



**Universitat de les  
Illes Balears**

Facultat de Ciències

**Memòria del Treball de Fi de Grau**

# Comparació de patrons d'ones gravitacionals post-Newtonians pel col·lapse de sistemes binaris de forats negres

Juan de Dios González Hedström

**Grau de Física**

Any acadèmic 2015-16

DNI de l'alumne: 43213951X

Treball tutelat per Alicia Sintès Olives  
Departament de Física

S'autoritza la Universitat a incloure aquest treball en el Repositori Institucional per a la seva consulta en accés obert i difusió en línia, amb finalitats exclusivament acadèmiques i d'investigació	Autor		Tutor	
	Sí	No	Sí	No
	X		X	

Paraules clau del treball:

Ones gravitacionals, desenvolupament post-Newtonià, sistemes binaris compactes



# Resumen

Hoy en día, en el mundo de la Física, el estudio de las Ondas Gravitacionales, predichas por el Dr. Albert Einstein hace 100 años, ha ganado importancia. Además, este campo ha crecido en interés debido a que en el pasado 14 de Septiembre del 2015 se realizó la primera detección de una Onda Gravitacional.

En este Trabajo de Fin de Grado se ha realizado primero de todo un resumen sobre qué son las Ondas Gravitacionales y sus características. Además, también se ha recopilado información sobre las clases de detectores de estas y qué clase de ondas pueden detectar. Sobre estos detectores, se ha realizado hincapié en los detectores terrestres. Sobre qué clase de onda se ha realizado el estudio, es sobre los sistemas binarios compactos mediante un desarrollo post-Newtoniano. Por otro lado, en cuanto a cálculo, en primer lugar se han realizado estudios sobre la relación señal-ruido, es decir, el *signal to noise ratio*, y sobre la distancia óptima de detección, para saber qué masas totales del sistema binario son las mejores para aplicar los estudios. En segundo lugar, se ha estudiado el error que se puede realizar en la determinación de los parámetros de una onda gravitacional al detectarla, debido a que hay varios factores que conllevan a un detector terrestre tener varias incertezas. Finalmente, se ha calculado el *Overlap* de diferentes sistemas binarios compactos, es decir, la comparación entre dos ondas. En concreto, se ha comparado el efecto de tratar una onda hasta un desarrollo post-Newtoniano concreto con otro de menor orden.

## *Abstract*

*Nowadays, in the world of Physics, the study of Gravitational Waves, predicted by Dr. Albert Einstein 100 years ago, has gained importance. In addition, this area has grown in interest because in the past 14<sup>th</sup> of September 2015 the first detection of a Gravitational Wave was done.*

*In this Final Degree Work, at first, it has made a summary about what are Gravitational Waves and their characteristics. Furthermore, it has also gathered information about the kind of detectors of them and what kind of waves can be detected. On these detectors, it has made emphasis on the ground detectors. About what kind of wave the study has been performed, it is about the Compact Binary Systems through a post-Newtonian development. On the other hand, in terms of the calculation, at first, it has done a study about the signal to noise ratio, and the optimal detection distance, because it is useful to know what total masses are the best to applicate the studies. Secondly, it has studied the error that can be made in the determination of the parameters of a gravitational wave when is detected, due to there are several factors that lead to a ground detector have uncertainties. Finally, it has computed the Overlap of different compact binary systems, i.e. the comparison between two waves. Specifically, it has compared the effect of treating a wave to a specific post-Newtonian development with one of lower order.*

# Contents

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Ondas Gravitacionales</b>	<b>1</b>
2.1	Breve explicación teórica . . . . .	1
2.2	Fuentes de OG . . . . .	2
2.3	Detectores y bandas de frecuencias . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Sistemas Binarios Compactos</b>	<b>7</b>
3.1	La forma de la onda . . . . .	8
3.2	Principios de estadística de análisis de datos . . . . .	12
3.3	Comparación de patrones . . . . .	13
3.4	Detector a utilizar . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Estudio de la detectabilidad de la coalescencia de sistemas binarios de agujeros negros</b>	<b>14</b>
4.1	Cociente señal-ruido (SNR) . . . . .	14
4.2	Distancia óptima . . . . .	15
4.3	Estimación de los parámetros . . . . .	16
4.4	Estudio de la detectabilidad de la señal en diferentes órdenes post-Newtonianos de la fase . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>25</b>

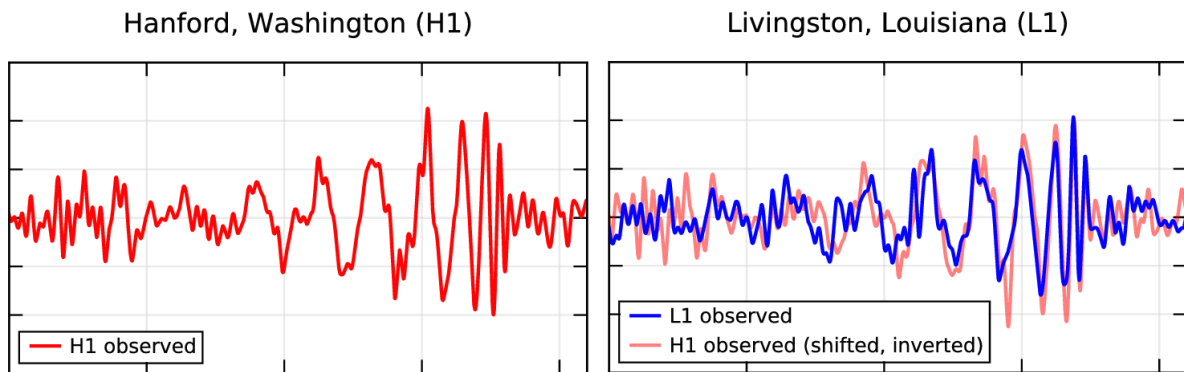


Figure 1: Forma de la Onda Gravitacional GW150914 detectada el 14 de Septiembre del 2015 por el detector *Advanced LIGO* en su fase de pruebas. A la izquierda la onda detectada por el interferómetro terrestre de Handford, y a la derecha la detectada por el interferómetro terrestre de Livingston.

## 1 Introducción

A principios de siglo XX Albert Einstein formuló la Teoría de la Relatividad, basada principalmente en que todo es relativo, nada es absoluto. Dicha teoría contiene técnicas matemáticas para entender el comportamiento del Universo, cuyos resultados son bastante buenos comparados con la observación.

Esta formulación ha sido la que ha conducido a la predicción de las ondas gravitacionales, ondulaciones en el espacio tiempo producidas por grandes cuerpos masivos en movimiento.

La primera evidencia indirecta se vio en el giro del sistema binario de púlsares PSR 1913+16, descubierta por Hulse y Taylor[1]. Observaron que había una precesión de la órbita del sistema binario, a la vez que iba perdiendo energía mediante la radiación gravitatoria predicha por la Relatividad General.

Ahora bien, la evidencia directa de la existencia de las ondas gravitacionales resultó en la detección en la fase de pruebas de *AdvancedLIGO*[2] de GW150914 el 14 de Septiembre del 2015 [3], donde cuya imagen se representa en la Figura 1[4]. Esta onda gravitacional provenía de un colapso de un sistema binario de dos agujeros negros súper masivos. Esta medición ha generado un impulso para la detección de nuevos sistemas.

## 2 Ondas Gravitacionales

### 2.1 Breve explicación teórica

Las ecuaciones del movimiento en la Relatividad General vienen dadas por la ecuación de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \quad (1)$$

Donde  $T_{\mu\nu}$  es el tensor energía-momento y  $k = 8\pi G_N$ .

Si se asume que el campo gravitatorio es débil, esto implica poder expresar la métrica del sistema como una pequeña perturbación a la métrica de Minkowsky. Esta perturbación es la que hace referencia a la onda gravitacional:

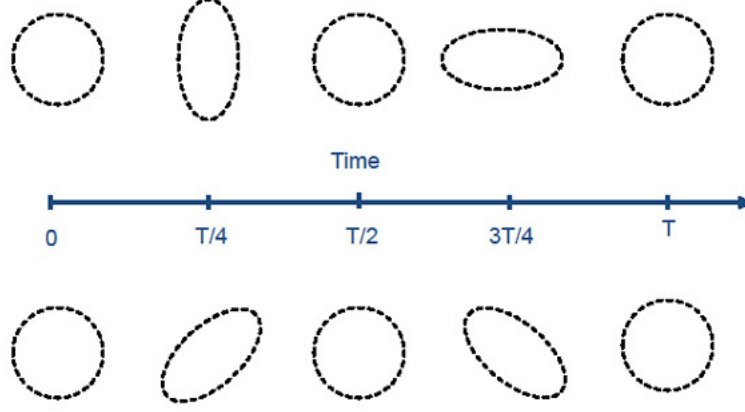


Figure 2: Representación de la modificación del espacio al pasar una onda gravitacional durante el tiempo. En el eje se representa el periodo de la onda. La modificación de arriba corresponde a la polarización + de la onda, y la de abajo a la polarización  $\times$ . [7]

$$g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}, |h_{ij}| \ll 1 \quad (2)$$

Donde  $h_{ij}$  es la métrica de la onda.

Realizando una serie de definiciones y cálculos tensoriales, tal y como se demuestra en [5] se obtiene la siguiente expresión:

$$\delta^k \delta_k \bar{h}_{ij} = -16\pi T_{ij} \quad (3)$$

Aplicando una solución de onda plana que se explica en dicha referencia se obtiene dos propiedades fundamentales de las ondas gravitacionales:

- Se propagan a la velocidad de la luz.
- Las perturbaciones realizadas son transversales a la dirección de propagación del vector de onda.

Por otro lado, también se puede obtener la polarización de las ondas gravitacionales. Para ello se calcula los flujos de masa-energía tal y como se explica en [6], donde se obtiene las siguientes conclusiones:

$$h = h_+ \hat{e}_+ + h_\times \hat{e}_\times \quad (4)$$

$$\hat{e}_+ = \hat{x}\hat{x} - \hat{y}\hat{y}, \quad \hat{e}_\times = \hat{x}\hat{y} + \hat{y}\hat{x} \quad (5)$$

Se puede observar que la onda gravitacional se divide en dos polarizaciones, una + y otra  $\times$ . Dichos símbolos hacen referencia a la forma en la que contrae o dilata el espacio-tiempo la onda gravitacional, véase Figura 2

## 2.2 Fuentes de OG

A cuando fuentes de ondas gravitacionales se refiere, hay diferentes tipos según se detectan en los interferómetros. Entre estas están el *fondo estocástico*, con una fluctuación aleatoria a lo largo de la observación; las *explosiones*, que contienen ciclos cortos de tiempo para

observarlos; las *fuentes periódicas*, que tienen una fluctuación constante, es decir, tal y como indica el nombre, periódica, a lo largo de la observación; y los *sistemas de coalescencia binaria de objetos compactos* (CBS, *Compact Binary System* en inglés), sistemas basados en la rotación de dos cuerpos en una órbita mientras van acercándose entre ellos. Este último es en el que más se centra este trabajo y se explicará en un apartado más adelante.

A continuación se encuentra una pequeña explicación del resto de las fuentes:

### **Fondo estocástico**

Consiste en ondas gravitacionales que se propagan uniformemente en todas las direcciones. Se piensa que este tipo de ondas pueden haber surgido de la radiación de fondo del universo. Esta radiación puede haber sido creada desde inicio del universo y permanece en el espacio de la misma manera que lo hace la radiación de fondo de microondas. Este tipo de ondas tiene una amplitud muy baja, y la sensibilidad de los detectores no es capaz de detectarlo.

### **Explosiones**

Consisten en señales de ondas gravitacionales de corta duración. El comportamiento de estas aún no se entiende exactamente. Esto genera que no se pueda realizar una modelación exacta de este comportamiento.

Como ejemplo de estas se encuentran las supernovas, que son estrellas más masivas que  $8M_{\odot}$  que colapsan debido a la gravedad después de haberse consumido.

### **Fuentes periódicas**

Tal y como se ha dicho antes son ondas gravitacionales que provienen de una fuente que presenta una fluctuación cuasi-periódica.

Una fuente de este tipo es el giro de las estrellas de neutrones. Estas estrellas de neutrones giran debido a la acreción de un objeto acompañante. Este tipo de objetos suele estar en un rango de frecuencias de entre  $0.1 - 1000 Hz$ . Las ondas gravitacionales pueden ser diferentes en sistemas de estrellas de neutrones. Una estrella de neutrones puede tener una densidad no homogénea, puede tener un eje de rotación no alineada al eje de simetría, etc. Ahora bien, aunque su emisión de ondas gravitacionales sea débil, como es periódica y continua, incrementa la probabilidad de detección (aumenta el SNR).

