se alcanza el límite adiabático. Tal y como nos permite ver la ecuación (81), tan solo contribuyen a la corriente los electrones con una energía cercana al nivel de Fermi. Al aumentar E_F estamos enviando electrones con una mayor energía hacia la estructura mesoscópica, de manera que con una $\hbar\omega$ pequeña se alcanza rápidamente el límite adiabático. Además, en este último caso se aprecia perfectamente el comportamiento sinusoidal que dedujimos en la sección 6.1. Al haber una dependencia $(E)^{-1/2}$ en una de las funciones seno, nos aparece un comportamiento oscilante que tiende a anularse a medida que la energía crece.

7. Conclusiones.

En este trabajo se ha caracterizado el fenómeno del bombeo cuántico en sistemas mesoscópicos tales como puntos cuánticos de una forma aproximada. Primero hemos determinado las propiedades de transmisión electrónica fotoasistida para una unión túnel modelada por un potencial del tipo delta y después hemos estudiado la corriente que genera la doble barrera oscilante cuando conectamos el sistema a reservorios exteriores de una escala de tamaño mucho mayor. Se han deducido expresiones generales para el transporte electrónico y se han comparado con otras obtenidas para el límite adiabático. Hemos hallado un acuerdo muy bueno entre las expresiones analíticas y el cálculo exacto en el límite de frecuencias bajas.

Los potenciales de una y dos barreras oscilantes ya se han estudiado en otras ocasiones [7],[10],[20],[21], dando lugar a resultados coherentes con los obtenidos en este trabajo. Normalmente los potenciales que se analizan con la teoría de Floquet presentan una amplitud de barrera con una parte constante más una oscilante en el tiempo, lo que dificulta la comparativa de los resultados obtenidos. Nuestro objetivo en este trabajo ha sido caracterizar las propiedades que se derivan de la parte temporal del potencial.

La utilidad de estudiar un potencial tan simple como el de una doble barrera oscilante es que podemos obtener muchas de las características básicas del bombeo cuántico de una manera sencilla. La aplicación de la teoría de Floquet a modelos más realistas de puntos cuánticos en los que el movimiento de los electrones se extienda a más de una dimensión es más complicada, ya que implica tener que considerar la discretización del espectro en más dimensiones. Para obtener una descripción más realista de estas nanoestructuras se puede continuar estudiando el caso unidimensional añadiendo efectos como las interacciones electrón-electrón [22], que da lugar al efecto de bloqueo de Coulomb en el punto cuántico. Mientras que aquí hemos hallado la corriente eléctrica neta que se consigue en promedio para un ciclo de oscilación del potencial, se pueden estudiar también sus fluctuaciones y determinar en qué condiciones son tan pequeñas que podemos conseguir la cuantización de la carga transferida en cada ciclo [23]. Incluyendo el espín, puede estudiarse el efecto del principio de exclusión de Pauli y el bombeo de espín asociado [24]. Con el formalismo desarrollado también se puede caracterizar el transporte de energía por corrientes de calor [25], o bien considerar barreras de potencial con una cierta anchura [7]. Otra posible extensión es el estudio de las características temporales del proceso de scattering en estos materiales mesoscópicos, como el Wigner delay time [26]. Con su comprensión se pueden analizar las condiciones en las que el transporte electrónico en dispositivos mesoscópicos se produce a altas frecuencias. También se puede explorar el régimen no adiabático, en el cual los electrones con energías más alejadas del nivel de Fermi entran en juego.

Existe toda una serie de posibles aplicaciones para estos sistemas. Entre ellas, podemos destacar su uso en metrología [27] para definir la unidad de corriente, en computación cuántica para la manipulación dinámica de qubits [6], y su uso para la fabricación de dispositivos de nanoelectrónica como condensadores cuánticos [28] o rectificadores, ya que hemos obtenido la generación de una corriente continua a partir de un voltaje alterno.