### **Otras posibles fuentes**

Tal y como se puede encontrar en [8] hay fuentes gravitacionales que teóricamente provienen de cuerdas cósmicas, de radiación de ondas gravitacionales térmicas, y otras.

## **2.3 Detectores y bandas de frecuencias**

Las ondas gravitacionales se pueden clasificar según la frecuencia de la misma manera que la clasificación de las ondas electromagnéticas. En la Figura 3, que se puede encontrar en [8], se puede ver la clasificación, además de los detectores que pueden operar en dichas sensibilidades.

Según en qué frecuencia se sitúe la onda gravitacional, el método de detección es diferente.

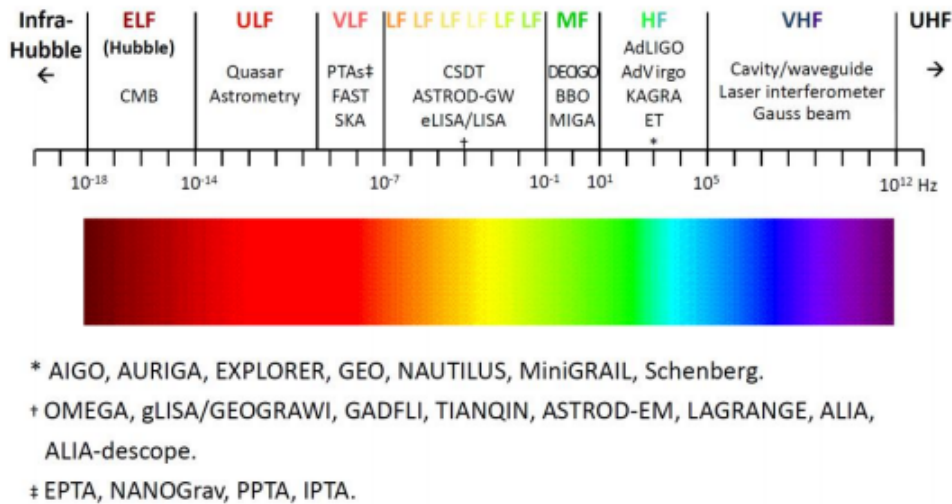


Figure 3: Espectro de las ondas gravitacionales, y detectores que operan en dichas bandas de frecuencias.

La primera manera de clasificar los métodos es si se realiza mediante una la detección a tiempo real o con la detección de rastro o de huella.

En la detección a tiempo real se utiliza la escala temporal de 100 años, es decir, la esperanza de vida del ser humano, aunque esta escala puede extenderse. Este método de detección abarca las seis primeras bandas de OG, es decir la VLF (*very low frequency* en inglés), la LF (*low frequency* en inglés), la MF (*mid frequency* en inglés), la HF (*high frequency* en inglés), la VHF (*very high frequency* en inglés) y la UHF (*ultra high frequency* en inglés). Básicamente hay dos tipos de detectores en este método:

- Los de tipo resonante: las ondas gravitacionales inducen una resonancia en los detectores; que suelen ser barras metálicas, esferas metálicas, etc.; para mejorar la sensibilidad.

- Detectores que miden el cambio de distancia utilizando ondas microondas, laser, etc., entre cuerpos suspendidos.

En este método hay dos temas cruciales a tratar. Estos son: la disminución de los efectos molestos y la modelación del residuo o ruido; y el aumento de la sensibilidad de medida.

La detección de rastro se encuentra por debajo de los 300pHz, es decir son las tres últimas bandas de OG, es decir la ULF (*ultra low frequency* en inglés), la ELF o Hubble (*extreme low frequency* en inglés) y la Infra-Hubble. Este tipo de método es diferente para cada banda. Para la ULF se hace uso del método de la astrometría cuásar. Para la banda de Hubble se utiliza las observaciones de radiación cósmica de fondo de microondas, CMB (*cosmic microwave background* en inglés). Finalmente, para la banda que se sitúa por debajo de las frecuencias de Hubble (la banda infra-Hubble) se utiliza una confirmación indirecta de modelos cosmológicos.

Se ha visto en la Figura 3 que para cada banda de frecuencias hay diferentes métodos de detección. A continuación se encuentran unas breves descripciones de los métodos aplicados a cada banda de frecuencias. Ahora bien, se hará más hincapié en los Interferómetros terrestres.



## Banda de muy alta frecuencia VHF: Detectores de cavidad e interferómetros láser

Principalmente hay dos experimentos completados en esta banda de frecuencias. Uno de ellos consistió en un detector de cavidad, donde se encontraban ondas electromagnéticas que cambiaban su dirección de polarización al incidir una onda gravitacional. Esta operó a 100 MHz y obtuvo un límite superior de la radiación de fondo de OG sobre  $10^{-14} Hz^{-1/2}$  [9]. El otro consistió en un interferómetro de láser de una longitud de 0.75 m, donde se origina un desplazamiento de fase al pasar la onda gravitacional. Esta dio un límite superior por debajo de  $10^{-16} Hz^{-1/2}$  [10].

## Banda de alta frecuencia HF: Barras criogénicas resonantes e interferómetros terrestres

Es la banda donde más experimentos de detección se realizan. En esta banda hay dos tipos de detectores utilizados: las barras resonantes criogénicas y los interferómetros láser de brazos largos. En general, se les denominan por detectores terrestres (*ground-based interferometers* en inglés), ya que es donde se sitúan.

Los detectores de barras resonantes criogénicas han llegado a una sensibilidad espectral de unos  $10^{-21} Hz^{-1/2}$ . En esta se encuentra la colaboración AURIGA-EXPLORER-NAUTILUS-VIRGO [11] que aplicó un método para la búsqueda de coincidencias de explosiones/ráfagas de excitaciones sobre unas largas 24 horas de un conjunto de datos.

Hay una variedad de estos en que consiste en cambiar la barra por una esfera, que permite detectar ondas gravitacionales de cualquier dirección. De este tipo son el *MiniGRAIL* [12] y el *Schenberg* [13].

Por otro lado, se encuentran los más importantes ya que son los que más avance han dado a la detección de las OG. Estos son los interferómetros láser de brazos largos, donde en la Figura 4 se puede ver una versión simplificada de estos. En este tipo se encuentran varias colaboraciones como LIGO[14], Virgo[15], GEO600[16] y TAMA[17]. La Colaboración Científica de LIGO (LSC, *LIGO Scientific Colaboration* en inglés) tiene tres detectores interferómetros: dos situados en Hanford (en Whashington, USA), con brazos de longitud 4 y 2 km; y uno tercero situado en Livingston (en Louisiana, USA), con una longitud de brazo de 4 km. La colaboración de *Virgo* es un proyecto realizado por franceses e italianos que tiene una longitud de brazo de unos 3 km y se encuentra localizada en Cascina, Italia. El GEO600 se localiza en Hannover, Alemania, pero no contiene la sensibilidad de LIGO y *Virgo*. Este se utiliza como detector de prueba para ver qué mejoras se pueden implementar a los otros detectores. Por último, el detector TAMA-300 contiene una longitud de 300 m, localizado en Tokyo, Japón, que fue el detector con mayor sensibilidad antes de que se iniciaran LIGO y *Virgo* en 2002 y 2006 respectivamente.

Estos detectores trataron de detectar señales de la unión de dos estrellas de neutrones o de una estrella de neutrones con un agujero negro y también la señal de una explosión del colapso de una estrella masiva. Ahora bien, no detectaron nada. Los resultados obtenidos de las detecciones de ondas gravitacionales de LIGO, *Virgo*, GEO600 y TAMA-300 llevaron a situar límites sobre su sensibilidad.

Esto es lo que llevó a querer diseñar nuevos detectores más sensibles, a diseñar la generación de los interferómetros avanzados, conocida como la segunda generación de detectores terrestres. Como estas, se encuentra el caso del *Advanced LIGO* [2], que operó en fase de pruebas a finales del 2015 y detectó la onda gravitacional GW150914 el 14 de

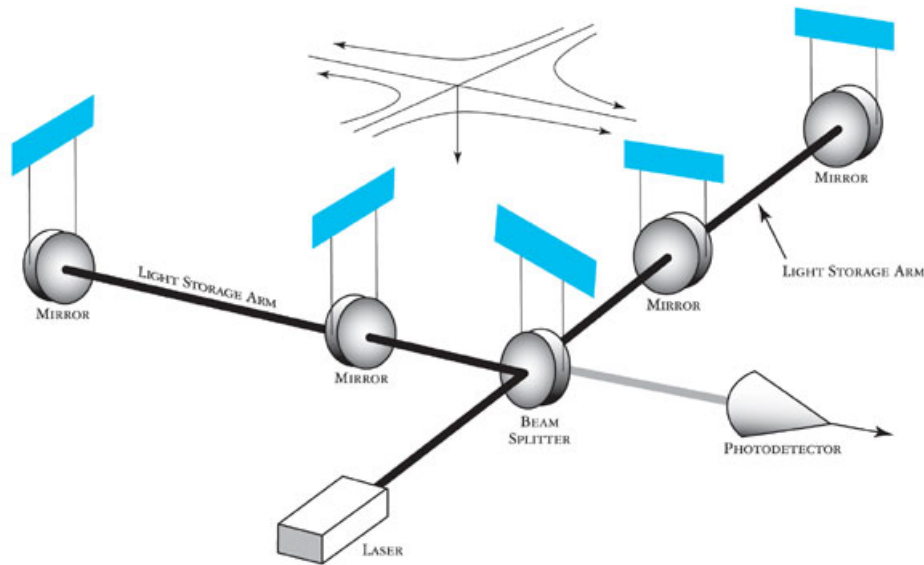


Figure 4: Ilustración simplificada del detector terrestre de *LIGO*. Corresponde a un interferómetro Michelson con un reciclador de potencia del láser y con brazos de cavidad Fabry-Perot. La onda gravitacional viaja perpendicularmente al plano del interferómetro y modifica la longitud de los brazos. Esto genera una diferencia de fase entre la potencia que recibe de un brazo frente a otro, observándose en el detector.[14]

septiembre de este mismo año cuyo descubrimiento se publicó el 11 de febrero del 2016 [3]. Aparte del *Advanced LIGO*, se esperan otros proyectos como *Advanced Virgo* [18] y el KAGRA [19], un observatorio Japonés que consistirá en un interferómetro criogénico bajo tierra con una longitud de brazo de unos 3 km.

Finalmente, se espera crear la tercera generación de interferómetros terrestres. En esta generación se sitúan algunos elementos del KAGRA y el ET (*Einstein Telescope*) [20], que consistirá en un interferómetro criogénico bajo tierra con una longitud de brazo de unos 10 km.

Es importante hablar de por qué hay tanta dificultad en obtener una buena precisión. Esto es debido a que la amplitud de las ondas gravitacionales es pequeña, así pues, los ruidos generados son importantes. A continuación se explican brevemente estos:

-**Ruido sísmico:** este ruido es originado por el movimiento sísmico, tal y como dice el propio nombre. Su efecto se encuentra en el sistema de suspensión de las masas. Para evitar esto, se diseña un sistema de aislamiento entre el suelo y la masa mediante un sistema de cables.

-**Ruido térmico:** es debido por las vibraciones térmicas en los espejos y en los cables de suspensión.

-**Ruido de granalla (*shot noise*):** es el ruido producido por la radiación de fotones del propio láser. Este error es mayor a mayor frecuencia que se detecte. Para eliminar este ruido, se utiliza un láser más moderno utilizado en el *Advanced LIGO*. Ahora bien, a mayor intensidad de luz mayor es el ruido de presión en el espejo. Por lo tanto, se han de balancear estos.

### **Banda de frecuencia media MF y de baja frecuencia LF: Interferómetros espaciales y seguimiento Doppler de naves espaciales**

Los detectores interferómetros espaciales son los detectores que pretenden alcanzar un *signal to noise ratio* mayor que el resto de detectores. Estos interferómetros tienen la

ventaja de no poseer ruidos sísmicos como el caso de los terrestres, ya que estos se sitúan en el espacio. Entre estos detectores se pueden encontrar: LISA (*Laser Interferometer Space Antenna*)[22], ELISA (la mejora de LISA, que tendrá una longitud de brazos del orden de 106 km de longitud)[23], ASTROD[24], ASTROD-GW[25], misiones en la órbita terrestre, etc.

Estos trabajan en la banda de frecuencias entre 100nHz-100mHz, donde hay bastantes fuentes que emiten ondas gravitacionales en esta banda. En esta galaxia se encuentran sistemas binarios galácticos, como estrellas de neutrones, enanas blancas, etc. Fuera de la galaxia se pueden encontrar sistemas binarios de agujeros negros súper-masivos o formaciones de agujeros negros súper-masivos. Finalmente, también se puede encontrar la radiación cósmica de fondo de ondas gravitacionales.

En la página 20 de [8] se puede encontrar una tabla donde pone las propuestas a las que se quiere llegar para cada misión o experimento.

Por otro lado, también hay otra manera para detectar las ondas gravitacionales que se sitúan en la banda de 1  $\mu$ Hz- 1 mHz. Este es el seguimiento Doppler de naves espaciales (*Doppler tracking of spacecraft* en inglés). El seguimiento Doppler permite medir el cambio relativo de distancia entre dos cuerpos sobre los que se realiza dicho seguimiento, que son una antena situada en la Tierra y una nave espacial lejana.

Durante la oposición solar de la nave Cassini entre 2001 y 2002, Armstrong, Iess, Tortora y Bertotti [21] usaron un preciso seguimiento Doppler de esta nave para obtener una mejor observación de los límites del fondo isotrópico de esta banda de frecuencias de las ondas gravitacionales. Para ver los resultados de dicho experimento véase [21].

### **Banda de muy baja frecuencia VLF: *Pulsar Timing Arrays***

Al estudiar la propagación de la onda gravitacional al pasar por el púlsar, se modifica el tiempo de llegada del pulso, esto permite poder detectar la onda gravitacional si se conoce esta modificación. Para una radiación estocástica de fondo de ondas gravitacionales, se obtuvo una fórmula para estudiar este efecto[26].

Hay cuatro detectores que se encargan de estudiar esta banda de frecuencia. Estos son los PTAs (*Pulsar Timing Arrays*): el PTA europeo (EPTA)[27], el NANOGrav[28], el Parkes PTA (PPTA)[29] y la combinación de los tres (IPTA)[30].

### **Banda de ultra-baja frecuencia ULF: Astrometría de Cuásares**

Para detectar las ondas gravitacionales en esta banda de frecuencias se realiza una medida precisa del movimiento propio de los cuásares producidos por la propia onda gravitacional.

## **3 Sistemas Binarios Compactos**

Los sistemas binarios compactos consisten en un sistema de dos estrellas de neutrones, dos agujeros negros o una estrella de neutrones y un agujero negro, girando entre ellos hasta que llegan a colapsarse. Estos sistemas son los que tratan de detectar los detectores terrestres.

Normalmente, estos sistemas se dividen en tres fases cuya delimitación de cada una no se distingue muy bien. Estas fases son la *inspiral*, el *merger* y el *ringdown*, que son los nombres que se les da en inglés. En la Figura 5 se puede ver representada la forma típica de una onda gravitacional con sus tres fases.

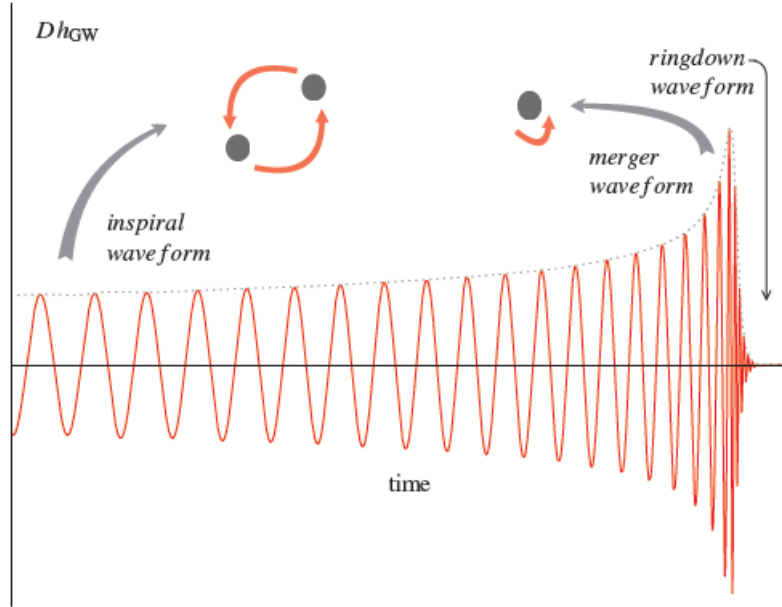


Figure 5: Onda gravitacional típica emitida por una coalescencia binaria. Corresponde a la onda emitida para un sistema binario de dos agujeros negros de masas iguales y sin rotación. Se puede ver que tiene una fase *inspiral* de larga duración en la cual los dos objetos van acercándose perdiendo energía por la radiación gravitacional. Luego se unen en la fase *merger* que es cuando la amplitud se dispara. Finaliza en la fase *ringdown* dando lugar a un solo agujero negro. [31]

La primera fase, la *inspiral*, es en la que más se centran para detectar ondas gravitacionales, debido a que es la que más se conoce teóricamente. En esta fase los dos cuerpos del sistema binario giran en torno a un centro de masas perdiendo su energía cinética.

Por otro lado, la fase de *merger*, que consiste en la fase en que los dos objetos comienzan a unirse, solamente se puede calcular mediante las ecuaciones de Einstein, debido a que no hay modelos reales para describirlo. La causa de esto es que es un evento fuerte, del cual ni la teoría post-Newtoniana ni la teoría de perturbaciones sirve.

Finalmente, la fase final, el *ringdown*, es una fase sencilla de describir mediante modos casi-normales [32]. Esta consiste en la fase en que los dos objetos se han unido, normalmente forman un agujero negro que queda girando emitiendo ondas gravitacionales.

Una vez que estas ondas gravitacionales de las tres fases llegan a los detectores, se estudia la contribución al *signal to noise ratio*, es decir, la relación que hay entre la señal detectada y el ruido. Ahora bien, también hay que tener en cuenta que hay que estudiar la precisión en la estimación de sus parámetros.

### 3.1 La forma de la onda

Una vez la onda llega al detector, la amplitud de la señal recibida es la siguiente:

$$s(t) = h(t) + n(t) \quad (6)$$

Donde  $h(t)$  es la amplitud de la onda gravitacional y  $n(t)$  es el ruido que afecta a la señal de la onda.

Teniendo en cuenta que hay dos polarizaciones en la onda gravitacional, esta se puede expresar como:

$$h(t) = F_+(\theta, \phi, \psi)h_+(t) + F_\times(\theta, \phi, \psi)h_\times(t) \quad (7)$$

Donde  $F_+$  y  $F_\times$  son las funciones de los patrones de la antena, que dependen de dónde se apunta en el cielo. Las expresiones de estas se pueden obtener realizando los cálculos que se pueden ver en [34]:

$$F_+ = \frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta)\cos 2\phi\cos 2\psi - \cos\theta\sin 2\phi\sin 2\psi \quad (8)$$

$$F_\times = \frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta)\cos 2\phi\sin 2\psi + \cos\theta\sin 2\phi\cos 2\psi \quad (9)$$

Si se considera solamente la fase *inspiral* del sistema binario, donde las masas son  $m_1$  y  $m_2$ , se tiene que  $h_+$  y  $h_\times$  vienen dadas como [36]:

$$h_{+, \times} = \frac{2m\eta}{r}x(H_{+, \times}^{(0)} + x^{1/2}H_{+, \times}^{(1/2)} + xH_{+, \times}^{(1)} + x^{3/2}H_{+, \times}^{(3/2)} + x^2H_{+, \times}^{(2)} + \dots) \quad (10)$$

Donde  $x \equiv (m\omega)^{2/3}$ ,  $\omega$  es la frecuencia orbital del sistema,  $r$  la distancia al sistema. Además se escogen las siguientes definiciones de masas: la masa total  $m = m_1 + m_2$ , la masa reducida  $\mu = m_1m_2/m$ , el *symmetric mass ratio*  $\eta = \mu/m$  y la *Chirp mass*  $\mathcal{M} = \mu^{3/2}m^{2/5}$ .

Los términos debido a la expansión post-Newtoniana vienen dadas por:

$$H_+^{(0)} = -(1 + c^2)\cos\Phi \quad (11)$$

$$H_\times^{(0)} = -2c\sin\Phi \quad (12)$$

$$H_+^{(1/2)} = -s\frac{\sqrt{1-4\eta}}{8}[(5 + c^2)\cos(\frac{1}{2}\Phi) - 9(1 + c^2)\cos(\frac{3}{2}\Phi)] \quad (13)$$

$$H_\times^{(1/2)} = -\frac{3}{4}sc\sqrt{1-4\eta}[\sin(\frac{1}{2}\Phi) - 3\sin(\frac{3}{2}\Phi)] \quad (14)$$

Donde  $c = \cos\iota$  y  $s = \sin\iota$ ,  $\iota$  es el ángulo entre el momento orbital y la dirección de la fuente y  $\Phi$  es dos veces la fase orbital. Estos términos se pueden hallar en [36], si se desea más información.

Considerando el caso de la aproximación post-Newtoniana restringida, solamente se consideran los términos de orden más bajo  $H_+^{(0)}$ ,  $H_\times^{(0)}$ .

Por lo tanto, la onda que se detecta se puede expresar como:

$$h(t) = \frac{2m\eta}{r}(m\pi f)^{2/3}h^{(0)} \quad (15)$$

Donde  $f$  es la frecuencia cuadrupolar de la onda gravitacional, y:

$$h^{(0)}(t) = -\sqrt{F_+^2(1 + c^2)^2 + F_\times^2 4c^2}\cos(\Phi + \psi_{(0)}) \quad (16)$$

$$\psi_{(0)} = \arctan\left[\frac{-2cF_\times}{(1 + c^2)F_+}\right] \quad (17)$$

Además, el sistema evoluciona perdiendo energía y momento angular por la emisión de ondas gravitacionales ganando frecuencia y amplitud. Esto permite expresar esta variación en la frecuencia cuadrupolar de la onda gravitacional frente al tiempo como una expansión hasta orden 3.5PN[42]:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} = & \frac{96\eta}{5\pi m^2} u^{11} \left[ 1 - \left( \frac{743}{336} + \frac{11}{4}\eta \right) u^2 + 4\pi u^3 + \left( \frac{34103}{18144} + \frac{13661}{2016}\eta + \frac{59}{18}\eta^2 \right) u^4 \right. \\ & - \left( \frac{4159}{672} + \frac{189}{8}\eta \right) \pi u^5 + \left( \frac{16447322263}{139708800} + \frac{16}{3}\pi^2 - \frac{1712}{105}\gamma + \left( \frac{451}{48}\pi^2 - \frac{56198689}{217728} \right) \eta \right. \\ & \left. \left. + \frac{541}{896}\eta^2 - \frac{5605}{2592}\eta^3 - \frac{856}{105} \log(16\eta^2) \right) u^6 - \left( \frac{4415}{4032} - \frac{358675}{6048}\eta - \frac{91495}{1512}\eta^2 \right) \pi u^7 \right] \end{aligned} \quad (18)$$

Donde  $u \equiv (\pi m f)^{1/3}$ .

Para realizar cálculos con la función, se suele utilizar la transformada de Fourier de  $h(t)$ . Una manera de realizar dicho cálculo, es mediante la aproximación de fase estacionaria[41].