Referencias

- [1] L. Esaki, “New phenomenon in narrow germanium p- n junctions,” *Physical review*, vol. 109, no. 2, p. 603, 1958.
- [2] R. Mazurczyk, “Semiconductor superlattices,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 10, no. 12, pp. 1971–1982, 1999.
- [3] L. Kouwenhoven, S. Jauhar, J. Orenstein, P. McEuen, Y. Nagamune, J. Motohisa, and H. Sakaki, “Observation of photon-assisted tunneling through a quantum dot,” *Physical Review Letters*, vol. 73, no. 25, p. 3443, 1994.
- [4] G. Platero and R. Aguado, “Photon-assisted transport in semiconductor nanostructures,” *Physics Reports*, vol. 395, no. 1, pp. 1–157, 2004.
- [5] K. Slinker, K. Lewis, C. Haselby, S. Goswami, L. Klein, J. Chu, S. Coppersmith, R. Joynt, R. Blick, M. Friesen, *et al.*, “Quantum dots in Si/SiGe 2DEGs with Schottky top-gated leads,” *New Journal of Physics*, vol. 7, no. 1, p. 246, 2005.
- [6] S.-S. Li, J.-B. Xia, J.-L. Liu, F.-H. Yang, Z.-C. Niu, S.-L. Feng, and H.-Z. Zheng, “InAs/GaAs single-electron quantum dot qubit,” *Journal of Applied physics*, vol. 90, no. 12, pp. 6151–6155, 2001.
- [7] W. Li and L. Reichl, “Floquet scattering through a time-periodic potential,” *Physical Review B*, vol. 60, no. 23, p. 15732, 1999.
- [8] M. Moskalets and M. Büttiker, “Floquet scattering theory of quantum pumps,” *Physical Review B*, vol. 66, no. 20, p. 205320, 2002.
- [9] M. Büttiker and M. Moskalets, “Scattering theory of dynamic electrical transport,” in *Mathematical Physics of Quantum Mechanics* (J. Asch and A. Joye, eds.), ch. 2, pp. 33–44, Springer, 2006.
- [10] M. Mahmoodian, L. Braginsky, and M. Entin, “One-dimensional two-barrier quantum pump with harmonically oscillating barriers: Perturbative, strong-signal, and nonadiabatic regimes,” *Physical Review B*, vol. 74, no. 12, p. 125317, 2006.
- [11] M. Switkes, C. Marcus, K. Campman, and A. Gossard, “An adiabatic quantum electron pump,” *Science*, vol. 283, no. 5409, pp. 1905–1908, 1999.
- [12] C. Hamaguchi, *Basic semiconductor physics*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [13] M. Wagner, “Photon-assisted transmission through an oscillating quantum well: A transfer-matrix approach to coherent destruction of tunneling,” *Physical Review A*, vol. 51, no. 1, p. 798, 1995.
- [14] G. Burmeister and K. Maschke, “Scattering by time-periodic potentials in one dimension and its influence on electronic transport,” *Physical Review B*, vol. 57, no. 20, p. 13050, 1998.
- [15] D. J. Griffiths and E. G. Harris, “Introduction to quantum mechanics,” *American Journal of Physics*, vol. 63, no. 8, pp. 767–768, 1995.
- [16] S. D. Conte and C. W. D. Boor, *Elementary numerical analysis: an algorithmic approach*. McGraw-Hill Higher Education, 1980.
- [17] A. Karawia, “On solving pentadiagonal linear systems via transformations,” *arXiv preprint arXiv:1409.4802*, 2014.

- [18] S. Datta, *Electronic transport in mesoscopic systems*. Cambridge University Press, 1997.
- [19] M. V. Moskalets, *Scattering matrix approach to non-stationary quantum transport*. World Scientific, 2011.
- [20] D. Martinez and L. Reichl, “Transmission properties of the oscillating δ -function potential,” *Physical Review B*, vol. 64, no. 24, p. 245315, 2001.
- [21] S. W. Kim, “Floquet formalism of quantum pumps,” *International Journal of Modern Physics B*, vol. 18, no. 23n24, pp. 3071–3093, 2004.
- [22] C. Beenakker, “Theory of Coulomb-blockade oscillations in the conductance of a quantum dot,” *Physical Review B*, vol. 44, no. 4, p. 1646, 1991.
- [23] M. Moskalets and M. Büttiker, “Dissipation and noise in adiabatic quantum pumps,” *Physical Review B*, vol. 66, no. 3, p. 035306, 2002.
- [24] S. K. Watson, R. Potok, C. Marcus, and V. Umansky, “Experimental realization of a quantum spin pump,” *Physical review letters*, vol. 91, no. 25, p. 258301, 2003.
- [25] M. F. Ludovico, J. S. Lim, M. Moskalets, L. Arrachea, and D. Sánchez, “Dynamical energy transfer in ac-driven quantum systems,” *Physical Review B*, vol. 89, no. 16, p. 161306, 2014.
- [26] C. Texier, “Wigner time delay and related concepts - application to transport in coherent conductors,” *preprint cond-mat arXiv:1507.00075, to appear in Physica E (2016)*.
- [27] F. Zhou, B. Spivak, and B. Altshuler, “Mesoscopic mechanism of adiabatic charge transport,” *Physical review letters*, vol. 82, no. 3, p. 608, 1999.
- [28] J. Gabelli, G. Fève, J.-M. Berroir, B. Plaçais, A. Cavanna, B. Etienne, Y. Jin, and D. Glattli, “Violation of Kirchhoff’s laws for a coherent RC circuit,” *Science*, vol. 313, no. 5786, pp. 499–502, 2006.