Sea una onda  $B(t) = A(t) \cos \phi(t)$ , donde  $\frac{d \ln A}{dt} \ll \frac{d\phi(t)}{dt}$  y  $\frac{d^2\phi}{dt^2} \ll \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2$ , se tiene que la transformada de Fourier, realizando una aproximación estacionaria en la fase es:

$$\tilde{B}(f) \approx \frac{1}{2} A(t) \left( \frac{df}{dt} \right)^{-1/2} e^{i(2\pi f t_0 - \phi(f(t_0)) - \pi/4)} \quad (19)$$

Donde  $t_0$  se define como el tiempo en que  $d\Phi(t_0)/dt = 2\pi f$ . Haciendo uso de que:

$$A(t) = -\sqrt{F_+^2(1+c^2)^2 + F_\times^2 4c^2} \quad (20)$$

$$\frac{df}{dt} \approx \frac{96}{5\pi \mathcal{M}^2} (\pi \mathcal{M} f)^{11/3} \quad (21)$$

Se obtiene que para el caso de la onda (16):

$$\tilde{h}(f) = -\sqrt{F_+^2(1+c^2)^2 + F_\times^2 4c^2} \sqrt{\frac{5\pi}{96}} \frac{(\pi f)^{-7/6}}{r} \mathcal{M}^{5/6} e^{i(2\pi f t(f) - \phi(f) - \psi_{(0)} - \frac{\pi}{4})} \quad (22)$$

Estas dos funciones  $t(f)$  y  $\phi(f)$  hasta un orden 3.5PN tienen las expresiones siguientes[42]:

$$\begin{aligned} \phi_{3.5}(f) = & \phi_c - \frac{1}{32\eta u^5} \left[ 1 + \left( \frac{3715}{1008} + \frac{55}{12}\eta \right) u^2 - 10\pi u^3 + \left( \frac{15293365}{1016064} + \frac{27145}{1008}\eta + \frac{3085}{144}\eta^2 \right) u^4 \right. \\ & + \left( \frac{38645}{672} - \frac{65}{8}\eta \right) \ln \left( \frac{u}{u_{\text{iso}}} \right) \pi u^5 + \left\{ \frac{12348611926451}{18776862720} - \frac{160}{3}\pi^2 - \frac{1712}{21}\gamma + \left( \frac{2255}{48}\pi^2 - \frac{15737765635}{12192768} \right) \eta \right. \\ & \left. \left. + \frac{76055}{6912}\eta^2 - \frac{127825}{5184}\eta^3 - \frac{856}{21} \log(16u^2) \right\} u^6 + \left( \frac{77096675}{2032128} + \frac{378515}{12096}\eta - \frac{74045}{6048}\eta^2 \right) \pi u^7 \right] \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} t_{3.5}(f) = & t_c - \frac{5\mathcal{M}}{256\eta u^8} \left[ 1 + \left( \frac{743}{252} + \frac{11}{3}\eta \right) u^2 - \frac{32}{5}\pi u^3 + \left( \frac{3058673}{508032} + \frac{5429}{504}\eta + \frac{617}{72}\eta^2 \right) u^4 \right. \\ & - \left( \frac{7729}{252} - \frac{13}{3}\eta \right) \pi u^5 + \left\{ -\frac{10052469856691}{23471078400} + \frac{128}{3}\pi^2 + \frac{6848}{105}\gamma + \left( \frac{3147553127}{3048192} - \frac{451}{12}\pi^2 \right) \eta \right. \\ & \left. \left. - \frac{15211}{1728}\eta^2 + \frac{25565}{1296}\eta^3 + \frac{3424}{105} \log(16u^2) \right\} u^6 + \left( -\frac{15419335}{127008} - \frac{75703}{756}\eta + \frac{14809}{378}\eta^2 \right) \pi u^7 \right] \end{aligned} \quad (24)$$

Donde  $u = (\pi m f)^{1/3}$ ,  $\phi_c$  es la fase de coalescencia,  $t_c$  es el tiempo de coalescencia,  $\gamma$  es la Gamma de Euler y  $u_{\text{iso}}$  es una constante que se puede definir para el instante inicial. Los términos del paréntesis van del orden 0PN hasta 3,5PN, sin contar el 0,5PN que es nulo, donde los órdenes se determinan según el exponente de la  $u$ .

Introduciendo dichas expresiones se obtiene la ecuación de la onda:

$$\tilde{h}(f) = A f^{-7/6} e^{i\left(2\pi f t_c + \Xi(f) - \psi_{(0)} - \frac{\pi}{4}\right)} \quad (25)$$

Con:

$$A = -\sqrt{F_+^2(1+c^2)^2 + F_\times^2 4c^2} \sqrt{\frac{5\pi}{96} \frac{\pi^{-7/6}}{r}} M^{5/6} \quad (26)$$

Y:

$$\begin{aligned} \Xi(f) = & -\phi_c + \frac{3}{128} (\pi M f)^{-5/3} \left[ 1 + \frac{20}{9} \left( \frac{743}{336} + \frac{11}{4} \eta \right) (\pi m f)^{2/3} - 16\pi (\pi m f) \right. \\ & + 10 \left( \frac{3058673}{1016064} + \frac{5429}{1008} \eta + \frac{617}{144} \eta^2 \right) (\pi m f)^{4/3} + \pi \left( \frac{38645}{756} - \frac{65}{9} \eta \right) \left( 1 + \log \left( \frac{\pi m f}{\pi m f_{\text{iso}}} \right) \right) (\pi m f)^{5/3} \\ & + \left( \frac{11583231236531}{4694215680} - \frac{640}{3} \pi^2 - \frac{6848}{21} \gamma - \frac{6848}{21} \log(4(\pi m f)^{1/3}) + \left( -\frac{15737765635}{3048192} + \frac{2255\pi^2}{12} \right) \eta \right. \\ & \left. + \frac{76055}{1728} \eta^2 - \frac{127825}{1296} \eta^3 \right) (\pi m f)^2 + \pi \left( \frac{77096675}{254016} + \frac{378515}{1512} \eta - \frac{74045}{756} \eta^2 \right) (\pi m f)^{7/3} \left. \right] \quad (27) \end{aligned}$$

Por otro lado, en [37] se explica que se puede realizar una media de la amplitud de la onda para todas las direcciones angulares. Consiste en realizar un promedio de la amplitud sobre todas las direcciones del cielo y las orientaciones del agujero negro, haciendo uso de:  $\langle F_+^2 \rangle_{\theta, \phi, \psi} = \langle F_\times^2 \rangle_{\theta, \phi, \psi} = 1/5$ ,  $\langle F_+ F_\times \rangle_{\theta, \phi, \psi} = 0$ ,  $\langle c^2 \rangle_\iota = 1/3$  y  $\langle (1+c^2)^2 \rangle_\iota = 28/15$ . Aplicando la media cuadrática, la expresión obtenida es la siguiente:

$$\langle A \rangle = \frac{1}{\sqrt{30} \pi^{2/3}} \frac{M^{5/6}}{r} \quad (28)$$

Finalmente, debido a que solamente se realizarán cálculos en la fase *inspiral* del sistema binario compacto, el rango de frecuencias estará limitado a un máximo. Considerando que esta fase tiene fin a una separación de  $6m$ , esta es:

$$f_{\text{ISCO}} = \frac{1}{6^{3/2} \pi m} \quad (29)$$

Cabe destacar que se ha escogido la notación  $G = c = 1$ , y que no hay que confundirse esta  $c$ , la velocidad de la luz, con las  $c = \sin \iota$  que salen en todo el trabajo. Esto hace que las masas y las distancias vengan dadas por segundos, donde  $M_\odot = 4.92549 \times 10^{-6} s$  y  $1 \text{Mpc} = 1.0293 \times 10^{14} s$ .

### 3.2 Principios de estadística de análisis de datos

En este apartado se explicará de una manera general el concepto de la estimación de las fórmulas estadísticas las cuales se utilizarán más adelante, para entrar en más detalle véase [33].

Por simplicidad, se asume que el ruido del detector es estacionario y Gaussiano, y que las diferentes componentes de Fourier son independientes. Esto permite escribir las componentes como:

$$\langle \tilde{n}^*(f)\tilde{n}(f') \rangle = \frac{1}{2}\delta(f - f')S_n(f) \quad (30)$$

Donde  $\langle - \rangle$  denota el valor esperado respecto a un ruido,  $*$  denota el complejo conjugado,  $S_n(f)$  la densidad de poder espectral (o curva de ruido) y la tilde indica la transformada de Fourier siguiendo la convención de:  $\tilde{x}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi ft}x(t)dt$ . Para ver más detalle de esto véase [8].

Una vez se tiene la densidad de ruido espectral, se puede definir el producto interno de dos señales  $g(t)$  y  $h(t)$  reales como:

$$(g, h) \equiv 2 \int_0^{\infty} \frac{\tilde{g}^*(f)\tilde{h}(f) + \tilde{g}(f)\tilde{h}^*(f)}{S_n(f)} df \quad (31)$$

Con esta definición del producto interno, se puede definir la probabilidad de que el ruido sea  $n_0$  como:

$$p(n \rightarrow n_0) \propto e^{(n_0|n_0)/2} \quad (32)$$

Por lo tanto, se puede definir el cociente señal-ruido (SNR, *signal to noise ratio* en inglés) en el caso de un filtro adaptado mediante la expresión[8]:

$$\rho^2 = (h|h) = 4 \int_0^{\infty} \frac{|\tilde{h}(f)|^2}{S_n(f)} df \quad (33)$$

La probabilidad de que un parámetro  $\lambda = \lambda^k_{k'}$  forme parte de la señal de la onda viene dada por una expresión de probabilidad Gaussiana, siempre y cuando el ruido sea estacionario y Gaussiano, de la forma [35]:

$$p(\lambda, h) = p^{(0)}(\lambda) e^{-\frac{1}{2}\Gamma_{jk}\Delta\lambda^j\Delta\lambda^k} \quad (34)$$

Donde  $p^{(0)}$  hace referencia a la distribución de la información a priori, es una constante de normalización;  $\Delta\lambda^j$  es la diferencia entre el valor real del parámetro y la mejor estimación de este parámetro en presencia de un ruido; y  $\Gamma_{jk}$  es la llamada Matriz de información de Fisher, definida como:

$$\Gamma_{ij} \equiv (\delta_i h | \delta_j h) = 2 \int_0^{\infty} \frac{\delta_i \tilde{h}^*(f)\delta_j \tilde{h}(f) + \delta_i \tilde{h}(f)\delta_j \tilde{h}^*(f)}{S_n(f)} df \quad (35)$$



Donde  $\delta_i \equiv \frac{\delta}{\delta\lambda_i}$ .

Una vez se tiene la matriz, se puede realizar la inversa de esta, obteniendo lo conocido como la matriz de varianza-covarianza, que dice la precisión con la que se puede medir los parámetros  $\lambda^k$ :

$$\Sigma^{jk} \equiv (\Gamma^{-1})^{jk} \quad (36)$$

Se puede calcular la media cuadrática del error (raíz cuadrática de la media del error, *root-mean-square error* en inglés)  $\sigma_k$  de los parámetros  $\lambda^k$ , realizando al raíz cuadrada de los elementos de la diagonal de la matriz de varianza-covarianza:

$$\sigma_k = \sqrt{\Sigma^{kk}} \quad (37)$$

Calculando este valor para cada parámetro se podrá obtener la precisión con la que se puede determinar cada uno de ellos.

### 3.3 Comparación de patrones

Se escoge la notación como  $h$  la onda gravitacional real y  $u(\theta)$  como la familia de platillas de ondas gravitacionales posibles, como una función del vector de parámetros  $\theta = (t_c, \phi_c, \lambda)$ .

Siguiendo la notación del producto interno anterior, la de la ecuación (24), se puede definir la **función ambigüedad** o **Overlap** como la fracción del *SNR* obtenida realizando un *cross-correlating* de las fuentes  $u(\theta)$  con la onda  $h$ , es decir, como el producto interno de estas dos normalizándolo:

$$\mathcal{O}(h, u(\theta)) = \frac{(h|u(\theta))}{\sqrt{(h|h)(u(\theta)|u(\theta))}} \quad (38)$$

Esta función, dada una serie de parámetros, dice cuánto de parecidas son las ondas  $h$  y  $u(\theta)$ .

Se define como **Match** al máximo del *Overlap* respecto los parámetros de coalescencia, es decir, respecto  $t_c$  y  $\phi_c$ .

$$M(h(\theta_1), u(\theta_2)) = \max_{t_c, \phi_c} \frac{(h(\lambda_1)|u(\lambda_2))}{\sqrt{(h(\lambda_1)|h(\lambda_1))(u(\lambda_2)|u(\lambda_2))}} e^{i(2\pi ft_c - \phi_c)} \quad (39)$$

Se puede ver que estos dos parámetros solamente se encuentran en la fase de la exponencial, el máximo tiene en cuenta las amplitudes de las ondas. Esta función sirve para buscar cuál es la plantilla más parecida a la onda real en el caso en que haya muchas plantillas muy parecidas.

Además, se puede calcular el máximo del *Overlap* sobre todos los parámetros  $\theta$ , definido como el **Fitting Factor**, véase más en [38]:

$$FF(h, u(\theta)) = \max_{\theta} \frac{(h|u(\theta))}{\sqrt{(h|h)(u(\theta)|u(\theta))}} \quad (40)$$

Esta función busca cuál es la mejor combinación de los parámetros  $\theta$  para que la onda  $u(\theta)$  sea la más parecida a la onda  $h$ . Esta función da una idea de la capacidad que tiene esta familia de patrones de detectar la señal  $h$  que se busca.

### 3.4 Detector a utilizar

Para realizar los cálculos pertinentes, es necesario fijar un detector a utilizar, ya que este influye en la banda de frecuencias en la que se puede trabajar y en la curva de ruido.

Por lo tanto, todo el trabajo se ha realizado para el detector terrestre **Advanced LIGO**, que tiene como curva de ruido la siguiente expresión [39]:

$$S_n(f) \begin{cases} S_0 \left[ x^{-4.14} - 5x^{-2} + \frac{111(1 + x^2 + x^4/2)}{1 + x^2/2} \right] & f \geq f_s \\ \infty & f < f_s \end{cases} \quad (41)$$

Donde  $x = f/f_0$ ,  $f_0 = 215\text{Hz}$ ,  $f_s = 10\text{Hz}$  y  $S_0 = 1.0 \times 10^{-49}\text{Hz}^{-1}$ .

## 4 Estudio de la detectabilidad de la coalescencia de sistemas binarios de agujeros negros

En este trabajo de fin de grado, se ha comenzado estudiado las curvas del SNR y de la distancia óptima para un sistema binario de dos agujeros negros de masas idénticas para ir entrando en los cálculos. Además, realizar estas curvas permite ver para qué conjunto de masas totales conviene hacer los cálculos, que se mostrarán más adelante.

### 4.1 Cociente señal-ruido (SNR)

Se escogerá un sistema binario de dos agujeros negros de masas iguales, pero no de masa total fija. Es decir, se espera obtener una gráfica de la evolución del SNR en función de la masa total del sistema.

Como ya se sabe, el SNR da información sobre la relación entre la señal y el ruido de fondo que se recibe, es decir, dice cuánta cantidad de señal se recibe con un cierto ruido. Cuanto más grande es el valor del SNR mejor es la señal recibida.

Para realizar dicha representación, se hace uso de la onda de la ecuación (25) pero haciendo uso de la amplitud media para las direcciones del cielo de la ecuación (28). Además, se puede observar que la parte compleja de la onda, la exponencial compleja, no es necesaria ya que se calcula la integral del módulo, haciendo que esta parte se anule.

Es necesario fijar una distancia para realizar dicho cálculo, para ello, se escoge un valor de  $r = 1\text{Gpc}$ . La curva de ruido  $S_n(f)$  viene determinada por la expresión (41).

Se puede observar que esto delimita el rango de frecuencias en el que se realizará la integral. Este estará delimitado por un valor mínimo constante  $f_s$ , y un valor máximo que depende de la masa  $f_{ISCO}$ . Por lo tanto, hay que tener cuidado y ver que esto también restringe el rango de masas hasta un máximo, ya que al aumentar la masa,  $f_{ISCO}$  disminuye, y este no puede ser menor que  $f_s$ , ya que se perdería el sentido físico. Así pues, si se calcula la masa máxima se obtiene que el rango de representación para el advanced LIGO se sitúa sobre  $1 - 439M_\odot$  para la masa total.

Teniendo en cuenta todo esto, la expresión del SNR se simplifica, quedando el cálculo como:

$$\rho^2 = 4 \int_{f_s}^{f_{ISCO}} \frac{\langle A \rangle^2 f^{-7/3}}{S_n(f)} df \quad (42)$$

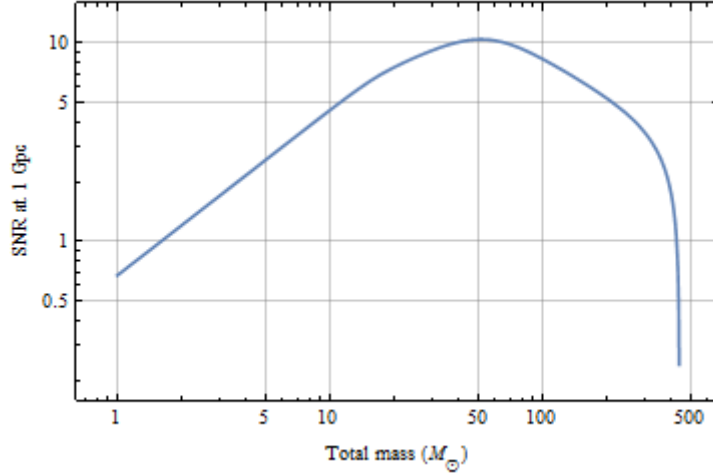


Figure 6: Cociente señal-ruido para la fase inspiral de un sistema binario de agujeros negros de masas iguales para diferentes valores totales, a una distancia de 1 Gpc. Corresponde al detector *Advanced LIGO*.

Realizando el cálculo del SNR para un sistema binario compacto de dos agujeros negros de masas iguales, a una distancia de  $1Gpc$ , para el rango de masa total dicho anteriormente, se obtiene el resultado de la Figura (6).

Se puede observar como el SNR va aumentando a medida que la masa total del sistema aumenta. Ahora bien, llegado a un cierto punto, alrededor de los  $50M_{\odot}$ , este comienza a decaer rápidamente hasta llegar a las  $400M_{\odot}$  donde prácticamente se hace nulo. El valor máximo se sitúa sobre los 10. Es decir, la máxima precisión sobre la que se puede detectar la señal son 10 órdenes de magnitud frente al ruido de fondo para la fase *inspiral* de un sistema en el cual la masa total son  $50M_{\odot}$ .

Además, se puede ver que hay un rango de valores para la masa total en cual el SNR comprende valores razonables, delimitado, más o menos, por  $2.5 - 100M_{\odot}$ . Por otro lado, se puede ver que aquellos sistemas con masas muy altas pueden dar problemas ya que el SNR cae en picado a valores muy bajos.

## 4.2 Distancia óptima

La distancia óptima se define como la distancia a la cual el SNR tiene su valor óptimo. Este valor corresponde a  $\rho = 8$ .

Para realizar dicho cálculo, se escogerán las mismas ecuaciones que antes, la (25) y la (28) para la onda. Utilizando la misma ecuación que para el cálculo del SNR, la ecuación (33), se aísla el radio y se sitúa el SNR al valor óptimo. Así pues, se puede ver que prácticamente es la misma expresión que la anterior pero con una amplitud diferente.

$$r^2 = 4 \int_{f_s}^{f_{ISCO}} \left( \frac{M^{5/6}}{\sqrt{30}\pi^{2/3}\rho} \right)^2 \frac{f^{-7/3}}{S_n(f)} df \quad (43)$$

Por lo tanto, la curva que se espera obtener es la misma que antes pero con otros valores.

Realizando el cálculo para el mismo sistema que antes se obtiene la Figura (7).

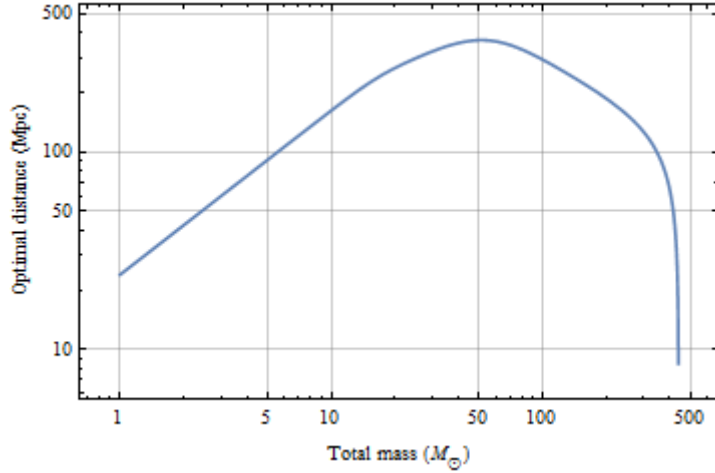


Figure 7: Distancia al sistema binario de agujeros negros de masas iguales para diferentes valores totales, para un valor de SNR óptimo ( $\rho = 8$ ). Corresponde al detector *Advanced LIGO*.

Se puede ver que se ha obtenido lo esperado, el mismo comportamiento que para el SNR y con el máximo en el mismo punto, en  $50M_{\odot}$ . Tal y como se ve, la distancia máxima para detectar un sistema con un valor óptimo del SNR ronda los  $400Mpc$ .

### 4.3 Estimación de los parámetros

Es importante determinar el error realizado a la hora de obtener los parámetros  $\lambda_k$  de una onda gravitacional, ya que esto permite saber hasta qué cierto punto los valores son buenos. Para ello se calcula la raíz cuadrática media  $\sigma_k$  utilizando la ecuación (36). Para realizar este cálculo es necesario calcular la matriz de Fisher, y para este, saber qué parámetros escoger. Se ha de tener en cuenta que los parámetros  $\lambda$  que se utilicen han de ser independientes entre sí, ya que si no es así generaría columnas dependientes que al calcular el determinante en la matriz daría 0, y el estudio no se podría realizar. Además, se intenta escoger el mínimo número de parámetros posibles y que estos hagan que la matriz sea diagonal, para simplificar los cálculos. Teniendo en cuenta todo esto, se tiene que para un sistema binario compacto de dos agujeros negros en la fase *inpsiral* son los siguientes:

$$\lambda_{INS} = (\ln \langle A \rangle, f_0 t_c, \phi_c, \ln \mathcal{M}, \ln \eta) \quad (44)$$

Como se puede ver, son 5 parámetros, por lo tanto, la matriz de Fisher será de tamaño  $5 \times 5$ .

Una vez se sabe cuáles son los parámetros, se necesitan calcular las derivadas de la función de onda respecto a estos, ya que se pueden encontrar en la definición de la matriz de Fisher (35). Teniendo en cuenta que la onda viene dada por la expresión (25), pero con la amplitud de (28), tal que:

$$\tilde{h}(f) = \langle A \rangle f^{-7/6} e^{i \left( 2\pi f t_c + \Xi(f) - \psi_{(0)} - \frac{\pi}{4} \right)} \quad (45)$$

Estas derivadas son las siguientes:

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \ln \langle A \rangle} = \langle A \rangle \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \langle A \rangle} = \langle A \rangle f^{-7/6} e^{i \left( 2\pi f t_c + \Xi(f) - \psi_{(0)} - \frac{\pi}{4} \right)} = \tilde{h} \quad (46)$$

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial f_0 t_c} = \frac{1}{f_0} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t_c} = \frac{1}{f_0} \langle A \rangle f^{-7/6} i 2\pi f e^{i \left( 2\pi f t_c + \Xi(f) - \psi_{(0)} - \frac{\pi}{4} \right)} = i 2\pi \frac{f}{f_0} \tilde{h} \quad (47)$$

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \phi_c} = \langle A \rangle f^{-7/6} (-i) e^{i \left( 2\pi f t_c + \Xi(f) - \psi_{(0)} - \frac{\pi}{4} \right)} = -i \tilde{h} \quad (48)$$

Para calcular las derivadas respecto los parámetros  $\ln \mathcal{M}$  y  $\ln \eta$  es necesario escribir en (26) la masa como:

$$m = \frac{\mathcal{M}}{\eta^{3/5}} \quad (49)$$

Así pues, las otras derivadas son las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \ln \mathcal{M}} &= \mathcal{M} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \mathcal{M}} = \mathcal{M} \langle A \rangle f^{-7/6} e^{i \left( 2\pi f t_c - \psi_{(0)} - \frac{\pi}{4} \right)} \frac{\partial e^{i \Xi(f)}}{\partial \mathcal{M}} = i \tilde{h} \mathcal{M} \frac{\partial \Xi(f)}{\partial \mathcal{M}} \\ &= i \tilde{h} \frac{1}{128} \left[ -5(\pi f \mathcal{M})^{-5/3} - 3 \frac{20}{9} \left( \frac{743}{336} + \frac{11}{4} \eta \right) \eta^{-2/5} (\pi f \mathcal{M})^{-1} \right. \\ &\quad \left. - 2(-16\pi) \eta^{-3/5} (\pi f \mathcal{M})^{-2/3} - 10 \left( \frac{3058673}{1016064} + \frac{5429}{1008} \eta + \frac{617}{144} \eta^2 \right) \eta^{-4/5} (\pi f \mathcal{M})^{-1/3} \right] \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \ln \eta} &= \eta \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \eta} = i \tilde{h} \eta \frac{\partial \Xi(f)}{\partial \eta} \\ &= i \frac{3}{128} \left[ (\pi f \mathcal{M})^{-1} \left( -\frac{743}{378} + \frac{11}{3} \eta \right) \eta^{-2/5} + \frac{48}{5} \pi (\pi f \mathcal{M})^{-2/3} \eta^{-3/5} \right. \\ &\quad \left. + (\pi f \mathcal{M})^{-1/3} \left( -\frac{3058673}{127008} + \frac{5429}{504} \eta + \frac{617}{12} \eta^2 \right) \eta^{-4/5} \right] \tilde{h} \end{aligned} \quad (51)$$

Ahora bien, para introducir dichas derivadas en el programa, la notación es muy engorrosa. Por lo tanto, se puede definir  $u \equiv (\pi f \mathcal{M})^{1/3}$ , tal que:

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \ln \mathcal{M}} = i \frac{1}{128} \sum_{n=0}^4 A_n (n-5) u^{n-5} \tilde{h} \quad (52)$$

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \ln \eta} = i \frac{3}{128} \sum_{n=0}^4 B_n u^{n-5} \tilde{h} \quad (53)$$

Donde los parámetros  $A_n$  y  $B_n$  son:

$$A_0 = 1 \quad (54)$$

$$A_1 = 0 \quad (55)$$

$$A_2 = \frac{20}{9} \left( \frac{743}{336} + \frac{11}{4} \eta \right) \eta^{-2/5} \quad (56)$$

$$A_3 = -16\pi \eta^{-3/5} \quad (57)$$

$$A_4 = 10 \left( \frac{3058673}{1016064} + \frac{5429}{1008} \eta + \frac{617}{144} \eta^2 \right) \eta^{-4/5} \quad (58)$$

$$B_0 = 0 \quad (59)$$

$$B_1 = 0 \quad (60)$$

$$B_2 = \left( -\frac{743}{378} + \frac{11}{3} \eta \right) \eta^{-2/5} \quad (61)$$

$$B_3 = \frac{48}{5} \pi \eta^{-3/5} \quad (62)$$

$$B_4 = \left( -\frac{3058673}{127008} + \frac{5429}{504} \eta + \frac{617}{12} \eta^2 \right) \eta^{-4/5} \quad (63)$$

Se puede ver que solamente se ha realizado el cálculo hasta un orden  $2PN$ , y no hasta el orden en que se ha llegado a obtener la fase  $\Xi(f)$ . Esto es debido a que si se utiliza más términos del desarrollo, el cálculo de las derivadas se vuelve más engorroso, y el resultado que se obtiene con este orden ya es aceptable.

Con las derivadas (46),(47),(48),(52) y (53) y la expresión de la matriz de Fisher (28), dicha matriz queda de la siguiente forma:

$$\Gamma = \frac{A_{INS}^2}{S_0} \begin{pmatrix} \frac{S_0 \rho^2}{A_{INS}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16\pi^2}{f_0^2} \int \frac{f^{-1/3}}{S(x)} df & \frac{-8\pi}{f_0} \int \frac{f^{-4/3}}{S(x)} df & \frac{8\pi}{128f_0} \int \frac{f^{-4/3} A}{S(x)} df & \frac{24\pi}{128f_0} \int \frac{f^{-4/3} B}{S(x)} df \\ 0 & \Gamma_{23} & \frac{S_0 \rho^2}{A_{INS}^2} & \frac{-4}{128} \int \frac{f^{-7/3} A}{S(x)} df & \frac{-12}{128} \int \frac{f^{-7/3} B}{S(x)} df \\ 0 & \Gamma_{24} & \Gamma_{34} & \frac{4}{128^2} \int \frac{f^{-7/3} A^2}{S(x)} df & \frac{12}{128^2} \int \frac{f^{-7/3} AB}{S(x)} df \\ 0 & \Gamma_{25} & \Gamma_{35} & \Gamma_{45} & \frac{36}{128^2} \int \frac{f^{-7/3} B^2}{S(x)} df \end{pmatrix} \quad (64)$$

Donde:  $S(x) \equiv \left[ x^{-4.14} - 5x^{-2} + \frac{111(1+x^2+x^4/2)}{1+x^2/2} \right]$ ,  $A \equiv \sum_{n=0}^4 A_n(n-5)u^{n-5}$ ,  $B \equiv \sum_{n=0}^4 B_n u^{n-5}$  y  $AB \equiv \sum_{n=0}^4 A_n(n-5)u^{n-5} \times \sum_{n=0}^4 B_n u^{n-5}$ . Además, se ha de recordar que la integral se realiza de  $f_s$  a  $f_{ISCO}$ .

Tal y como se puede ver en (64) se obtiene una matriz simétrica, gracias a los parámetros  $\lambda$  que se han escogido.

Una vez se tiene calculada la matriz de Fisher, se puede obtener la matriz de varianza-covarianza y con esta la raíz cuadrática media para calcular el error de los diferentes parámetros.

En este apartado se calcula dicho error para un sistema binario de agujeros negros de masas iguales, a una distancia tal que  $SNR = \rho = 10$ , detectado por el Advanced LIGO. Así pues, tal y como se ha visto en el apartado anterior, el rango de masas por el cual se puede realizar el cálculo es  $1 - 439M_\odot$ .

En la Figura (8), se muestran los resultados para los parámetros  $\Delta t_c$ ,  $\Delta \mathcal{M}/\mathcal{M}$  y  $\Delta \eta/\eta$ .

Se puede ver que el error de los tres parámetros va aumentando cuando la masa total va creciendo. Esto se debe a que al ser mayor la masa la señal pasa menos tiempo en la banda de detección del detector, y por lo tanto le cuesta más al detector diferenciar las señales. Esta dificultad de diferenciar las señales viene dada por la cantidad de ciclos que se utiliza para discriminar sistemas diferentes, véase más en [40].

Además, se puede ver que el comportamiento de este error para cada parámetro es diferente. Por lo que hace a la *chirp mass*  $\mathcal{M}$ , la tendencia prácticamente es lineal en el rango representado, es decir, el error crece más rápido que para los otros dos, pero no quiere decir que sea mayor. Aquel parámetro que contiene un error mayor es la *symmetric mass ratio*  $\eta$ .

#### 4.4 Estudio de la detectabilidad de la señal en diferentes órdenes post-Newtonianos de la fase

De las ecuaciones (25) y (27) se puede ver que la función  $\Xi(f)$  de la onda gravitacional contiene una serie de términos que provienen de realizar la aproximación post-Newtoniana. Resulta interesante ver cuán de importante es considerar menos términos de los obtenidos en el desarrollo. Es decir, estudiar cómo cambia la onda en función del término máximo post-Newtoniano considerado en la fase.

Para realizar este estudio, se realiza el *Overlap*, ecuación (38), entre una onda  $h$  que corresponde a la onda "real", que es aquella que, en este caso, contiene un mayor desarrollo PN en la fase, con la familia  $u$  que tiene un menor desarrollo PN en la fase que la onda  $h$ . Además, se escoge que esta familia  $u$  tenga exactamente los mismos parámetros  $\theta$  que  $h$ . Esto se escoge ya que se quiere ver directamente cuánto SNR se pierde al considerar una forma de onda  $u$  con un menor orden PN de la fase para detectar una onda  $h$ .

Se considera el caso de un sistema binario compacto de dos agujeros negros, en que la masa se determinará a la hora de realizar los cálculos. Las expresiones de las dos ondas vienen dadas por la ecuación (25), donde la fase la determina la ecuación (27) teniendo en cuenta hasta que desarrollo post-Newtoniano llega cada una.

A primera vista parece que el cálculo del *Overlap* pueda parecer algo engorroso, pero, si se trabaja la expresión (38) se puede llegar a la ecuación siguiente:

$$\mathcal{O}(h, u(\theta)) = \frac{\int_{f_s}^{f_{ISCO}} \frac{f^{-7/3}}{S(x)} \cos[\Xi_h(f) - \Xi_u(f)] df}{\int_{f_s}^{f_{ISCO}} \frac{f^{-7/3}}{S(x)} df} \quad (65)$$

Donde  $S(x)$  tiene la definición dada en el apartado anterior, y las funciones  $\Xi(f)$  la expresión según hasta el orden PN deseado de la ecuación (27).

Tal y como se puede ver en la expresión obtenida, el *Overlap* no depende de las amplitudes de las dos ondas. Por lo tanto, este no dependerá de la posición en el cielo, la polarización y ni de la inclinación. Dicho coeficiente ha de dar un valor aproximadamente a la unidad si las dos expresiones  $h$  y  $u$  son parecidas. Cuanto menos parecidas sean, menor será el valor dado por dicho cálculo, y más SN se perdería al realizar dicha operación entre las dos ondas.

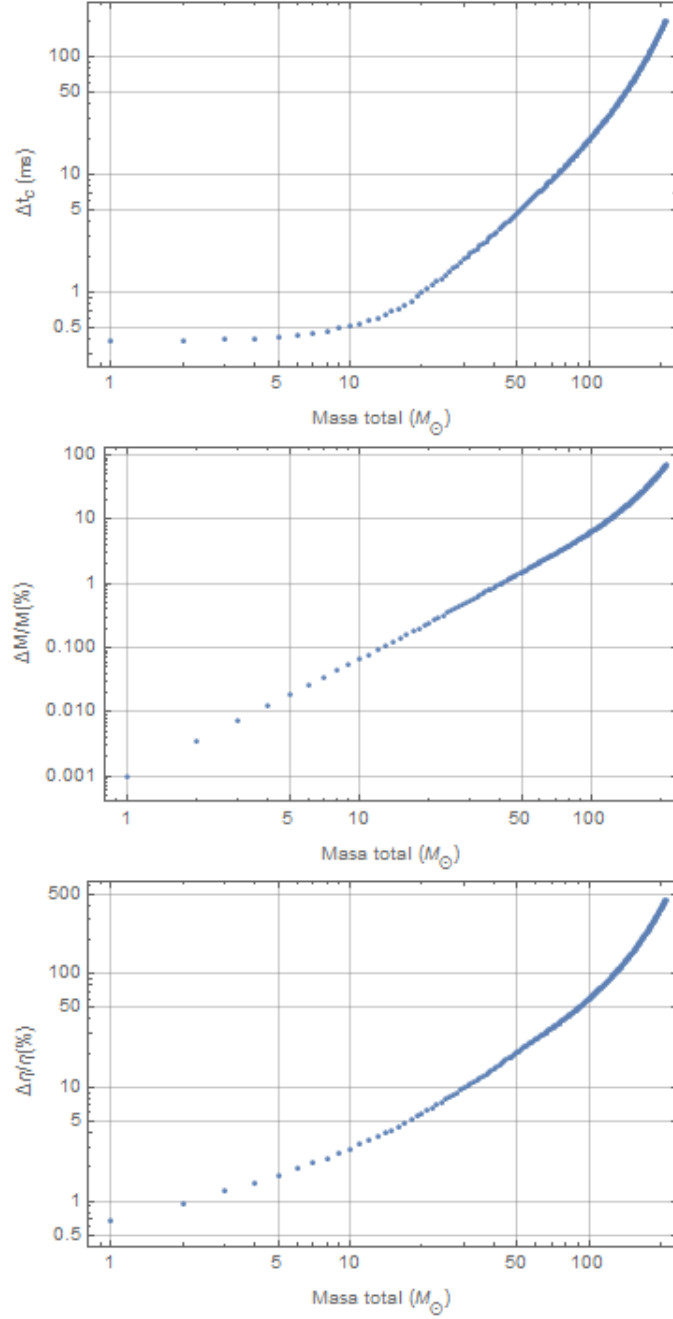


Figure 8: Comparación de los errores en la estimación de  $t_c$ ,  $M$  y  $\eta$ , respectivamente, para un sistema binario de agujeros negros de masas iguales en la fase *inspiral* para el detector *Advanced LIGO* y un  $SNR = 10$ .



En la **Tabla 1** se puede ver el cálculo de dicho coeficiente para sistemas binarios de masas  $1.4 - 1.4M_{\odot}$ ,  $10 - 10M_{\odot}$  y  $1.4 - 10M_{\odot}$ , para diferentes comparaciones de desarrollos post-Newtonianos en la fase.

	Orden (PN) ( $PN_h - PN_u$ )	$m_1 - m_2$		
		$1.4 - 1.4M_{\odot}$	$10 - 10M_{\odot}$	$10 - 1.4M_{\odot}$
<i>Overlap</i>	2 - 1.5	0.0006024	0.1314320	0.0171439
<i>Overlap</i>	2.5 - 2	0.0425345	0.0382258	0.0040132
<i>Overlap</i>	3 - 2	0.0624876	0.4915650	0.0201474
<i>Overlap</i>	3 - 2.5	0.0112587	0.0397903	0.0319564
<i>Overlap</i>	3.5 - 2	0.0131427	0.0435396	0.0004776
<i>Overlap</i>	3.5 - 2.5	0.4828840	0.8136340	0.1845500
<i>Overlap</i>	3.5 - 3	0.4212020	0.0563625	0.0028477

Table 1: *Overlap* para sistemas binarios compactos de dos agujeros negros, en tres casos de masas totales diferentes, en el que los parámetros  $\theta$  son iguales para las dos ondas, pero no el desarrollo PN en la fase. Esto último viene determinado por la columna del orden (PN)

Tal y como se puede ver, los valores obtenidos están bastante lejos de la unidad. Esto quiere decir que la onda  $h$  y la onda  $u$  son bastante diferentes. Pero, ¿Cómo es esto posible si la masa total,  $t_c$ ,  $\phi_c$ , y el resto de parámetros  $\lambda$  son iguales?, ¿Tanto afecta ir eliminando términos PN de la fase del modelo de la onda? La respuesta, mirando los resultados, es sí. Esto se debe a que eliminar términos de la fase, que dependen de la frecuencia, modifica el integrando de la ecuación, ya que  $\cos(\Xi_h(f) - \Xi_u(f))$  provoca que esta pueda ser más oscilante o menos. Esta oscilación hace que la integral no converja, es decir, que de tantas oscilaciones el área que hay debajo de la curva vaya eliminándose, dando el caso en que es casi nulo.

Para ver esto, se puede realizar una representación de la diferencia de fase  $\Xi_h(f) - \Xi_u(f)$  y del  $\cos[\Xi_h(f) - \Xi_u(f)]$ . En la Figura 9 se representan estas funciones para el caso en que la onda  $h$  tiene la fase hasta orden 3.5PN y la onda  $u$  hasta orden 2.5PN. En cambio, en la Figura 10 se representan estas funciones para el sistema de masas  $10 - 10M_{\odot}$  en los casos de órdenes 3.5-2.5PN y 3.5-3PN.

Fijándose en la Figura 9 se observa que los valores del *Overlap*, que se muestran en la **Tabla 1**, más grandes se obtienen cuando el  $\cos(\Xi_h(f) - \Xi_u(f))$  es más estable, tal y como se comentó antes. Esto se produce debido a que la diferencia de fases  $\Xi_h(f) - \Xi_u(f)$  va estabilizándose a un valor, evitando que el coseno siga oscilando y también se estabilice. Esto pasa en los casos, tal y como se ve en la figura, para los sistemas de masas  $1.4 - 1.4M_{\odot}$  y  $10 - 10M_{\odot}$ . Sin embargo, para el caso de masas  $10 - 1.4M_{\odot}$ , debido a que la fase va creciendo indefinidamente, el coseno va oscilando indefinidamente, anulando los valores de la integral.

Por otro lado, mirando la Figura 10 se observa que el caso de los desarrollos PN en la fase de 3.5-2.5PN el coseno es más estable, no oscila tanto como el otro caso de 3.5-3PN, haciendo que el *Overlap* sea mucho más grande que el otro. Esto se produce debido a que en el primer caso la diferencia de fases  $\Xi_h(f) - \Xi_u(f)$  va disminuyendo y tendiendo a un valor a medida que la frecuencia aumenta, mientras que en el otro caso va aumentando indefinidamente, tal y como se comentó en la discusión de la Figura 9.

Como se puede observar, los resultados obtenidos del *Overlap*, es decir, de la comparación de las dos ondas con diferentes desarrollos post-Newtonianos en la fase, son bastante bajos.

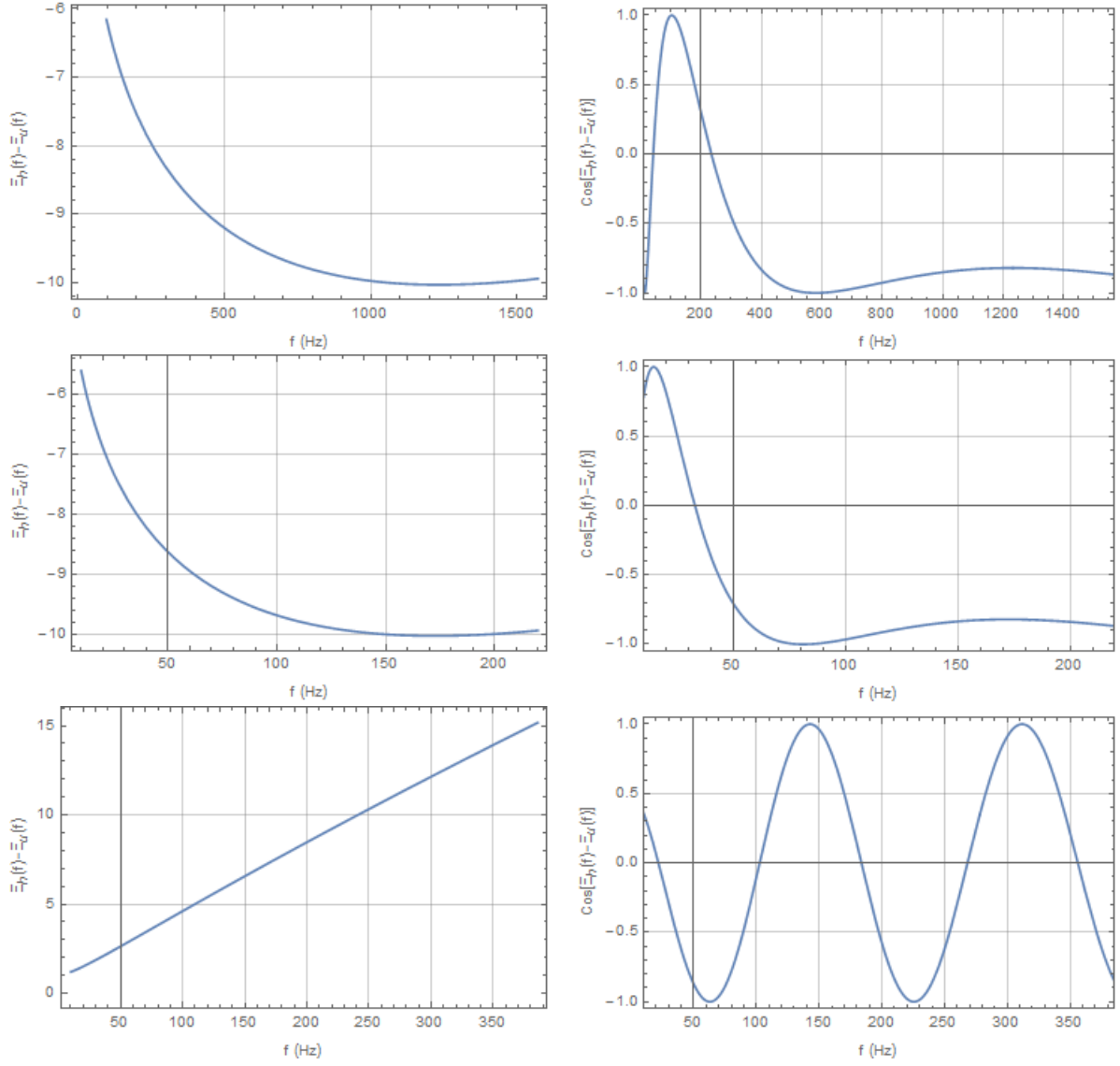


Figure 9: Representación de  $\Xi_h(f) - \Xi_u(f)$  y de  $\cos[\Xi_h(f) - \Xi_u(f)]$  para el sistema binario compacto en el caso donde los órdenes de expansión post-Newtonianos son 3,5PN para la onda  $h$  y 2,5PN para la  $u$ . Se ver representados los casos de masas  $1.4 - 1.4M_\odot$ ,  $10 - 10M_\odot$  y  $10 - 1.4M_\odot$ , respectivamente

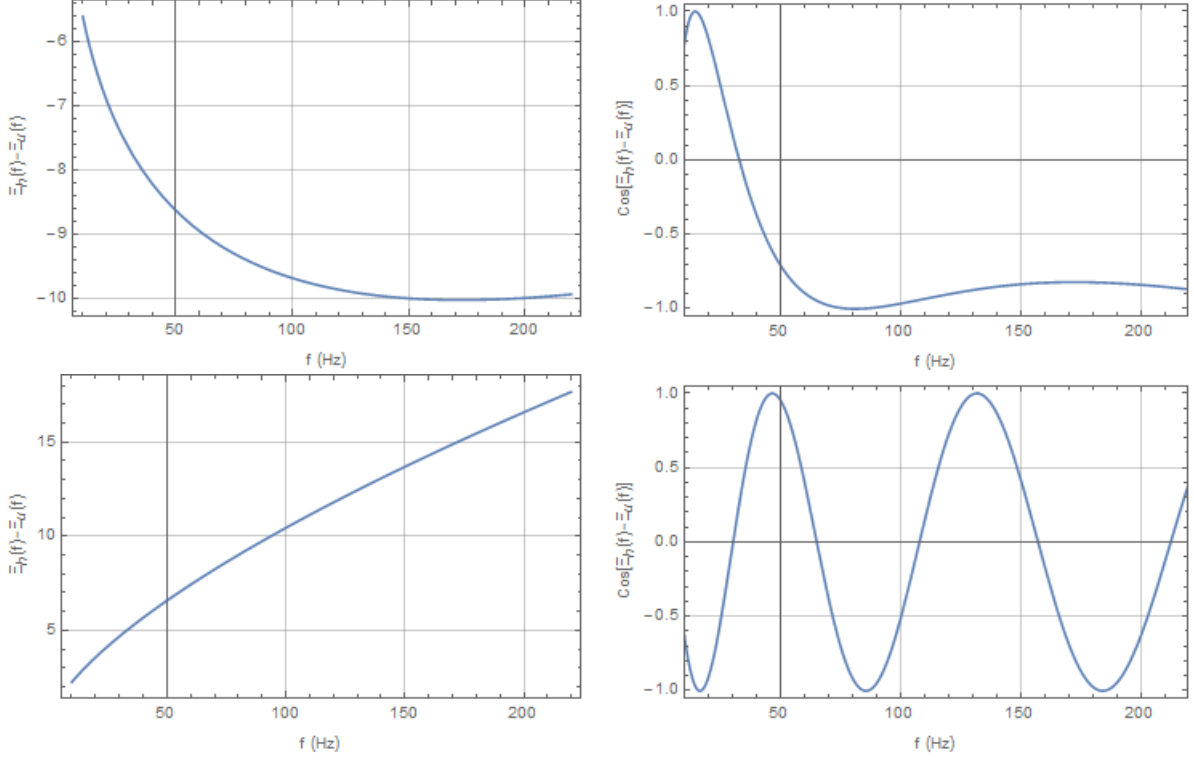


Figure 10: Representación de  $\Xi_h(f) - \Xi_u(f)$  y de  $\cos[\Xi_h(f) - \Xi_u(f)]$  para el sistema binario compacto de masas:  $10 - 10M_\odot$  en el caso donde los órdenes de expansión post-Newtonianos son 3,5PN para la onda  $h$  en los dos casos y 2,5PN y 3PN en la  $u$ , respectivamente

Ahora bien, estos números se pueden mejorar haciendo uso del *Fitting Factor*, ecuación (40). Esta permite una mayor libertad a los parámetros de la onda  $u$ , que ahora si funciona como una plantilla que se ha de adaptar de la mejor manera posible a la onda  $h$ . Para realizar esto, el *Fitting Factor* busca el máximo del *Overlap* respecto a aquellos parámetros que se les deja libertad de la plantilla  $u$ .

En este trabajo, se ha realizado un estudio de este valor dejando libertad a la masa total del sistema  $m$  de la plantilla. Por lo tanto, ahora, la onda  $u$  es una familia de ondas que contienen el resto de parámetros iguales, pero con una masa que se adaptará de la mejor manera posible a la onda  $h$ , teniendo en cuenta que su desarrollo post-Newtoniano de la fase es diferente.

En la **Tabla 2** se pueden ver los resultados obtenidos realizando dicho estudio para los casos de sistemas binarios de masas iguales de los dos objetos  $1.4 - 1.4M_\odot$  y  $10 - 10M_\odot$ , ya que son los que mejor resultado se obtienen sin variar la masa.

Mediante los resultados obtenidos en la **Tabla 2** se puede observar que se han mejorado mucho los números obtenidos de la comparación frente al caso donde no se variaba la masa total de la plantilla  $u$  en la **Tabla 1**. Hay bastantes casos donde la mejora es muy apreciable, donde pasa de ser casi 0 a alcanzar valores cercanos y superiores a 0.5.

Un caso que llama bastante la atención es el cambio del *Overlap* para el sistema  $1.4 - 1.4M_\odot$  en el caso en que la onda  $h$  tiene un desarrollo hasta orden 3PN en la fase, y la onda  $u$ , la plantilla, hasta orden 2PN. En este caso el valor pasa de ser 0.0624876 a 0.852161. Si se realiza la representación del *Overlap* en función de la masa total de la plantilla  $u$  para este ejemplo, se obtiene la Figura 11.

Mirando la Figura 11 se puede ver que hay un pico en el *Overlap*, este es el *Fitting Factor* obtenido en la **Tabla 2**. Si se mira con detenimiento, el caso en que la masa fuera

	Orden (PN) ( $\text{PN}_h - \text{PN}_u$ )	$m_1 - m_2$	
		$1.4 - 1.4M_\odot$	$10 - 10M_\odot$
<i>FF</i>	2 – 1.5	0.491994	0.637822
<i>FF</i>	2.5 – 2	0.490665	0.5196
<i>FF</i>	3 – 2	0.852416	0.567366
<i>FF</i>	3 – 2.5	0.555039	0.394533
<i>FF</i>	3.5 – 2	0.517337	0.586946
<i>FF</i>	3.5 – 2.5	0.609282	0.892755
<i>FF</i>	3.5 – 3	0.561287	0.43692

Table 2: *Fitting Factor* para sistemas binarios compactos de dos agujeros negros, en los casos de masas iguales en los dos objetos, en el que la masa total de la plantilla  $u$  tiene libertad, pero con un desarrollo PN en la fase es diferente frente a la onda  $h$ . Esto último viene determinado por la columna del orden (PN)

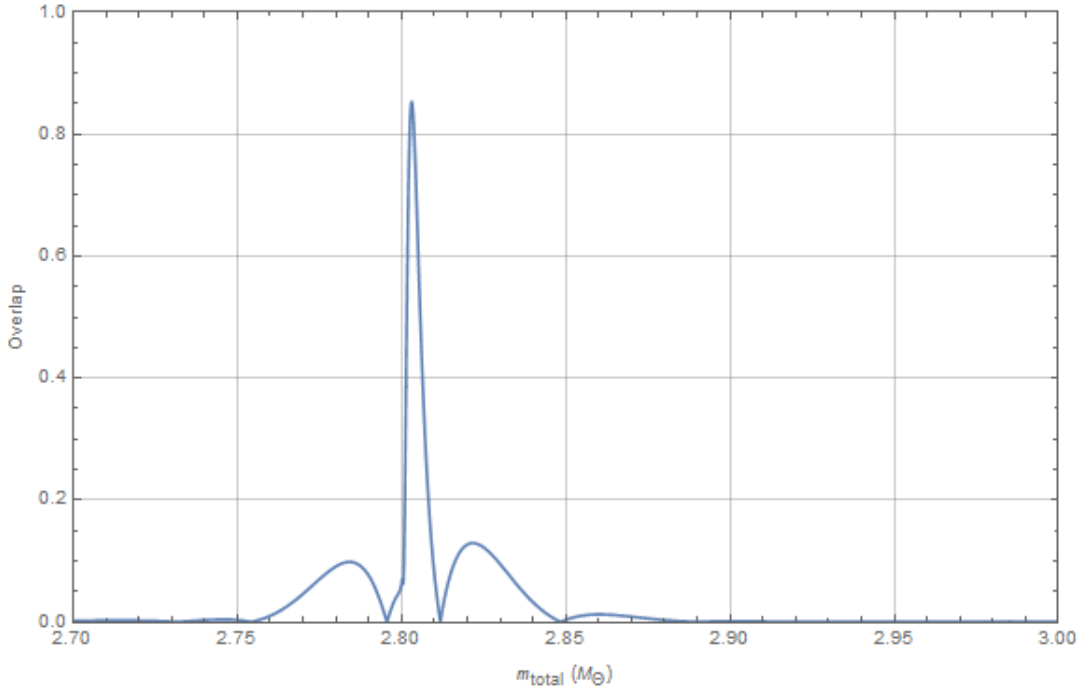


Figure 11: Representación del *Overlap* en función de la masa total de la plantilla  $u$  para un sistema binario compacto de dos agujeros negros de masas  $1.4 - 1.4M_\odot$  en el caso en que la onda  $h$  tiene un desarrollo 3PN en la fase, y la plantilla  $u$ , con masa variable, un desarrollo 2PN

igual, que sería lo correcto, el valor del *Overlap* es muy bajo, no llega a 0.1, tal y como se ha obtenido en la **Tabla 1**. Sin embargo, variándola un poco, no más de  $0.005M_{\odot}$ , el valor se dispara sobrepasando los 0.8, tal y como se ha obtenido en la **Tabla 2**. Exactamente, el valor obtenido para la masa total del sistema, que ha dado este *Fitting Factor*, ha sido de  $2.80305M_{\odot}$ , frente a los  $2.8M_{\odot}$  teóricos.

Esto demuestra que dejando un poco de libertad a uno de los parámetros de la plantilla  $u$ , como en este caso de la masa total, el valor que se puede obtener del *Overlap* cambia bastante, aunque la variación de dicho parámetro sea pequeña. Por lo tanto, si uno dejase más variación a un mayor número de parámetros  $\theta$ , el valor del *Overlap* máximo, es decir, el *Fitting Factor*, podría mejorarse.

## 5 Conclusiones

Primero de todo, se ha podido observar cómo el error al estimar diferentes parámetros de una señal de una onda gravitacional va aumentando en función de la masa del sistema binario de agujeros negros del que provenga. Por lo tanto, si se quiere estimar los parámetros de una onda gravitacional detectada con un interferómetro terrestre como el *Advanced LIGO*, es mejor que la onda recibida sea de una masa total no muy grande, es decir, que no se acerque al límite de la masa, ya que la estimación que se obtendría no sería muy buena.

Por otro lado, también se ha podido observar cómo la consideración de diferentes órdenes de desarrollo post-Newtonianos de la fase de la plantilla afecta al *Overlap* de manera considerable. Por lo tanto, es importante tener en cuenta qué factores considerar a la hora de situarse en un caso real, ya que si se considera que la señal detectada es de un orden 3PN, por ejemplo, el *fitting* se haría mejor con una familia de ondas con la fase hasta un desarrollo 2PN que 2.5PN. Finalmente, también se ha visto que dejando libertad a más parámetros  $\theta$ , como por ejemplo la masa total, mejora considerablemente el *Overlap*. Así pues, se puede concluir que si se dejase más libertad a otros parámetros el máximo valor del *Overlap* entre dos ondas, que correspondería al *Fitting Factor*, mejoraría bastante, que correspondería a una mayor facilidad al detectar la onda  $h$ . Ahora bien, el problema de dejar más libertad entre los parámetros de la familia de ondas es que la estimación del parámetro que se varía baja, tal y como se ha comentado anteriormente. Sin embargo, se ha visto que dicha variación es pequeña, como el caso del ejemplo en que se estimaba que la masa era  $2.80305M_{\odot}$  en vez de  $2.8M_{\odot}$ . Por lo tanto, resulta conveniente dejar una mayor libertad a la familia de ondas ya que puede llegar a mejorar considerablemente la detección de una señal  $h$  estimando con menos precisión los parámetros.

## References

- [1] J. M. WEISBERG y J. H. TAYLOR, *Observations of Post-Newtonian Timing Effects in the Binary Pulsar PSR 1913+16*, Phys. Rev. Lett. **52**, (1984).
- [2] Advanced LIGO, <https://www.advancedligo.mit.edu/>
- [3] THE LIGO SCIENTIFIC COLLABORATION AND THE VIRGO COLLABORATION, *Properties of the binary black hole merger GW150914*, (2016)
- [4] Data release for event GW150914, <https://losc.ligo.org/events/GW150914/>
- [5] J. CALDERÓN, *Sub-dominant modes of the gravitational radiation from compact binary coalescences*, Doctoral thesis, (2015)
- [6] L. LANDAU y E. LIFSHITZ, *the Classical Theory of Fields* (hay que insertar la edición), **Vol. 2**
- [7] Investigación y ciencia, <http://www.investigacionyciencia.es/blogs/astronomia/17/posts/ligo-detecta-por-primera-vez-las-ondas-gravitacionales-emitidas-en-la-fusin-de-dos-agujeros-negros-13955>
- [8] KAZUAKI KURODA, WEI-TOU NI y WEI-PING PAN, *Gravitational waves Classification, Methods of detection, Sensitivities and Sources*, Center for Gravitation and Cosmology (2015)
- [9] A. M. CRUISE y R. M. INGLEBY, *Class Quantum Grav.* **23** (2006) 6185
- [10] T. AKUTSU ET AL., Phys Rev. Lett. **101** (2008) 101101
- [11] F. ACERNESE ET AL., *Class. Quantum Grav.* **25** (2008) 205007
- [12] L. GOTTARDI ET AL. Phys Rev. **D75** 022002 (2007)
- [13] O. D. AGUIAR ET AL. *The Schenberg spherical gravitational wave detector: the first commissioning runs*, *Class. Quantum Grav.*, **25** (2008) 114042
- [14] The LIGO Scientific Collaboration, <https://www.ligo.caltech.edu/>
- [15] The Virgo Collaboration, [www.virgo.infn.it/](http://www.virgo.infn.it/)
- [16] The GEO600 Team, [www.geo600.org/](http://www.geo600.org/)
- [17] TAMA300 Collaboration, [tamago.mtk.nao.ac.jp/](http://tamago.mtk.nao.ac.jp/)
- [18] The Advanced Virgo Team, [/www.cascina.virgo.infn.it/advirgo/](http://www.cascina.virgo.infn.it/advirgo/)
- [19] KAGRA/LCGT Team, [gwcenter.icrr.u-tokyo.ac.jp/en/](http://gwcenter.icrr.u-tokyo.ac.jp/en/)
- [20] Einstein Telescope, [www.et-gw.eu/](http://www.et-gw.eu/)
- [21] J.W. ARMSTRONG, L. IESS, P. TORTORA, y B. BERTOTTI, *Stochastic Gravitational Wave Background: Upper Limits in the  $10^{26}$  to  $10^{23}$  Hz Band* Astrophys. J., **599** (2003) 102003

- [22] The LISA Project, [lisa.nasa.gov/](http://lisa.nasa.gov/)
- [23] eLISA, <https://www.elisascience.org/>
- [24] WEI-TOU NI, *ASTROD and ASTROD I - Overview and progress*, Int. J. Mod. Phys. D **17**, 921 (2008)
- [25] WEI-TOU NI, *ASTROD-GW: Overview and progress*, Int. J. Mod. Phys. D **22**, 1341004 (2013)
- [26] R. HELLINGS y G. DOWNS, *Upper limits on the isotropic gravitational radiation background from PTAs* Astrophys J. **265** (1983) L39
- [27] European PTAs, [www.astron.nl/stappers/epta/doku.php](http://www.astron.nl/stappers/epta/doku.php)
- [28] NANOGrav, [nanograv.org/](http://nanograv.org/)
- [29] The Parkes PTA, [www.atnf.csiro.au/research/pulsar/ppta/](http://www.atnf.csiro.au/research/pulsar/ppta/)
- [30] International Pulsar Timing Array, [www.ipta4gw.org/](http://www.ipta4gw.org/)
- [31] LUCÍA SANTAMARÍA LARA, *Coalescence of black-hole binaries: from theoretical source models to applications in gravitational-wave astronomy*, Tesis doctoral, (2010)
- [32] ECHEVARRIA F Phys. Rev. D **40** 3194 (1988)
- [33] CUTLER C y FLANAGAN E E, Phys. Rev. D **46** 2658 (1994)
- [34] K.S. THORNE, *300 Years of Gravitation*, editado por S.W. HAWKING y W. ISRAEL (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1987), p. 330
- [35] L.S. FINN, *Detection, measurement and gravitational radiation*, Phys. Rev. D **46**, 5236 (1992)
- [36] L. BLANCHET, B.R. IYER, C.M. WILL and A.G. WISEMAN, *Gravitational wave forms from inspiralling compact binaries to second-post-Newtonian order*, Class. Quant. Grav. **13**, 575 (1996)
- [37] MANUEL LUNA y ALICIA SINTES, *Parameter estimation of compact binaries using the inspiral and ringdown waveforms*, Class. Quant. Grav. **23** 3763-3782 (2006)
- [38] T.A. APOSTOLATOS, *Search templates for gravitational waves from precessing, inspiraling binaries*, Phys. Rev. D **52**, 605 (1995)
- [39] B.S. SATHYAPRAKASH y BERNARD F. SCHUTZ, *Physics, Astrophysics and Cosmology with Gravitational Waves*, Living Rev. Relativity., **12**, (2009)
- [40] K. G. ARUN, BALA R IYER, B. S. SATHYAPRAKASH, y PRANESH A SUNDARARAJAN, *Parameter estimation of inspiralling compact binaries using 3.5 post-Newtonian gravitational wave phasing: The nonspinning case*, Phys. Rev. D **71**, 084008 (2005)
- [41] ALICIA M. SINTES y ALBERTO VECCHIO, *Detection of gravitational waves from inspiraling compact binaries using non-restricted post-Newtonian approximations*, (1999)

- [42] ALESSANDRA BUONANNO, BALA IYER, EVAN OCHSNER, YI PAN y B. S. SATHYAPRAKASH, *Comparison of post-Newtonian templates for compact binary inspiral signals in gravitational-wave detectors*, Phys. Rev. D **80**, 084043 (2009)